

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ 04/2019

Нестационарная задача дифракции волн точечного
источника на границе раздела двух полуплоскостей с
положительной эффективной кривизной

Андрей А. Мацковский, Герман Л. Заворохин

2 октября, 2019

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки 27, Санкт-Петербург, 191023, Россия,
e-mail: androbasrm@rambler.ru,
e-mail: zavorokhin@pdmi.ras.ru

Аннотация. В работе рассматривается нестационарная задача дифракции волн, возбужденных точечным источником, на границе раздела двух акустических сред с положительной эффективной кривизной. Это эталонная задача, моделирующая волновые процессы, возникающие вблизи дна океана в приближении моделью “жидкого дна”. Используя технику комплексного анализа, нами предложен метод нахождения точного решения исследуемого класса задач. Построено интегральное представление точного решения поставленной эталонной задачи.

Ключевые слова: дифракция волн, точечный источник, головная волна интерференционного типа, волны шепчущей галереи, асимптотический анализ, головная волна Буддырева, акустика океана.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of St.Petersburg Department
of Steklov Mathematical Institute

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик,
М. А. Всемирнов, А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов,
Л. Ю. Колотилина, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич,
Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин

1 Введение

Данная тематика восходит к работам 1960-х годов В. С. Булдырева и А. И. Ланина [1, 2, 3], в которых были проведены теоретические исследования волн, сосредоточенных вблизи границ раздела различных сред. Впоследствии В. С. Булдырев получил формулы, описывающие так называемую головную волну интерференционного типа (мы будем называть ее “*волной Булдырева*”). В отличие от классической головной волны волна Булдырева обладает структурной устойчивостью (аналитическое поведение этой волны не изменяется) по отношению к столь угодно малым деформациям границы раздела сред.

Используя методы асимптотического анализа, были изучены свойства волны Булдырева при помощи метода пограничного слоя, чему посвящены работы В. М. Бабича [4, 5, 6].

Для стационарного случая В. М. Бабичем и А. А. Мацковским проведены исследования для апробации общих формул В.С. Булдырева на частном примере точно решаемой задачи [7, 8], а также исследованы структура и взаимное расположение волновых фронтов волн шепчущей галереи и волны Булдырева [9]. В работе [10] В. М. Бабичем и А. А. Мацковским с использованием энергетических соображений найдена асимптотика волны Булдырева для падающей волны, заданной своим геометро-оптическим разложением, а также доказано отсутствие противоречий между принципом локальности и формулами, полученными в работах В. С. Булдырева.

В настоящей работе рассматривается задача (нестационарный случай) дифракции волн, возбужденных точечным источником, на границе раздела двух акустических сред с положительной эффективной кривизной (см. [1, 3]). Это эталонная задача, моделирующая волновые процессы, возникающие вблизи дна океана в приближении моделью “жидкого дна”. Используя технику комплексного анализа, мы предложили методику нахождения точного решения исследуемого класса задач. Построено интегральное представление точного решения поставленной эталонной задачи.

2 Постановка задачи

Рассмотрим двумерную нестационарную акустическую задачу дифракции (см. Рис. 1).

Предположим, что Ω_1 и Ω_2 – две полуплоскости, заполненные акустической средой, имеющей в этих областях различные характеристики. В области Ω_1 скорость распространения волн постоянна и равна c_1 . В области Ω_2 скорость распространения волн меняется с глубиной z , т.е. $c_2 = c(z)$ и $c_2(z) = \frac{c_1}{\sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 z}}$, где $0 < \alpha_1 < 1$, $\alpha_2 > 0$.

Будем исследовать в областях Ω_1 и Ω_2 соответствующие волновые поля $u_1(x, z, t)$ и $u_2(x, z, t)$, удовлетворяющие волновым уравнениям

$$\Delta u_1 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = -\delta(x - x_0)\delta(z - z_0)f(t), \quad z > 0, \quad (1)$$

$$\Delta u_2 - \frac{1}{c_2^2(z)} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = 0, \quad z < 0, \quad (2)$$

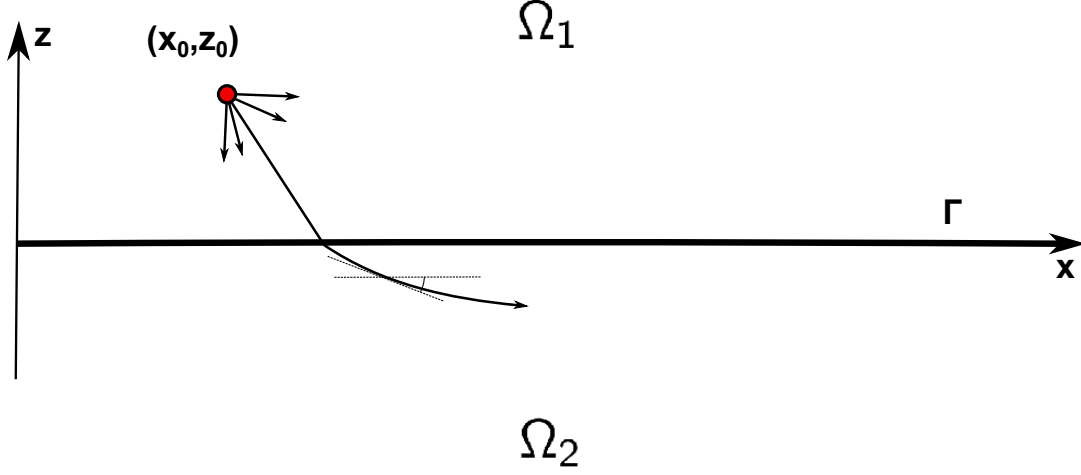


Рис. 1: Постановка задачи.

а также граничным условиям непрерывности волнового поля и его нормальной производной при $z = 0$:

$$u_1(x, 0, t) = u_2(x, 0, t), \quad \frac{\partial u_1}{\partial z}(x, 0, t) = \frac{\partial u_2}{\partial z}(x, 0, t), \quad (3)$$

при этом при $t < 0$ волновой процесс отсутствует:

$$u_i(x, z, t)|_{t < 0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_i, \quad i = 1, 2.$$

3 Точное решение задачи

Для решения поставленной задачи (1)-(3) мы проделаем серию формальных выкладок, доказательство правомерности которых мы опустим.

Преобразуем по Фурье по переменным x и t систему уравнений (1), (2) ($(x, t) \rightarrow (\varkappa, \omega)$, $f(t) \rightarrow \hat{f}(\omega)$, $u_{1,2}(x, z, t) \rightarrow \hat{u}_{1,2}(\varkappa, z, \omega)$):

$$\hat{u}_1'' + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} - \varkappa^2\right)\hat{u}_1 = -\delta(z - z_0)\hat{f}(\omega), \quad z > 0, \quad (4)$$

$$\hat{u}_2'' + \left(\frac{\omega^2}{c_1^2}(\alpha_1 + \alpha_2 z) - \varkappa^2\right)\hat{u}_2 = 0, \quad z < 0. \quad (5)$$

Мы положили в (4) $x_0 = 0$ для определенности. Система граничных условий (3) будет иметь вид

$$\hat{u}_1(\varkappa, 0, \omega) = \hat{u}_2(\varkappa, 0, \omega), \quad \hat{u}_1'(\varkappa, 0, \omega) = \hat{u}_2'(\varkappa, 0, \omega). \quad (6)$$

Здесь и далее штрих “ ’ ” обозначает дифференцирование по переменной z . Потребуем выполнения условий излучения при $z \rightarrow \pm\infty$ в преобразованной задаче (4)-(6).

В области $z > 0$ общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения тривиально и имеет вид

$$\hat{u}_1^{hom} = c_1(\varkappa, \omega) e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \varkappa^2} z} + c_2(\varkappa, \omega) e^{-i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \varkappa^2} z}. \quad (7)$$

Несложно показать, что волновое поле, генерируемое точечным источником излучения, имеет вид

$$\hat{u}_{inc} = -\frac{e^{i|z-z_0|\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \varkappa^2}}}{2i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \varkappa^2}} \hat{f}(\omega). \quad (8)$$

В итоге имеем

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_1^{hom} + \hat{u}_{inc}. \quad (9)$$

Для решения дифференциального уравнения (5) в нижней полуплоскости сделаем две замены переменных:

$$z \rightarrow p : p = \frac{\omega^2}{c_1^2} \alpha_2 z - (\varkappa^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2} \alpha_1),$$

$$p \rightarrow q : q = -p(\frac{\omega^2}{c_1^2} \alpha_2)^{2/3}.$$

В результате уравнение (5) преобразуется в следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_2}{\partial q^2} - q \hat{u}_2 = 0, \quad \hat{u}_2 = \hat{u}_2(\varkappa, q, \omega). \quad (10)$$

Уравнение (10) носит название уравнения Эйри. Переходя обратно к переменной z , получаем общее решение в области $z < 0$:

$$\hat{u}_2 = a(\varkappa, \omega) w_1(\tau) + b(\varkappa, \omega) w_2(\tau), \quad (11)$$

где

$$\tau = \tau(\varkappa, z, \omega), \quad \tau = -\left(\frac{c_1^2}{\omega^2 \alpha_2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} (\alpha_1 + \alpha_2 z) - \varkappa^2\right).$$

Здесь w_1 и w_2 – функции в определении В. А. Фока, см. [11]. Неизвестные функции c_1 , c_2 , a , b переменных \varkappa и ω определим, потребовав выполнения соответствующих граничных условий, а также условий излучения при $|z| \rightarrow \infty$. Условие излучения при $z \rightarrow +\infty$ дает $c_2 = 0$. Пусть ω – вещественна и положительна. Устремим $z \rightarrow -\infty$. Тогда $\tau \rightarrow +\infty$ и, следовательно, для выполнения условий излучения при $z \rightarrow -\infty$ необходимо, чтобы $a = -b$, поскольку при $\tau \rightarrow +\infty$ и $w_1(\tau)$, и $w_2(\tau)$ экспоненциально возрастают, а их линейная комбинация $w_1(\tau) - w_2(\tau) = 2iv(\tau)$ является экспоненциально убывающей функцией [11].

Решение в области $z < 0$ представляет собой обратное преобразование Фурье по \varkappa и ω от функции \hat{u}_2 , причем интегрирование по переменной ω происходит по всей вещественной оси. Таким образом, условие $a = b$ является необходимым, но не

достаточным условием выполнения условий излучения, так как обеспечивает лишь убывание \hat{u}_2 при $z \rightarrow -\infty$ в случае $\omega > 0$. Функция $\tau(\varkappa, z, \cdot)$ является многозначной функцией в силу того, что имеет точку ветвления $\omega = 0$. Для определенности будем считать, что ветвь функции $\tau(\varkappa, z, \cdot)$ выбрана так, что $\omega^{2/3} > 0$ при $\omega > 0$, а соответствующий разрез – луч на вещественной оси $(-\infty, 0)$. Предположим, что при интегрировании по ω мы будем обходить разрез сверху (в области $\text{Im } \omega > 0$), тогда при $z \rightarrow -\infty$ имеем $\tau \sim c_1^{-2/3} \alpha_2^{1/3} \omega^{2/3} |z|$, $\arg \omega^{2/3} = \frac{2\pi}{3}$, следовательно, $|\tau| \rightarrow \infty$ и $\arg \tau = \frac{2\pi}{3}$. Из асимптотических свойств функции Эйри следует, что функция $w_2(\tau)$ экспоненциально убывает в области $\frac{\pi}{3} < \arg \tau < \pi$, $|\tau| \rightarrow \infty$, а функция $w_1(\tau)$ экспоненциально возрастает в указанной области. Следовательно, при $a \neq 0$ и таком выборе ветвей и обхода особенности $\omega = 0$ при интегрировании часть обратного интеграла Фурье по переменной ω в области $\omega < 0$ будет расти экспоненциально при $z \rightarrow -\infty$, что противоречит условиям излучения. При обходе разреза снизу (в области $\text{Im } \omega < 0$) $\arg \tau = -\frac{2\pi}{3}$ и $|\tau| \rightarrow \infty$ при $\text{Re } \omega < 0$ и $z \rightarrow -\infty$. Но в таком случае из асимптотических свойств функций Эйри следует, что функция $w_1(\tau)$ экспоненциально убывает, а $w_2(\tau)$ возрастает. В результате снова условия излучения не выполняются.

Для удовлетворения условиям излучения сделаем ряд преобразований. Представим функцию $\tau(\varkappa, z, \omega)$ в виде:

$$\tau = - \left(\frac{c_1^2}{\omega^2 \alpha_2} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} \alpha_1 - \varkappa^2 \right) - \frac{\alpha_2^{1/3}}{c_1^{2/3}} \omega^{2/3} z,$$

или

$$\tau = g_1(\varkappa, \omega) + g_2(\varkappa, \omega)z.$$

Пусть $0 < \varepsilon \ll 1$. Вместо решения

$$\hat{u}_2 = a w_1(\tau) - a w_2(\tau)$$

рассмотрим функцию

$$\hat{u}_2 = a w_1(\tau^-) - a w_2(\tau^+), \quad (12)$$

где

$$\tau^\pm = g_1(\varkappa, \omega \pm i\varepsilon) + g_2(\varkappa, \omega \pm i\varepsilon)z.$$

Преобразование Фурье от функций \hat{u}_2^ε по переменной ω автоматически удовлетворяет условиям излучения. Действительно, при $z \rightarrow -\infty$ имеем $\tau^\pm \sim g_2(\varkappa, \omega \pm i\varepsilon)z$ и в силу $\varepsilon > 0$ особенность $\omega = 0$ функции τ^+ обходится сверху (в области $\text{Im } \omega > 0$), а функции τ^- – снизу (в области $\text{Im } \omega < 0$). Тогда $\arg \tau^+ \sim \frac{2\pi}{3}$, $\arg \tau^- \sim -\frac{2\pi}{3}$, $|\tau^\pm| \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow -\infty$, поэтому $w_1(\tau^-)$ и $w_2(\tau^+)$ экспоненциально убывают при $z \rightarrow -\infty$.

В дальнейшем идея состоит в том, чтобы “сшить” формальное решение \hat{u}_2^ε в области $z < 0$ с решением \hat{u}_1 (т.е. надо удовлетворить граничным условиям (6) при $z = 0$), а затем решение исходной задачи (1)-(3) представить в виде: в области $z < 0$

$$u_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_2^\varepsilon,$$

в области $z > 0$

$$u_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_1^\varepsilon.$$

Найдем неизвестные функции $c_1(\kappa, \omega)$ и $a(\kappa, \omega)$. Из условий непрерывности волнового поля и его нормальной производной (6) следует

$$c_1 - \frac{e^{iz_0\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \kappa^2}}}{2i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \kappa^2}} \hat{f}(\omega) = a\{w_1(g_1(\kappa, \omega - i\varepsilon)) - w_2(g_1(\kappa, \omega + i\varepsilon))\}, \quad (13)$$

$$c_1 i \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \kappa^2} + \frac{1}{2} e^{iz_0\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \kappa^2}} \hat{f}(\omega) = a\{g_2(\kappa, \omega - i\varepsilon)w_1'(g_1(\kappa, \omega - i\varepsilon)) - g_2(\kappa, \omega + i\varepsilon)w_2'(g_1(\kappa, \omega + i\varepsilon))\}. \quad (14)$$

Имеем

$$a(\kappa, \omega, \varepsilon) = \frac{\hat{f}(\omega) e^{iz_0\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \kappa^2}}}{g_2^- w_1'(g_1^-) - g_2^+ w_2'(g_1^+) + i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \kappa^2}(w_1(g_1^-) - w_2(g_1^+))}. \quad (15)$$

Здесь $g_j^\pm = g_j(\kappa, \omega \pm i\varepsilon)$, $j = 1, 2$.

В результате положим

$$u_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} d\kappa d\omega e^{i\kappa x - i\omega t} \frac{A_\varepsilon(\kappa, \omega, z)}{D_\varepsilon(\kappa, \omega)}, \quad (16)$$

где

$$A_\varepsilon(\kappa, \omega, z) = \hat{f}(\omega) e^{iz_0\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \kappa^2}} (w_1(\tau^-) - w_2(\tau^+)),$$

$$D_\varepsilon(\kappa, \omega) = g_2^- w_1'(g_1^-) - g_2^+ w_2'(g_1^+) + i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \kappa^2} (w_1(g_1^-) - w_2(g_1^+)).$$

По построению функции $w_1(g_1^-)$, $w_2(g_1^+)$ экспоненциально растут при $\omega \rightarrow \pm\infty$, а $w_1(\tau^-)$, $w_2(\tau^+)$ экспоненциально убывают при $\omega \rightarrow \pm\infty$, если $z < -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$. При $-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < z < 0$ функции $w_1(\tau^-)$ и $w_2(\tau^+)$ имеют порядок

$$e^{|\omega|^{2/3} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 z}{(\alpha_2 c_1)^{2/3}}},$$

тогда как $w_1(g_1^-)$ и $w_2(g_1^+)$ – порядок

$$e^{|\omega|^{2/3} \frac{\alpha_1}{(\alpha_2 c_1)^{2/3}}}.$$

Таким образом, отношение

$$\frac{A_\varepsilon}{D_\varepsilon} \sim e^{\alpha_2^{1/3} z (\frac{|\omega|}{c_1})^{2/3}}$$

экспоненциально убывает при $\omega \rightarrow \pm\infty$ и $-\frac{\alpha_1}{\alpha_2} < z < 0$. Получаем, что при $\omega \rightarrow \pm\infty$ подынтегральное выражение в (16) экспоненциально убывает при любом $z < 0$ и интеграл в (16) сходится абсолютно.

Для доказательства сходимости предела при $\varepsilon \rightarrow 0$ в (16) к решению задачи (1)-(3) рассмотрим невязку Δ :

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 z)}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_2^\varepsilon. \quad (17)$$

В силу абсолютной сходимости интеграла, представляющего функцию u_2^ε , имеем

$$\Delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} d\kappa d\omega \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 z)}{c_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \frac{A_\varepsilon}{D_\varepsilon} e^{i\kappa x - i\omega t}. \quad (18)$$

Подынтегральное выражение в (18) обозначим $\Delta(\varepsilon)$.

Имеем

$$\Delta(\varepsilon) = e^{i\kappa x - i\omega t} \left(\frac{\omega^2}{c_1^2} (\alpha_1 + \alpha_2 z) - \kappa^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{A_\varepsilon}{D_\varepsilon}, \quad (19)$$

или

$$\Delta(\varepsilon) = \frac{\hat{f}(\omega)}{D_\varepsilon} e^{iz_0 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \kappa^2} + i\kappa x - i\omega t} \times \left[\left(\frac{\omega^2}{c_1^2} (\alpha_1 + \alpha_2 z) - \kappa^2 \right) (w_1(\tau^-) - w_2(\tau^+)) + (g_2^-)^2 \tau^- w_1(\tau^-) - (g_2^+)^2 \tau^+ w_2(\tau^+) \right]. \quad (20)$$

Используя формулу

$$(g_2^\pm)^2 \tau^\pm = -\frac{(\omega \pm i\varepsilon)^2}{c_1^2} (\alpha_1 + \alpha_2 z) + \kappa^2,$$

получим представление

$$\Delta(\varepsilon) = -\frac{\hat{f}(\omega)}{D_\varepsilon} e^{iz_0 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_1^2} - \kappa^2} + i\kappa x - i\omega t} (w_1(\tau^-) - w_2(\tau^+)) \left(\frac{2i\omega}{c_1^2} (\alpha_1 + \alpha_2 z) \varepsilon + o(\varepsilon) \right). \quad (21)$$

Таким образом, ввиду рассмотренных ранее асимптотических свойств функций Эйри $w_1(\tau^-)$, $w_2(\tau^+)$ и функции $D_\varepsilon(\kappa, \omega)$ интеграл в определении невязки Δ (18) сходится абсолютно и равномерно по ε и

$$\Delta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} d\kappa d\omega \Delta(\varepsilon) = 0.$$

Функция $D_\varepsilon = D_\varepsilon(\kappa, \omega, \varepsilon)$ представляет собой функцию комплексных переменных ω и κ , мероморфную по переменной ω в области $\mathbb{C}/\{\omega = 0, \omega = \pm \kappa c_1\}$, имеющую три точки ветвления $\omega = 0$, $\omega = \pm \kappa c_1$. Исследование аналитических свойств $\kappa_\varepsilon(\omega)$ – семейства решений уравнения $D_\varepsilon(\kappa(\omega), \omega, \varepsilon) = 0$ – представляет значительный интерес (см. [12]) для изучения асимптотического поведения волнового поля, порожденного точечным источником в рассматриваемой задаче. Соответствующее исследование является дальнейшей целью авторов настоящей публикации.

Благодарности. Мы весьма признательны В. М. Бабичу за постоянное внимание к нашей работе. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00481 мол-а.

Список литературы

- [1] В. С. Булдырев, *Исследование функции Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре. I*, Журнал выч. матем. и мат. физики, 4, дополнение к № 4, 275–286, 1964.
- [2] В. С. Булдырев, А. И. Ланин, *Исследование функции Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре. II*, Журнал выч. матем. и мат. физики, 6, 90–105, 1966.
- [3] В. С. Булдырев, *Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения*, Изв. ВУЗ. Радиофизика, 10:5, 699–711, 1967.
- [4] V. M. Babich, *Boundary layer approach to describe an interference head wave*, Wave motion, 46, 169–173, 2009.
- [5] В. М. Бабич, *Погранслодный подход к описанию головной волны интерференционного типа*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 422, ПОМИ, СПб., 18–26, 2014.
- [6] V.M. Babich, *On asymptotics of a wave field near the origin of an interference head wave*, Electromagnetics in Advanced Appl., 704–705, 2007.
- [7] А. А. Мацковский, *Коротковолновый точечный источник колебаний вблизи неоднородной полуплоскости*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 409, 107–120, ПОМИ, СПб., 2012.
- [8] А. А. Мацковский, *О волновых фронтах головной волны Булдырева и волн шепчущей галереи*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 426, 140–149, ПОМИ, СПб., 2014.
- [9] А. А. Мацковский, *Головная волна интерференционного типа в задаче дифракции волн точечного источника на неоднородной полуплоскости*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 55:11, 1904–1920, 2015.
- [10] В. М. Бабич, А. А. Мацковский, *Головная волна интерференционного типа (волна Булдырева) и соображения локальности*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 438, 36–45, ПОМИ, СПб., 2015.
- [11] Vasili M. Babic, Vladimir S. Buldyrev, *Short-Wavelength Diffraction Theory: Asymptotic Methods*, Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [12] K. S. Knyazeva, A. V. Shanin, *Transient phenomena in a three-layer waveguide and the analytical structure of the dispersion diagram*, submitted to Wave Motion, arXiv:1704.00265, 2017.