# ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН



Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 3/2019

*К юбилею Нины Николаевны Уральцевой*

# УСРЕДНЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В $\mathbb{R}^d$: ТОЧНОСТЬ РЕЗУЛЬТАТОВ

**М. А. Дородный, Т. А. Суслина**

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: mdorodni@yandex.ru
e-mail: t.suslina@spbu.ru

АННОТАЦИЯ

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный сильно эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ второго порядка. Предполагается, что коэффициенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Получены аппроксимации операторов $\cos(\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\tau)$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\tau)$ по норме операторов, действующих из пространства Соболева $H^s(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ (при подходящем $s$). Для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\tau)$ получена также аппроксимация при учете корректора по $(H^s \to H^1)$-норме. Исследован вопрос о точности результатов относительно типа операторной нормы и относительно зависимости оценок от $\tau$. Результаты применяются к исследованию поведения решений задачи Коши для гиперболического уравнения $\partial_\tau^2\mathbf{u}_\varepsilon = -\mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{F}$.

**Ключевые слова**: периодические дифференциальные операторы, гиперболические уравнения, усреднение, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 17-11-01069).

# Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Обширная литература посвящена задачам усреднения; в первую очередь, укажем монографии [BeLP, BaPa, ZhKO]. Один из методов изучения задач гомогенизации в $\mathbb{R}^d$ — это спектральный метод, основанный на теории Флоке-Блоха; см., например, [BeLP, глава 4], [ZhKO, глава 2], [Se], [Zh1], [COrVa].

0.1. **Класс операторов.** Мы рассматриваем самосопряженные ДО второго порядка, действующие в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающие факторизацию вида

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}). \tag{0.1}$$

Здесь $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$ — $(m\times n)$-матричный ДО первого порядка. Предполагается, что $m \geqslant n$ и символ $b(\boldsymbol{\xi})$ — матрица максимального ранга. Матрицы-функции $g(\mathbf{x})$ (размера $m\times m$) и $f(\mathbf{x})$ (размера $n\times n$) периодичны относительно некоторой решетки $\Gamma$; $g(\mathbf{x})$ положительно определена и ограничена; $f, f^{-1} \in L_\infty$. Удобно сначала изучать более простой класс операторов вида

$$\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{0.2}$$

Многие операторы математической физики допускают запись в виде (0.1) или (0.2); см. [BSu1] и [BSu3, глава 4]. Простейший пример — это оператор акустики $\widehat{\mathcal{A}} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}$.

Введем теперь малый параметр $\varepsilon > 0$ и для всякой $\Gamma$-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ положим $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Рассмотрим операторы

$$\mathcal{A}_\varepsilon = f^\varepsilon(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{0.3}$$

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{0.4}$$

0.2. **Операторные оценки погрешности для эллиптических и параболических задач в $\mathbb{R}^d$.** В цикле статей [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] Бирмана и Суслиной был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам гомогенизации в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода). Этот подход основан на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Обсудим результаты для более простого оператора (0.4). В [BSu1] была установлена оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.5}$$

Здесь $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор с постоянной эффективной матрицей $g^0$. Аппроксимации резольвенты $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при учете корректоров) были получены в [BSu2, BSu3] и [BSu4] соответственно.

К усреднению параболических задач теоретико-операторный подход применялся в [Su1, Su2, Su3, V, VSu1, VSu2]. В [Su1, Su2] была установлена оценка

$$\|e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(\tau+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad \tau > 0. \tag{0.6}$$

Аппроксимации экспоненты $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при учете корректоров) были получены в [V] и [Su3] соответственно. Еще более точные аппроксимации резольвенты и полугруппы оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ были найдены в [VSu1, VSu2].

Теоретико-операторный подход применялся также к более общему классу операторов $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ со старшей частью $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и младшими членами: резольвента такого оператора изучалась в [Su4, Su5], а полугруппа — в [M1, M4].

Оценки вида (0.5), (0.6) называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения. Они точны по порядку. Другой подход к операторным оценкам погрешности (так называемый метод сдвига) был предложен Жиковым и Пастуховой; см. [Zh2, ZhPas1, ZhPas2], а также обзор [ZhPas3].

0.3. **Операторные оценки погрешности для нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболических уравнений.** Ситуация с усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболических уравнений отличается от случая эллиптических и параболических задач. Теоретико-операторный подход был применен к нестационарным задачам в [BSu5]. Остановимся опять на результатах для более простого оператора (0.4). В операторных терминах, речь идет об аппроксимации операторов $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ (где $\tau \in \mathbb{R}$) при малом $\varepsilon$. Оказалось, что невозможно аппроксимировать эти операторы по $(L_2 \to L_2)$-норме и мы вынуждены изменить тип операторной нормы. В [BSu5] были установлены оценки

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{0.7}$$

$$\|\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.8}$$

Аналогичный результат для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ был недавно получен Мешковой [M2, M3]:

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.9}$$

В [M2, M3] была также найдена аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ по "энергетической" норме:

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.10}$$

Здесь $K(\varepsilon)$ — подходящий корректор. (Для операторов $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ получить аналог оценки (0.10) не удается.)

Поясним метод на примере вывода оценки (0.8). Обозначим $\mathcal{H}_0 := -\Delta$. Ясно, что оценка (0.8) эквивалентна неравенству

$$\big\|\big(\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big)(\mathcal{H}_0+I)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.11}$$

За счет масштабного преобразования (0.11) эквивалентно оценке

$$\big\|\big(\cos(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}) - \cos(\varepsilon^{-1}\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big)\varepsilon^2(\mathcal{H}_0+\varepsilon^2 I)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.12}$$

Далее, в силу теории Флоке — Блоха оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ (где $\Omega$ — ячейка решетки $\Gamma$) и задаваемым выражением $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ с периодическими граничными условиями. Операторы $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ имеют дискретный спектр. Семейство операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ изучается методами аналитической теории возмущений (относительно одномерного параметра $t = |\mathbf{k}|$). Для операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ удается получить аналог неравенства (0.12) с постоянной, не зависящей от $\mathbf{k}$. Это приводит к оценке (0.12).

Дальнейшему исследованию операторной экспоненты посвящены работы [Su6] и [D1]. В [Su6] было показано, что оценка (0.7) точна относительно типа операторной нормы: указаны условия на оператор, при которых оценка $\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s\to L_2} \leqslant C(\tau)\varepsilon$ неверна, если $s < 3$. В [D1] установлено, что оценка (0.7) точна и относительно зависимости от $\tau$ (при большом $|\tau|$): множитель $(1+|\tau|)$ в правой части оценки нельзя заменить на $(1+|\tau|)^\alpha$ с $\alpha < 1$. С другой стороны, в [Su6] были выделены дополнительные условия на оператор, при которых результат допускает усиление по типу операторной нормы: $H^3$ можно заменить на $H^2$. А в [D1] было выяснено, что при тех же условиях возможно усиление и в другом смысле: множитель $(1+|\tau|)$ можно заменить на $(1+|\tau|)^{1/2}$. В итоге при дополнительных условиях (которые автоматически выполнены для оператора акустики) была доказана оценка

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

Гиперболические задачи изучались в статье [DSu2] (см. также [DSu1]). Было показано, что оценки (0.8), (0.9) точны относительно типа операторной нормы, а при дополнительных предположениях результаты допускают усиление: в (0.8) можно заменить $H^2$ на $H^{3/2}$, а в (0.9) — $H^1$ на $H^{1/2}$.

Нестационарные задачи изучались и для более общего класса операторов $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ (с младшими членами): в [D2] исследована экспонента $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon}$, а в [M5] гиперболические задачи. При этом в [M5] предложен другой подход к изучению гиперболических задач, связанный с модификацией теоремы Троттера – Като.

0.4. **Основные результаты.** В настоящей работе мы продолжаем изучать поведение операторов $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ и $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ при малом $\varepsilon$. С одной стороны, мы подтверждаем точность оценок (0.8)–(0.10): выделено условие на оператор, при котором эти оценки нельзя улучшить ни в отношении типа операторной нормы, ни в отношении зависимости от $\tau$. Это условие формулируется в спектральных терминах.

Рассмотрим операторное семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и положим $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, $t = |\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Это семейство аналитично по параметру $t$. При $t = 0$ число $\lambda_0 = 0$ является $n$-кратным собственным значением "невозмущенного" оператора $\widehat{\mathcal{A}}(0)$. Тогда при малом $t$ существуют вещественно аналитические ветви собственных значений $\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta})$ ($l = 1,\dots,n$) оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. При малом $t$ справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \quad l = 1,\dots,n, \tag{0.13}$$

где $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) > 0$ и $\mu_l(\boldsymbol{\theta}), \nu_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$. Условие, при котором оценки (0.8)–(0.10) нельзя усилить, состоит в том, что $\mu_l(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некоторых $l$ и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$.

С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях мы усиливаем результаты и получаем оценки

$$\|\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{0.14}$$

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{0.15}$$

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{0.16}$$

При $n = 1$ достаточное условие, которое гарантирует оценки (0.14)–(0.16), состоит в том, что $\mu(\boldsymbol{\theta}) = \mu_1(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. В частности, это условие выполнено для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, если $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. При $n \geqslant 2$, чтобы обеспечить (0.14)–(0.16), помимо условия равенства нулю всех коэффициентов $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ мы накладываем еще одно условие в терминах коэффициентов $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$. Простейший вариант этого условия состоит в том, что различные ветви $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ не пересекаются друг с другом.

Далее, мы показываем, что оценки (0.14)–(0.16) тоже точны: в случае, когда все коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ равны нулю, но $\nu_j(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ (при некоторых $j$ и $\boldsymbol{\theta}_0$), оценки (0.14)–(0.16) нельзя улучшить ни относительно типа нормы, ни относительно зависимости от $\tau$.

С помощью интерполяции мы получаем также оценки в $(H^s \to L_2)$ либо $(H^s \to H^1)$-нормах. Например, для оператора из (0.8) справедлива оценка $(H^s \to L_2)$-нормы порядка $O((1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2})$ при $0 \leqslant s \leqslant 2$. Если же справедлива более сильная оценка (0.14), то $(H^s \to L_2)$-норма этого оператора имеет порядок $O((1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3})$ при $0 \leqslant s \leqslant 3/2$.

Ясно, что полученные результаты дают возможность получать квалифицированные оценки погрешности при малом $\varepsilon$ и большом $\tau$: в общей ситуации можно рассматривать $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 1$, а в случае усиления можно рассматривать $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < 2$.

Для более общего оператора (0.3) аналоги результатов, описанных выше, получены для операторов $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, окаймленных подходящими множителями (например, для $f^\varepsilon\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}$).

Результаты, сформулированные в операторных терминах, применяются затем к усреднению решений задачи Коши для гиперболических уравнений. В частности, рассмотрены нестационарное уравнение акустики и система теории упругости.

0.5. **Метод.** Результаты получены с помощью дальнейшего развития теоретико-операторного подхода. Мы следуем плану, намеченному выше в п. 0.3. В основе рассмотрений лежит абстрактная теоретико-операторная схема. Изучается семейство операторов $A(t) = X(t)^*X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Здесь $X(t) = X_0 + tX_1$. (Семейство $A(t)$ моделирует операторное семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$, но параметр $\boldsymbol{\theta}$ в абстрактной постановке отсутствует.) Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $A(0)$ кратности $n$. Тогда при $|t| \leqslant t_0$ возмущенный оператор $A(t)$ имеет на интервале $[0, \delta]$ ровно $n$ собственных значений (мы контролируем $\delta$ и $t_0$ явно). Эти собственные значения и отвечающие им собственные элементы являются вещественно аналитическими функциями от $t$. Коэффициенты соответствующих степенных разложений называют *пороговыми характеристиками* оператора $A(t)$. Мы выделяем оператор $S$ конечного ранга (так называемый *спектральный росток* семейства $A(t)$), действующий в подпространстве $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0)$. Спектральный росток несет информацию о пороговых характеристиках старшего порядка.

В терминах спектрального ростка удается удается найти подходящие аппроксимации для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$ и $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$. Применение этих абстрактных результатов и приводит к требуемым оценкам для ДО. Однако, на этом этапе возникает дополнительное осложнение. Оно касается усиления результатов в предположении, что все коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ равны нулю. В общем случае не удается провести построения равномерно по параметру $\boldsymbol{\theta}$ и мы вынуждены накладывать дополнительные условия (предполагать, что различные ветви $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ не пересекаются).

0.6. **План статьи.** Статья состоит из трех глав. Глава 1 (§1–6) содержит необходимый абстрактный теоретико-операторный материал; здесь получены основные результаты в абстрактных терминах. В главе 2 (§7–14) изучаются периодические ДО вида (0.1), (0.2). В §7 описан класс операторов и разложение в прямой интеграл; соответствующее операторное семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ включено в рамки абстрактной схемы. В §8 описаны эффективные характеристики оператора $\widehat{\mathcal{A}}$. В §9 с помощью абстрактных теорем получены аппроксимации операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$ и $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$, а в §10 подтверждена точность этих результатов. В §11 описаны эффективные характеристики оператора (0.1). Требуемые аппроксимации оператор-функций от $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ найдены в §12, а точность этих результатов обсуждается в §13. Наконец, §14 посвящен аппроксимациям оператор-функций от операторов (0.1) и (0.2), которые выводятся из результатов §9, 10, 12, 13 с помощью разложения в прямой интеграл. Глава 3 (§15–18) посвящена задачам гомогенизации. В §15 с помощью масштабного преобразования мы выводим основные результаты работы (аппроксимации оператор-функций от $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и $\mathcal{A}_\varepsilon$) из результатов главы 2. В §16 полученные результаты применяются к изучению решений задачи Коши для гиперболических уравнений. §17, 18 посвящены применению общих результатов к конкретным уравнениям математической физики.

0.7. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$ соответственно; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы. Через $I = I_{\mathfrak{H}}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $A : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ обозначается его область определения, а через $\operatorname{Ker} A$ — его ядро. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp$ — его ортогональное дополнение. Если $P$ — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp$ — ортопроектор на $\mathfrak{N}^\perp$.

Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$; $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Если $a$ — $(m\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы $a$ как линейного оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$.

Далее, используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, d$; $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$.

Классы $L_p$ (где $1 \leqslant p \leqslant \infty$) вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Классы Соболева порядка $s$ (где $s \geqslant 0$) $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}$ обозначаем через $H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но иногда применяем такие упрощенные обозначения и для классов вектор-функций или матриц-функций.

Через $C$, $\mathcal{C}$, $\mathrm{C}$, $\mathfrak{C}$, $c$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные постоянные в оценках.

0.8. **Благодарности.** Т. А. Суслина выражает благодарность Институту Миттаг-Леффлера (Стокгольм, Швеция). Работа частично была выполнена во время участия Т. А. Суслиной в программе “Спектральные методы математической физики” в феврале и марте 2019 года.

## Глава 1. Абстрактная теоретико-операторная схема

### § 1. Квадратичные операторные семейства

Материал этого параграфа заимствован из [BSu1, BSu2, VSu1, Su6, D1].

1.1. **Операторы $X(t)$ и $A(t)$.** Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что $X_0 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — плотно определённый и замкнутый оператор, а $X_1 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — ограниченный оператор. Введём замкнутый на $\operatorname{Dom} X_0$ оператор $X(t) = X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство самосопряжённых операторов $A(t) = X(t)^* X(t)$ в $\mathfrak{H}$. Оператор $A(t)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$. Введём обозначения $A_0 := A(0)$; $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0$; $\mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*$.

*Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора $A_0$ и $0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty$, $n \leqslant n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leqslant \infty$.*

Пусть $d^0$ — расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $A_0$. Через $P$ и $P_*$ обозначаются ортопроекторы пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и пространства $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$, соответственно. Обозначим через $F(t; [a, b])$ спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[a, b]$ и положим $\mathfrak{F}(t; [a, b]) := F(t; [a, b])\mathfrak{H}$. Фиксируем число $\delta > 0$ такое, что $8\delta < d^0$. Выберем число $t_0 > 0$ так, чтобы

$$t_0 \leqslant \delta^{1/2} \|X_1\|^{-1}. \tag{1.1}$$

Как показано в [BSu1, гл. 1, (1.3)], при $|t| \leqslant t_0$ выполнено $F(t; [0, \delta]) = F(t; [0, 3\delta])$ и $\operatorname{rank} F(t; [0, \delta]) = n$. Будем писать $F(t)$ вместо $F(t; [0, \delta])$ и $\mathfrak{F}(t)$ вместо $\mathfrak{F}(t; [0, \delta])$.

1.2. **Операторы $Z$, $R$ и $S$.** Следуя [BSu1, гл. 1, §1] и [BSu2, §1], введём операторы, которые возникают при рассмотрениях в духе теории возмущений.

Обозначим $\mathcal{D} := \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим уравнение на $\phi \in \mathcal{D}$:

$$X_0^*(X_0 \phi + X_1 \omega) = 0,$$

которое понимается в слабом смысле:

$$(X_0 \phi, X_0 \zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_1 \omega, X_0 \zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}.$$

Существует единственное решение $\phi = \phi(\omega)$. Введём оператор $Z : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ формулой $Zu = \phi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Отметим, что $PZ = 0$, а потому $Z^* P = 0$. Справедливы оценки

$$\|X_0 Z\| \leqslant \|X_1\|, \quad \|Z\| \leqslant (8\delta)^{-1/2} \|X_1\|. \tag{1.2}$$

Определим оператор $R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*$ формулой $R := X_0 Z + X_1$. Другое представление для $R$ имеет вид $R = P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$.

Следуя [BSu1, гл. 1], назовём оператор $S := R^*R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ *спектральным ростком* семейства $A(t)$ при $t = 0$. Для ростка справедливо также соотношение $S = PX_1^*P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$. Спектральный росток называется *невырожденным*, если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$. Отметим оценки

$$\|R\| \leqslant \|X_1\|, \quad \|S\| \leqslant \|X_1\|^2. \tag{1.3}$$

1.3. **Операторы $Z_2$ и $R_2$.** Нам потребуются операторы $Z_2$ и $R_2$ (см. [VSu1, §1]). Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и пусть $\psi = \psi(\omega) \in \mathcal{D}$ — (слабое) решение уравнения

$$X_0^*(X_0\psi + X_1 Z\omega) = -P^\perp X_1^* R\omega.$$

Очевидно, условие разрешимости выполнено. Определим оператор $Z_2 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ соотношением $Z_2 u = \psi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Наконец, введем оператор $R_2 : \mathfrak{N} \to \mathfrak{H}_*$ формулой $R_2 := X_0 Z_2 + X_1 Z$.

1.4. **Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $A(t)$.** Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [Ka]), при $|t| \leqslant t_0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_l(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l(t)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$A(t)\varphi_l(t) = \lambda_l(t)\varphi_l(t), \quad l = 1, \ldots, n, \quad |t| \leqslant t_0, \tag{1.4}$$

причём набор $\varphi_l(t)$, $l = 1, \ldots, n$, образует *ортонормированный базис* в $\mathfrak{F}(t)$. Для *достаточно малого* $t_*$ (где $0 < t_* \leqslant t_0$) при $|t| \leqslant t_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \nu_l t^4 + \ldots, \quad \gamma_l \geqslant 0, \quad \mu_l, \nu_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{1.5}$$

$$\varphi_l(t) = \omega_l + t\psi_l^{(1)} + \ldots, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{1.6}$$

При этом элементы $\omega_l = \varphi_l(0)$, $l = 1, \ldots, n$, образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$. Подставляя разложения (1.5), (1.6) в равенства (1.4) и сравнивая коэффициенты при $t$ и при $t^2$, приходим к соотношениям

$$\begin{gathered} \widetilde{\omega}_l := \psi_l^{(1)} - Z\omega_l \in \mathfrak{N}, \quad l = 1, \ldots, n, \\ S\omega_l = \gamma_l \omega_l, \quad l = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{1.7}$$

(Ср. [BSu1, гл. 1, §1], [BSu2, §1].) Таким образом, *числа $\gamma_l$ и элементы $\omega_l$, определённые в* (1.5) *и* (1.6)*, являются собственными для ростка $S$*. Справедливы представления

$$P = \sum_{l=1}^{n} (\cdot, \omega_l)\omega_l, \tag{1.8}$$

$$SP = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l (\cdot, \omega_l)\omega_l. \tag{1.9}$$

1.5. **Пороговые аппроксимации.** Спектральный проектор $F(t)$ и оператор $A(t)F(t)$ являются вещественно аналитическими оператор-функциями при $|t| \leqslant t_0$. Справедливы представления

$$F(t) = \sum_{l=1}^{n} (\cdot, \varphi_l(t))\varphi_l(t),$$

$$A(t)F(t) = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l(t)(\cdot, \varphi_l(t))\varphi_l(t).$$

С учётом (1.5), (1.6), (1.8), (1.9) отсюда следуют степенные разложения $F(t) = P + tF_1 + \ldots$, $A(t)F(t) = t^2 SP + t^3 K + \ldots$, сходящиеся при $|t| \leqslant t_*$. Однако, нам нужны не разложения, а лишь аппроксимации (с одним или несколькими первыми членами), но с оценками погрешности на контролируемом промежутке $|t| \leqslant t_0$.

Следующее утверждение было получено в [BSu1, гл. 1, теоремы 4.1 и 4.3]. Договоримся ниже через $\beta_j$ обозначать *абсолютные константы*, причём *считаем* $\beta_j \geqslant 1$.

**Предложение 1.1** ([BSu1]). *В условиях п.* 1.1 *справедливы оценки*

$$\|F(t) - P\| \leqslant C_1 |t|, \quad |t| \leqslant t_0, \tag{1.10}$$

$$\|A(t)F(t) - t^2 SP\| \leqslant C_2 |t|^3, \quad |t| \leqslant t_0. \tag{1.11}$$

*Число* $t_0$ *подчинено* (1.1), *а постоянные* $C_1$, $C_2$ *имеют вид*

$$C_1 = \beta_1 \delta^{-1/2} \|X_1\|, \quad C_2 = \beta_2 \delta^{-1/2} \|X_1\|^3. \tag{1.12}$$

Нам понадобятся также более точные аппроксимации, найденные в [BSu2, §2 и §4].

**Предложение 1.2** ([BSu2]). *В условиях п.* 1.1 *справедливы представления*

$$F(t) = P + tF_1 + F_2(t), \qquad |t| \leqslant t_0, \tag{1.13}$$

$$A(t)F(t) = t^2 SP + t^3 K + \Psi(t), \qquad |t| \leqslant t_0,$$

*и оценки*

$$\|F_2(t)\| \leqslant C_3 t^2, \quad C_3 = \beta_3 \delta^{-1} \|X_1\|^2,$$

$$\|\Psi(t)\| \leqslant C_4 t^4, \quad C_4 = \beta_4 \delta^{-1} \|X_1\|^4.$$

*Оператор* $K$ *допускает представление*

$$K = K_0 + N = K_0 + N_0 + N_*,$$

*где* $K_0$ *переводит* $\mathfrak{N}$ *в* $\mathfrak{N}^\perp$ *и* $\mathfrak{N}^\perp$ *в* $\mathfrak{N}$, *а* $N = N_0 + N_*$ *переводит* $\mathfrak{N}$ *в себя и* $\mathfrak{N}^\perp$ *в* $\{0\}$. *В терминах коэффициентов степенных разложений операторы* $F_1, K_0, N_0, N_*$ *имеют вид*

$$F_1 = \sum_{l=1}^{n} \left( (\cdot, Z\omega_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l) Z\omega_l \right),$$

$$K_0 = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l \left( (\cdot, Z\omega_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l) Z\omega_l \right),$$

$$N_0 = \sum_{l=1}^{n} \mu_l (\cdot, \omega_l)\omega_l, \quad N_* = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l \left( (\cdot, \widetilde{\omega}_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)\widetilde{\omega}_l \right). \tag{1.14}$$

*В инвариантных терминах справедливы представления*

$$F_1 = ZP + PZ^*, \quad K_0 = ZSP + SPZ^*, \tag{1.15}$$

$$N = Z^* X_1^* RP + (RP)^* X_1 Z. \tag{1.16}$$

**Замечание 1.3.** 1°. *Если* $Z = 0$, *то* $K_0 = 0$, $N = 0$ *и* $K = 0$.
2°. *В базисе* $\{\omega_l\}_{l=1}^n$ *операторы* $N$, $N_0$, $N_*$ (*суженные на подпространство* $\mathfrak{N}$) *задаются матрицами размера* $n \times n$. *При этом оператор* $N_0$ *диагонален:*

$$(N_0 \omega_j, \omega_k) = \mu_j \delta_{jk}, \quad j,k = 1, \dots, n. \tag{1.17}$$

*Матричные элементы оператора* $N_*$ *имеют вид*

$$(N_* \omega_j, \omega_k) = \gamma_k (\omega_j, \widetilde{\omega}_k) + \gamma_j (\widetilde{\omega}_j, \omega_k) = (\gamma_j - \gamma_k)(\widetilde{\omega}_j, \omega_k), \quad j,k = 1, \dots, n.$$

*Здесь мы учли соотношение* (*см.* [BSu2, (1.18)])

$$(\widetilde{\omega}_j, \omega_k) + (\omega_j, \widetilde{\omega}_k) = 0, \quad j,k = 1, \dots, n. \tag{1.18}$$

*Видно, что диагональные элементы для* $N_*$ *обращаются в ноль*: $(N_* \omega_j, \omega_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$. *Более того,*

$$(N_* \omega_j, \omega_k) = 0, \quad \text{*если* } \gamma_j = \gamma_k.$$

1.6. **Условие невырожденности.** Ниже мы будем предполагать выполненным следующее дополнительное условие (ср. [BSu1, гл. 1, п. 5.1]).

**Условие 1.4.** При некотором $c_* > 0$ выполнено неравенство

$$A(t) \geqslant c_* t^2 I, \quad |t| \leqslant t_0. \tag{1.19}$$

Из (1.19) следует, что $\lambda_l(t) \geqslant c_* t^2$, $l = 1, \dots, n$, при $|t| \leqslant t_0$. В силу (1.5) это влечёт

$$\gamma_l \geqslant c_* > 0, \quad l = 1, \dots, n.$$

Таким образом, спектральный росток невырожден (см. (1.9)):

$$S \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{1.20}$$

1.7. **Разбиение собственных значений оператора $A(t)$ на кластеры.** Материал этого пункта заимствован из [Su6, §2]. Он содержателен при $n \geqslant 2$.

Предположим, что выполнено условие 1.4. Сейчас нам будет удобно изменить обозначения, отслеживая кратности собственных значений ростка $S$. Обозначим количество различных собственных значений ростка через $p$. Занумеруем эти собственные значения в порядке возрастания и обозначим их через $\gamma_j^\circ$, $j = 1, \dots, p$. Их кратности обозначим через $k_1, \dots, k_p$ (разумеется, $k_1 + \dots + k_p = n$). Введём обозначения для собственных подпространств: $\mathfrak{N}_j = \operatorname{Ker}(S - \gamma_j^\circ I_{\mathfrak{N}})$, $j = 1, \dots, p$. Тогда

$$\mathfrak{N} = \sum_{j=1}^{p} \oplus \mathfrak{N}_j.$$

Пусть $P_j$ — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_j$. Тогда

$$P = \sum_{j=1}^{p} P_j, \qquad P_j P_l = 0 \quad \text{при } j \neq l.$$

Соответственно изменим и обозначения собственных векторов ростка (тех самых, которые являются “зародышами” в (1.6)), разделяя их на $p$ частей, так что $\omega_1^{(j)}, \dots, \omega_{k_j}^{(j)}$ отвечают собственному значению $\gamma_j^\circ$ и образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_j$.

**Замечание 1.5.** *Напомним, что $N = N_0 + N_*$. Согласно замечанию* 1.3

$$P_j N_* P_j = 0, \quad j = 1, \dots, p; \qquad P_l N_0 P_j = 0 \quad \textit{при } l \neq j.$$

*Отсюда следуют инвариантные представления операторов $N_0$ и $N_*$:*

$$N_0 = \sum_{j=1}^{p} P_j N P_j, \quad N_* = \sum_{\substack{1 \leqslant j,l \leqslant p: \\ j \neq l}} P_j N P_l. \tag{1.21}$$

Для каждой пары индексов $(j,l), 1 \leqslant j,l \leqslant p, j \neq l$, введём обозначение

$$c_{jl}^\circ := \min\{c_*, n^{-1} |\gamma_l^\circ - \gamma_j^\circ|\}. \tag{1.22}$$

Ясно, что найдётся номер $i_0 = i_0(j,l)$, где $j \leqslant i_0 \leqslant l-1$ при $j < l$ и $l \leqslant i_0 \leqslant j-1$ при $l < j$, такой что $\gamma_{i_0+1}^\circ - \gamma_{i_0}^\circ \geqslant c_{jl}^\circ$. Это означает, что на промежутке между $\gamma_j^\circ$ и $\gamma_l^\circ$ в спектре оператора $S$ имеется лакуна длины не меньше $c_{jl}^\circ$. Возможно, выбор $i_0$ неоднозначен, в этом случае договоримся брать наименьшее возможное $i_0$ (для определённости).

Выберем число $t_{jl}^{00} \leqslant t_0$ так, чтобы (см. (1.12))

$$t_{jl}^{00} \leqslant (4C_2)^{-1} c_{jl}^\circ = (4\beta_2)^{-1} \delta^{1/2} \|X_1\|^{-3} c_{jl}^\circ. \tag{1.23}$$

Положим $\Delta_{jl}^{(1)} := [\gamma_1^\circ - c_{jl}^\circ/4, \gamma_{i_0}^\circ + c_{jl}^\circ/4]$ и $\Delta_{jl}^{(2)} := [\gamma_{i_0+1}^\circ - c_{jl}^\circ/4, \gamma_p^\circ + c_{jl}^\circ/4]$. Промежутки $\Delta_{jl}^{(1)}$ и $\Delta_{jl}^{(2)}$ отделены друг от друга на расстояние, не меньшее $c_{jl}^\circ/2$. В [Su6, §2] показано, что при $|t| \leqslant t_{jl}^{00}$ оператор $A(t)$ имеет ровно $k_1 + \ldots + k_{i_0}$ собственных значений (с учётом кратностей) на промежутке $t^2\Delta_{jl}^{(1)}$ и ровно $k_{i_0+1} + \ldots + k_p$ собственных значений на промежутке $t^2\Delta_{jl}^{(2)}$. Спектральные проекторы оператора $A(t)$, отвечающие промежуткам $t^2\Delta_{jl}^{(1)}$ и $t^2\Delta_{jl}^{(2)}$, обозначим через $F_{jl}^{(1)}(t)$ и $F_{jl}^{(2)}(t)$, соответственно. Тогда

$$F(t) = F_{jl}^{(1)}(t) + F_{jl}^{(2)}(t), \quad |t| \leqslant t_{jl}^{00}.$$

Следующее утверждение было проверено в [Su6, Предложение 2.1].

**Предложение 1.6** ([Su6]). *При $|t| \leqslant t_{jl}^{00}$ справедливы оценки*

$$\|F_{jl}^{(1)}(t) - (P_1 + \dots + P_{i_0})\| \leqslant C_{5,jl}|t|,$$
$$\|F_{jl}^{(2)}(t) - (P_{i_0+1} + \dots + P_p)\| \leqslant C_{5,jl}|t|.$$

*Число $t_{jl}^{00}$ выбрано согласно* (1.22), (1.23), *а постоянная $C_{5,jl}$ задана соотношением*

$$C_{5,jl} = \beta_5 \delta^{-1/2} \|X_1\|^5 (c_{jl}^\circ)^{-2}.$$

1.8. **Коэффициенты $\nu_l$.** Для определенности будем считать нумерацию в (1.5), (1.6) такой, что $\gamma_1 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n$. Коэффициенты $\nu_l$ и векторы $\omega_l$, $l = 1, \ldots, n$, в разложениях (1.5), (1.6) являются собственными значениями и собственными элементами некоторой задачи; см. [D1, п. 1.8]. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\mu_l = 0$, $l = 1, \ldots, n$, то есть, $N_0 = 0$.

**Предложение 1.7** ([D1]). *Пусть $N_0 = 0$. Положим*

$$N_1^0 := Z_2^* X_1^* R P + (RP)^* X_1 Z_2 + R_2^* R_2 P.$$

*Пусть $\gamma_1^\circ, \ldots, \gamma_p^\circ$ — различные собственные значения оператора $S$, а $k_1, \ldots, k_p$ — их кратности. Пусть $P_q$ — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{N}_q = \operatorname{Ker}(S - \gamma_q^\circ I_{\mathfrak{N}})$, $q = 1, \ldots, p$. Введем операторы $\mathcal{N}^{(q)}$, $q = 1, \ldots, p$: оператор $\mathcal{N}^{(q)}$ действует в $\mathfrak{N}_q$ и задается выражением*

$$\mathcal{N}^{(q)} := P_q \left( N_1^0 - \frac{1}{2} Z^* Z S P - \frac{1}{2} S P Z^* Z \right)\Big|_{\mathfrak{N}_q} + \sum_{j=1,\ldots,p: j \neq q} (\gamma_q^\circ - \gamma_j^\circ)^{-1} P_q N P_j N \big|_{\mathfrak{N}_q}.$$

*Пусть $\nu_l$, $l = 1, \ldots, n$, — коэффициенты при $t^4$ из разложений* (1.5). *Тогда числа $\nu_l$ и векторы $\omega_l$ при $l = i(q), i(q)+1, \ldots, i(q)+k_q-1$, где $i(q) = k_1 + \dots + k_{q-1} + 1$, являются собственными значениями и собственными элементами оператора $\mathcal{N}^{(q)}$, т. е.,*

$$\mathcal{N}^{(q)} \omega_l = \nu_l \omega_l, \quad l = i(q), i(q)+1, \ldots, i(q)+k_q-1.$$

## § 2. Приближение для операторов $\cos(\tau A(t)^{1/2})P$ и $A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P$

2.1. **Аппроксимация по операторной норме в $\mathfrak{H}$.** Положим

$$\mathcal{J}(t,\tau) := e^{-i\tau A(t)^{1/2}} P - e^{-i\tau (t^2 S)^{1/2} P} P, \tag{2.1}$$
$$\mathcal{E}(t,\tau) := A(t)^{-1/2} e^{-i\tau A(t)^{1/2}} P - (t^2 S)^{-1/2} e^{-i\tau (t^2 S)^{1/2} P} P. \tag{2.2}$$

Нам понадобятся оценки операторов (2.1) и (2.2), установленные (с помощью пороговых аппроксимаций) в [BSu5, п. 2.3], [M2, п. 2.1] и [DSu2, (2.34), (2.49), (2.53), (2.54)].

**Предложение 2.1** ([BSu5]). *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leqslant t_0$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{J}(t,\tau)\| \leqslant 2C_1|t| + C_6|\tau|t^2.$$

*Число $t_0$ подчинено условию* (1.1). *Постоянная $C_1$ определена в* (1.12), *а постоянная $C_6$ задана выражением $C_6 = \beta_6 \delta^{-1/2} \|X_1\|^2 \left(1 + c_*^{-1/2} \|X_1\|\right)$.*

**Предложение 2.2** ([M2]). *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < |t| \leqslant t_0$ справедлива оценка*
$$\|\mathcal{E}(t,\tau)\| \leqslant C_7 + C_8|\tau||t|.$$
*Число $t_0$ подчинено условию* (1.1). *Постоянные $C_7$ и $C_8$ заданы выражениями*
$$C_7 = \beta_7 \delta^{-1/2} c_*^{-1/2} \|X_1\| \left(1 + c_*^{-1}\|X_1\|^2\right), \quad C_8 = c_*^{-1/2} C_6.$$

**Предложение 2.3** ([DSu2]). *Пусть оператор $N$, определенный в* (1.16), *равен нулю*: $N = 0$. *Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ справедливы оценки*
$$\|\mathcal{J}(t,\tau)\| \leqslant 2C_1|t| + C_9|\tau||t|^3, \quad |t| \leqslant t_0,$$
$$\|\mathcal{E}(t,\tau)\| \leqslant C_7 + C_{10}|\tau|t^2, \quad 0 < |t| \leqslant t_0.$$
*Число $t_0$ подчинено условию* (1.1). *Постоянные $C_9$ и $C_{10}$ имеют вид*
$$C_9 = \beta_9 \delta^{-1} \|X_1\|^3 \left(1 + c_*^{-1/2}\|X_1\| + c_*^{-3/2}\|X_1\|^3 + c_*^{-5/2}\|X_1\|^5\right), \quad C_{10} = c_*^{-1/2} C_9.$$

**Предложение 2.4** ([DSu2]). *Положим $\mathcal{Z} := \{(j,l)\colon 1 \leqslant j,l \leqslant p,\ j \neq l,\ P_j N P_l \neq 0\}$. Пусть*
$$c^\circ := \min_{(j,l)\in\mathcal{Z}} c^\circ_{jl}, \tag{2.3}$$
*где числа $c^\circ_{jl}$ определены в* (1.22). *Пусть число $t^{00} \leqslant t_0$ подчинено условию*
$$t^{00} \leqslant (4\beta_2)^{-1} \delta^{1/2} \|X_1\|^{-3} c^\circ. \tag{2.4}$$
*Предположим, что оператор $N_0$, определенный в* (1.21), *равен нулю*: $N_0 = 0$. *Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ справедливы оценки*
$$\|\mathcal{J}(t,\tau)\| \leqslant C_{11}|t| + C_{12}|\tau||t|^3, \quad |t| \leqslant t^{00},$$
$$\|\mathcal{E}(t,\tau)\| \leqslant C_{13} + C_{14}|\tau|t^2, \quad 0 < |t| \leqslant t^{00}.$$
*Постоянные $C_{11}$, $C_{12}$, $C_{13}$ и $C_{14}$ заданы выражениями*
$$C_{11} = \beta_{11}\delta^{-1/2}\|X_1\| \left(1 + n^2 c_*^{-1/2}\|X_1\|^3 (c^\circ)^{-1}\right),$$
$$C_{12} = \beta_{12}\delta^{-1}\|X_1\|^3 \left(1 + c_*^{-1/2}\|X_1\| + c_*^{-3/2}\|X_1\|^3 + c_*^{-5/2}\|X_1\|^5 + n^2 c_*^{-1/2}\|X_1\|^5 (c^\circ)^{-2}\right),$$
$$C_{13} = \beta_{13}\delta^{-1/2} c_*^{-1/2}\|X_1\| \left(1 + c_*^{-1}\|X_1\|^2 + n^2 c_*^{-1/2}\|X_1\|^3 (c^\circ)^{-1}\right), \quad C_{14} = c_*^{-1/2} C_{12}.$$

Из предложений 2.1–2.4 непосредственно вытекают аппроксимации операторов $\cos(\tau A(t)^{1/2})P$ и $A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P$ по операторной норме в $\mathfrak{H}$.

**Теорема 2.5** ([BSu5], [M2]). *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leqslant t_0$ справедливы оценки*
$$\left\|\cos(\tau A(t)^{1/2})P - \cos(\tau (t^2 S)^{1/2} P)P\right\| \leqslant 2C_1|t| + C_6|\tau|t^2, \tag{2.5}$$
$$\left\|A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P - (t^2 S)^{-1/2}\sin(\tau (t^2 S)^{1/2} P)P\right\| \leqslant C_7 + C_8|\tau||t|. \tag{2.6}$$
*Число $t_0$ подчинено условию* (1.1).

**Теорема 2.6** ([DSu2]). *Пусть оператор $N$, определённый в* (1.16), *равен нулю*: $N = 0$. *Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leqslant t_0$ справедливы оценки*
$$\left\|\cos(\tau A(t)^{1/2})P - \cos(\tau (t^2 S)^{1/2} P)P\right\| \leqslant 2C_1|t| + C_9|\tau||t|^3, \tag{2.7}$$
$$\left\|A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P - (t^2 S)^{-1/2}\sin(\tau (t^2 S)^{1/2} P)P\right\| \leqslant C_7 + C_{10}|\tau|t^2. \tag{2.8}$$

**Теорема 2.7** ([DSu2]). *Пусть оператор $N_0$, определённый в* (1.21), *равен нулю*: $N_0 = 0$. *Тогда при $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leqslant t^{00}$ справедливы оценки*
$$\left\|\cos(\tau A(t)^{1/2})P - \cos(\tau (t^2 S)^{1/2} P)P\right\| \leqslant C_{11}|t| + C_{12}|\tau||t|^3,$$
$$\left\|A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P - (t^2 S)^{-1/2}\sin(\tau (t^2 S)^{1/2} P)P\right\| \leqslant C_{13} + C_{14}|\tau|t^2.$$

*Здесь число* $t^{00} \leqslant t_0$ *выбрано согласно* (2.4).

2.2. **Аппроксимация оператора $A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})$ по "энергетической" норме.** В этом пункте мы получим подходящую аппроксимацию для оператора $A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})$ по "энергетической" норме. Для этого нам будут нужны следующие оценки, первая из которых вытекает из (1.1), (1.3) и (1.11), а вторая установлена в [BSu4, (2.23)]:

$$\|A(t)^{1/2}F(t)\| \leqslant C_{15}|t|, \quad |t| \leqslant t_0; \qquad C_{15} = (1+\beta_2)^{1/2}\|X_1\|, \tag{2.9}$$

$$\|A(t)^{1/2}F_2(t)\| \leqslant C_{16}t^2, \quad |t| \leqslant t_0; \qquad C_{16} = \beta_{16}\delta^{-1/2}\|X_1\|^2. \tag{2.10}$$

Имеем

$$A(t)^{1/2}e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}P = A(t)^{1/2}e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}F(t)P + e^{-i\tau A(t)^{1/2}}(P-F(t))P. \tag{2.11}$$

В силу (1.10) второе слагаемое допускает оценку

$$\|e^{-i\tau A(t)^{1/2}}(P-F(t))P\| \leqslant C_1|t|, \quad \tau \in \mathbb{R},\ |t| \leqslant t_0. \tag{2.12}$$

Далее,

$$A(t)^{1/2}e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}F(t)P = A(t)^{1/2}F(t)\mathcal{E}(t,\tau)P + A(t)^{1/2}F(t)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P, \tag{2.13}$$

где оператор $\mathcal{E}(t,\tau)$ определен в (2.2). Первое слагаемое оценивается на основании (2.9) и предложения 2.2 (если выполнены дополнительные предположения, применяются предложения 2.3 и 2.4). Получаем:

$$\|A(t)^{1/2}F(t)\mathcal{E}(t,\tau)P\| \leqslant C_{15}|t|\left(C_7 + C_8|\tau||t|\right), \quad \tau \in \mathbb{R},\ |t| \leqslant t_0; \tag{2.14}$$

$$\|A(t)^{1/2}F(t)\mathcal{E}(t,\tau)P\| \leqslant C_{15}|t|\left(C_7 + C_{10}|\tau|t^2\right), \quad \tau \in \mathbb{R},\ |t| \leqslant t_0, \quad \text{если } N=0; \tag{2.15}$$

$$\|A(t)^{1/2}F(t)\mathcal{E}(t,\tau)P\| \leqslant C_{15}|t|\left(C_{13} + C_{14}|\tau|t^2\right), \quad \tau \in \mathbb{R},\ |t| \leqslant t^{00}, \quad \text{если } N_0=0. \tag{2.16}$$

Далее, в силу (1.13), (1.15) и тождества $Z^*P = 0$ выполнено

$$\begin{aligned} &A(t)^{1/2}F(t)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P = \\ &\quad = A(t)^{1/2}(I+tZ)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P + A(t)^{1/2}F_2(t)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Используя (1.20) и (2.10), получаем

$$\|A(t)^{1/2}F_2(t)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P\| \leqslant c_*^{-1/2}C_{16}|t|, \quad \tau \in \mathbb{R},\ |t| \leqslant t_0. \tag{2.18}$$

В итоге из (2.11)–(2.18) вытекают следующие результаты.

**Теорема 2.8** ([M2])**.** *Положим*

$$\Sigma(t,\tau) := \Big(A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2}) - (I+tZ)(t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)\Big)P. \tag{2.19}$$

*При* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t_0$ *справедлива оценка*

$$\left\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\tau)\right\| \leqslant C_{17}|t| + C_{18}|\tau|t^2. \tag{2.20}$$

*Число* $t_0$ *подчинено условию* (1.1)*. Постоянные* $C_{17}$ *и* $C_{18}$ *имеют вид* $C_{17} = C_1 + C_7C_{15} + c_*^{-1/2}C_{16}$, $C_{18} = C_8C_{15}$.

**Теорема 2.9.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8*. Пусть оператор* $N$*, определённый в* (1.16)*, равен нулю:* $N = 0$*. Тогда для* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t_0$ *справедлива оценка*

$$\left\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\tau)\right\| \leqslant C_{17}|t| + C_{19}|\tau||t|^3, \tag{2.21}$$

*где* $C_{19} = C_{10}C_{15}$.

**Теорема 2.10.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.8. *Пусть оператор* $N_0$, *определённый в* (1.21), *равен нулю*: $N_0 = 0$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t^{00}$ *справедлива оценка*

$$\left\| A(t)^{1/2}\Sigma(t,\tau)\right\| \leqslant C_{20}|t| + C_{21}|\tau||t|^3.$$

*Число* $t^{00} \leqslant t_0$ *подчинено условию* (2.4). *Постоянные* $C_{20}$ *и* $C_{21}$ *имеют вид* $C_{20} = C_1 + C_{13}C_{15} + c_*^{-1/2}C_{16}$, $C_{21} = C_{14}C_{15}$.

Теорема 2.8 была известна ранее (см. [M2, предложение 2.2]).

## § 3. Приближение для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P$ и $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P$

3.1. **Аппроксимация по операторной норме в $\mathfrak{H}$.** Введём теперь параметр $\varepsilon > 0$. Исследуем поведение операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P$ и $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P$ при малом $\varepsilon$. Удобно домножить эти операторы на "сглаживающий множитель" $\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2}P$, где $s > 0$. (Термин объясняется тем, что в приложениях к дифференциальным операторам такое домножение переходит в сглаживание.) Наша цель — получить аппроксимации сглаженных операторов с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$ при наименьшем возможном $s$.

**Теорема 3.1** ([BSu5], [M2]). *При* $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t_0$ *справедливы оценки*

$$\left\|\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - \cos(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)P\right\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant (C_1 + C_6|\tau|)\varepsilon, \tag{3.1}$$

$$\left\|A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)P\right\|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_7 + C_8|\tau|. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1 вытекает непосредственно из оценок (2.5) и (2.6) с заменой $\tau$ на $\varepsilon^{-1}\tau$. Ранее оценка (3.1) была установлена в [BSu5, теорема 2.7], а оценка (3.2) была доказана в [M2, теорема 2.3].

При дополнительных предположениях результат допускает усиление.

**Теорема 3.2.** *Пусть оператор* $N$, *определённый в* (1.16), *равен нулю*: $N = 0$. *Тогда при* $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t_0$ *справедливы оценки*

$$\left\|\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - \cos(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)P\right\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant (2C_1 + C_9'|\tau|^{1/2})\varepsilon, \tag{3.3}$$

$$\left\|A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)P\right\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant C_7 + C_{10}'|\tau|^{1/2}. \tag{3.4}$$

*Здесь* $C_9' = \max\{C_9; 2\}$ *и* $C_{10}' = \max\{C_{10}; 2c_*^{-1/2}\}$.

*Доказательство.* При $\tau = 0$ оценки (3.3) и (3.4) очевидны. Будем считать, что $\tau \neq 0$. Если $|t| \geqslant \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$, то $\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant \varepsilon|\tau|^{1/2}$, а потому левая часть в (3.3) не превосходит $2\varepsilon|\tau|^{1/2}$.

Пусть теперь $|t| \leqslant t_0$ и $|t| < \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$. Воспользуемся неравенством (2.7) с заменой $\tau$ на $\varepsilon^{-1}\tau$:

$$\begin{aligned}&\left\|\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - \cos(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)P\right\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4}\\ &\leqslant (2C_1|t| + C_9\varepsilon^{-1}|\tau||t|^3)\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant 2C_1\varepsilon + C_9|\tau|\varepsilon^{1/2}|t|^{3/2} \leqslant 2C_1\varepsilon + C_9|\tau|^{1/2}\varepsilon.\end{aligned}$$

В итоге приходим к оценке (3.3).

Аналогично, если $|t| \geqslant \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$, то $|t|^{-1}\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant |\tau|^{1/2}$, поэтому с учетом (1.19) и (1.20) левая часть в (3.4) не превосходит $2c_*^{-1/2}|\tau|^{1/2}$.

При $|t| \leqslant t_0$ и $|t| < \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$ в силу неравенства (2.8) с заменой $\tau$ на $\varepsilon^{-1}\tau$ имеем

$$\begin{aligned}&\left\|A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)P\right\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4}\\ &\leqslant (C_7 + C_{10}\varepsilon^{-1}|\tau|t^2)\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant C_7 + C_{10}\varepsilon^{-1/2}|\tau||t|^{3/2} \leqslant C_7 + C_{10}|\tau|^{1/2}.\end{aligned}$$

В итоге получаем оценку (3.4). $\square$

Аналогичным образом из теоремы 2.7 выводится следующий результат.

**Теорема 3.3.** *Пусть оператор $N_0$, определённый в* (1.21)*, равен нулю*: $N_0 = 0$. *Тогда при* $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t^{00}$ *справедливы оценки*

$$\left\|\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - \cos(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)P\right\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant (C_{11} + C'_{12}|\tau|^{1/2})\varepsilon, \tag{3.5}$$

$$\left\|A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)P\right\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant C_{13} + C'_{14}|\tau|^{1/2}, \tag{3.6}$$

*где* $C'_{12} = \max\{C_{12}; 2\}$ *и* $C'_{14} = \max\{C_{14}; 2c_*^{-1/2}\}$.

**Замечание 3.4.** *Теоремы* 3.2 *и* 3.3 *усиливают результаты, полученные ранее в* [DSu2]*, в отношении зависимости от* $\tau$. *В* [DSu2, теоремы 3.2, 3.3] *были установлены аналоги оценок* (3.3) *и* (3.5) *с правыми частями* $C(1+|\tau|)\varepsilon$, *а также аналоги оценок* (3.4) *и* (3.6) *с правыми частями* $C(1+|\tau|)$.

3.2. **Аппроксимация оператора** $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P$ **по "энергетической" норме.** Пусть $|t| \leqslant t_0$. Применим теорему 2.8. В силу (2.20) (с заменой $\tau$ на $\varepsilon^{-1}\tau$) имеем

$$\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant (C_{17}|t| + C_{18}\varepsilon^{-1}|\tau|t^2)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant (C_{17}+C_{18}|\tau|)\varepsilon.$$

Мы приходим к следующему результату, который воспроизводит теорему 2.4 из [M2].

**Теорема 3.5** ([M2])**.** *Пусть оператор* $\Sigma(t,\tau)$ *определен в* (2.19). *При* $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t_0$ *справедлива оценка*

$$\left\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\varepsilon^{-1}\tau)\right\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant (C_{17}+C_{18}|\tau|)\varepsilon.$$

*Число* $t_0$ *подчинено условию* (1.1).

Теорема 2.9 позволяет усилить результат теоремы 3.5 в случае, когда $N = 0$.

**Теорема 3.6.** *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5. *Пусть оператор* $N$, *определённый в* (1.16)*, равен нулю*: $N = 0$. *Тогда при* $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t_0$ *справедлива оценка*

$$\left\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\varepsilon^{-1}\tau)\right\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant (C_{17}+C'_{19}|\tau|^{1/2})\varepsilon. \tag{3.7}$$

*Здесь* $C'_{19} = \max\{1 + (2+8^{-1/2})\|X_1\|c_*^{-1/2}, C_{19}\}$.

*Доказательство.* Достаточно считать, что $\tau \neq 0$. Заметим, что при $|t| \geqslant \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$ выполнено $\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant \varepsilon|\tau|^{1/2}$. В силу (1.1) и (1.2) справедлива оценка

$$\|A(t)^{1/2}(P+tZP)\| = \|(X_0+tX_1)(P+tZP)\| \leqslant (2+8^{-1/2})\|X_1\||t|, \quad |t| \leqslant t_0.$$

Отсюда с учетом (1.20) и (2.19) следует, что при $|t| \leqslant t_0$ норма $\left\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\varepsilon^{-1}\tau)\right\|$ не превосходит константы $\widetilde{C}_{19} = 1 + (2+8^{-1/2})\|X_1\|c_*^{-1/2}$, а потому левая часть в (3.7) не превосходит $\widetilde{C}_{19}\varepsilon|\tau|^{1/2}$ при $|t| \leqslant t_0$ и $|t| \geqslant \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$.

При $|t| \leqslant t_0$ и $|t| < \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$ в силу неравенства (2.21) с заменой $\tau$ на $\varepsilon^{-1}\tau$ получаем

$$\begin{aligned}&\left\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\varepsilon^{-1}\tau)\right\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant \\ &\qquad\leqslant \left(C_{17}|t| + C_{19}\varepsilon^{-1}|\tau||t|^3\right)\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant C_{17}\varepsilon + C_{19}|\tau|\varepsilon^{1/2}|t|^{3/2} \leqslant (C_{17}+C_{19}|\tau|^{1/2})\varepsilon.\end{aligned}$$

В итоге получаем оценку (3.7) с постоянной $C'_{19} = \max\{C_{19}; \widetilde{C}_{19}\}$. □

Аналогичным образом теорема 2.10 позволяет проверить следующий результат.

**Теорема 3.7.** *Пусть выполнены условия теоремы* 3.5. *Пусть оператор* $N_0$, *определённый в* (1.21)*, равен нулю*: $N_0 = 0$. *Тогда при* $\varepsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}$ *и* $|t| \leqslant t^{00}$ *справедлива оценка*

$$\left\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\varepsilon^{-1}\tau)\right\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant (C_{20}+C'_{21}|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

*Здесь число* $t^{00} \leqslant t_0$ *выбрано согласно* (2.4); $C'_{21} = \max\{1 + (2+8^{-1/2})\|X_1\|c_*^{-1/2}, C_{21}\}$.

**Замечание 3.8.** *Мы отследили, как зависят константы в оценках от параметров задачи. Постоянные* $C_1$, $C_6$, $C_7$, $C_8$ *из теоремы* 3.1; $C'_9$, $C'_{10}$ *из теоремы* 3.2; $C_{17}$, $C_{18}$ *из теоремы* 3.5; $C'_{19}$ *из теоремы* 3.6 *оцениваются полиномами с (абсолютными) положительными коэффициентами от переменных* $\delta^{-1/2}$, $c_*^{-1/2}$, $\|X_1\|$. *Константы* $C_{11}$, $C'_{12}$, $C_{13}$, $C'_{14}$ *из теоремы* 3.3; $C_{20}$, $C'_{21}$ *из теоремы* 3.7 *оцениваются полиномами с положительными коэффициентами от тех же переменных, а также от* $(c^\circ)^{-1}$ *и* $n$.

## § 4. Подтверждение точности результатов §3

4.1. **Подтверждение точности результатов относительно сглаживающего множителя.** Покажем, что полученные результаты точны относительно сглаживающего множителя. Следующее утверждение, установленное в [DSu2, теорема 3.5], подтверждает точность теоремы 3.1 в общем случае.

**Теорема 4.1** ([DSu2]). *Пусть* $N_0 \neq 0$.
1°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\big\|\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - \cos(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)P\big\|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon \tag{4.1}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.
2°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant r < 1$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\big\|A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)P\big\|\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant C(\tau) \tag{4.2}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

Далее, подтвердим точность теорем 3.2, 3.3.

**Теорема 4.2.** *Пусть* $N_0 = 0$ *и* $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ *при некотором* $q \in \{1,\dots,p\}$.
1°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (4.1) *выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.
2°. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant r < 1/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (4.2) *выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

*Доказательство.* Достаточно считать, что $1 \leqslant s < 3/2$. Поскольку $F(t)^\perp P = (P - F(t))P$, то из (1.10) вытекает оценка

$$\|\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})F(t)^\perp P\|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_1|t|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_1\varepsilon, \quad |t| \leqslant t_0. \tag{4.3}$$

Далее, при $|t| \leqslant t_0$ имеем:

$$\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})F(t) = \sum_{l=1}^n \cos\big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_l(t)}\big)(\cdot,\varphi_l(t))\varphi_l(t). \tag{4.4}$$

Из сходимости рядов (1.6) следует, что

$$\|\varphi_l(t) - \omega_l\| \leqslant c_1|t|, \quad |t| \leqslant t_*, \quad l = 1,\dots,n. \tag{4.5}$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некоторых $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $1 \leqslant s < 3/2$ выполнено (4.1) при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$. В силу (1.9) и (4.3)–(4.5) это равносильно существованию постоянной $\widetilde{C}(\tau) > 0$ такой, что неравенство

$$\Big\|\sum_{l=1}^n \Big(\cos\big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_l(t)}\big) - \cos\big(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_l}\big)\Big)(\cdot,\omega_l)\omega_l\Big\|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{4.6}$$

выполнено при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.

Согласно (1.17) и предложению 1.7, условия $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1,\dots,p\}$ означают, что в разложениях (1.5) выполнено $\mu_l = 0$ при всех $l = 1,\dots,n$ и $\nu_j \neq 0$ хотя бы для одного $j$. Тогда

$$\lambda_j(t) = \gamma_j t^2 + \nu_j t^4 + O(|t|^5), \quad |t| \leqslant t_*,$$

а следовательно,

$$\sqrt{\lambda_j(t)} = \sqrt{\gamma_j}|t|\left(1 + \frac{\nu_j}{2\gamma_j}t^2 + O(|t|^3)\right), \quad |t| \leqslant t_*. \tag{4.7}$$

Применим оператор под знаком нормы в (4.6) к элементу $\omega_j$. Тогда

$$\left|\cos\Bigl(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\Bigr) - \cos\left(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\right)\right|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{4.8}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.

Положим

$$t = t(\varepsilon) = (2\pi)^{1/3}\gamma_j^{1/6}|\nu_j\tau|^{-1/3}\varepsilon^{1/3} = c\varepsilon^{1/3}. \tag{4.9}$$

Тогда $\cos(\varepsilon^{-1}\tau t(\varepsilon)\sqrt{\gamma_j}) = \cos(\alpha_j\varepsilon^{-2/3})$, где $\alpha_j := (\operatorname{sgn}\tau)(2\pi)^{1/3}\gamma_j^{2/3}|\tau|^{2/3}|\nu_j|^{-1/3}$. Считая $\varepsilon$ (а тогда и $t(\varepsilon)$) достаточно малым, с учётом (4.7) имеем

$$\cos\Bigl(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t(\varepsilon))}\Bigr) = \cos\left(\alpha_j\varepsilon^{-2/3} + \pi\operatorname{sgn}(\tau\nu_j) + O(\varepsilon^{1/3})\right) = -\cos\left(\alpha_j\varepsilon^{-2/3} + O(\varepsilon^{1/3})\right).$$

Таким образом, из (4.8) следует, что величина

$$\left|\cos\left(\alpha_j\varepsilon^{-2/3} + O(\varepsilon^{1/3})\right) + \cos\left(\alpha_j\varepsilon^{-2/3}\right)\right|\varepsilon^{2s/3-1}(c^2+\varepsilon^{4/3})^{-s/2}$$

равномерно ограничена при малых $\varepsilon > 0$. Но это не так, если $s < 3/2$. (Достаточно рассмотреть последовательность $\varepsilon_k = \alpha_j^{3/2}(2\pi k)^{-3/2}$, $k \in \mathbb{N}$.) Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 1°.

Аналогично проверяется утверждение 2°. В силу (1.10) и (1.19)

$$\left\|A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})F(t)^\perp P\right\| \leqslant c_*^{-1/2}C_1, \quad |t| \leqslant t_0. \tag{4.10}$$

Далее, при $|t| \leqslant t_0$ имеем:

$$A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})F(t) = \sum_{l=1}^{n}\frac{\sin\bigl(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_l(t)}\bigr)}{\sqrt{\lambda_l(t)}}(\cdot,\varphi_l(t))\varphi_l(t). \tag{4.11}$$

Предположим теперь, что при некоторых $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant r < 1/2$ имеет место неравенство (4.2) при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$. С учетом (1.9), (1.19), (4.5), (4.10) и (4.11) отсюда следует, что найдется постоянная $\check{C}(\tau)$ такая, что неравенство

$$\left\|\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\sin\bigl(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_l(t)}\bigr)}{\sqrt{\lambda_l(t)}} - \frac{\sin\bigl(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_l}\bigr)}{|t|\sqrt{\gamma_l}}\right)(\cdot,\omega_l)\omega_l\right\|\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \check{C}(\tau) \tag{4.12}$$

выполнено при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.

Применим оператор под знаком нормы в (4.12) к элементу $\omega_j$:

$$\left|\frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\right)}{\sqrt{\lambda_j(t)}} - \frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\right)}{|t|\sqrt{\gamma_j}}\right|\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \check{C}(\tau)$$

при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.

Подставляя $t = t(\varepsilon) = c\varepsilon^{1/3}$ как в (4.9) и используя (4.7), убеждаемся, что величина

$$\left|\bigl(1 + O(\varepsilon^{2/3})\bigr)\sin\left(\alpha_j\varepsilon^{-2/3} + O(\varepsilon^{1/3})\right) + \sin\left(\alpha_j\varepsilon^{-2/3}\right)\right|\varepsilon^{(2r-1)/3}(c^2+\varepsilon^{4/3})^{-r/2}$$

равномерно ограничена при малых $\varepsilon > 0$. Но это не так, если $r < 1/2$. (Достаточно рассмотреть последовательность $\varepsilon_k = \alpha_j^{3/2}(2\pi k + \pi/2)^{-3/2}$, $k \in \mathbb{N}$.) Полученное противоречие завершает доказательство утверждения 2°. $\square$

Покажем теперь, что результат теоремы 3.5 неулучшаем в общей ситуации.

**Теорема 4.3.** *Пусть оператор* $\Sigma(t,\tau)$ *определен в* (2.19). *Пусть* $N_0 \neq 0$. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\big\| A(t)^{1/2}\Sigma(t,\varepsilon^{-1}\tau)\big\| \varepsilon^s (t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon \tag{4.13}$$

*была верна при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

*Доказательство.* Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некоторых $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $1 \leqslant s < 2$ выполнено (4.13) при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$. Тогда с учетом (1.19) найдется такая постоянная $\widetilde{C}(\tau) > 0$, что

$$\big\| A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P - (I+tZ)(t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau (t^2S)^{1/2}P)P\big\| |t|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon$$

при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$. Поскольку $|t|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \varepsilon$, а операторы $A(t)^{-1/2}(P-F(t))$ и $tZ(t^2S)^{-1/2}$ равномерно ограничены (в силу (1.2), (1.10), (1.19), (1.20)), то

$$\big\| A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})F(t) - (t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau (t^2S)^{1/2}P)P\big\| |t|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widehat{C}(\tau)\varepsilon \tag{4.14}$$

с некоторой постоянной $\widehat{C}(\tau) > 0$ при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.

Из (1.9), (4.5), (4.11) и (4.14) следут, что существует постоянная $\check{C}(\tau)$, такая что

$$\Big\| \sum_{l=1}^{n} \left( \frac{\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_l(t)}\big)}{\sqrt{\lambda_l(t)}} - \frac{\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_l}\big)}{|t|\sqrt{\gamma_l}} \right)(\cdot,\omega_l)\omega_l \Big\| \varepsilon^s|t|(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{C}(\tau)\varepsilon \tag{4.15}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.

Согласно (1.17), условие $N_0 \neq 0$ означает, что хотя бы для одного $j$ выполнено $\mu_j \neq 0$. Тогда

$$\lambda_j(t) = \gamma_j t^2 + \mu_j t^3 + O(t^4), \quad |t| \leqslant t_*,$$

а потому

$$\sqrt{\lambda_j(t)} = \sqrt{\gamma_j}|t| \left( 1 + \frac{\mu_j}{2\gamma_j}t + O(t^2) \right), \quad |t| \leqslant t_*. \tag{4.16}$$

Применим оператор под знаком нормы в (4.15) к элементу $\omega_j$. Тогда

$$\left| \frac{\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\big)}{\sqrt{\lambda_j(t)}} - \frac{\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\big)}{|t|\sqrt{\gamma_j}} \right| \varepsilon^s|t|(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{C}(\tau)\varepsilon \tag{4.17}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.

Положим

$$t = \tilde{t}(\varepsilon) = (2\pi)^{1/2}\gamma_j^{1/4}|\mu_j\tau|^{-1/2}\varepsilon^{1/2} = \tilde{c}\varepsilon^{1/2}.$$

Тогда $\sin(\varepsilon^{-1}\tau\tilde{t}(\varepsilon)\sqrt{\gamma_j}) = \sin(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-1/2})$, где $\tilde{\alpha}_j := (\operatorname{sgn}\tau)(2\pi)^{1/2}\gamma_j^{3/4}|\tau|^{1/2}|\mu_j|^{-1/2}$. Считая $\varepsilon$ достаточно малым, с учётом (4.16) имеем

$$\sin\Big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(\tilde{t}(\varepsilon))}\Big) = \sin\Big(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-1/2} + \pi\operatorname{sgn}(\tau\mu_j) + O(\varepsilon^{1/2})\Big) = -\sin\Big(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-1/2} + O(\varepsilon^{1/2})\Big).$$

Таким образом, из (4.17) следует, что величина

$$\Big| \big(1+O(\varepsilon^{1/2})\big)\sin\Big(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-1/2} + O(\varepsilon^{1/2})\Big) + \sin\Big(\tilde{\alpha}_j\varepsilon^{-1/2}\Big)\Big| \varepsilon^{s/2-1}(\tilde{c}^2+\varepsilon)^{-s/2}$$

равномерно ограничена при малых $\varepsilon > 0$. Но это не так, если $s < 2$. (Достаточно рассмотреть последовательность $\varepsilon_k = \tilde{\alpha}_j^2(\pi/2 + 2\pi k)^{-2}$, $k \in \mathbb{N}$.) Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Наконец, мы подтверждаем точность теорем 3.6 и 3.7.

**Теорема 4.4.** *Пусть оператор* $\Sigma(t,\tau)$ *определен в* (2.19). *Пусть* $N_0 = 0$ *и* $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ *при некотором* $q \in \{1,\dots,p\}$. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (4.13) *выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

*Доказательство.* Достаточно считать, что $1 \leqslant s < 3/2$. Как и при доказательстве теоремы 4.3, рассуждая от противного, убеждаемся, что выполнено неравенство (4.15) при некоторых $\tau \neq 0$ и $1 \leqslant s < 3/2$. В условиях теоремы выполнено $\mu_l = 0$, $l = 1, \dots, n$, и $\nu_j \neq 0$ при некотором $j$. Для $\sqrt{\lambda_j(t)}$ справедливо разложение (4.7). Применяя оператор под знаком нормы в (4.15) к элементу $\omega_j$, получаем неравенство (4.17). Далее, подставляя $t = t(\varepsilon) = c\varepsilon^{1/3}$ как в (4.9), убеждаемся, что величина

$$\left|\left(1 + O(\varepsilon^{2/3})\right) \sin\left(\alpha_j \varepsilon^{-2/3} + O(\varepsilon^{1/3})\right) + \sin\left(\alpha_j \varepsilon^{-2/3}\right)\right| \varepsilon^{2s/3-1}(c^2 + \varepsilon^{4/3})^{-s/2}$$

равномерно ограничена при малых $\varepsilon > 0$. Но это не так, если $s < 3/2$. (Достаточно рассмотреть последовательность $\varepsilon_k = \alpha_j^{3/2}(\pi/2 + 2\pi k)^{-3/2}$, $k \in \mathbb{N}$.) Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

4.2. **Точность результатов относительно времени.** Теперь мы докажем следующее утверждение, подтверждающее точность теоремы 3.1 относительно зависимости от $\tau$ (при большом $|\tau|$).

**Теорема 4.5.** *Пусть* $N_0 \neq 0$.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (4.1) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (4.2) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon$.

*Доказательство.* Проверим утверждение $1^\circ$. Рассуждаем от противного. Предположим, что при каком-либо $s \geqslant 2$ существует положительная функция $C(\tau)$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (4.1) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$. В силу (1.9) и (4.3)–(4.5) это равносильно существованию функции $\widetilde{C}(\tau) > 0$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} \widetilde{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнено

$$\left\|\sum_{l=1}^{n}\left(\cos\left(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_l(t)}\right) - \cos\left(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_l}\right)\right)(\cdot, \omega_l)\omega_l\right\| \varepsilon^s(t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{4.18}$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.

Согласно (1.17), условие $N_0 \neq 0$ означает, что хотя бы для одного $j$ выполнено $\mu_j \neq 0$. Тогда справедливо (4.16). Применим оператор под знаком нормы в (4.18) к элементу $\omega_j$. Тогда

$$\left|\cos\left(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\right) - \cos\left(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\right)\right| \varepsilon^s(t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{4.19}$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$. Перепишем (4.19) в виде

$$2\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j(t)} + |t|\sqrt{\gamma_j}\right)\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j}\right)\right)\right| \varepsilon^s(t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon. \tag{4.20}$$

Используя (4.16), будем считать $t_*$ настолько малым, что

$$\frac{1}{4}|\mu_j|\gamma_j^{-1/2}t^2 \leqslant \left|\sqrt{\lambda_j(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j}\right| \leqslant \frac{3}{4}|\mu_j|\gamma_j^{-1/2}t^2, \quad |t| \leqslant t_*. \tag{4.21}$$

Пусть $\tau \neq 0$, и пусть $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*|\tau|$, $\varepsilon_* = (4\pi)^{-1}\gamma_j^{-1/2}|\mu_j|t_*^2$. Положим

$$t_\flat = t_\flat(\varepsilon, \tau) = c_\flat|\tau|^{-1/2}\varepsilon^{1/2}, \quad c_\flat = \sqrt{\pi/2}\,\gamma_j^{1/4}|\mu_j|^{-1/2}. \tag{4.22}$$

Тогда $t_\flat \leqslant t_*/2$ и в силу (4.21)

$$\left|\frac{\tau}{2\varepsilon}\left(\sqrt{\lambda_j(t_\flat)} - t_\flat\sqrt{\gamma_j}\right)\right| \leqslant \frac{3\pi}{16} < \frac{\pi}{4}. \tag{4.23}$$

Воспользуемся оценкой $|\sin y| \geqslant \frac{2}{\pi}|y|$ при $|y| \leqslant \pi/2$. Тогда с учетом (4.21)

$$\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\flat)} - t_\flat\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right| \geqslant \frac{|\tau|}{\pi\varepsilon}\left|\sqrt{\lambda_j(t_\flat)} - t_\flat\sqrt{\gamma_j}\right| \geqslant \frac{|\tau|}{4\pi\varepsilon}|\mu_j|\gamma_j^{-1/2}t_\flat^2 = \frac{1}{8}. \tag{4.24}$$

Теперь из (4.20) и (4.24) вытекает оценка

$$\frac{1}{4}\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\flat)} + t_\flat\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right|\varepsilon^s(t_\flat^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon,$$

что равносильно неравенству

$$\frac{1}{4}\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\flat)} + t_\flat\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right|(\varepsilon|\tau|)^{s/2-1}(c_\flat^2+\varepsilon|\tau|)^{-s/2} \leqslant \frac{\widetilde{C}(\tau)}{|\tau|}. \tag{4.25}$$

В силу (4.23) аргумент синуса в (4.25) отличается от $\varepsilon^{-1}\tau t_\flat\sqrt{\gamma_j} = (\operatorname{sgn}\tau)\sqrt{\gamma_j}c_\flat|\tau|^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$ не более, чем на $\pi/4$. Положим $\varepsilon_k = \gamma_j c_\flat^2|\tau|(2\pi k+\pi/2)^{-2}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим, так что $\varepsilon_k \leqslant \varepsilon_*|\tau|$. Пусть $t_k = t_\flat(\varepsilon_k,\tau)$. Тогда $\varepsilon_k^{-1}\tau t_k\sqrt{\gamma_j} = (\operatorname{sgn}\tau)(2\pi k+\pi/2)$, а потому

$$\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon_k}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_k)} + t_k\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right| \geqslant 1/\sqrt{2}.$$

Теперь из (4.25) при $\varepsilon = \varepsilon_k$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{4\sqrt{2}c_\flat^2}\left(\frac{\gamma_j\tau^2}{(2\pi k+\pi/2)^2}\right)^{s/2-1}\left(1+\frac{\gamma_j\tau^2}{(2\pi k+\pi/2)^2}\right)^{-s/2} \leqslant \frac{\widetilde{C}(\tau)}{|\tau|}$$

при всех достаточно больших $k$. По нашему предположению правая часть стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Полагая $\tau = \tau_k = 2\pi k + \pi/2$ и устремляя $k$ к бесконечности, приходим к противоречию.

Утверждение $2^\circ$ проверяется аналогично. Рассуждаем от противного. Предположим, что при некотором $r \geqslant 1$ существует положительная функция $C(\tau)$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (4.2) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$. Отсюда аналогично выводу неравенства (4.19), получаем, что

$$\left|\frac{\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\big)}{\sqrt{\lambda_j(t)}} - \frac{\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\big)}{|t|\sqrt{\gamma_j}}\right|\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau), \tag{4.26}$$

причем $\lim_{|\tau|\to\infty}\widetilde{C}(\tau)/|\tau| = 0$. В силу (4.16) величина $|(\lambda_j(t))^{-1/2} - |t|^{-1}\gamma_j^{-1/2}|$ равномерна ограничена при $|t| \leqslant t_*$. Поэтому из (4.26) вытекает оценка

$$\left|\sin\Big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\Big) - \sin\big(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\big)\right||t|^{-1}\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widehat{C}(\tau), \tag{4.27}$$

причем $\lim_{\tau\to\infty}\widehat{C}(\tau)/|\tau| = 0$. Перепишем (4.27) в виде

$$2\left|\cos\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t)} + |t|\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right||t|^{-1}\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widehat{C}(\tau). \tag{4.28}$$

Как прежде, считаем, что выполнено (4.21) и $\varepsilon \leqslant \varepsilon_*|\tau|$. Пусть $t_\flat$ определено в (4.22). Тогда выполнено (4.24). В итоге из (4.28) вытекает неравенство

$$\frac{1}{4}\left|\cos\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\flat)} + t_\flat\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right|t_\flat^{-1}\varepsilon^r(t_\flat^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widehat{C}(\tau),$$

что равносильно неравенству

$$\frac{1}{4}\left|\cos\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\flat)} + t_\flat\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right|\frac{(\varepsilon|\tau|)^{(r-1)/2}}{c_\flat(c_\flat^2+\varepsilon|\tau|)^{r/2}} \leqslant \frac{\widehat{C}(\tau)}{|\tau|}. \tag{4.29}$$

В силу (4.23) аргумент косинуса в (4.29) отличается от $\varepsilon^{-1}\tau t_\flat\sqrt{\gamma_j} = (\operatorname{sgn}\tau)\sqrt{\gamma_j}c_\flat|\tau|^{1/2}\varepsilon^{-1/2}$ не более, чем на $\pi/4$. Положим $\tilde{\varepsilon}_k = \gamma_j c_\flat^2|\tau|(2\pi k)^{-2}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим, так что $\tilde{\varepsilon}_k \leqslant \varepsilon_*|\tau|$. Пусть $\tilde{t}_k = t_\flat(\varepsilon_k,\tau)$. Тогда $\tilde{\varepsilon}_k^{-1}\tau\tilde{t}_k\sqrt{\gamma_j} = (\operatorname{sgn}\tau)2\pi k$. Поэтому

$$\left|\cos\left(\frac{\tau}{2\tilde{\varepsilon}_k}\Big(\sqrt{\lambda_j(\tilde{t}_k)} + \tilde{t}_k\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right| \geqslant 1/\sqrt{2}.$$

Теперь из (4.29) при $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_k$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{4\sqrt{2}c_\flat^2}\left(\frac{\gamma_j\tau^2}{(2\pi k)^2}\right)^{(r-1)/2}\left(1+\frac{\gamma_j\tau^2}{(2\pi k)^2}\right)^{-r/2} \leqslant \frac{\widehat{C}(\tau)}{|\tau|}$$

при всех достаточно больших $k$. По нашему предположению правая часть стремится к нулю при $\tau\to\infty$. Полагая $\tau = \tilde{\tau}_k = 2\pi k$ и устремляя $k$ к бесконечности, приходим к противоречию. $\square$

Теперь мы подтверждаем точность теоремы 3.5 относительно зависимости от $\tau$.

**Теорема 4.6.** *Пусть оператор $\Sigma(t,\tau)$ определен в* (2.19)*. Пусть $N_0 \neq 0$ и пусть $s \geqslant 2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка* (4.13) *при всех $\tau\in\mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.*

*Доказательство.* Будем рассуждать от противного. Предположим, что при некотором $s \geqslant 2$ существует положительная функция $C(\tau)$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (4.13) при всех $\tau\in\mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$. Тогда с учетом (1.19) выполнено

$$\big\|A(t)^{-1/2}\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2}\big)P - (I+tZ)(t^2S)^{-1/2}\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P\big)P\big\||t|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon, \tag{4.30}$$

причем $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{C}(\tau)/|\tau| = 0$. Поскольку

$$\big\|tZ(t^2S)^{-1/2}\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P\big)P\big\||t|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \|Z\|c_*^{-1/2}\varepsilon,$$

из (4.30) вытекает неравенство

$$\big\|A(t)^{-1/2}\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2}\big)P - (t^2S)^{-1/2}\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P\big)P\big\||t|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widehat{C}(\tau)\varepsilon, \tag{4.31}$$

причем $\lim_{\tau\to\infty}\widehat{C}(\tau)/|\tau| = 0$. Условие $N_0\neq 0$ означает, что $\mu_j\neq 0$ при некотором $j$.

Аналогично (4.26), из (4.31) получаем, что

$$\left|\frac{\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\big)}{\sqrt{\lambda_j(t)}} - \frac{\sin\big(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\big)}{|t|\sqrt{\gamma_j}}\right||t|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{C}(\tau)\varepsilon, \tag{4.32}$$

причем $\lim_{\tau\to\infty}\check{C}(\tau)/|\tau| = 0$. В силу (4.16) величина $|(\lambda_j(t))^{-1/2} - |t|^{-1}\gamma_j^{-1/2}|$ равномерна ограничена при $|t|\leqslant t_*$. Поэтому из (4.32) вытекает оценка

$$\left|\sin\Big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\Big) - \sin\big(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\big)\right|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{C}'(\tau)\varepsilon, \tag{4.33}$$

причем $\lim_{\tau\to\infty}\check{C}'(\tau)/|\tau| = 0$. Перепишем (4.33) в виде

$$2\left|\cos\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t)} + |t|\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right|\cdot\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{C}'(\tau)\varepsilon.$$

По аналогии с доказательством теоремы 4.5, подставляя $t = t_\flat$ (см. (4.22)), отсюда выводим

$$\frac{1}{4}\left|\cos\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\flat)} + t_\flat\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right|\frac{(\varepsilon|\tau|)^{s/2-1}}{(c_\flat^2+\varepsilon|\tau|)^{s/2}} \leqslant \frac{\check{C}'(\tau)}{|\tau|}. \tag{4.34}$$

Теперь из (4.34) при $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}_k = \gamma_j c_\flat^2|\tau|(2\pi k)^{-2}$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{4\sqrt{2}c_\flat^2}\left(\frac{\gamma_j\tau^2}{(2\pi k)^2}\right)^{s/2-1}\left(1+\frac{\gamma_j\tau^2}{(2\pi k)^2}\right)^{-s/2} \leqslant \frac{\check{C}'(\tau)}{|\tau|}$$

при всех достаточно больших $k$. Здесь правая часть стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Полагая $\tau = \tilde{\tau}_k = 2\pi k$ и устремляя $k$ к бесконечности, приходим к противоречию. $\square$

Далее, подтвердим точность теорем 3.2, 3.3 относительно зависимости от $\tau$.

**Теорема 4.7.** *Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$.*
*$1^\circ$. Пусть $s \geqslant 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (4.1) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.*
*$2^\circ$. Пусть $r \geqslant 1/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (4.2) при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.*

*Доказательство.* Условия $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p\}$ означают, что $\mu_l = 0$ при $l = 1, \dots, n$, и хотя бы для одного $j$ выполнено $\nu_j \neq 0$. Тогда справедливо разложение (4.7).

Проверим утверждение $1^\circ$. Рассуждая от противного, аналогично доказательству теоремы 4.2, приходим к неравенству

$$\left|\cos\Big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\Big) - \cos\left(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\right)\right| \varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{4.35}$$

при некотором $s \geqslant 3/2$, причем $\lim_{\tau\to\infty} \widetilde{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$. Перепишем (4.35) в виде

$$2\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t)} + |t|\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right| \cdot \left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right| \varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon. \tag{4.36}$$

Используя (4.7), будем считать $t_*$ настолько малым, что

$$\frac{1}{4}|\nu_j|\gamma_j^{-1/2}|t|^3 \leqslant \left|\sqrt{\lambda_j(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j}\right| \leqslant \frac{3}{4}|\nu_j|\gamma_j^{-1/2}|t|^3, \quad |t| \leqslant t_*. \tag{4.37}$$

Пусть $\tau \neq 0$, и пусть $\varepsilon \leqslant \varepsilon_\dagger|\tau|$, $\varepsilon_\dagger = (4\pi)^{-1}\gamma_j^{-1/2}|\nu_j|t_*^3$. Положим

$$t_\dagger = t_\dagger(\varepsilon,\tau) = c_\dagger|\tau|^{-1/3}\varepsilon^{1/3}, \quad c_\dagger = (\pi/2)^{1/3}\gamma_j^{1/6}|\nu_j|^{-1/3}. \tag{4.38}$$

Тогда $t_\dagger \leqslant t_*/2$ и в силу (4.37)

$$\left|\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\dagger)} - t_\dagger\sqrt{\gamma_j}\Big)\right| \leqslant \frac{3\pi}{16} < \frac{\pi}{4}. \tag{4.39}$$

Воспользуемся оценкой $|\sin y| \geqslant \frac{2}{\pi}|y|$ при $|y| \leqslant \pi/2$. Тогда с учетом (4.37)

$$\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\dagger)} - t_\dagger\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right| \geqslant \frac{|\tau|}{\pi\varepsilon}\left|\sqrt{\lambda_j(t_\dagger)} - t_\dagger\sqrt{\gamma_j}\right| \geqslant \frac{|\tau|}{4\pi\varepsilon}|\nu_j|\gamma_j^{-1/2}t_\dagger^3 = \frac{1}{8}. \tag{4.40}$$

Теперь из (4.36) и (4.40) вытекает оценка

$$\frac{1}{4}\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\dagger)} + t_\dagger\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right| \varepsilon^s(t_\dagger^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon,$$

что равносильно неравенству

$$\frac{1}{4}\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\dagger)} + t_\dagger\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right| (\varepsilon|\tau|^{1/2})^{2s/3-1}(c_\dagger^2 + \varepsilon^{4/3}|\tau|^{2/3})^{-s/2} \leqslant \frac{\widetilde{C}(\tau)}{|\tau|^{1/2}}. \tag{4.41}$$

В силу (4.39) аргумент синуса в (4.41) отличается от $\varepsilon^{-1}\tau t_\dagger\sqrt{\gamma_j} = (\operatorname{sgn}\tau)\sqrt{\gamma_j}c_\dagger|\tau|^{2/3}\varepsilon^{-2/3}$ не более, чем на $\pi/4$. Положим $\hat{\varepsilon}_k = \gamma_j^{3/4}c_\dagger^{3/2}|\tau|(2\pi k + \pi/2)^{-3/2}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим, так что $\hat{\varepsilon}_k \leqslant \varepsilon_\dagger|\tau|$. Пусть $\hat{t}_k = t_\dagger(\hat{\varepsilon}_k, \tau)$. Тогда $\hat{\varepsilon}_k^{-1}\tau\hat{t}_k\sqrt{\gamma_j} = (\operatorname{sgn}\tau)(2\pi k + \pi/2)$, а потому

$$\left|\sin\left(\frac{\tau}{2\hat{\varepsilon}_k}\Big(\sqrt{\lambda_j(\hat{t}_k)} + \hat{t}_k\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right| \geqslant 1/\sqrt{2}.$$

Теперь из (4.41) при $\varepsilon = \hat{\varepsilon}_k$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{4\sqrt{2}c_\dagger^{3/2}} \left( \frac{\gamma_j \tau^2}{(2\pi k + \pi/2)^2} \right)^{s/2-3/4} \left( 1 + \frac{\gamma_j \tau^2}{(2\pi k + \pi/2)^2} \right)^{-s/2} \leqslant \frac{\widetilde{C}(\tau)}{|\tau|^{1/2}} \tag{4.42}$$

при всех достаточно больших $k$. По предположению правая часть стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Полагая $\tau = \tau_k = 2\pi k + \pi/2$ и устремляя $k$ к бесконечности, приходим к противоречию.

Утверждение $2^\circ$ проверяется аналогично. Рассуждая от противного, при некотором $r \geqslant 1/2$ получаем неравенство

$$\left| \frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\right)}{\sqrt{\lambda_j(t)}} - \frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\right)}{|t|\sqrt{\gamma_j}} \right| \varepsilon^r (t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau), \tag{4.43}$$

причем $\lim_{\tau\to\infty} \widetilde{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$. В силу (4.7) величина $\left|\lambda_j(t)^{-1/2} - |t|^{-1}\gamma_j^{-1/2}\right|$ равномерно ограничена при $|t| \leqslant t_*$, а потому из (4.43) вытекает оценка

$$\left| \sin\left(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\right) - \sin\left(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\right) \right| |t|^{-1}\varepsilon^r (t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widehat{C}(\tau), \tag{4.44}$$

причем $\lim_{\tau\to\infty} \widehat{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$. Перепишем (4.44) в виде

$$2\left| \cos\left( \frac{\tau}{2\varepsilon}\left( \sqrt{\lambda_j(t)} + |t|\sqrt{\gamma_j} \right)\right)\right| \cdot \left| \sin\left( \frac{\tau}{2\varepsilon}\left( \sqrt{\lambda_j(t)} - |t|\sqrt{\gamma_j} \right)\right)\right| |t|^{-1}\varepsilon^r (t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widehat{C}(\tau).$$

Как прежде, считая $\varepsilon \leqslant \varepsilon_\dagger|\tau|$ и подставляя $t = t_\dagger$ (см. (4.38)), приходим к неравенству

$$\frac{1}{4}\left| \cos\left( \frac{\tau}{2\varepsilon}\left( \sqrt{\lambda_j(t_\dagger)} + t_\dagger\sqrt{\gamma_j} \right)\right)\right| t_\dagger^{-1}\varepsilon^r (t_\dagger^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widehat{C}(\tau),$$

что равносильно

$$\frac{1}{4c_\dagger}\left| \cos\left( \frac{\tau}{2\varepsilon}\left( \sqrt{\lambda_j(t_\dagger)} + t_\dagger\sqrt{\gamma_j} \right)\right)\right| (\varepsilon|\tau|^{1/2})^{(2r-1)/3} (c_\dagger^2 + \varepsilon^{4/3}|\tau|^{2/3})^{-r/2} \leqslant \frac{\widehat{C}(\tau)}{|\tau|^{1/2}}. \tag{4.45}$$

В силу (4.39) аргумент косинуса в (4.45) отличается от $\varepsilon^{-1}\tau t_\dagger\sqrt{\gamma_j} = (\operatorname{sgn}\tau)\sqrt{\gamma_j}c_\dagger|\tau|^{2/3}\varepsilon^{-2/3}$ не более, чем на $\pi/4$. Положим $\check{\varepsilon}_k = \gamma_j^{3/4}c_\dagger^{3/2}|\tau|(2\pi k)^{-3/2}$, считая $k \in \mathbb{N}$ достаточно большим. Пусть $\check{t}_k = t_\dagger(\check{\varepsilon}_k, \tau)$. Тогда $\check{\varepsilon}_k^{-1}\tau\check{t}_k\sqrt{\gamma_j} = (\operatorname{sgn}\tau)2\pi k$, а потому $\left|\cos\left(\frac{\tau}{2\check{\varepsilon}_k}\left(\sqrt{\lambda_j(\check{t}_k)} + \check{t}_k\sqrt{\gamma_j}\right)\right)\right| \geqslant 1/\sqrt{2}$. Теперь из (4.45) при $\varepsilon = \check{\varepsilon}_k$ вытекает неравенство

$$\frac{1}{4\sqrt{2}c_\dagger^{3/2}} \left( \frac{\gamma_j \tau^2}{(2\pi k)^2} \right)^{r/2-1/4} \left( 1 + \frac{\gamma_j \tau^2}{(2\pi k)^2} \right)^{-r/2} \leqslant \frac{\widehat{C}(\tau)}{|\tau|^{1/2}}$$

при всех достаточно больших $k$. По предположению правая часть стремится к нулю при $\tau \to \infty$. Полагая $\tau = \tilde{\tau}_k = 2\pi k$ и устремляя $k$ к бесконечности, приходим к противоречию. $\square$

Наконец, мы подтверждаем точность теорем 3.6 и 3.7 относительно зависимости от $\tau$.

**Теорема 4.8.** *Пусть оператор* $\Sigma(t,\tau)$ *определен в* (2.19). *Пусть* $N_0 = 0$ *и* $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ *при некотором* $q \in \{1,\dots,p\}$. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (4.13) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon$.

*Доказательство.* В условиях теоремы $\mu_l = 0$ при всех $l = 1,\dots,n$, и хотя бы для одного $j$ выполнено $\nu_j \neq 0$. Тогда справедливо разложение (4.7).

Рассуждая от противного, по аналогии с (4.30)–(4.32) убеждаемся, что при некотором $s \geqslant 3/2$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\right)}{\sqrt{\lambda_j(t)}} - \frac{\sin\left(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\right)}{|t|\sqrt{\gamma_j}} \right| |t|\varepsilon^s (t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon, \tag{4.46}$$

причем $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{C}(\tau)/|\tau|^{1/2}=0$. В силу (4.7) величина $\left|\lambda_j(t)^{-1/2}-|t|^{-1}\gamma_j^{-1/2}\right|$ равномерно ограничена при $|t|\leqslant t_*$, а потому из (4.46) вытекает оценка

$$\left|\sin\Big(\varepsilon^{-1}\tau\sqrt{\lambda_j(t)}\Big)-\sin\left(\varepsilon^{-1}\tau|t|\sqrt{\gamma_j}\right)\right|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2}\leqslant\widehat{C}(\tau)\varepsilon, \tag{4.47}$$

причем $\lim_{\tau\to\infty}\widehat{C}(\tau)/|\tau|^{1/2}=0$. Рассуждая аналогично (4.36)–(4.41), из (4.47) выводим неравенство

$$\frac{1}{4}\left|\cos\left(\frac{\tau}{2\varepsilon}\Big(\sqrt{\lambda_j(t_\dagger)}+t_\dagger\sqrt{\gamma_j}\Big)\right)\right|(\varepsilon|\tau|^{1/2})^{2s/3-1}(c_\dagger^2+\varepsilon^{4/3}|\tau|^{2/3})^{-s/2}\leqslant\frac{\widehat{C}(\tau)}{|\tau|^{1/2}}.$$

Аналогично (4.42), при $\varepsilon=\check{\varepsilon}_k=\gamma_j^{3/4}c_\dagger^{3/2}|\tau|(2\pi k)^{-3/2}$ отсюда следует неравенство

$$\frac{1}{4\sqrt{2}c_\dagger^{3/2}}\left(\frac{\gamma_j\tau^2}{(2\pi k)^2}\right)^{s/2-3/4}\left(1+\frac{\gamma_j\tau^2}{(2\pi k)^2}\right)^{-s/2}\leqslant\frac{\widehat{C}(\tau)}{|\tau|^{1/2}}$$

при всех достаточно больших $k$. По предположению правая часть стремится к нулю при $\tau\to\infty$. Полагая $\tau=\tilde{\tau}_k=2\pi k$ и устремляя $k$ к бесконечности, приходим к противоречию. $\square$

## § 5. Оператор вида $A(t)=M^*\widehat{A}(t)M$. Аппроксимация окаймлённых операторов $\cos(\tau A(t)^{1/2})$ и $A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})$

5.1. **Операторное семейство вида $A(t)=M^*\widehat{A}(t)M$.** Наряду с пространством $\mathfrak{H}$ рассмотрим ещё одно сепарабельное гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$. Пусть $\widehat{X}(t)=\widehat{X}_0+t\widehat{X}_1\colon\widehat{\mathfrak{H}}\to\mathfrak{H}_*$ — семейство операторов того же вида, что и $X(t)$, причём для $\widehat{X}(t)$ выполнены предположения п. 1.1. Пусть $M\colon\mathfrak{H}\to\widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм. Предположим, что

$$M\operatorname{Dom}X_0=\operatorname{Dom}\widehat{X}_0,\ X(t)=\widehat{X}(t)M,$$

а тогда и $X_0=\widehat{X}_0M$, $X_1=\widehat{X}_1M$. В $\widehat{\mathfrak{H}}$ введём семейство самосопряжённых операторов $\widehat{A}(t)=\widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Тогда, очевидно,

$$A(t)=M^*\widehat{A}(t)M. \tag{5.1}$$

Все объекты, отвечающие семейству $\widehat{A}(t)$, далее помечаются значком “ $\widehat{\ }$ ”. Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}}=M\mathfrak{N}$, $\widehat{n}=n$, $\widehat{\mathfrak{N}}_*=\mathfrak{N}_*$, $\widehat{n}_*=n_*$, $\widehat{P}_*=P_*$.

В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим положительно определённый оператор

$$Q:=(MM^*)^{-1}:\widehat{\mathfrak{H}}\to\widehat{\mathfrak{H}}.$$

Пусть $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора $Q$ в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$, т.е.

$$Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}=\widehat{P}Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}}\colon\widehat{\mathfrak{N}}\to\widehat{\mathfrak{N}}.$$

Очевидно, $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [Su2, предложение 1.2], ортопроектор $P$ в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и ортопроектор $\widehat{P}$ в $\widehat{\mathfrak{H}}$ на $\widehat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением

$$P=M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1}. \tag{5.2}$$

Пусть $\widehat{S}\colon\widehat{\mathfrak{N}}\to\widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{A}(t)$ при $t=0$, а $S$ — росток семейства $A(t)$. В [BSu1, гл. 1, п. 1.5] установлено следующее тождество:

$$S=PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{5.3}$$

Мы предполагаем, что для $A(t)$ выполнено условие 1.4. Тогда росток $S$ (как и $\widehat{S}$) невырожден.

5.2. **Операторы $\widehat{Z}_Q$ и $\widehat{N}_Q$.** Для операторного семейства $\widehat{A}(t)$ введём оператор $\widehat{Z}_Q$, действующий в $\widehat{\mathfrak{H}}$ и сопоставляющий элементу $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ решение $\widehat{\phi}_Q$ задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\phi}_Q + \widehat{X}_1\widehat{\omega}) = 0, \quad Q\widehat{\phi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}},$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Как показано в [BSu2, §6], оператор $Z$ для семейства $A(t)$ и введённый оператор $\widehat{Z}_Q$ связаны соотношением

$$\widehat{Z}_Q = MZM^{-1}\widehat{P}. \tag{5.4}$$

Введём оператор

$$\widehat{N}_Q := \widehat{Z}_Q^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_Q. \tag{5.5}$$

Согласно [BSu2, §6], оператор $N$ для семейства $A(t)$ и введённый оператор (5.5) связаны соотношением

$$\widehat{N}_Q = \widehat{P}(M^*)^{-1}NM^{-1}\widehat{P}. \tag{5.6}$$

Напомним, что $N = N_0 + N_*$ и определим операторы

$$\widehat{N}_{0,Q} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_0M^{-1}\widehat{P}, \qquad \widehat{N}_{*,Q} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_*M^{-1}\widehat{P}. \tag{5.7}$$

Тогда $\widehat{N}_Q = \widehat{N}_{0,Q} + \widehat{N}_{*,Q}$.

Справедлива следующая лемма, доказанная в [Su6, лемма 5.1].

**Лемма 5.1** ([Su6]). *Пусть выполнены предположения п.* 5.1. *Пусть операторы $N$ и $N_0$ определены в* (1.16) *и* (1.21), *а операторы $\widehat{N}_Q$ и $\widehat{N}_{0,Q}$ определены в* (5.5) *и* (5.7). *Тогда условие $N = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_Q = 0$. Условие $N_0 = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_{0,Q} = 0$.*

5.3. **Операторы $\widehat{Z}_{2,Q}$, $\widehat{R}_{2,Q}$ и $\widehat{N}^0_{1,Q}$.** Пусть $\widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{N}}$ и пусть $\widehat{\psi}_Q = \widehat{\psi}_Q(\widehat{\omega}) \in \operatorname{Dom}\widehat{X}_0$ — (слабое) решение задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\psi}_Q + \widehat{X}_1\widehat{Z}_Q\widehat{\omega}) = -\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{\omega} + QQ_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{\omega}, \quad Q\widehat{\psi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Ясно, что правая часть уравнения принадлежит $\widehat{\mathfrak{N}}^\perp = \operatorname{Ran}\widehat{X}_0^*$, а потому условие разрешимости выполнено. Определим оператор $\widehat{Z}_{2,Q} : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ соотношением $\widehat{Z}_{2,Q}\widehat{u} = \widehat{\psi}_Q(\widehat{P}\widehat{u})$, $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$. Далее, определим оператор $\widehat{R}_{2,Q} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \mathfrak{H}_*$ формулой $\widehat{R}_{2,Q} := \widehat{X}_0\widehat{Z}_{2,Q} + \widehat{X}_1\widehat{Z}_Q$.

Наконец, определим оператор $\widehat{N}^0_{1,Q}$ соотношением

$$\widehat{N}^0_{1,Q} = \widehat{Z}^*_{2,Q}\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_{2,Q} + \widehat{R}^*_{2,Q}\widehat{R}_{2,Q}\widehat{P}. \tag{5.8}$$

В [VSu1, п. 6.3] установлены следующие тождества:

$$\widehat{Z}_{2,Q} = MZ_2M^{-1}\widehat{P}, \quad \widehat{R}_{2,Q} = R_2M^{-1}|_{\widehat{\mathfrak{N}}},$$
$$\widehat{N}^0_{1,Q} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_1^0M^{-1}\widehat{P}.$$

5.4. **Связь операторов и коэффициентов степенных разложений.** Укажем связь коэффициентов степенных разложений (1.5), (1.6) и операторов $\widehat{S}$ и $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. (См. [BSu3, п. 1.6, 1.7].) Положим $\zeta_l := M\omega_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1, \dots, n$. Тогда из (1.7) и (5.2), (5.3) видно, что

$$\widehat{S}\zeta_l = \gamma_l Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \quad l = 1, \dots, n. \tag{5.9}$$

Набор $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ образует базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$, ортонормированный с весом $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$:

$$(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \zeta_j) = \delta_{lj}, \qquad l, j = 1, \dots, n. \tag{5.10}$$

Операторы $\widehat{N}_{0,Q}$ и $\widehat{N}_{*,Q}$ можно описать в терминах коэффициентов степенных разложений (1.5) и (1.6); ср. (1.14). Положим $\widetilde{\zeta}_l := M\widetilde{\omega}_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1, \dots, n$. Тогда

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{0,Q} &= \sum_{k=1}^{n} \mu_k(\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k) Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k, \\ \widehat{N}_{*,Q} &= \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \left( (\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_k) Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k + (\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k) Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_k \right). \end{aligned} \tag{5.11}$$

**Замечание 5.2.** *В силу* (5.10) *и* (5.11) *выполнены соотношения*

$$(\widehat{N}_{0,Q}\zeta_j, \zeta_l) = \mu_l \delta_{jl}, \qquad j, l = 1, \dots, n,$$
$$(\widehat{N}_{*,Q}\zeta_j, \zeta_l) = \gamma_l(\zeta_j, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_l) + \gamma_j(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_j, \zeta_l), \qquad j, l = 1, \dots, n,$$

Соотношения (1.18) влекут

$$(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_j, \zeta_l) + (\zeta_j, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_l) = 0, \qquad j, l = 1, \dots, n.$$

Отсюда видно, что

$$(\widehat{N}_{*,Q}\zeta_j, \zeta_l) = 0, \quad \text{если}\, \gamma_j = \gamma_l.$$

Перейдём теперь к обозначениям, принятым в п. 1.7. Напомним, что различные собственные значения ростка $S$ обозначаются через $\gamma_j^\circ$, $j = 1, \dots, p$, а соответствующие собственные подпространства через $\mathfrak{N}_j$. Векторы $\omega_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, k_j$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_j$. Тогда те же числа $\gamma_j^\circ$, $j = 1, \dots, p$ — это различные собственные значения задачи (5.9), а $M\mathfrak{N}_j = \operatorname{Ker}(\widehat{S} - \gamma_j^\circ Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}) =: \widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}$ — соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_i^{(j)} = M\omega_i^{(j)}$, $i = 1, \dots, k_j$, образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}$, ортонормированный с весом $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Через $\mathcal{P}_j$ обозначим "косой" проектор на $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}$, ортогональный относительно скалярного произведения $(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\cdot, \cdot)$, т. е.

$$\mathcal{P}_j = \sum_{i=1}^{k_j} (\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_i^{(j)})\zeta_i^{(j)}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Легко видеть, что $\mathcal{P}_j = MP_jM^{-1}\widehat{P}$. Можно указать аналог соотношений (1.21). Используя (1.21), (5.6) и (5.7), нетрудно проверить равенства

$$\widehat{N}_{0,Q} = \sum_{j=1}^{p} \mathcal{P}_j^* \widehat{N}_Q \mathcal{P}_j, \quad \widehat{N}_{*,Q} = \sum_{\substack{1 \leqslant l,j \leqslant p: \\ l \neq j}} \mathcal{P}_l^* \widehat{N}_Q \mathcal{P}_j, \tag{5.12}$$

дающие инвариантные представления операторов $\widehat{N}_{0,Q}$, $\widehat{N}_{*,Q}$.

5.5. **Коэффициенты $\nu_l$.** Коэффициенты $\nu_l$ из разложений (1.5) и векторы $\zeta_l = M\omega_l$, $l = 1, \dots, n$, являются собственными значениями и собственными элементами некоторой задачи; см. [D1, п. 3.4]. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\mu_l = 0$, $l = 1, \dots, n$, то есть, $\widehat{N}_{0,Q} = 0$.

**Предложение 5.3** ([D1]). *Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$. Пусть оператор $\widehat{N}_{1,Q}^0$ определен в* (5.8). *Пусть $\gamma_1^\circ, \dots, \gamma_p^\circ$ — различные собственные значения задачи* (5.9), *а $k_1, \dots, k_p$ — их кратности. Пусть $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q} = \operatorname{Ker}(\widehat{S} - \gamma_q^\circ Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})$ и $\widehat{P}_{q,Q}$ — ортопроектор пространства $\widehat{\mathfrak{H}}$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}$, $q = 1, \dots, p$. Введем операторы $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}$, $q = 1, \dots, p$: оператор $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}$ действует в $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}$ и задается* *выражением*

$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} := \widehat{P}_{q,Q}\Big(\widehat{N}_{1,Q}^0 - \frac{1}{2}\widehat{Z}_Q^* Q\widehat{Z}_Q Q^{-1}\widehat{S}\widehat{P} - \frac{1}{2}\widehat{S}\widehat{P}Q^{-1}\widehat{Z}_Q^* Q\widehat{Z}_Q\Big)\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}} + \sum_{j=1,\dots,p:j\neq q}(\gamma_q^\circ - \gamma_j^\circ)^{-1}\widehat{P}_{q,Q}\widehat{N}_Q\widehat{P}_{j,Q}Q^{-1}\widehat{P}_{j,Q}\widehat{N}_Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}}.$$

*Пусть* $\nu_l$, $l = 1,\dots,n$, *— коэффициенты при* $t^4$ *из разложений* (1.5). *Тогда числа* $\nu_l$ *и векторы* $\zeta_l$ *при* $l = i(q), i(q)+1,\dots,i(q)+k_q-1$, *где* $i(q) = k_1 + \dots + k_{q-1} + 1$, *являются собственными значениями и собственными элементами задачи*

$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}\zeta_l = \nu_l Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}}\zeta_l, \quad l = i(q), i(q)+1,\dots,i(q)+k_q-1.$$

*Здесь* $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}} = \widehat{P}_{q,Q}Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}}$.

5.6. **Аппроксимация окаймлённых операторов** $\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$ **и** $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$**.** В этом пункте мы находим аппроксимации для операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$ и $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$ семейства вида (5.1) в терминах ростка $\widehat{S}$ оператора $\widehat{A}(t)$ и изоморфизма $M$. При этом оказывается удобным окаймить рассматриваемые операторы подходящими множителями.

Положим $M_0 := (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2}$. Справедливы тождества

$$M\cos(\tau(t^2S)^{1/2}P)PM^* = M_0\cos(\tau(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0\widehat{P}, \tag{5.13}$$

$$M(t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)PM^* = M_0(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(\tau(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0\widehat{P}, \tag{5.14}$$

$$M(t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)M^{-1}\widehat{P} = M_0(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(\tau(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0^{-1}\widehat{P}. \tag{5.15}$$

Соотношение (5.13) проверено в [BSu5, предложение 3.3], а (5.14) получается из (5.13) интегрированием по $\tau$. Наконец, соотношение (5.15) вытекает из (5.14) домножением справа на $M_0^{-2}\widehat{P} = Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widehat{P}$ с учетом (5.2).

Введём обозначения

$$J_1(t,\tau) := M\cos(\tau A(t)^{1/2})M^{-1}\widehat{P} - M_0\cos(\tau(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0^{-1}\widehat{P}, \tag{5.16}$$

$$J_2(t,\tau) := MA(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})M^{-1}\widehat{P} - M_0(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(\tau(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0^{-1}\widehat{P}, \tag{5.17}$$

$$\widetilde{J}_3(t,\tau) := MA(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})PM^* - M_0(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(\tau(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0\widehat{P}, \tag{5.18}$$

$$J_3(t,\tau) := MA(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})M^*\widehat{P} - M_0(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(\tau(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0\widehat{P}. \tag{5.19}$$

**Лемма 5.4.** *В предположениях п.* 5.1 *справедливы оценки*

$$\|J_1(t,\tau)\| \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|\|\cos(\tau A(t)^{1/2})P - \cos(\tau(t^2S)^{1/2}P)P\|, \tag{5.20}$$

$$\|J_2(t,\tau)\| \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|\|A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)P\|, \tag{5.21}$$

$$\|\widetilde{J}_3(t,\tau)\| \leqslant \|M\|^2\|A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)P\|, \tag{5.22}$$

$$\|\cos(\tau A(t)^{1/2})P - \cos(\tau(t^2S)^{1/2}P)P\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|J_1(t,\tau)\|, \tag{5.23}$$

$$\|A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)P\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|J_2(t,\tau)\|, \tag{5.24}$$

$$\|A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)P\| \leqslant \|M^{-1}\|^2\|\widetilde{J}_3(t,\tau)\|. \tag{5.25}$$

*Доказательство.* Неравенства (5.20), (5.22), (5.23) и (5.25) проверены в [DSu2, лемма 4.2].

В силу (5.15) и (5.17) имеем

$$J_2(t,\tau) = M\left(A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)P\right)M^{-1}\widehat{P}. \tag{5.26}$$

Отсюда вытекает неравенство (5.21).

Обратно, очевидно, что

$$
\begin{aligned}
&\|A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P - (t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)P\| \\
&\leqslant \|M^{-1}\|^2\|MA(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})PM^* - M(t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)PM^*\|.
\end{aligned}
$$

Используя соотношение $PM^* = M^{-1}Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}$ (см. (5.2)), (5.15) и (5.26), запишем правую часть в виде $\|M^{-1}\|^2\|J_2(t,\tau)Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}\|$. Вместе с неравенством $\|Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}\| \leqslant \|M\|^2$ (вытекающим из равенства $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P} = MPM^*$) это влечет (5.24). $\square$

В силу (5.2), $PM^* = M^{-1}Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}$. Следовательно, $PM^* = PM^*\widehat{P}$. Из (5.18) и (5.19) видно, что

$$J_3(t,\tau) - \widetilde{J}_3(t,\tau) = MA(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})(I-P)M^*\widehat{P}.$$

Применяя (1.10) и (1.19), получаем

$$\|J_3(t,\tau) - \widetilde{J}_3(t,\tau)\| \leqslant \|M\|^2\bigl(\delta^{-1/2} + C_1c_*^{-1/2}\bigr) =: \widetilde{C}, \quad \tau\in\mathbb{R},\ |t|\leqslant t_0. \tag{5.27}$$

Используя неравенства (5.20)–(5.22), (5.27) и принимая во внимание лемму 5.1, мы выводим следующие три теоремы из теорем 3.1, 3.2 и 3.3. В формулировках используются обозначения (5.16), (5.17), (5.19).

**Теорема 5.5** ([BSu5],[M2],[DSu2])**.** *В предположениях пункта* 5.1 *при* $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $|t|\leqslant t_0$ *выполнены оценки*

$$\|J_1(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_1 + C_6|\tau|)\varepsilon, \tag{5.28}$$

$$\|J_2(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_7 + C_8|\tau|), \tag{5.29}$$

$$\|J_3(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant \|M\|^2(C_7 + C_8|\tau|) + \widetilde{C}. \tag{5.30}$$

Ранее оценка (5.28) была установлена в [BSu5, теорема 3.4], (5.29) — в [M2, теорема 3.3], а (5.30) — в [DSu2, теорема 4.3].

**Теорема 5.6.** *Пусть выполнены условия теоремы* 5.5*. Пусть оператор* $\widehat{N}_Q$*, определенный в* (5.5)*, равен нулю*: $\widehat{N}_Q = 0$*. Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $|t|\leqslant t_0$ *выполнены оценки*

$$\|J_1(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(2C_1 + C_9'|\tau|^{1/2})\varepsilon, \tag{5.31}$$

$$\|J_2(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_7 + C_{10}'|\tau|^{1/2}), \tag{5.32}$$

$$\|J_3(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant \|M\|^2(C_7 + C_{10}'|\tau|^{1/2}) + \widetilde{C}. \tag{5.33}$$

**Теорема 5.7.** *Пусть выполнены условия теоремы* 5.5*. Пусть оператор* $\widehat{N}_{0,Q}$*, определенный в* (5.12)*, равен нулю*: $\widehat{N}_{0,Q} = 0$*. Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $|t|\leqslant t^{00}$ *выполнены оценки*

$$
\begin{aligned}
&\|J_1(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_{11} + C_{12}'|\tau|^{1/2})\varepsilon, \\
&\|J_2(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant \|M\|\|M^{-1}\|(C_{13} + C_{14}'|\tau|^{1/2}), \\
&\|J_3(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^{1/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-1/4} \leqslant \|M\|^2(C_{13} + C_{14}'|\tau|^{1/2}) + \widetilde{C}.
\end{aligned}
$$

5.7. **Аппроксимация окаймлённого оператора** $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})$ **по “энергетической” норме.** Введём обозначение

$$J(t,\tau) := MA(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})M^{-1}\widehat{P} - (I + t\widehat{Z}_Q)M_0(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{-1/2}\sin(\tau(t^2M_0\widehat{S}M_0)^{1/2})M_0^{-1}\widehat{P}. \tag{5.34}$$

**Лемма 5.8.** *Пусть* $\Sigma(t,\tau)$ *— оператор* (2.19) *и* $J(t,\tau)$ *— оператор* (5.34)*. В предположениях пункта* 5.1 *справедливы оценки*

$$\|\widehat{A}(t)^{1/2}J(t,\tau)\| \leqslant \|M^{-1}\|\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\tau)\|, \tag{5.35}$$

$$\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\tau)\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|\|\widehat{A}(t)^{1/2}J(t,\tau)\|. \tag{5.36}$$

*Доказательство.* Из (5.4) и (5.15) вытекает, что
$$J(t,\tau) = M\Sigma(t,\tau)M^{-1}\widehat{P}. \tag{5.37}$$
Соотношения (5.1) и (5.37) влекут (5.35).

Обратно, очевидно, что
$$\|A(t)^{1/2}\Sigma(t,\tau)\|$$
$$\leqslant \|M^{-1}\|\|A(t)^{1/2}\left(A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})P - (I+tZ)(t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)\right)PM^*\|.$$
Учитывая равенство $PM^* = M^{-1}Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}$ и тождества (5.4) и (5.15), преобразуем правую часть к виду $\|M^{-1}\|\|\widehat{A}(t)^{1/2}J(t,\tau)Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}\|$. Вместе с неравенством $\|Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}^{-1}\widehat{P}\| \leqslant \|M\|^2$ это влечет (5.36). $\square$

Применяя неравенство (5.35) и принимая во внимание лемму 5.1, из теорем 3.5, 3.6, 3.7 получаем следующие результаты. Здесь используется обозначение (5.34).

**Теорема 5.9** ([M2]). *В предположениях пункта* 5.1 *при* $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $|t|\leqslant t_0$ *выполнена оценка*
$$\|\widehat{A}(t)^{1/2}J(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M^{-1}\|(C_{17}+C_{18}|\tau|)\varepsilon.$$

Теорема 5.9 была известна ранее (см. [M2, теорема 3.3]).

**Теорема 5.10.** *Пусть выполнены условия теоремы* 5.9 *и пусть оператор* $\widehat{N}_Q$, *определённый в* (5.6), *равен нулю*: $\widehat{N}_Q=0$. *Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $|t|\leqslant t_0$ *выполнена оценка*
$$\|\widehat{A}(t)^{1/2}J(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant \|M^{-1}\|(C_{17}+C_{19}'|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

**Теорема 5.11.** *Пусть выполнены условия теоремы* 5.9 *и пусть оператор* $\widehat{N}_{0,Q}$, *определённый в* (5.12), *равен нулю*: $\widehat{N}_{0,Q}=0$. *Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $|t|\leqslant t^{00}$ *выполнена оценка*
$$\|\widehat{A}(t)^{1/2}J(t,\varepsilon^{-1}\tau)\|\varepsilon^{3/2}(t^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant \|M^{-1}\|(C_{20}+C_{21}'|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

## § 6. Подтверждение точности результатов §5

6.1. **Подтверждение точности результатов относительно сглаживающего множителя.** Следующая теорема подтверждает точность теоремы 5.5 в общем случае.

**Теорема 6.1.** *Пусть выполнены предположения пункта* 5.1. *Пусть* $\widehat{N}_{0,Q}\neq 0$.
$1^\circ$. *Пусть* $\tau\neq 0$ *и* $0\leqslant s<2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau)>0$, *чтобы оценка*
$$\big\|J_1(t,\varepsilon^{-1}\tau)\big\|\,\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon \tag{6.1}$$
*выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon>0$.
$2^\circ$. *Пусть* $\tau\neq 0$ *и* $0\leqslant r<1$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau)>0$, *чтобы оценка*
$$\big\|J_2(t,\varepsilon^{-1}\tau)\big\|\,\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant C(\tau) \tag{6.2}$$
*выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon>0$.
$3^\circ$. *Пусть* $\tau\neq 0$ *и* $0\leqslant r<1$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau)>0$, *чтобы оценка*
$$\big\|J_3(t,\varepsilon^{-1}\tau)\big\|\,\varepsilon^r(t^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant C(\tau) \tag{6.3}$$
*выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon>0$.

*Доказательство.* Утверждения $1^\circ$ и $3^\circ$ доказаны в [DSu2, теорема 4.6].

Докажем утверждение $2^\circ$. В силу леммы 5.1 условие $\widehat{N}_{0,Q}\neq 0$ равносильно условию $N_0\neq 0$. Рассуждая от противного и используя неравенство (5.24), получаем, что выполнено (4.2) при некотором $0\leqslant r<1$. Но это противоречит утверждению $2^\circ$ теоремы 4.1. $\square$

Далее, подтвердим точность теорем 5.6 и 5.7. (Результаты для $J_2$ опускаем, поскольку они не будут использованы в дальнейшем при изучении ДО.)

**Теорема 6.2.** *Пусть выполнены предположения пункта* 5.1. *Пусть* $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ *и* $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ *при некотором* $q$ (*то есть,* $\nu_l \neq 0$ *при некотором* $l$).
$1^\circ$. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (6.1) *выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant r < 1/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (6.3) *выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

*Доказательство.* В силу леммы 5.1 условие $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ равносильно условию $N_0 = 0$. Далее, согласно предложению 5.3 условие $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ при некотором $q$ означает, что $\nu_l \neq 0$ при некотором $l \in \{i(q), \dots, i(q) + k_q - 1\}$. В силу предложения 1.7 отсюда следует, что $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$. Таким образом, выполнены условия теоремы 4.2.

Докажем утверждение $1^\circ$. Предполагая противное и используя неравенство (5.23), получаем, что выполнено (4.1) при некотором $0 \leqslant s < 3/2$. Но это противоречит утверждению $1^\circ$ теоремы 4.2.

Аналогично проверяется утверждение $2^\circ$ с помощью (5.25), (5.27) и утверждения $2^\circ$ теоремы 4.2. $\square$

Покажем теперь, что результат теоремы 5.9 неулучшаем в общей ситуации.

**Теорема 6.3.** *Пусть выполнены условия пункта* 5.1. *Пусть* $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$. *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\big\| \widehat{A}(t)^{1/2} J(t, \varepsilon^{-1}\tau) \big\| \varepsilon^s (t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon \tag{6.4}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

*Доказательство.* В силу леммы 5.1 из условий теоремы следует, что $N_0 \neq 0$.

Рассуждаем от противного. Пусть для некоторых $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 2$ существует такая постоянная $C(\tau) > 0$, что выполнено (6.4) при всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$. В силу оценки (5.36) отсюда следует, что выполнено также неравенство вида (4.13) (с другой константой). Но это противоречит утверждению теоремы 4.3. $\square$

Наконец, мы подтверждаем точность теорем 5.10 и 5.11.

**Теорема 6.4.** *Пусть выполнены условия пункта* 5.1. *Пусть* $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ *и* $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ *при некотором* $q$ (*то есть,* $\nu_l \neq 0$ *при некотором* $l$). *Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Не существует такой постоянной* $C(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (6.4) *выполнялась при всех достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon > 0$.

*Доказательство.* Условия теоремы означают, что выполнены также условия теоремы 4.4.

Рассуждая от противного и применяя (5.36), получаем неравенство вида (4.13) с некоторым $s < 3/2$, а это противоречит утверждению теоремы 4.4. $\square$

6.2. **Подтверждение точности результатов относительно времени.** С помощью леммы 5.1 и (5.23)–(5.25), (5.27) из теоремы 4.5 выводим следующий результат, подтверждающий точность теоремы 5.5 относительно зависимости от $\tau$.

**Теорема 6.5.** *Пусть* $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (6.1) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (6.2) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon$.
$3^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $C(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (6.3) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малых* $|t|$ *и* $\varepsilon$.

Аналогичным образом, из леммы 5.1, неравенства (5.36) и теоремы 4.6 вытекает следующий результат, подтверждающий точность теоремы 5.9.

**Теорема 6.6.** *Пусть оператор $J(t,\tau)$ определен в* (5.34). *Пусть $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$ и пусть $s \geqslant 2$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка* (6.4) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.*

Аналогично доказательству теоремы 6.2 из теоремы 4.7 выводим следующий результат, демонстрирующий точность теорем 5.6 и 5.7.

**Теорема 6.7.** *Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ и $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1,\dots,p\}$.*
$1^\circ$. *Пусть $s \geqslant 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка* (6.1) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.*
$2^\circ$. *Пусть $r \geqslant 1/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка* (6.3) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.*

Наконец, аналогично доказательству теоремы 6.4 из теоремы 4.8 вытекает следующее утверждение, которое показывает, что теоремы 5.10, 5.11 неулучшаемы в отношении зависимости оценок от $\tau$.

**Теорема 6.8.** *Пусть оператор $J(t,\tau)$ определен в* (5.34). *Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ и $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ при некотором $q \in \{1,\dots,p\}$. Пусть $s \geqslant 3/2$. Не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка* (6.4) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon$.*

# Глава 2. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

## § 7. Класс дифференциальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

7.1. **Решётки. Ряд Фурье.** Пусть $\Gamma$ — решётка в $\mathbb{R}^d$, порождённая базисом $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$:

$$\Gamma = \left\{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{a}_j,\ n_j \in \mathbb{Z}\right\},$$

и пусть $\Omega$ — элементарная ячейка решётки $\Gamma$:

$$\Omega := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \xi_j \mathbf{a}_j,\ 0 < \xi_j < 1\right\}.$$

Базис $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_d$, двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}_l, \mathbf{a}_j\rangle = 2\pi\delta_{lj}$. Этот базис порождает решётку $\widetilde{\Gamma}$, *двойственную* к решётке $\Gamma$:

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b} = \sum_{j=1}^d m_j \mathbf{b}_j,\ m_j \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Обозначим через $\widetilde{\Omega}$ центральную *зону Бриллюэна* решётки $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega} = \left\{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|,\ 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}\right\}. \tag{7.1}$$

Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes}\widetilde{\Omega}$ и отметим, что $|\Omega||\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Пусть $r_0$ — радиус шара, *вписанного* в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$, и пусть $r_1 := \max_{\mathbf{k}\in\partial\widetilde{\Omega}} |\mathbf{k}|$. Отметим, что

$$2r_0 = \min|\mathbf{b}|, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}. \tag{7.2}$$

С решёткой $\Gamma$ связано дискретное преобразование Фурье

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \hat{\mathbf{v}}_{\mathbf{b}} \exp(i\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{7.3}$$

которое унитарно отображает $l_2(\widetilde{\Gamma};\mathbb{C}^n)$ на $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$:

$$\int_\Omega |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{b}|^2. \tag{7.4}$$

*Через* $\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ *обозначается подпространство тех функций из* $H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$, $\Gamma$-*периодическое продолжение которых на* $\mathbb{R}^d$ *принадлежит* $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Имеет место равенство

$$\int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}|^2\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{b}|^2, \quad \mathbf{v}\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d, \tag{7.5}$$

причём сходимость ряда в правой части (7.5) равносильна включению $\mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Из (7.1), (7.4) и (7.5) следует оценка

$$\int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \geqslant \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{k}|^2 \int_\Omega |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v}\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \tag{7.6}$$

7.2. **Преобразование Гельфанда.** Преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ первоначально определяется на функциях из класса Шварца $\mathbf{v}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ формулой:

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k},\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle} \mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \quad \mathbf{v}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.$$

При этом

$$\int_{\widetilde{\Omega}}\int_\Omega |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

и $\mathcal{U}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) d\mathbf{k} =: \mathcal{H}.$$

Включение $\mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ при п.в. $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и

$$\int_{\widetilde{\Omega}}\int_\Omega \left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\right) d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ под действием $\mathcal{U}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{H}$. Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

7.3. **Факторизованные операторы $\mathcal{A}$ второго порядка.** Пусть $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$, где $b_l$ — постоянные $(m\times n)$-матрицы (вообще говоря, с комплексными элементами). *Предполагается, что* $m \geqslant n$. Рассмотрим символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$ и *предположим, что* $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, 0 \neq \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$. Это равносильно тому, что для некоторых $\alpha_0,\alpha_1>0$ выполнены неравенства:

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}, \quad 0<\alpha_0\leqslant\alpha_1<\infty. \tag{7.7}$$

Отметим, что из (7.7) вытекают оценки для норм матриц $b_l$:

$$|b_l| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad l=1,\dots,d. \tag{7.8}$$

Пусть $f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,$ — $\Gamma$-периодическая $(n\times n)$-матричнозначная функция и $h(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,$ — $\Gamma$-периодическая $(m\times m)$-матричнозначная функция, причем

$$f, f^{-1}\in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h, h^{-1}\in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{7.9}$$

Рассмотрим ДО

$$\mathcal{X} = hb(\mathbf{D})f\colon L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m),$$
$$\operatorname{Dom}\mathcal{X} = \left\{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\colon f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\right\}.$$

Оператор $\mathcal{X}$ замкнут. Самосопряжённый оператор $\mathcal{A} = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Формально,

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}), \tag{7.10}$$

где $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x})$. Используя преобразование Фурье и (7.7), (7.9), можно показать

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2} \leqslant \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2}, \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}. \tag{7.11}$$

7.4. **Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$.** Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m) \tag{7.12}$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k})\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, заданный соотношениями

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})f, \quad \operatorname{Dom}\mathcal{X}(\mathbf{k}) = \left\{\mathbf{u} \in \mathfrak{H}\colon f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)\right\} =: \mathfrak{d}.$$

Самосопряжённый оператор

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{X}(\mathbf{k})^*\mathcal{X}(\mathbf{k})\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$$

порождается квадратичной формой

$$\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}.$$

Используя разложение функции $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$ в ряд Фурье (7.3) и условия (7.7), (7.9), легко проверить оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \tag{7.13}$$

Из нижней оценки (7.13) и из (7.6) вытекает, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_*|\mathbf{k}|^2 I, \qquad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega},\ c_* = \alpha_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{7.14}$$

Положим

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker}\mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker}\mathcal{X}(0). \tag{7.15}$$

Соотношения (7.13) при $\mathbf{k} = 0$ показывают, что

$$\mathfrak{N} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\colon f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad \dim\mathfrak{N} = n. \tag{7.16}$$

Как видно из (7.2) и (7.5) при $\mathbf{k} = 0$, для функции $\mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ такой, что $\int_\Omega \mathbf{v}\, d\mathbf{x} = 0$, т.е. $\hat{\mathbf{v}}_0 = 0$, выполнено

$$\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant 4r_0^2 \|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),\ \int_\Omega \mathbf{v}\, d\mathbf{x} = 0. \tag{7.17}$$

Из (7.17) и из нижней оценки (7.13) при $\mathbf{k} = 0$ следует, что расстояние $d^0$ от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ подчинено оценке

$$d^0 \geqslant 4c_* r_0^2. \tag{7.18}$$

7.5. **Зонные функции.** Обозначим через $E_j(\mathbf{k})$, $j \in \mathbb{N}$, последовательные (с учётом кратностей) собственные значения оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ (зонные функции):

$$E_1(\mathbf{k}) \leqslant E_2(\mathbf{k}) \leqslant \ldots \leqslant E_j(\mathbf{k}) \leqslant \ldots, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d.$$

Зонные функции $E_j(\mathbf{k})$ непрерывны и $\widetilde{\Gamma}$-периодичны. Как показано в [BSu1, гл. 2, п. 2.2] (на основании простых вариационных соображений), зонные функции удовлетворяют следующим оценкам:

$$\begin{aligned} E_j(\mathbf{k}) &\geqslant c_*|\mathbf{k}|^2, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \quad j = 1, \ldots, n, \\ E_{n+1}(\mathbf{k}) &\geqslant c_* r_0^2, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \\ E_{n+1}(0) &\geqslant 4c_* r_0^2. \end{aligned} \tag{7.19}$$

7.6. **Прямой интеграл для оператора $\mathcal{A}$.** Под действием преобразования Гельфанда $\mathcal{U}$ оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{7.20}$$

Это означает следующее. Пусть $\mathbf{v} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$, тогда

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \mathfrak{d} \qquad \text{при п.в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{7.21}$$

$$\mathfrak{a}[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot), \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{7.22}$$

Обратно, если для $\widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{H}$ выполнено (7.21) и интеграл в (7.22) конечен, тогда $\mathbf{v} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$ и выполнено (7.22).

Из (7.20) следует, что спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадает с объединением отрезков (зон) $\operatorname{Ran} E_j$, $j \in \mathbb{N}$. Из (7.15), (7.16) видно, что

$$\min_{\mathbf{k}} E_j(\mathbf{k}) = E_j(0) = 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

т. е., первые $n$ спектральных зон оператора $\mathcal{A}$ перекрываются и имеют общий нижний край $\lambda_0 = 0$, а $(n+1)$-ая зона отделена от нуля (см. (7.19)).

7.7. **Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в абстрактную схему.** Если $d > 1$, то операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ зависят от многомерного параметра $\mathbf{k}$. Следуя [BSu1, гл. 2], введём одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$. Будем использовать схему главы 1. При этом все построения будут зависеть от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \in \mathbb{S}^{d-1}$ и мы должны следить за равномерностью оценок по $\boldsymbol{\theta}$. Пространства $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ определены в (7.12). Положим $X(t) = X(t, \boldsymbol{\theta}) =: \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. При этом выполнено $X(t, \boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где $X_0 = h(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})$, $\operatorname{Dom} X_0 = \mathfrak{d}$, а $X_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x})$. Далее, положим $A(t) = A(t, \boldsymbol{\theta}) =: \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. Согласно (7.15), (7.16), $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0 = \operatorname{Ker}\mathcal{A}(0)$, $\dim\mathfrak{N} = n$. Число $d^0$ удовлетворяет оценке (7.18). Как было показано в [BSu1, гл. 2, §3], условие $n \leqslant n_* = \dim\operatorname{Ker} X_0^*$ также выполнено. Более того, либо $n_* = n$ (если $m = n$), либо $n_* = \infty$ (если $m > n$). Таким образом, все предположения абстрактной схемы выполнены.

Следуя пункту 1.1, мы должны фиксировать число $\delta > 0$ такое, что $\delta < d^0/8$. Учитывая (7.14) и (7.18), положим

$$\delta = \frac{1}{4} c_* r_0^2 = \frac{1}{4}\alpha_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} r_0^2. \tag{7.23}$$

Отметим, что в силу (7.7) и (7.9) справедлива оценка

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{1/2} \|h\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{7.24}$$

Для $t_0$ (см. (1.1)) примем следующее значение:

$$t_0 = \delta^{1/2}\alpha_1^{-1/2} \|h\|^{-1}_{L_\infty} \|f\|^{-1}_{L_\infty} = \frac{r_0}{2}\alpha_0^{1/2}\alpha_1^{-1/2} \left( \|h\|_{L_\infty} \|h^{-1}\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \right)^{-1}, \tag{7.25}$$

которое подходит при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Отметим, что $t_0 \leqslant r_0/2$. Следовательно, шар $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$ целиком лежит внутри $\widetilde{\Omega}$. Важно, что величины $c_*$, $\delta$, $t_0$ (см. (7.14), (7.23), (7.25)) не зависят от $\boldsymbol{\theta}$.

В силу (7.14) выполнено условие 1.4. Росток $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$ невырожден равномерно по $\boldsymbol{\theta}$: выполнено

$$S(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}} \tag{7.26}$$

(ср. (1.20)).

## § 8. Эффективные характеристики оператора $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$

8.1. **Оператор $A(t,\boldsymbol{\theta})$ в случае $f = \mathbf{1}_n$.** Особую роль играет оператор $\mathcal{A}$ при $f = \mathbf{1}_n$. Условимся в этом случае отмечать все объекты шляпкой "$\widehat{\ }$". Тогда для оператора

$$\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \tag{8.1}$$

семейство

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \tag{8.2}$$

обозначается $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$. Ядро (7.16) принимает вид

$$\widehat{\mathfrak{N}} = \left\{\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) \colon \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\right\}, \tag{8.3}$$

т. е. $\widehat{\mathfrak{N}}$ состоит из постоянных вектор-функций. Ортопроектор $\widehat{P}$ пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство (8.3) есть оператор усреднения по ячейке:

$$\widehat{P}\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{8.4}$$

В случае $f = \mathbf{1}_n$ постоянные (7.14), (7.23) и (7.25) принимают вид

$$\widehat{c}_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}, \tag{8.5}$$

$$\widehat{\delta} = \frac{1}{4}\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} r_0^2, \tag{8.6}$$

$$\widehat{t}_0 = \frac{r_0}{2}\alpha_0^{1/2}\alpha_1^{-1/2}\left(\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\right)^{-1/2}. \tag{8.7}$$

Неравенство (7.24) превращается в

$$\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{8.8}$$

8.2. **Операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$.** Операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ для семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ (в абстрактных терминах определенные в п. 1.2) теперь зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Они были найдены в [BSu3, п. 4.1] и [BSu1, гл. 3, §1].

Пусть $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — периодическая $(n \times m)$-матричнозначная функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{8.9}$$

Тогда операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ и $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) : \widehat{\mathfrak{N}} \to \mathfrak{N}_*$ представимы в виде

$$\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda] b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \quad \widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) = [h(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1}_m)] b(\boldsymbol{\theta}). \tag{8.10}$$

Здесь и ниже квадратные скобки обозначают оператор умножения на функцию.

Спектральный росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{R}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$ семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$, действующий в $\widehat{\mathfrak{N}}$, имеет вид

$$\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1},$$

где $b(\boldsymbol{\theta})$ — символ оператора $b(\mathbf{D})$, а $g^0$ — так называемая эффективная матрица. Эффективная матрица $g^0$ может быть определена в терминах матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$:

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m), \tag{8.11}$$

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{8.12}$$

Выясняется, что матрица $g^0$ положительно определена.

На основании (8.9) легко проверить оценки

$$\|g^{1/2} b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2}, \tag{8.13}$$

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} M_1, \quad M_1 := (2r_0)^{-1} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \tag{8.14}$$

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} M_2, \quad M_2 := \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{8.15}$$

8.3. **Эффективный оператор.** Рассмотрим символ

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) := t^2 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{8.16}$$

Отметим оценку

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) \geqslant \widehat{c}_* |\mathbf{k}|^2 \mathbf{1}_n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{8.17}$$

вытекающую из (7.26) (при $f = \mathbf{1}_n$). Выражение (8.16) является символом ДО

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \tag{8.18}$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и называемого *эффективным оператором* для оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ — операторное семейство в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, отвечающее эффективному оператору (8.18). Тогда $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. Отсюда с учётом (8.4) и (8.16) вытекает тождество

$$\widehat{S}(\mathbf{k})\widehat{P} = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{8.19}$$

8.4. **Свойства эффективной матрицы.** Следующие свойства матрицы $g^0$ были проверены в [BSu1, гл. 3, теорема 1.5].

**Предложение 8.1** ([BSu1]). *Для эффективной матрицы справедливы оценки*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}, \tag{8.20}$$

*где*

$$\overline{g} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{g} := \left( |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

*В случае $m = n$ всегда выполнено $g^0 = \underline{g}$.*

Оценки (8.20) известны в теории усреднения для конкретных ДО как вилка Фойгта–Рейсса. Отметим также неравенства, вытекающие из (8.20):

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \qquad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{8.21}$$

Теперь выделим условия, при которых реализуется верхняя или нижняя грань в (8.20). Следующие утверждения были проверены в [BSu1, гл. 3, предложения 1.6, 1.7].

**Предложение 8.2** ([BSu1]). *Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{8.22}$$

*где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$.*

**Предложение 8.3** ([BSu1]). *Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, \dots, m, \tag{8.23}$$

*где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.*

8.5. **Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов.** Аналитические (по $t$) ветви собственных значений $\widehat{\lambda}_l(t,\boldsymbol{\theta})$ и собственных элементов $\widehat{\varphi}_l(t,\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ допускают степенные разложения вида (1.5), (1.6) с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{\theta}$ (интервал сходимости $t = |\mathbf{k}| \leqslant t_*(\boldsymbol{\theta})$ мы не контролируем):

$$\widehat{\lambda}_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \quad l = 1,\dots,n, \tag{8.24}$$

$$\widehat{\varphi}_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) + t\widehat{\psi}_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \quad l = 1,\dots,n. \tag{8.25}$$

Согласно (1.7) числа $\widehat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными значениями и собственными элементами ростка:

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta})\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1,\dots,n.$$

8.6. **Оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$.** Нам понадобится описать оператор $N$ (в абстрактных терминах определённый в (1.16)). Как проверено в [BSu3, §4], для семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ этот оператор принимает вид

$$\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{8.26}$$

где $L(\boldsymbol{\theta})$ — $(m \times m)$-матричнозначная функция, заданная соотношением

$$L(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}. \tag{8.27}$$

Здесь $\Lambda(\mathbf{x})$ — $\Gamma$-периодическое решение задачи (8.9), а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция (8.11).

Отметим, что эрмитова матричнозначная функция $L(\mathbf{k}) := tL(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, однородна первой степени. Положим $\widehat{N}(\mathbf{k}) := t^3\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Тогда $\widehat{N}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k})^* L(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})\widehat{P}$. Матрица-функция $b(\mathbf{k})^* L(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})$ является однородным многочленом третьей степени от $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Отсюда следует, что либо $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ тождественно по $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, либо $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ в “большинстве” точек $\boldsymbol{\theta}$ (за исключением точек, являющихся корнями этого многочлена).

В [BSu3, §4] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (8.26) обращается в ноль.

**Предложение 8.4** ([BSu3])**.** *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений*:
$1^\circ$*. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ имеет вид $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.*
$2^\circ$*. Выполнены соотношения* (8.22)*, т. е. $g^0 = \overline{g}$.*
$3^\circ$*. Выполнены соотношения* (8.23)*, т. е. $g^0 = \underline{g}$.* (*В частности, это автоматически выполнено, если $m = n$.*)
*Тогда $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.*

С другой стороны, в [BSu3, пп. 10.4, 13.2, 14.6] приведены примеры операторов $\widehat{\mathcal{A}}$, для которых оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля. Это пример скалярного эллиптического оператора (случай $n = 1$) с комплексной эрмитовой матрицей коэффициентов, а также пример матричного оператора с вещественными коэффициентами. См. также [Su6, пример 8.7], [DSu2, п. 14.3]. Напомним (см. замечание 1.3), что справедливо представление $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) + \widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta})$, где оператор $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ диагонален в базисе $\{\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})\}_{l=1}^n$, а оператор $\widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta})$ имеет нулевые диагональные элементы. При этом

$$(\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1,\dots,n. \tag{8.28}$$

В [BSu3, п. 4.3] проведено следующее рассуждение. Предположим, что $b(\boldsymbol{\theta})$ и $g(\mathbf{x})$ — матрицы *с вещественными элементами.* Тогда матрица $\Lambda(\mathbf{x})$ (см. (8.9)) имеет чисто мнимые элементы, а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и $g^0$ — вещественные матрицы. В этом случае $L(\boldsymbol{\theta})$ (см. (8.27)) и $b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})$ — эрмитовы матрицы с чисто мнимыми элементами. Поэтому для любого *вещественного* вектора $\mathbf{q} \in \widehat{\mathfrak{N}}$ выполнено $(\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{q}, \mathbf{q}) = 0$. Если аналитические ветви собственных значений $\widehat{\lambda}_l(t,\boldsymbol{\theta})$ и аналитические ветви собственных векторов $\widehat{\varphi}_l(t,\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ можно выбрать так, чтобы векторы $\widehat{\omega}_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\widehat{\omega}_n(\boldsymbol{\theta})$ оказались вещественными, то в силу (8.28) выполнено $\widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1,\dots,n$, то есть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Мы приходим к следующему утверждению.

**Предложение 8.5.** *Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$ и $g(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть в разложениях (8.25) для аналитических ветвей собственных векторов оператора $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ “зародыши” $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,\dots,n$, можно выбрать вещественными. Тогда в (8.24) выполнено $\widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1,\dots,n$, то есть, $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$.*

В рассматриваемом “вещественном” случае росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ представляет собой симметричную вещественную матрицу. Ясно, что в случае простого собственного значения $\widehat{\gamma}_j(\boldsymbol{\theta})$ ростка зародыш $\widehat{\omega}_j(\boldsymbol{\theta})$ определяется однозначно с точностью до фазового множителя, и его всегда можно выбрать вещественным. Мы получаем следующее следствие.

**Следствие 8.6.** *Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$ и $g(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами и пусть спектр ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ простой. Тогда $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$.*

Однако, как показывают примеры [Su6, пример 8.7], [DSu2, п. 14.3], в “вещественном” случае не всегда возможно выбрать векторы $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ вещественными. Может случиться, что $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ в некоторых точках $\boldsymbol{\theta}$.

8.7. **Операторы $\widehat{Z}_2(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}_2(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta})$.** Опишем операторы $Z_2$, $R_2$ и $N_1^0$ (в абстрактных терминах определенные в пп. 1.3 и 1.8) для семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$. Пусть $\Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x})$ — $\Gamma$-периодическое решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})\big(b(\mathbf{D})\Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x}) + b_l\Lambda(\mathbf{x})\big) = b_l^*\big(g^0 - \widetilde{g}(\mathbf{x})\big), \quad \int_\Omega \Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Положим

$$\Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) := \sum_{l=1}^d \Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x})\theta_l.$$

Как проверено в [VSu2, п. 6.3],

$$\widehat{Z}_2(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \quad \widehat{R}_2(\boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x})\big(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda(\mathbf{x})\big)b(\boldsymbol{\theta}).$$

Наконец, в [VSu2, п. 6.4] было получено представление

$$\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_2(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{8.29}$$

$$\begin{aligned} L_2(\boldsymbol{\theta}) &= |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Big(\Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta})^*\widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})\Big)\,d\mathbf{x} \\ &+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Big(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda(\mathbf{x})\Big)^* g(\mathbf{x})\Big(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda(\mathbf{x})\Big)\,d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{8.30}$$

8.8. **Кратности собственных значений ростка.** В данном пункте считаем, что $n \geqslant 2$. Перейдём к обозначениям, принятым в п. 1.7, следя за кратностями собственных значений спектрального ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\widehat{\gamma}_1^\circ(\boldsymbol{\theta}),\dots,\widehat{\gamma}_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ спектрального ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_j(\boldsymbol{\theta})$ ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\gamma}_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Справедливы инвариантные (не зависящие от выбора базиса) представления для операторов $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta})$:

$$\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{p(\boldsymbol{\theta})} \widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta}), \tag{8.31}$$

$$\widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\substack{1\leqslant j,l\leqslant p(\boldsymbol{\theta}):\\ j\neq l}} \widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}_l(\boldsymbol{\theta}). \tag{8.32}$$

8.9. **Коэффициенты $\widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$.** Коэффициенты $\widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l=1,\dots,n$, в разложениях (8.24) являются собственными значениями некоторой задачи. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l=1,\dots,n$, то есть, $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Применяя предложение 1.7, приходим к следующему утверждению.

**Предложение 8.7.** *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Пусть $\widehat{\gamma}_1^\circ(\boldsymbol{\theta}),\dots,\widehat{\gamma}_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ — различные собственные значения оператора $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, а $k_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ — их кратности. Пусть $\widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta})$ — ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname{Ker}(\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\gamma}_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) I_{\widehat{\mathfrak{N}}})$, $q=1,\dots,p(\boldsymbol{\theta})$. Пусть операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta})$ определены в* (8.10) *и* (8.29), (8.30), *соответственно. Введем операторы $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, $q=1,\dots,p(\boldsymbol{\theta})$: оператор $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ действует в $\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})$ и задается выражением*

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) := \widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta})\Big(\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2}\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})^*\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} - \frac{1}{2}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})^*\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})\Big)\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})} \\ + \sum_{j=1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}):j\neq q} (\widehat{\gamma}_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\gamma}_j^\circ(\boldsymbol{\theta}))^{-1}\widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})}.\end{aligned} \tag{8.33}$$

*Пусть $\widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l=1,\dots,n$, — коэффициенты при $t^4$ из разложений* (8.24). *Тогда числа $\widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$ и векторы $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ при $l = i(q,\boldsymbol{\theta}), i(q,\boldsymbol{\theta})+1,\dots,i(q,\boldsymbol{\theta})+k_q(\boldsymbol{\theta})-1$, где $i(q,\boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta})+\dots+k_{q-1}(\boldsymbol{\theta})+1$, являются собственными значениями и собственными элементами оператора $\mathcal{N}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, т. е.,*

$$\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = i(q,\boldsymbol{\theta}), i(q,\boldsymbol{\theta})+1,\dots,i(q,\boldsymbol{\theta})+k_q(\boldsymbol{\theta})-1.$$

## § 9. Аппроксимация операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$ и $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$

9.1. **Аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Общий случай.** Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. При разложении в прямой интеграл оператору $\mathcal{H}_0$ отвечает семейство операторов $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Оператор $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ задаётся дифференциальным выражением $|\mathbf{D}+\mathbf{k}|^2$ при периодических граничных условиях. Введём обозначение

$$\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}. \tag{9.1}$$

Отметим очевидное тождество

$$\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\widehat{P} = \varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2}\widehat{P}, \qquad s>0. \tag{9.2}$$

Заметим, что при $|\mathbf{k}| > \widehat{t}_0$ справедливо неравенство

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant (\widehat{t}_0)^{-s}\varepsilon^s, \quad \varepsilon>0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\ |\mathbf{k}| > \widehat{t}_0. \tag{9.3}$$

Далее, используя дискретное преобразование Фурье, получаем оценку

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \sup_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \varepsilon^s(|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant r_0^{-s}\varepsilon^s, \qquad \varepsilon>0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \tag{9.4}$$

Введем обозначения

$$\widehat{J}_1(\mathbf{k},\tau) := \cos\big(\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\big) - \cos\big(\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}\big), \tag{9.5}$$

$$\widehat{J}_2(\mathbf{k},\tau) := \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin\big(\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\big) - \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin\big(\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}\big). \tag{9.6}$$

Мы применим к оператору $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ теоремы из §3. Согласно замечанию 3.8 мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от данных задачи. Отметим, что $\widehat{c}_*$, $\widehat{\delta}$ и $\widehat{t}_0$ не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (8.5)–(8.7)). Согласно (8.8) норму $\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}$. Поэтому постоянные из теоремы 3.1 (применённой к оператору $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

**Теорема 9.1** ([BSu5], [M2]). *Пусть операторы $\widehat{J}_1(\mathbf{k},\tau)$, $\widehat{J}_2(\mathbf{k},\tau)$ определены в* (9.5), (9.6). *При $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнены оценки*

$$\|\widehat{J}_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{9.7}$$

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2(1+|\tau|). \tag{9.8}$$

*Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_1$ и $\widehat{\mathcal{C}}_2$ зависят лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.*

Теорема 9.1 выводится из теоремы 3.1 и соотношений (9.2)–(9.4). Следует учесть также очевидные оценки

$$\|\widehat{J}_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2, \quad \|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\varepsilon^{-1}|\tau|. \tag{9.9}$$

Ранее оценка (9.7) была получена в [BSu5, теорема 7.2], а неравенство (9.8) было установлено в [M2, п. 7.4].

Ниже (для целей интерполяции в главе 3) нам понадобится также следующее утверждение.

**Предложение 9.2.** *В условиях теоремы* 9.1 *при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ для оператора* (9.6) *справедлива оценка*

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2'(1+\varepsilon^{-1/2}|\tau|^{1/2}). \tag{9.10}$$

*Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_2'$ зависит лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.*

*Доказательство.* Из (2.6) (с заменой $\tau$ на $\varepsilon^{-1}\tau$) вытекает оценка

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2^{(1)}(1+\varepsilon^{-1}|\tau||\mathbf{k}|), \quad \tau \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0. \tag{9.11}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_2^{(1)}$ зависит лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

Чтобы оценить величину $\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$ при $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0$, используем тождество

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}(I-\widehat{P}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\widehat{F}(\mathbf{k})^{\perp} + \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}(\widehat{F}(\mathbf{k})-\widehat{P}),$$

где $\widehat{F}(\mathbf{k})$ — спектральный проектор оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ для интервала $[0,\widehat{\delta}]$. В силу (1.10) и (7.14) (для оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$) норма $\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$ равномерно ограничена при $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0$. Это же верно и для $\|\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$. Имеем:

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2^{(2)}, \quad \tau \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0, \tag{9.12}$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_2^{(2)} = 2\widehat{\delta}^{-1/2} + \widehat{c}_*^{-1/2}\widehat{C}_1$.

Если $\varepsilon|\tau|^{-1} > \widehat{t}_0^2$, то требуемая оценка (9.10) прямо вытекает из второго неравенства в (9.9). Будем считать, что $\varepsilon|\tau|^{-1} \leqslant \widehat{t}_0^2$. Тогда из (9.11) следует, что

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2^{(1)}(1+\varepsilon^{-1/2}|\tau|^{1/2}), \quad |\mathbf{k}| \leqslant \varepsilon^{1/2}|\tau|^{-1/2}.$$

Вместе с (9.12) это влечет оценку (9.10) при $|\mathbf{k}| \leqslant \varepsilon^{1/2}|\tau|^{-1/2}$.

Наконец, нужная оценка при $|\mathbf{k}| > \varepsilon^{1/2}|\tau|^{-1/2}$ вытекает из (7.14) (для операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$):

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\widehat{c}_*^{-1/2}|\mathbf{k}|^{-1} \leqslant 2\widehat{c}_*^{-1/2}\varepsilon^{-1/2}|\tau|^{1/2}, \quad |\mathbf{k}| > \varepsilon^{1/2}|\tau|^{-1/2}.$$

$\square$

9.2. **Аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Случай, когда $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})=0$.** Теперь мы усиливаем результат теоремы 9.1 при дополнительных предположениях. Наложим следующее условие.

**Условие 9.3.** *Пусть оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ определён в* (8.26). *Предположим, что $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$.*

**Теорема 9.4.** *Пусть операторы $\widehat{J}_1(\mathbf{k},\tau)$, $\widehat{J}_2(\mathbf{k},\tau)$ определены в* (9.5), (9.6). *Пусть выполнено условие* 9.3. *Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ справедливы оценки*

$$\|\widehat{J}_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{9.13}$$

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_4(1+|\tau|)^{1/2}. \tag{9.14}$$

*Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_3$ и $\widehat{\mathcal{C}}_4$ зависят лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.*

*Доказательство.* Начнем с проверки неравенства (9.13). Применяя (3.3) и учитывая (8.19) и (9.2), имеем

$$\|\widehat{J}_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_3^{\circ}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,\quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant\widehat{t}_0, \tag{9.15}$$

причем постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_3^{\circ}$ зависит лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$. Из (9.3) при $s=1$ и первой оценки в (9.9) видно, что левая часть в (9.15) не превосходит $2(\widehat{t}_0)^{-1}\varepsilon$ при $|\mathbf{k}|>\widehat{t}_0$. Наконец, в силу (9.4) при $s=1$ и первой оценки в (9.9), величина $\|\widehat{J}_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}$ не превосходит $2r_0^{-1}\varepsilon$ при всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$. В итоге приходим к искомому неравенству (9.13).

Перейдем к доказательству оценки (9.14). Применяя (3.4) и учитывая (8.19) и (9.2), имеем

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_4^{\circ}(1+|\tau|)^{1/2},\quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant\widehat{t}_0,$$

причем постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_4^{\circ}$ зависит лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

Далее, в силу (9.12) при $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $|\mathbf{k}|\leqslant\widehat{t}_0$ величина $\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}(I-\widehat{P})\|$ ограничена константой $\widehat{\mathcal{C}}_2^{(2)}$.

Наконец, при $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и $|\mathbf{k}|>\widehat{t}_0$ левая часть в (9.14) не превосходит $2\widehat{c}_*^{-1/2}(\widehat{t}_0)^{-1}$ благодаря оценке (7.14) (для оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$) и аналогичной оценке для $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$.

В результате приходим к искомому неравенству (9.14). $\square$

Нам понадобится также следующее утверждение.

**Предложение 9.5.** *В условиях теоремы* 9.4 *при $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ для оператора* (9.6) *справедлива оценка*

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_4'(1+\varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3}). \tag{9.16}$$

*Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_4'$ зависит лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.*

*Доказательство.* Из (2.8) (с заменой $\tau$ на $\varepsilon^{-1}\tau$) вытекает оценка

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_4^{(1)}(1+\varepsilon^{-1}|\tau||\mathbf{k}|^2),\quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant\widehat{t}_0. \tag{9.17}$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_4^{(1)}$ зависит лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

Если $\varepsilon|\tau|^{-1}>\widehat{t}_0^{\,3}$, то требуемая оценка (9.16) прямо вытекает из второго неравенства в (9.9). Будем считать, что $\varepsilon|\tau|^{-1}\leqslant\widehat{t}_0^{\,3}$. Тогда из (9.17) следует, что

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\widehat{\mathcal{C}}_4^{(1)}(1+\varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3}),\quad |\mathbf{k}|\leqslant\varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}.$$

Вместе с (9.12) это влечет оценку (9.16) при $|\mathbf{k}|\leqslant\varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$.

Наконец, нужная оценка при $|\mathbf{k}|>\varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$ вытекает из (7.14) (для операторов $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$):

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant 2\widehat{c}_*^{-1/2}|\mathbf{k}|^{-1}\leqslant 2\widehat{c}_*^{-1/2}\varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3},\quad |\mathbf{k}|>\varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}.$$

$\square$

9.3. **Аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Случай, когда $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})=0$.** Теперь мы отказываемся от предположения $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\equiv 0$, но взамен предположим, что $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}$. При этом считаем, что $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})=\widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta})\neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}$, а тогда и в "большинстве" точек $\boldsymbol{\theta}$. (Иначе применима теорема 9.4.) Нам хотелось бы применить "абстрактный" факт (теорему 3.3). Однако, возникает дополнительное осложнение, связанное с тем, что в некоторых точках $\boldsymbol{\theta}$ может меняться кратность спектра ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. При приближении к таким точкам расстояние между какой-то парой различных собственных значений ростка стремится к нулю и мы не можем выбрать величины $\widehat{c}^{\circ}_{jl}$, $\widehat{t}^{00}_{jl}$ не зависящими от $\boldsymbol{\theta}$. Поэтому мы вынуждены накладывать дополнительные условия. Заботиться надо только о тех собственных значениях, для которых соответствующее слагаемое в представлении (8.32) отлично от нуля. Из-за того, что количество различных собственных значений ростка и их кратности могут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$, при формулировке дополнительного условия удобнее пользоваться исходной нумерацией собственных значений $\widehat{\gamma}_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\widehat{\gamma}_n(\boldsymbol{\theta})$ ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ (каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность), условившись нумеровать их в порядке неубывания:

$$\widehat{\gamma}_1(\boldsymbol{\theta})\leqslant\widehat{\gamma}_2(\boldsymbol{\theta})\leqslant\ldots\leqslant\widehat{\gamma}_n(\boldsymbol{\theta}).$$

При каждом $\boldsymbol{\theta}$ через $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство оператора $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$. Ясно, что при каждом $\boldsymbol{\theta}$ оператор $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с одним из проекторов $\widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta})$, введённых в п. 8.8 (но номер $j$ может зависеть от $\boldsymbol{\theta}$ и меняется в точках перемены кратности спектра ростка).

**Условие 9.6.** $1^\circ$. *Оператор $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$, определённый в* (8.31), *равен нулю*: $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})=0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. $2^\circ$. *Для каждой пары индексов $(k,r), 1\leqslant k,r\leqslant n, k\neq r$, такой что $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta}_0)=\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta}_0)$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0\in\mathbb{S}^{d-1}$, выполнено $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$.*

Условие $2^\circ$ может быть переформулировано: мы требуем, чтобы для ненулевых (тождественно) "блоков" $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ соответствующие ветви собственных значений $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})$ не пересекались. Разумеется, выполнение условия 9.6 гарантируется следующим более сильным условием.

**Условие 9.7.** $1^\circ$. *Оператор $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$, определённый в* (8.31), *равен нулю*: $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})=0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. $2^\circ$. *Количество $p$ различных собственных значений спектрального ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ не зависит от $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$.*

**Замечание 9.8.** *Предположение пункта* $2^\circ$ *условия* 9.7 *заведомо выполнено, если спектр ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ простой при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$.*

Итак, предполагаем выполненным условие 9.6. Нас интересуют только пары индексов из множества

$$\widehat{\mathcal{K}}:=\{(k,r)\colon 1\leqslant k,r\leqslant n,\ k\neq r,\ \widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta})\not\equiv 0\}.$$

Введём обозначение

$$\widehat{c}^{\circ}_{kr}(\boldsymbol{\theta}):=\min\{\widehat{c}_*, n^{-1}|\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})-\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})|\},\quad (k,r)\in\widehat{\mathcal{K}}.$$

Поскольку оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ непрерывно зависит от $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ (это многочлен второй степени), то из теории возмущений дискретного спектра следует, что $\widehat{\gamma}_j(\boldsymbol{\theta})$ — непрерывные функции на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. В силу условия 9.6($2^\circ$) при $(k,r)\in\widehat{\mathcal{K}}$ выполнено $|\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})-\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})|>0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$, а тогда

$$\widehat{c}^{\circ}_{kr}:=\min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}}\widehat{c}^{\circ}_{kr}(\boldsymbol{\theta})>0,\quad (k,r)\in\widehat{\mathcal{K}}.$$

Положим

$$\widehat{c}^{\circ}:=\min_{(k,r)\in\widehat{\mathcal{K}}}\widehat{c}^{\circ}_{kr}. \tag{9.18}$$

Ясно, что число (9.18) — это реализация величины (2.3), выбранная не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$. Число, подчинённое (2.4), при условии 9.6 также можно выбрать не зависящим от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (8.6) и (8.8) положим

$$\widehat{t}^{00} = (8\beta_2)^{-1} r_0 \alpha_1^{-3/2} \alpha_0^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-3/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2} \widehat{c}^\circ,$$

где $\widehat{c}^\circ$ определено в (9.18). (Условие $\widehat{t}^{00} \leqslant \widehat{t}_0$ выполнено автоматически, поскольку $\widehat{c}^\circ \leqslant \|\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}$.)

**Замечание 9.9.** $1^\circ$. *В отличие от числа $\widehat{t}_0$ (см.* (8.7)*), которое контролируется только через $r_0$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$ и $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, величина $\widehat{t}^{00}$ зависит от спектральной характеристики ростка — минимального расстояния между его различными собственными значениями $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})$ (где $(k,r)$ пробегает $\widehat{\mathcal{K}}$).* $2^\circ$. *Если отказаться от условия* 9.6 *и допустить пересечение ветвей $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})$ (при некоторых $(k,r) \in \widehat{\mathcal{K}}$), то величина $\widehat{c}^\circ$ не будет положительно определена и мы не сможем выбрать число $\widehat{t}^{00}$ не зависящим от $\boldsymbol{\theta}$.*

При условии 9.6 из теоремы 3.3 выводим следующий результат по аналогии с доказательством теоремы 9.4. Следует учитывать, что сейчас константы в оценках будут зависеть не только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$, но и от $\widehat{c}^\circ$ и $n$; см. замечание 3.8.

**Теорема 9.10.** *Пусть операторы $\widehat{J}_1(\mathbf{k},\tau)$, $\widehat{J}_2(\mathbf{k},\tau)$ определены в* (9.5), (9.6). *Пусть выполнено условие* 9.6 (*или более сильное условие* 9.7). *Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедливы оценки*

$$\|\widehat{J}_1(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_5 (1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,$$
$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_6 (1+|\tau|)^{1/2}.$$

*Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_5$ и $\widehat{\mathcal{C}}_6$ зависят от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, а также от $n$ и $\widehat{c}^\circ$.*

Нам понадобится также следующее утверждение; доказательство аналогично доказательству предложения 9.5.

**Предложение 9.11.** *В условиях теоремы* 9.10 *при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ для оператора* (9.6) *справедлива оценка*

$$\|\widehat{J}_2(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}'_6 (1+\varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3}).$$

*Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}'_6$ зависит от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, а также от $n$ и $\widehat{c}^\circ$.*

9.4. **Аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$ по “энергетической” норме.** Применим теперь к оператору $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ теорему 3.5 и учтем замечание 3.8.

В силу (8.10) имеем

$$tZ(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = \Lambda b(\mathbf{k})\widehat{P} = \Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{9.19}$$

Введём обозначение

$$\widehat{J}(\mathbf{k},\tau) := \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - (I + \Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P})\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}). \tag{9.20}$$

Применяя теорему 3.5, имеем

$$\bigl\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}'_7(1+|\tau|)\varepsilon, \qquad \varepsilon>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ |\mathbf{k}|\leqslant \widehat{t}_0. \tag{9.21}$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}'_7$ зависит только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

Оценки при $|\mathbf{k}| > \widehat{t}_0$ тривиальны. Очевидно, что

$$\begin{multline}\bigl\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widehat{P}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \bigl\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widehat{P}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ \times\Bigl(1 + \bigl\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} + \bigl\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\Bigr), \\ \varepsilon>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \quad (9.22)\end{multline}$$

Используя (8.2) и (8.21), имеем

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \|g^{1/2}b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \quad (9.23)$$

Далее, воспользуемся оценкой

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda\widehat{P}_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda, \qquad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}, \quad (9.24)$$

где $\widehat{P}_m$ — оператор ортогонального проектирования в пространстве $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$ на подпространство констант, а $C_\Lambda = \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\left(1+\alpha_1^{1/2}r_1M_1\right)$. Эту оценку легко проверить, используя (7.7), (8.13) и (8.14). Тогда

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \leqslant C_\Lambda\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \quad (9.25)$$

В итоге, из (9.3) при $s=1$, (9.22), (9.23) и (9.25) получаем

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widehat{P}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7''\varepsilon, \quad \varepsilon>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\ |\mathbf{k}|>\widehat{t}_0, \quad (9.26)$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_7'' = (\widehat{t}_0)^{-1}(1+\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}+C_\Lambda\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2})$. Подчеркнём, что здесь хватает сглаживающего множителя $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}$.

Оценим теперь оператор

$$\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}(I-\widehat{P}) = \left(\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2})\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}(I-\widehat{P}).$$

Применяя (9.4) при $s=1$ и (9.23), имеем

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7'''\varepsilon, \quad \varepsilon>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}, \quad (9.27)$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_7''' = r_0^{-1}(1+\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2})$. Подчеркнём, что и здесь хватает сглаживающего множителя $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}$.

В итоге из (9.21), (9.26) и (9.27) с учётом очевидного неравенства $\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\| \leqslant 1$ вытекает следующий результат (ранее полученный в [M2, (7.36)]).

**Теорема 9.12** ([M2])**.** *Пусть оператор $\widehat{J}(\mathbf{k},\tau)$ определен в* (9.20)*. При $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_7(1+|\tau|)\varepsilon.$$

*Константа $\widehat{\mathcal{C}}_7$ зависит только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ и $r_1$.*

9.5. **Аппроксимации оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})$ по энергетической норме. Усиление результатов.** При условии 9.3 применим теорему 3.6. С учётом (8.19) и (9.2) имеем

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\widehat{P}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8'(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \qquad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant\widehat{t}_0.$$

Здесь $\widehat{\mathcal{C}}_8'$ зависит от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$. Вместе с (9.26) и (9.27) это влечёт следующий результат.

**Теорема 9.13.** *Пусть оператор $\widehat{J}(\mathbf{k},\tau)$ определен в* (9.20)*. Пусть выполнено условие* 9.3*. Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ справедлива оценка*

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_8(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

*Константа $\widehat{\mathcal{C}}_8$ зависит только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ и $r_1$.*

При условии 9.6 применима теорема 3.7, в силу которой
$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}'_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \qquad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant \widehat{t}^{00},$$
где $\widehat{\mathcal{C}}'_9$ зависит от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, а также от $n$ и $\widehat{c}^\circ$.

Применяя оценку, аналогичную (9.26) (с заменой $\widehat{t}_0$ на $\widehat{t}^{00}$), а также (9.27), получаем следующий результат.

**Теорема 9.14.** *Пусть оператор $\widehat{J}(\mathbf{k},\tau)$ определен в* (9.20). *Пусть выполнено условие* 9.6 (*или более сильное условие* 9.7). *Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ справедлива оценка*
$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$
*Константа $\widehat{\mathcal{C}}_9$ зависит от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, $r_1$, а также от $n$ и $\widehat{c}^\circ$.*

## § 10. Подтверждение точности результатов § 9

10.1. **Точность результатов относительно сглаживающего множителя.** В утверждениях настоящего параграфа мы накладываем одно из следующих двух условий.

**Условие 10.1.** *Пусть оператор $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ определён в* (8.31). *Предположим, что хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0\in\mathbb{S}^{d-1}$ имеет место $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0)\neq 0$.*

**Условие 10.2.** *Пусть операторы $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ определёны в* (8.31) *и* (8.33) *соответственно. Предположим, что $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ и для некоторого $\boldsymbol{\theta}_0\in\mathbb{S}^{d-1}$ и некоторого $q\in\{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ выполнено $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0)\neq 0$.*

Нам понадобится следующая лемма (см. [DSu2, лемма 7.9]).

**Лемма 10.3** ([DSu2])**.** *Пусть число $\widehat{\delta}$ определено в* (8.6), *а $\widehat{t}_0$ определено в* (8.7). *Пусть $\widehat{F}(\mathbf{k})$ — спектральный проектор оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ для промежутка $[0,\widehat{\delta}]$. Тогда при $|\mathbf{k}|\leqslant\widehat{t}_0$, $|\mathbf{k}_0|\leqslant\widehat{t}_0$ справедливы оценки*
$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{F}(\mathbf{k})-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{1/2}\widehat{F}(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \widehat{C}'|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|,$$
$$\|\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})\widehat{F}(\mathbf{k})-\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{1/2})\widehat{F}(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \widehat{C}''(\tau)|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|.$$
$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})\widehat{F}(\mathbf{k})-\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{1/2})\widehat{F}(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \widehat{C}'''(\tau)|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|.$$

В [DSu2, теорема 7.8] была установлена следующая теорема, подтверждающая точность теоремы 9.1 относительно сглаживающего множителя.

**Теорема 10.4** ([DSu2])**.** *Пусть выполнено условие* 10.1.
1°. *Пусть $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ и $0\leqslant s<2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)>0$, чтобы оценка*
$$\big\|\widehat{J}_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{10.1}$$
*выполнялась при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon>0$.*
2°. *Пусть $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ и $0\leqslant r<1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)>0$, чтобы оценка*
$$\big\|\widehat{J}_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{r/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{C}(\tau) \tag{10.2}$$
*выполнялась при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon>0$.*

Подтвердим теперь точность теорем 9.4, 9.10, опираясь на абстрактный факт (теорему 4.2).

**Теорема 10.5.** *Пусть выполнено условие* 10.2.
1°. *Пусть $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ и $0\leqslant s<3/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)>0$, чтобы оценка* (10.1) *выполнялась при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon>0$.*
2°. *Пусть $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ и $0\leqslant r<1/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)>0$, чтобы оценка* (10.2) *выполнялась при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon>0$.*

*Доказательство.* Проверим утверждение $1^\circ$. Достаточно считать, что $1 \leqslant s < 3/2$. Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $1 \leqslant s < 3/2$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (10.1) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (10.1) на $\widehat{P}$ и используя (9.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\big\| \big( \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \big) \widehat{P} \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^s (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{10.3}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0$. В силу (1.10)

$$\|\widehat{F}(\mathbf{k}) - \widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{C}_1 |\mathbf{k}|, \quad |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0. \tag{10.4}$$

Из (10.3) и (10.4) следует, что для некоторой константы $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ выполнено

$$\big\| \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{F}(\mathbf{k}) - \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{P} \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^s (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{10.5}$$

при почти всех $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0$ и достаточно малом $\varepsilon$.

Заметим, что проектор $\widehat{P}$ является спектральным проектором оператора $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ для промежутка $[0, \widehat{\delta}]$. Поэтому из леммы 10.3 (в применении к $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$) следует, что при фиксированных $\tau$ и $\varepsilon$ оператор, стоящий под знаком нормы в (10.5), непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0$. Следовательно, оценка (10.5) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant \widehat{t}_0$. Применяя снова (10.4), получаем, что для некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ справедлива оценка

$$\big\| \big( \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2}) - \cos(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2}) \big) \widehat{P} \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^s (t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{10.6}$$

при всех $t \leqslant \widehat{t}_0$ и достаточно малом $\varepsilon$.

Оценка (10.6) отвечает абстрактной оценке (4.1). Поскольку $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) = 0$ и $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ в силу условия 10.2, то выполнены условия теоремы 4.2. Применяя утверждение $1^\circ$ этой теоремы, приходим к противоречию.

Перейдем к проверке утверждения $2^\circ$. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant r < 1/2$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (10.2) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (10.2) на $\widehat{P}$ и используя (9.2), убеждаемся, что выполнена оценка

$$\big\| \big( \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) - \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \big) \widehat{P} \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^r (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \tag{10.7}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$. Очевидно,

$$\big\| \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{F}(\mathbf{k})^\perp \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\delta}^{-1/2}. \tag{10.8}$$

Отсюда и из (10.7) следует оценка (с некоторой постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$)

$$\big\| \big( \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}) \widehat{F}(\mathbf{k}) - \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2}) \big) \widehat{P} \big\| \varepsilon^r (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau) \tag{10.9}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0$. Из леммы 10.3 (примененной к $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$) следует, что оператор под знаком нормы в (10.9) непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0$. Следовательно, оценка (10.9) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из данного шара. В частности, она выполнена в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant \widehat{t}_0$. Применяя снова (10.8), получаем, что для некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ справедливо неравенство

$$\big\| \big( \widehat{\mathcal{A}}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2}) - \widehat{\mathcal{A}}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \widehat{\mathcal{A}}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2}) \big) \widehat{P} \big\| \varepsilon^r (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}(\tau) \tag{10.10}$$

при всех $t \leqslant \widehat{t}_0$ и достаточно малом $\varepsilon$.

Оценка (10.10) отвечает абстрактной оценке (4.2). Применяя утверждение 2° теоремы 4.2, приходим к противоречию. $\square$

Применение теоремы 4.3 позволяет подтвердить точность теоремы 9.12.

**Теорема 10.6.** *Пусть выполнено условие* 10.1. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{10.11}$$

*выполнялась при почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

*Доказательство.* Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $1 \leqslant s < 2$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (10.11) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор в (10.11) на $\widehat{P}$ и учитывая (9.2), получаем

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\big(\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})-\\ &-(I+\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P})\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\big)\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^s(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon\end{aligned} \tag{10.12}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0$. В силу (2.10)

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{F}_2(\mathbf{k})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{C}_{16}|\mathbf{k}|^2, \quad |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0. \tag{10.13}$$

Из формулы $\widehat{P} + \Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P} = (\widehat{F}(\mathbf{k}) - \widehat{F}_2(\mathbf{k}))\widehat{P}$ (см. (1.13), (1.15), (9.19)) и оценок (7.26), (10.4), (10.12), (10.13) вытекает справедливость неравенства (с некоторой константой $\check{\mathcal{C}}(\tau)$)

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{F}(\mathbf{k})\big(\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2})\widehat{F}(\mathbf{k})-\\ &-\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})^{1/2})\widehat{P}\big)\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^s(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon\end{aligned} \tag{10.14}$$

при почти всех $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0$ и достаточно малом $\varepsilon$.

Из леммы 10.3 (в применении к $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$) следует, что при фиксированных $\tau$ и $\varepsilon$ оператор, стоящий под знаком нормы в (10.14), непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}_0$. Следовательно, оценка (10.14) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant \widehat{t}_0$. Применяя снова формулу $(\widehat{F}(\mathbf{k}) - \widehat{F}_2(\mathbf{k}))\widehat{P} = \widehat{P} + \Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}$ и неравенства (7.26), (10.4), (10.13), получаем, что справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\mathcal{A}}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2}\big(\widehat{\mathcal{A}}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})-\\ &-(I+\Lambda b(t\boldsymbol{\theta}_0))\widehat{\mathcal{A}}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})\big)\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}'(\tau)\varepsilon\end{aligned} \tag{10.15}$$

при всех $t \leqslant \widehat{t}_0$ и достаточно малом $\varepsilon$ (с некоторой постоянной $\check{\mathcal{C}}'(\tau) > 0$).

Оценка (10.15) в абстрактных терминах соответствует оценке (4.13). Поскольку по условию 10.1 выполнено $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, то применение теоремы 4.3 приводит нас к противоречию. $\square$

Полностью аналогично доказательству теоремы 10.6 из теоремы 4.4 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 9.13 и 9.14.

**Теорема 10.7.** *Пусть выполнено условие* 10.2. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (10.11) *выполнялась при почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

10.2. **Точность результатов относительно времени.** В этом пункте мы подтверждаем точность результатов §9 относительно зависимости оценок от $\tau$ (при большом $|\tau|$). Следующее утверждение показывает точность теоремы 9.1. Оно легко выводится из теоремы 4.5 с помощью тех же соображений, что были использованы при доказательстве теоремы 10.5.

**Теорема 10.8.** *Пусть выполнено условие* 10.1.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (10.1) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (10.2) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Аналогичным образом из теоремы 4.7 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 9.4 и 9.10.

**Теорема 10.9.** *Пусть выполнено условие* 10.2.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (10.1) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (10.2) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Следующий результат, подтверждающий точность теоремы 9.12, вытекает из теоремы 4.6 с помощью тех же соображений, что были использованы при доказательстве теоремы 10.6.

**Теорема 10.10.** *Пусть выполнено условие* 10.1. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (10.11) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Аналогичным образом из теоремы 4.8 выводится следующее утверждение, демонстрирующее точность теорем 9.13 и 9.14.

**Теорема 10.11.** *Пусть выполнено условие* 10.2. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (10.11) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

## § 11. Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Применение схемы §5

11.1. **Применение схемы §5 к оператору $\mathcal{A}(\mathbf{k})$.** Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f^*\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})f$ изучается на основании схемы §5. Сейчас $\mathfrak{H} = \widehat{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$, роль оператора $A(t)$ играет $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$, роль оператора $\widehat{A}(t)$ играет $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. В качестве изоморфизма $M$ выступает оператор умножения на матричнозначную функцию $f(\mathbf{x})$. Оператор $Q$ является оператором умножения на матрицу-функцию

$$Q(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}.$$

Блок оператора $Q$ в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (8.3)) — это оператор умножения на постоянную матрицу

$$\overline{Q} = (\underline{ff^*})^{-1} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}d\mathbf{x}.$$

Далее, $M_0$ есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$f_0 = (\overline{Q})^{-1/2} = (\underline{ff^*})^{1/2}. \tag{11.1}$$

Отметим элементарные неравенства

$$|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty}, \qquad |f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{11.2}$$

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ определим оператор

$$\mathcal{A}^0 := f_0\widehat{\mathcal{A}}^0 f_0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0. \tag{11.3}$$

Пусть $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ — соответствующее операторное семейство в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Тогда

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = f_0\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) f_0 = f_0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) f_0. \tag{11.4}$$

С учётом (8.19) справедливо тождество

$$f_0\widehat{S}(\mathbf{k}) f_0 \widehat{P} = \mathcal{A}^0(\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{11.5}$$

11.2. **Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов.** Согласно (5.3), спектральный росток $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$, действующий в подпространстве $\mathfrak{N}$ (см. (7.16)), представляется в виде

$$S(\boldsymbol{\theta}) = P f^* b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) f|_{\mathfrak{N}},$$

где $P$ — ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на $\mathfrak{N}$. Положим $S(\mathbf{k}) := t^2 S(\boldsymbol{\theta}) = P f^* b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) f|_{\mathfrak{N}}$.

Аналитические (по $t$) ветви собственных значений $\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta})$ и собственных элементов $\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$ допускают степенные разложения вида (1.5), (1.6) с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{\theta}$:

$$\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \qquad l = 1,\dots,n, \tag{11.6}$$

$$\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\psi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \qquad l = 1,\dots,n. \tag{11.7}$$

При этом $\omega_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\omega_n(\boldsymbol{\theta})$ образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$, а векторы

$$\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = 1,\dots,n,$$

образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (8.3)), ортонормированный с весом: $(\overline{Q}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}),\zeta_j(\boldsymbol{\theta})) = \delta_{jl},\ j,l = 1,\dots,n$.

Числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными для спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$. Однако, удобнее перейти к обобщённой спектральной задаче для $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (5.9) числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными значениями и собственными элементами следующей обобщённой спектральной задачи:

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\overline{Q}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = 1,\dots,n. \tag{11.8}$$

11.3. **Операторы $\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$.** Нам понадобится описать операторы $\widehat{Z}_Q$, $\widehat{N}_Q$ (определённые в абстрактных терминах в п. 5.2). Для этого введём Γ-периодическое решение $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda_Q(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \qquad \int_\Omega Q(\mathbf{x})\Lambda_Q(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{11.9}$$

Ясно, что $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ отличается от периодического решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (8.9) на постоянное слагаемое:

$$\Lambda_Q(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) + \Lambda_Q^0, \qquad \Lambda_Q^0 = -(\overline{Q})^{-1}(\overline{Q\Lambda}). \tag{11.10}$$

Как проверено в [BSu3, §5], операторы $\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ сейчас принимают вид

$$\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_Q b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{11.11}$$

$$\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_Q(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{11.12}$$

где $L_Q(\boldsymbol{\theta})$ — $(m\times m)$-матрица, заданная соотношением

$$L_Q(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (\Lambda_Q(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}. \tag{11.13}$$

Очевидно, что

$$t\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = t\Lambda_Q b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} = \Lambda_Q b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{11.14}$$

Сопоставляя (11.10), (11.13) с (8.27), убеждаемся, что справедливо равенство

$$L_Q(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}) + L_Q^0(\boldsymbol{\theta}), \qquad L_Q^0(\boldsymbol{\theta}) = (\Lambda_Q^0)^* b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 + g^0 b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda_Q^0.$$

Отметим, что эрмитова матрица-функция $L_Q(\mathbf{k}) := tL_Q(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, однородна первой степени. Положим $\widehat{N}_Q(\mathbf{k}) := t^3 \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Тогда $\widehat{N}_Q(\mathbf{k}) = b(\mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \widehat{P}$. Матрица-функция $b(\mathbf{k})^* L_Q(\mathbf{k}) b(\mathbf{k})$ является однородным многочленом третьей степени от $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Отсюда следует, что либо $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ тождественно по $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, либо $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ в "большинстве" точек $\boldsymbol{\theta}$ (за исключением точек, являющихся корнями этого многочлена).

В [BSu3, §5] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (11.12) обращается в ноль.

**Предложение 11.1** ([BSu3]). *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:*
$1^\circ$. *Оператор $\mathcal{A}$ имеет вид $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D} f(\mathbf{x})$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.*
$2^\circ$. *Выполнены соотношения* (8.22), *т. е. $g^0 = \overline{g}$.*
*Тогда $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.*

Напомним (см. п. 5.2), что справедливо представление $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) + \widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (5.11)

$$\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^{n} \mu_l(\boldsymbol{\theta}) (\cdot, \overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} \overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}).$$

При этом

$$(\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \mu_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \ldots, n. \tag{11.15}$$

Предположим теперь, что $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $Q(\mathbf{x})$ — матрицы *с вещественными элементами*. Тогда матрица $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ (см. (11.9)) имеет чисто мнимые элементы, а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и $g^0$ — вещественные матрицы. В этом случае $L_Q(\boldsymbol{\theta})$ (см. (11.13)) и $b(\boldsymbol{\theta})^* L_Q(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})$ — эрмитовы матрицы с чисто мнимыми элементами. Если аналитические ветви собственных значений $\lambda_l(t, \boldsymbol{\theta})$ и аналитические ветви собственных векторов $\varphi_l(t, \boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ можно выбрать так, чтобы векторы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \ldots, n$, оказались вещественными, то в силу (11.15) выполнено $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \ldots, n$, то есть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Мы приходим к следующему утверждению.

**Предложение 11.2.** *Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $Q(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть в разложениях* (11.7) *для аналитических ветвей собственных векторов оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ "зародыши" $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \ldots, n$, можно выбрать так, чтобы векторы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ оказались вещественными. Тогда в* (11.6) *выполнено $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \ldots, n$, то есть, $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.*

В рассматриваемом "вещественном" случае росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ представляет собой симметричную вещественную матрицу; матрица $\overline{Q}$ тоже вещественна и симметрична. Ясно, что в случае простого собственного значения $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ обобщённой задачи (11.8) собственный вектор $\zeta_j(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_j(\boldsymbol{\theta})$ определяется однозначно с точностью до фазового множителя, и его всегда можно выбрать вещественным. Мы получаем следующее следствие.

**Следствие 11.3.** *Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $Q(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть обобщённая спектральная задача* (11.8) *имеет простой спектр. Тогда $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.*

11.4. **Операторы $\widehat{Z}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta})$.** Опишем операторы $\widehat{Z}_{2,Q}$, $\widehat{R}_{2,Q}$ и $\widehat{N}_{1,Q}^0$ (в абстрактных терминах определенные в п. 5.3) для семейства $A(t, \boldsymbol{\theta})$. Сейчас эти операторы зависят от параметра $\boldsymbol{\theta}$. Пусть $\Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x})$ — $\Gamma$-периодическое решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \big( b(\mathbf{D}) \Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x}) + b_l \Lambda_Q(\mathbf{x}) \big) = -b_l^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}) (\overline{Q})^{-1} b_l^* g^0, \quad \int_\Omega Q(\mathbf{x}) \Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Положим
$$\Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) := \sum_{l=1}^{d} \Lambda_{l,Q}^{(2)}(\mathbf{x})\theta_l.$$
Как проверено в [VSu2, п. 8.4],
$$\widehat{Z}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \quad \widehat{R}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x})\big(b(\mathbf{D})\Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x})\big)b(\boldsymbol{\theta}).$$
Наконец, в [VSu2, п. 8.5] было получено представление
$$\widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_{2,Q}(\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{11.16}$$
$$L_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Big(\Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta})^*\widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})\Big)\,d\mathbf{x}$$
$$+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \Big(b(\mathbf{D})\Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x})\Big)^* g(\mathbf{x}) \Big(b(\mathbf{D})\Lambda_Q^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x})\Big)\,d\mathbf{x}.$$

11.5. **Кратности собственных значений ростка.** В данном пункте считаем, что $n \geqslant 2$. Перейдём к обозначениям, принятым в п. 1.7, следя за кратностями собственных значений спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$. Эти же значения являются собственными числами обобщённой задачи (11.8). Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\gamma_1^\circ(\boldsymbol{\theta}),\dots,\gamma_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство ростка $S(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $f\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname{Ker}\big(\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta})\overline{Q}\big) =: \widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta})$ — собственное подпространство задачи (11.8), отвечающее тому же значению $\gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Введём обозначение $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ для “косого” проектора пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta})$; $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ ортогонален относительно скалярного произведения с весом $\overline{Q}$. Согласно (5.12) справедливы инвариантные представления для операторов $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta})$:
$$\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{p(\boldsymbol{\theta})} \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})^*\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta}), \tag{11.17}$$
$$\widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\substack{1\leqslant j,l\leqslant p(\boldsymbol{\theta}):\\ j\neq l}} \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})^*\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\mathcal{P}_l(\boldsymbol{\theta}).$$

11.6. **Коэффициенты $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$.** Коэффициенты $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,\dots,n$, в разложениях (11.6) являются собственными значениями некоторой задачи. Нам понадобится описать эту задачу в случае, когда $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1,\dots,n$, то есть, $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Применяя предложение 5.3, приходим к следующему утверждению.

**Предложение 11.4.** *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Пусть $\gamma_1^\circ(\boldsymbol{\theta}),\dots,\gamma_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ — различные собственные значения задачи* (11.8), *а $k_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ — их кратности. Пусть $\widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})$ — ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \operatorname{Ker}(\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_q^\circ(\boldsymbol{\theta})\overline{Q})$, $q = 1,\dots,p(\boldsymbol{\theta})$. Пусть операторы $\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta})$ определены в* (11.11), (11.12) *и* (11.16), *соответственно. Введем операторы $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, $q = 1,\dots,p(\boldsymbol{\theta})$: оператор $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ действует в $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и задается выражением*
$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) := \widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})\Big(\widehat{N}_{1,Q}^0(\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2}\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})^* Q\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})Q^{-1}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P} - \frac{1}{2}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}Q^{-1}\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})^* Q\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\Big)\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})}$$
$$+ \sum_{j=1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}):j\neq q} (\gamma_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta}))^{-1}\widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta})Q^{-1}\widehat{P}_{j,Q}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})}. \tag{11.18}$$

*Пусть* $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,\dots,n$, *— коэффициенты при* $t^4$ *из разложений* (11.6). *Тогда числа* $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$ *и векторы* $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$ *при* $l = i(q,\boldsymbol{\theta}), i(q,\boldsymbol{\theta})+1,\dots,i(q,\boldsymbol{\theta})+k_q(\boldsymbol{\theta})-1$, *где* $i(q,\boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta})+\dots+k_{q-1}(\boldsymbol{\theta})+1$, *являются собственными значениями и собственными элементами задачи*

$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \nu_l(\boldsymbol{\theta})Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = i(q,\boldsymbol{\theta}), i(q,\boldsymbol{\theta})+1,\dots,i(q,\boldsymbol{\theta})+k_q(\boldsymbol{\theta})-1.$$

*Здесь* $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})} = \widehat{P}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})}$ *— блок оператора* $Q$ *в подпространстве* $\widehat{\mathfrak{N}}_{q,Q}(\boldsymbol{\theta})$.

## § 12. Аппроксимация окаймлённых операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k}))$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k}))$

12.1. **Аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Общий случай.** Положим

$$J_1(\mathbf{k},\tau) := f\cos\bigl(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\bigr)f^{-1} - f_0\cos\bigl(\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}\bigr)f_0^{-1}, \tag{12.1}$$

$$J_2(\mathbf{k},\tau) := f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin\bigl(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\bigr)f^{-1} - f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin\bigl(\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}\bigr)f_0^{-1}, \tag{12.2}$$

$$J_3(\mathbf{k},\tau) := f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin\bigl(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\bigr)f^{*} - f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin\bigl(\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}\bigr)f_0. \tag{12.3}$$

Мы применим к оператору $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$ теоремы из §5. В силу замечания 3.8 мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от данных задачи. Отметим, что $c_*$, $\delta$ и $t_0$ не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (7.14), (7.23), (7.25)). Согласно (7.24) норму $\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}$. Поэтому постоянные из теоремы 5.5 (применённой к оператору $\mathcal{A}(\mathbf{k})$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

**Теорема 12.1** ([BSu5], [M2], [DSu2])**.** *Пусть операторы* $J_1(\mathbf{k},\tau)$, $J_2(\mathbf{k},\tau)$ *и* $J_3(\mathbf{k},\tau)$ *определены в* (12.1), (12.2) *и* (12.3), *соответственно. При* $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ *выполнены оценки*

$$\|J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_1(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{12.4}$$

$$\|J_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_2(1+|\tau|), \tag{12.5}$$

$$\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_2(1+|\tau|). \tag{12.6}$$

*Постоянные* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ *зависят лишь от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$.

Теорема 12.1 выводится из теоремы 5.5 и соотношений (9.2)–(9.4). Следует учесть также очевидные оценки

$$\|J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{12.7}$$

$$\begin{aligned}&\|J_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\varepsilon^{-1}|\tau|,\\ &\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty}\varepsilon^{-1}|\tau|.\end{aligned} \tag{12.8}$$

Ранее оценка (12.4) была получена в [BSu5, теорема 9.2], неравенство (12.5) было установлено в [M2, (7.32)], а (12.6) — в [DSu2, теорема 9.1].

Ниже (для целей интерполяции в главе 3) нам понадобится также следующее утверждение.

**Предложение 12.2.** *Для оператора* (12.3) *при* $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ *и* $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ *справедлива оценка*

$$\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_2'(1+\varepsilon^{-1/2}|\tau|^{1/2}). \tag{12.9}$$

*Постоянная* $\mathcal{C}_2'$ *зависит лишь от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$.

*Доказательство.* Из (2.6) (с заменой $\tau$ на $\varepsilon^{-1}\tau$), (5.22) и (5.27) вытекает оценка

$$\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_2^{(1)}(1+\varepsilon^{-1}|\tau||\mathbf{k}|), \quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant t_0. \tag{12.10}$$

Постоянная $\mathcal{C}_2^{(1)}$ зависит лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

Оценим теперь оператор $J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)(I-\widehat{P})$ при $|\mathbf{k}|\leqslant t_0$. Очевидно,

$$\begin{aligned}\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} &\leqslant \|f\|_{L_\infty}\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}f^*(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &+ \|f\|^2_{L_\infty}\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Второе слагаемое равномерно ограничено, что легко проверить с помощью дискретного преобразования Фурье. Чтобы оценить первое слагаемое, заметим, что $Pf^*(I-\widehat{P})=0$ в силу тождества $Pf^*=f^{-1}(\overline{Q})^{-1}\widehat{P}$ (см. (5.2)). Следовательно,

$$f^*(I-\widehat{P})=(I-P)f^*(I-\widehat{P}),$$

а потому

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}f^*(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \|f\|_{L_\infty}\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}(I-P)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.$$

Эта величина равномерно ограничена за счет (1.10) и (7.14). В итоге получаем оценку

$$\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)(I-\widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \mathcal{C}_2^{(2)},\quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant t_0. \tag{12.11}$$

Если $\varepsilon|\tau|^{-1}>t_0^2$, то искомая оценка (12.9) прямо вытекает из (12.8). Будем считать, что $\varepsilon|\tau|^{-1}\leqslant t_0^2$. Тогда из (12.10) следует, что

$$\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \mathcal{C}_2^{(1)}(1+\varepsilon^{-1/2}|\tau|^{1/2}),\quad |\mathbf{k}|\leqslant \varepsilon^{1/2}|\tau|^{-1/2}.$$

Вместе с (12.11) это влечет оценку (12.9) при $|\mathbf{k}|\leqslant\varepsilon^{1/2}|\tau|^{-1/2}$.

Наконец, нужная оценка при $|\mathbf{k}|>\varepsilon^{1/2}|\tau|^{-1/2}$ вытекает из (7.14) (для операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$):

$$\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty}c_*^{-1/2}|\mathbf{k}|^{-1}\leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty}c_*^{-1/2}\varepsilon^{-1/2}|\tau|^{1/2},\quad |\mathbf{k}|>\varepsilon^{1/2}|\tau|^{-1/2}.$$

$\square$

12.2. **Аппроксимация по операторной норме в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Случай, когда $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})=0$.** Теперь мы усиливаем результат теоремы 12.1 (оценки (12.4) и (12.6)) при дополнительных предположениях. Наложим следующее условие.

**Условие 12.3.** *Пусть оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ определён в* (11.12). *Предположим, что $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$.*

**Теорема 12.4.** *Пусть операторы $J_1(\mathbf{k},\tau)$, $J_3(\mathbf{k},\tau)$ определены в* (12.1), (12.3). *Пусть выполнено условие* 12.3. *Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ выполнены оценки*

$$\|J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \mathcal{C}_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{12.12}$$

$$\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \mathcal{C}_4(1+|\tau|)^{1/2}. \tag{12.13}$$

*Постоянные $\mathcal{C}_3$ и $\mathcal{C}_4$ зависят лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.*

*Доказательство.* Начнем с проверки неравенства (12.12). Применяя (5.31) и учитывая (9.2) и (11.5), имеем

$$\|J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \mathcal{C}_3^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,\quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant t_0, \tag{12.14}$$

причем постоянная $\mathcal{C}_3^\circ$ зависит лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$. Из аналога (9.3) (с заменой $\widehat{t}_0$ на $t_0$) при $s=1$ и (12.7) видно, что левая часть в (12.14) не превосходит $2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}t_0^{-1}\varepsilon$ при $|\mathbf{k}|>t_0$. Наконец, в силу (9.4) при $s=1$ и (12.7), величина $\|J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}(I-\widehat{P})\|$ не превосходит $2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}r_0^{-1}\varepsilon$ при всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$. В итоге приходим к искомому неравенству (12.12).

Перейдем к доказательству оценки (12.13). Из (5.33) с учетом (9.2) и (11.5) вытекает оценка

$$\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant \mathcal{C}_4^\circ(1+|\tau|)^{1/2},\quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,\ |\mathbf{k}|\leqslant t_0,$$

причем постоянная $\mathcal{C}_4^\circ$ зависит лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

Далее, в силу (12.11) норма оператора $J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/4}(I-\widehat{P})$ не превосходит константы $\mathcal{C}_2^{(2)}$ при $|\mathbf{k}|\leqslant t_0$.

При $|\mathbf{k}|>t_0$ неравенство (12.13) вытекает из (7.14) и аналогичного неравенства для $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$. $\square$

Нам понадобится также следующее утверждение.

**Предложение 12.5.** *В условиях теоремы* 12.4 *при* $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *для оператора* (12.3) *справедлива оценка*

$$\|J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_4'(1 + \varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3}). \tag{12.15}$$

*Постоянная* $\mathcal{C}_4'$ *зависит лишь от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$.

*Доказательство.* Из (2.8) (с заменой $\tau$ на $\varepsilon^{-1}\tau$), (5.22) и (5.27) вытекает оценка

$$\|J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_4^{(1)}(1 + \varepsilon^{-1}|\tau||\mathbf{k}|^2), \quad \tau \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0,\ |\mathbf{k}| \leqslant t_0. \tag{12.16}$$

Постоянная $\mathcal{C}_4^{(1)}$ зависит лишь от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

Если $\varepsilon|\tau|^{-1} > t_0^3$, то искомая оценка (12.15) прямо вытекает из (12.8). Будем считать, что $\varepsilon|\tau|^{-1} \leqslant t_0^3$. Тогда из (12.16) следует, что

$$\|J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_4^{(1)}(1 + \varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3}), \quad |\mathbf{k}| \leqslant \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}.$$

Вместе с (12.11) это приводит к оценке (12.15) при $|\mathbf{k}| \leqslant \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$.

Наконец, при $|\mathbf{k}| > \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}$ нужная оценка следует из (7.14):

$$\|J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty} c_*^{-1/2}|\mathbf{k}|^{-1} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty} c_*^{-1/2}\varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3}, \quad |\mathbf{k}| > \varepsilon^{1/3}|\tau|^{-1/3}.$$

$\square$

**Замечание 12.6.** 1°. *В условиях теоремы* 12.4 *не удается вывести из абстрактного неравенства* (5.32) *аналог оценки* (12.13) *с заменой* $J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ *на* $J_2(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$*. Причина в том, что оператор* $J_2(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/4}(I - \widehat{P})$ *не допускает нужной оценки. По той же причине в условиях теоремы* 12.10 *(см. ниже) нет аналога оценки* (12.19) *для* $J_2(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$. 2°. *Аналогов предложений* 12.2, 12.5 *и* 12.11 *(см. ниже) для оператора* $J_2(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)$ *также нет, поскольку не удается нужным образом оценить оператор* $J_2(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)(I - \widehat{P})$.

12.3. **Аппроксимация по операторной норме в** $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$**. Случай, когда** $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$**.** Теперь мы отказываемся от условия 12.3, но взамен предположим, что $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta}$. При этом считаем, что $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}$, а тогда и в “большинстве” точек $\boldsymbol{\theta}$. (Иначе применима теорема 12.4.) Как и в п. 9.3, для того, чтобы применить “абстрактную” теорему 5.7, приходится накладывать дополнительные условия. Используем исходную нумерацию собственных значений $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma_n(\boldsymbol{\theta})$ ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ (каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность), условившись нумеровать их в порядке неубывания:

$$\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \gamma_2(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n(\boldsymbol{\theta}). \tag{12.17}$$

Как уже отмечалось, числа (12.17) одновременно являются собственными значениями обобщённой спектральной задачи (11.8). При каждом $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим “косой” (ортогональный с весом $\overline{Q}$) проектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство задачи (11.8), отвечающее собственному значению $\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$. Ясно, что при каждом $\boldsymbol{\theta}$ оператор $\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с одним из проекторов $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$, введённых в п. 11.5 (но номер $j$ может зависеть от $\boldsymbol{\theta}$ и меняется в точках перемены кратности спектра ростка).

**Условие 12.7.** 1°. *Оператор* $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$*, определённый в* (11.17)*, равен нулю*: $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. *Для каждой пары индексов* $(k, r), 1 \leqslant k, r \leqslant n, k \neq r$*, такой что* $\gamma_k(\boldsymbol{\theta}_0) = \gamma_r(\boldsymbol{\theta}_0)$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$*, выполнено* $(\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 2° может быть переформулировано: мы требуем, чтобы для ненулевых (тождественно) “блоков” $(\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ соответствующие ветви собственных значений $\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_r(\boldsymbol{\theta})$ не пересекались. Разумеется, выполнение условия 12.7 гарантируется следующим более сильным условием.

**Условие 12.8.** 1°. *Оператор* $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$, *определённый в* (11.17), *равен нулю*: $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. *Предположим, что количество* p *различных собственных значений обобщённой спектральной задачи* (11.8) *не зависит от* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

**Замечание 12.9.** *Предположение пункта* 2° *условия* 12.8 *заведомо выполнено, если спектр задачи* (11.8) *простой при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Итак, предполагаем выполненным условие 12.7. Нас интересуют только пары индексов из множества

$$\mathcal{K} := \{(k,r)\colon 1 \leqslant k,r \leqslant n,\ k \neq r,\ (\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) \not\equiv 0\}.$$

Введём обозначение

$$c^\circ_{kr}(\boldsymbol{\theta}) := \min\{c_*, n^{-1}|\gamma_k(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_r(\boldsymbol{\theta})|\}, \quad (k,r) \in \mathcal{K}.$$

Поскольку оператор $S(\boldsymbol{\theta})$ непрерывно зависит от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ (это многочлен второй степени), то из теории возмущений дискретного спектра следует, что $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ — непрерывные функции на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. В силу условия 12.7(2°) при $(k,r) \in \mathcal{K}$ выполнено $|\gamma_k(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_r(\boldsymbol{\theta})| > 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, а тогда

$$c^\circ_{kr} := \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}} c^\circ_{kr}(\boldsymbol{\theta}) > 0, \quad (k,r) \in \mathcal{K}.$$

Положим

$$c^\circ := \min_{(k,r) \in \mathcal{K}} c^\circ_{kr}. \tag{12.18}$$

Ясно, что число (12.18) — это реализация величины (2.3), выбранная не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$. Число $t^{00}$, подчинённое (2.4), при условии 12.7 также можно выбрать не зависящим от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (7.23) и (7.24) положим

$$t^{00} = (8\beta_2)^{-1} r_0 \alpha_1^{-3/2} \alpha_0^{1/2} \|g\|^{-3/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{-1/2}_{L_\infty} \|f\|^{-3}_{L_\infty} \|f^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} c^\circ,$$

где $c^\circ$ определено в (12.18). (Условие $t^{00} \leqslant t_0$ выполнено автоматически, поскольку $c^\circ \leqslant \|S(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty}$.)

Предполагая выполненным условие 12.7, применим теорему 5.7, в силу которой

$$\|J_1(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4} \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}^\circ_5 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \in \mathbb{R},\ |\mathbf{k}| \leqslant t^{00},$$
$$\|J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/4} \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}^\circ_6 (1 + |\tau|)^{1/2}, \quad \varepsilon > 0,\ \tau \in \mathbb{R},\ |\mathbf{k}| \leqslant t^{00}.$$

Постоянные $t^{00}$, $\mathcal{C}^\circ_5$, $\mathcal{C}^\circ_6$ зависят от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, а также от $n$ и $c^\circ$. Отсюда по аналогии с доказательством теоремы 12.4 выводится следующий результат.

**Теорема 12.10.** *Пусть выполнены условия теоремы* 12.1. *Пусть выполнено условие* 12.7 (*или более сильное условие* 12.8). *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *справедливы оценки*

$$\|J_1(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_5 (1 + |\tau|)^{1/2} \varepsilon,$$
$$\|J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/4}\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_6 (1 + |\tau|)^{1/2}. \tag{12.19}$$

*Постоянные* $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$ *зависят от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, *а также от* $n$ *и* $c^\circ$.

Следующее утверждение проверяется по аналогии с доказательством предложения 12.5.

**Предложение 12.11.** *В условиях теоремы* 12.10 *при* $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *и* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *для оператора* (12.3) *справедлива оценка*

$$\|J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\|_{L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}'_6 (1 + \varepsilon^{-1/3} |\tau|^{1/3}).$$

*Постоянная* $\mathcal{C}'_6$ *зависит лишь от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, *а также от* $n$ *и* $c^\circ$.

12.4. **Аппроксимация окаймлённого оператора** $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k}))$ **по "энергетической" норме.** Обозначим

$$\check{J}(\mathbf{k},\tau) := f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1} - (I+\Lambda_Q b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P})f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1},$$
$$J(\mathbf{k},\tau) := f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1} - (I+\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P})f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}. \tag{12.20}$$

Применяя теорему 5.9 с учётом (9.2), (11.5) и (11.14), получаем

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\check{J}(\mathbf{k},\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_7'(1+|\tau|)\varepsilon, \quad \varepsilon>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ |\mathbf{k}|\leqslant t_0. \tag{12.21}$$

Константа $\mathcal{C}_7'$ зависит только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

Покажем, что в пределах погрешности можно заменить $\Lambda_Q$ на $\Lambda$ в (12.21). Напомним, что $\Lambda_Q = \Lambda + \Lambda_Q^0$. Из (8.14) и (11.10) с учетом (11.2) следует оценка

$$|\Lambda_Q^0| \leqslant (2r_0)^{-1}\alpha_0^{-1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}^2\|f^{-1}\|_{L_\infty}^2. \tag{12.22}$$

В силу (7.7)

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \|g^{1/2}b(\mathbf{k})\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}|\mathbf{k}|, \qquad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \tag{12.23}$$

Из (9.2), (11.2), (11.4), (12.22) и (12.23) вытекает оценка

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda_Q^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\qquad\leqslant \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|f^{-1}\|_{L_\infty}|\Lambda_Q^0||\mathbf{k}|\varepsilon(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant \mathcal{C}_7''\varepsilon,\end{aligned} \tag{12.24}$$

где постоянная $\mathcal{C}_7''$ зависит от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.

Соотношения (12.21) и (12.24) приводят к оценке

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}J(\mathbf{k},\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_7'(1+|\tau|)\varepsilon + \mathcal{C}_7''\varepsilon, \quad \varepsilon>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ |\mathbf{k}|\leqslant t_0. \tag{12.25}$$

Оценки при $|\mathbf{k}|>t_0$ тривиальны. В силу (9.2) выполнено неравенство

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant t_0^{-1}\varepsilon, \qquad \varepsilon>0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\ |\mathbf{k}|>t_0. \tag{12.26}$$

Поскольку $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f^*\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})f$, то

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\qquad= \|\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty}, \qquad \varepsilon>0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{12.27}$$

Далее, в силу (8.2), (8.21), (11.2) и (11.4) справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\qquad= \|g^{1/2}b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\qquad\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\qquad\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|f^{-1}\|_{L_\infty}, \qquad \varepsilon>0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{12.28}$$

Для того, чтобы оценить оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}$, воспользуемся оценкой (9.24). С учетом (8.21), (11.2) и (11.4) имеем

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widehat{P}f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\qquad\leqslant C_\Lambda\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\qquad\leqslant C_\Lambda\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|f^{-1}\|_{L_\infty}, \qquad \varepsilon>0,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{12.29}$$

Таким образом, из (12.26)–(12.29) получаем

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}J(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\widehat{P}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_7'''\varepsilon, \quad \varepsilon>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},\ |\mathbf{k}|>t_0, \tag{12.30}$$

где $\mathcal{C}_7''' = (1 + \|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} + C_\Lambda\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty})\|f^{-1}\|_{L_\infty}t_0^{-1}$. Подчеркнём, что здесь хватает сглаживающего множителя $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}$.

В силу (9.4) при $s=1$, (12.27) и (12.28),

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}J(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}(I-\widehat{P})\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \check{\mathcal{C}}_7\varepsilon, \quad \varepsilon>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}. \tag{12.31}$$

где $\check{\mathcal{C}}_7 = r_0^{-1}(1+\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty})\|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

В итоге из (12.25), (12.30) и (12.31) с учётом очевидного неравенства $\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|\leqslant 1$, получаем следующий результат (ранее установленный в [M2, (7.36)]).

**Теорема 12.12** ([M2]). *Пусть оператор $J(\mathbf{k},\tau)$ определен в* (12.20). *При $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}J(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_7(1+|\tau|)\varepsilon.$$

*Константа $\mathcal{C}_7$ зависит только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ и $r_1$.*

12.5. **Аппроксимация окаймлённого оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k}))$ по энергетической норме. Усиление результатов.** Применим теперь теорему 5.10, считая, что выполнено условие 12.3. С учётом (9.2) и (11.5) имеем

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\check{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_8'(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \qquad \varepsilon>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ |\mathbf{k}|\leqslant t_0.$$

Вместе с (12.24), (12.30) и (12.31) это влечёт следующий результат.

**Теорема 12.13.** *Пусть выполнены условия теоремы* 12.12. *Пусть выполнено условие* 12.3. *Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ справедлива оценка*

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}J(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_8(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

*Константа $\mathcal{C}_8$ зависит только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ и $r_1$.*

Теперь предположим, что выполнено условие 12.7 и применим теорему 5.11, в силу которой

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\check{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_9'(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \qquad \varepsilon>0,\ \tau\in\mathbb{R},\ |\mathbf{k}|\leqslant t^{00}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_9'$ зависит от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, а также от $n$ и $c^\circ$.

Вместе с (12.24), (12.30) (с заменой $t_0$ на $t^{00}$) и (12.31) это влечёт следующий результат.

**Теорема 12.14.** *Пусть выполнены условия теоремы* 12.12. *Пусть выполнено условие* 12.7 (*или более сильное условие* 12.8). *Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ справедлива оценка*

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}J(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

*Постоянная $\mathcal{C}_9$ зависит от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, $r_1$, а также от $n$ и $c^\circ$.*

## § 13. Подтверждение точности результатов § 12

13.1. **Точность результатов относительно сглаживающего множителя.** В утверждениях настоящего параграфа мы накладываем одно из следующих двух условий.

**Условие 13.1.** *Пусть оператор $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$ определён в* (11.17). *Предположим, что $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0)\neq 0$ в некоторой точке $\boldsymbol{\theta}_0\in\mathbb{S}^{d-1}$.*

**Условие 13.2.** *Пусть операторы $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ определёны в* (11.17) *и* (11.18) *соответственно. Предположим, что $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ и для некоторого $\boldsymbol{\theta}_0\in\mathbb{S}^{d-1}$ и некоторого $q\in\{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ выполнено $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0)\neq 0$.*

Нам понадобится следующая лемма (см. [DSu2, лемма 9.8]).

**Лемма 13.3** ([DSu2]). *Пусть число $\delta$ определено в (7.23), а $t_0$ определено в (7.25). Пусть $F(\mathbf{k}) = F(t,\boldsymbol{\theta})$ — спектральный проектор оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ для промежутка $[0,\delta]$. Тогда при $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$, $|\mathbf{k}_0| \leqslant t_0$ справедливы оценки*

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2}F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C'|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|,$$
$$\|\cos(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k}) - \cos(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2})F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C''(\tau)|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|,$$
$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}(\mathbf{k}_0)^{1/2})F(\mathbf{k}_0)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C'''(\tau)|\mathbf{k}-\mathbf{k}_0|.$$

Применение теоремы 6.1 позволяет подтвердить точность результата теоремы 12.1.

**Теорема 13.4.** *Пусть выполнено условие* 13.1.
$1^\circ$. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\|J_1(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{13.1}$$

*выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*
$2^\circ$. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant r < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\|J_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{r/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \tag{13.2}$$

*выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*
$3^\circ$. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant r < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\|J_3(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{r/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \tag{13.3}$$

*выполнялась при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

*Доказательство.* Утверждения $1^\circ$ и $3^\circ$ проверены в [DSu2, теорема 9.7].

Проверим утверждение $2^\circ$. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant r < 1$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (13.2) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор в (13.2) на $\widehat{P}$ и используя (9.2), убеждаемся, что

$$\big\|J_2(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \tag{13.4}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$. Очевидно,

$$\big\|f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k})^{\perp}f^{-1}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\delta^{-1/2}. \tag{13.5}$$

Отсюда и из (13.4) следует, что для некоторой константы $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ выполнено

$$\begin{aligned}\big\|\big(f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k})f^{-1} - f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\big)\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ \times\varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\end{aligned} \tag{13.6}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$. Из леммы 13.3 следует, что оператор под знаком нормы в (13.6) непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$. Следовательно, оценка (13.6) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из этого шара. В частности, она выполнена в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant t_0$. Применяя снова неравенство (13.5), получаем оценку

$$\begin{aligned}\|\big(f\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f^{-1} - f_0\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f_0^{-1}\big)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ \times\varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}(\tau)\end{aligned} \tag{13.7}$$

с некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ при $t \leqslant t_0$ и достаточно малом $\varepsilon$. Оценка (13.7) в абстрактных терминах соответствует неравенству (6.2). Поскольку по условию $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, условие теоремы 6.1 выполнено. Утверждение $2^\circ$ этой теоремы приводит нас к противоречию. $\square$

Подтвердим теперь точность теорем 12.4, 12.10, опираясь на абстрактную теорему 6.2.

**Теорема 13.5.** *Пусть выполнено условие* 13.2.
1°. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (13.1) *выполнялась при почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
2°. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant r < 1/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (13.3) *выполнялась при почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

*Доказательство.* Проверим утверждение 1°. Достаточно считать, что $1 \leqslant s < 3/2$. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $1 \leqslant s < 3/2$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (13.1) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$. Домножая оператор в (13.1) на $\widehat{P}$ и используя (9.2), получаем

$$\left\| J_1(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^s (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{13.8}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$.

Пусть $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$. В силу (1.10)

$$\|F(\mathbf{k}) - P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_1|\mathbf{k}|, \quad |\mathbf{k}| \leqslant t_0. \tag{13.9}$$

Используя тождество $f^{-1}\widehat{P} = P f^* \overline{Q}$ (см. (5.2)) и неравенство (13.9), из (13.8) выводим оценку

$$\begin{aligned} &\|f \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) F(\mathbf{k}) f^* \overline{Q} - f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0^{-1} \widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\times \varepsilon^s (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \end{aligned} \tag{13.10}$$

при некотором $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ для почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$. Из леммы 13.3 следует, что оператор под знаком нормы в (13.10) непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$. Следовательно, оценка (13.10) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из этого шара. В частности, она выполнена в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant t_0$. Применяя снова неравенство (13.9) и тождество $P f^* \overline{Q} = f^{-1}\widehat{P}$, получаем оценку

$$\begin{aligned} &\|\big(f \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2}) f^{-1} - f_0 \cos(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2}) f_0^{-1}\big) \widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\times \varepsilon^s (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \end{aligned}$$

с некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ при $t \leqslant t_0$ и достаточно малом $\varepsilon$. Это противоречит утверждению 1° теоремы 6.2.

Перейдем к доказательству утверждения 2°. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant r < 1/2$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (13.3) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор в (13.3) на $\widehat{P}$ и используя (9.2), получаем

$$\left\| J_3(\mathbf{k}, \varepsilon^{-1}\tau)\widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^r (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \tag{13.11}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$.

Очевидно,

$$\left\| f \mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) F(\mathbf{k})^{\perp} f^* \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|f\|^2_{L_\infty} \delta^{-1/2}. \tag{13.12}$$

Отсюда и из (13.11) следует, что для некоторой константы $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ выполнено

$$\begin{aligned} &\big\|\big(f \mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) F(\mathbf{k}) f^* - f_0 \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}) f_0\big) \widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\times \varepsilon^r (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau) \end{aligned} \tag{13.13}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$. Из леммы 13.3 следует, что оператор под знаком нормы в (13.13) непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$. Следовательно, оценка (13.13) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из этого шара. В частности, она выполнена в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant t_0$. Применяя снова неравенство (13.12), получаем оценку

$$\begin{aligned}&\|\big(f\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f^* - f_0\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f_0\big)\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\quad\times \varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}(\tau)\end{aligned}$$

с некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ при $t \leqslant t_0$ и достаточно малом $\varepsilon$. Это противоречит утверждению $2^\circ$ теоремы 6.2. $\square$

Применение теоремы 6.3 позволяет подтвердить точность результата теоремы 12.12.

**Теорема 13.6.** *Пусть выполнено условие* 13.1. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}J(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{13.14}$$

*выполнялась при почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

*Доказательство.* Рассуждаем от противного. Предположим, что для некоторых $\tau \neq 0$ и $1 \leqslant s < 2$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что выполнена оценка (13.14) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Домножая оператор под знаком нормы в (13.14) на $\widehat{P}$ и учитывая (9.2), и (12.24), получаем, что с некоторой постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ выполнена оценка

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\big(f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})f^{-1} -\\ &\quad - (I+\Lambda_Q b(\mathbf{D}+\mathbf{k}))f_0\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})f_0^{-1}\big)\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^s(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon\end{aligned} \tag{13.15}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$.

Далее, применим неравенство (5.36) и формулу $(I + |\mathbf{k}|Z(\boldsymbol{\theta}))P = (F(\mathbf{k}) - F_2(\mathbf{k}))P$ (см. (1.13), (1.15)). Тогда из (13.15) следует, что

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) -\\ &\quad - (F(\mathbf{k})-F_2(\mathbf{k}))S(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau S(\mathbf{k})^{1/2})P\big)P\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^s(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon\end{aligned} \tag{13.16}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$ с некоторой константой $\check{\mathcal{C}}(\tau) > 0$.

В силу (2.10)

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F_2(\mathbf{k})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_{16}|\mathbf{k}|^2, \quad |\mathbf{k}| \leqslant t_0. \tag{13.17}$$

Из оценок (7.26), (13.9), (13.16) и (13.17) вытекает справедливость неравенства

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k})\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})F(\mathbf{k}) -\\ &\quad - S(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau S(\mathbf{k})^{1/2})P\big)P\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^s(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}'(\tau)\varepsilon\end{aligned} \tag{13.18}$$

при почти всех $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$ и достаточно малом $\varepsilon$ с некоторой константой $\check{\mathcal{C}}'(\tau) > 0$.

Из леммы 13.3 следует, что оператор под знаком нормы в (13.18) непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$. Следовательно, оценка (13.18) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant t_0$. Применяя снова формулу $(F(\mathbf{k}) - F_2(\mathbf{k}))P = P + |\mathbf{k}|Z(\boldsymbol{\theta})P$ и неравенства (7.26), (13.9), (13.17), а затем оценку (5.35), получаем, что

$$\begin{aligned}&\big\|\widehat{\mathcal{A}}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2}\big(f\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f^{-1} -\\ &\quad - (I+\Lambda_Q b(t\boldsymbol{\theta}_0))f_0\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)^{1/2})f_0^{-1}\big)\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}''(\tau)\varepsilon\end{aligned} \tag{13.19}$$

при всех $t \leqslant t_0$ и достаточно малом $\varepsilon$.

Оценка (13.19) в абстрактных терминах соответствует оценке (6.4). Поскольку по условию выполнено $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, то применение теоремы 6.3 приводит нас к противоречию. $\square$

Наконец, мы подтверждаем точность теорем 12.13, 12.14. Следующий результат выводится из теоремы 6.4 вполне аналогично доказательству теоремы 13.6.

**Теорема 13.7.** *Пусть выполнено условие* 13.2. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (13.14) *выполнялась при почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

13.2. **Точность результатов относительно времени.** В этом пункте мы подтверждаем точность результатов §12 относительно зависимости от $\tau$. Следующее утверждение демонстрирует точность теоремы 12.1. Оно легко выводится из теоремы 6.5 с помощью тех же соображений, что были использованы при доказательсте теорем 13.4 и 13.5.

**Теорема 13.8.** *Пусть выполнено условие* 13.1.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (13.1) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (13.2) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$3^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (13.3) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Аналогичным образом из теоремы 6.7 выводится следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 12.4 и 12.10.

**Теорема 13.9.** *Пусть выполнено условие* 13.2.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (13.1) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (13.3) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Следующий результат, подтверждающий точность теоремы 12.12, выводится из теоремы 6.6 с помощью тех же соображений, что были использованы при доказательстве теоремы 13.6.

**Теорема 13.10.** *Пусть выполнено условие* 13.1. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (13.14) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Аналогичным образом из теоремы 6.8 выводится следующий результат, демонстрирующий точность теорем 12.13, 12.14.

**Теорема 13.11.** *Пусть выполнено условие* 13.2. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (13.14) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$, *почти всех* $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

## § 14. Аппроксимация операторов $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})$ и $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})$

14.1. **Аппроксимация операторов** $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}^{1/2})$ **и** $\widehat{\mathcal{A}}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}^{1/2})$ **в старшем порядке.** В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ (см. (8.1)). Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор (см. (8.18)). Обозначим

$$\widehat{J}_1(\tau) := \cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \tag{14.1}$$

$$\widehat{J}_2(\tau) := \widehat{\mathcal{A}}^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \tag{14.2}$$

Напомним обозначение $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ и положим

$$\mathcal{R}(\varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1}. \qquad (14.3)$$

Оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам (9.1):

$$\mathcal{R}(\varepsilon) = \mathcal{U}^{-1}\left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\, d\mathbf{k}\right)\mathcal{U}.$$

Напомним обозначения (9.5), (9.6). Из разложений вида (7.20) для $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0$ следует равенство

$$\|\widehat{J}_l(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \|\widehat{J}_l(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}, \quad l=1,2. \qquad (14.4)$$

Поэтому из теорем 9.1, 9.4, 9.10 и предложений 9.2, 9.5, 9.11 прямо вытекают следующие утверждения. Для краткости ниже мы *объединяем формулировки* (по усилению результатов), а потому нам удобно *начать новую нумерацию констант.*

**Теорема 14.1** ([BSu5], [M2]). *Пусть операторы $\widehat{J}_1(\tau)$, $\widehat{J}_2(\tau)$ определены в* (14.1), (14.2). *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\bigl\|\widehat{J}_1(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_1(1+|\tau|)\varepsilon, \qquad (14.5)$$

$$\bigl\|\widehat{J}_2(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_2(1+|\tau|). \qquad (14.6)$$

*Постоянные $\widehat{\mathrm{C}}_1$, $\widehat{\mathrm{C}}_2$ зависят только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.*

Ранее оценка (14.5) была получена в [BSu5, теорема 9.2], а неравенство (14.6) было установлено в [M2, теорема 8.1].

**Предложение 14.2.** *В условиях теоремы* 14.1 *при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ для оператора* (14.2) *справедлива оценка*

$$\bigl\|\widehat{J}_2(\varepsilon^{-1}\tau)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_2'(1+\varepsilon^{-1/2}|\tau|^{1/2}). \qquad (14.7)$$

*Постоянная $\widehat{\mathrm{C}}_2'$ зависит только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.*

**Теорема 14.3.** *Пусть выполнены условия теоремы* 14.1. *Пусть выполнено условие* 9.3 *либо условие* 9.6 (*или более сильное условие* 9.7). *Тогда для $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\bigl\|\widehat{J}_1(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,$$

$$\bigl\|\widehat{J}_2(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_4(1+|\tau|)^{1/2},$$

*При условии* 9.3 *постоянные $\widehat{\mathrm{C}}_3$, $\widehat{\mathrm{C}}_4$ зависят только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$. При условии* 9.6 *эти константы зависят от тех же параметров и от $n$, $\widehat{c}^\circ$.*

**Предложение 14.4.** *В условиях теоремы* 14.3 *при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ для оператора* (14.2) *справедлива оценка*

$$\bigl\|\widehat{J}_2(\varepsilon^{-1}\tau)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_4'(1+\varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3}). \qquad (14.8)$$

*При условии* 9.3 *постоянная $\widehat{\mathrm{C}}_4'$ зависит только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$. При условии* 9.6 *эта константа зависит от тех же параметров и от $n$, $\widehat{c}^\circ$.*

14.2. **Аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\widehat{\mathcal{A}}^{1/2})$ по энергетической норме.** Нам потребуется оператор $\Pi = \mathcal{U}^{-1}[\widehat{P}]\mathcal{U}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь $[\widehat{P}]$ — это оператор ортогонального проектирования в $\mathcal{H} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\,d\mathbf{k}$, действующий в слоях прямого интеграла как оператор $\widehat{P}$ усреднения по ячейке. В [BSu3, (6.8)] показано, что $\Pi$ задается формулой

$$(\Pi\mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi},$$

где $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. То есть, $\Pi$ является псевдодифференциальным оператором в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, символ которого есть характеристическая функция $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$ множества $\widetilde{\Omega}$.

Обозначим

$$\widehat{J}(\tau) := \widehat{\mathcal{A}}^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}) - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \tag{14.9}$$

Напомним обозначение (9.20). Из разложений вида (7.20) для $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0$ следует равенство

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\widehat{J}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}. \tag{14.10}$$

Поэтому из теорем 9.12, 9.13, 9.14 прямо вытекают следующие утверждения.

**Теорема 14.5** ([M2]). *Пусть оператор $\widehat{J}(\tau)$ определен в* (14.9). *Для $\tau\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\widehat{J}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_5(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{14.11}$$

*Константа $\widehat{\mathrm{C}}_5$ зависит только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ и $r_1$.*

**Теорема 14.6.** *Пусть выполнены условия теоремы* 14.5. *Пусть выполнено условие* 9.3 *либо условие* 9.6 (*или более сильное условие* 9.7). *Тогда для $\tau\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\widehat{J}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_6(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

*При условии* 9.3 *постоянная $\widehat{\mathrm{C}}_6$ зависит только от $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ и $r_1$. При условии* 9.6 *эта константа зависит от тех же параметров и от $n$, $\widehat{c}^\circ$.*

Теорема 14.5 была известна ранее (см. [M2, теорема 8.1]).

14.3. **Подтверждение точности теорем из пунктов 14.1, 14.2.** Применяя теоремы из § 10, мы подтверждаем точность результатов пунктов 14.1, 14.2. Начнем с точности относительно сглаживающего множителя. Покажем, что теорема 14.1 точна.

**Теорема 14.7.** *Пусть выполнено условие* 10.1.
1°. *Пусть $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ и $0\leqslant s<2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)>0$, чтобы оценка*

$$\left\|\widehat{J}_1(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{14.12}$$

*выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon>0$.*
2°. *Пусть $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ и $0\leqslant r<1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau)>0$, чтобы оценка*

$$\left\|\widehat{J}_2(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \tag{14.13}$$

*выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon>0$.*

*Доказательство.* Докажем для примера утверждение 1°. Доказательство проведём от противного. Предположим, что при некоторых $\tau\neq0$ и $0\leqslant s<2$ найдётся такая постоянная $\mathcal{C}(\tau)>0$, что выполнено (14.12) при всех достаточно малых $\varepsilon>0$. В силу (14.4) это означает, что при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon$ выполнена оценка (10.1). Но это противоречит утверждению 1° теоремы 10.4.

Утверждение 2° аналогичным образом вытекает из утверждения 2° теоремы 10.4. □

Точно так же применение теоремы 10.5 приводит к следующему результату, показывающему, что теорема 14.3 точна.

**Теорема 14.8.** *Пусть выполнено условие* 10.2.
$1^\circ$. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (14.12) *выполнялась при достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant r < 1/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (14.13) *выполнялась при достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Далее, с помощью теоремы 10.6 убеждаемся в точности теоремы 14.5.

**Теорема 14.9.** *Пусть выполнено условие* 10.1. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\left\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\widehat{J}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{14.14}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$.

Наконец, теорема 10.7 демонстрирует точность теоремы 14.6.

**Теорема 14.10.** *Пусть выполнено условие* 10.2. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (14.14) *выполнялась при достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Перейдем к подтверждению точности относительно зависимости оценок от параметра $\tau$. Из теоремы 10.8 вытекает следующее утверждение, подтверждающее точность теоремы 14.1.

**Теорема 14.11.** *Пусть выполнено условие* 10.1.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (14.12) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (14.13) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Теорема 10.9 приводит к следующему утверждению, подтверждающему точность теоремы 14.3.

**Теорема 14.12.** *Пусть выполнено условие* 10.2.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (14.12) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (14.13) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Далее, из теоремы 10.10 вытекает следующий результат, который демонстрирует точность теоремы 14.5.

**Теорема 14.13.** *Пусть выполнено условие* 10.1. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (14.14) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Наконец, теорема 10.11 приводит к следующему утверждению, подтверждающему точность теоремы 14.6.

**Теорема 14.14.** *Пусть выполнено условие* 10.2. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (14.14) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

14.4. **Аппроксимация окаймленных операторов** $\cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})$ **и** $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})$ **в старшем порядке.** В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор (7.10). Пусть $f_0$ — матрица (11.1) и $\mathcal{A}^0$ — оператор (11.3). Обозначим

$$J_1(\tau) := f\cos(\tau\mathcal{A}^{1/2})f^{-1} - f_0\cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}, \tag{14.15}$$

$$J_2(\tau) := f\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}^{1/2})f^{-1} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}, \tag{14.16}$$

$$J_3(\tau) := f\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}^{1/2})f^{*} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0. \tag{14.17}$$

Напомним обозначения (12.1)–(12.3). Из разложений вида (7.20) для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^0$ следует равенство

$$\|J_l(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\|J_l(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}, \quad l=1,2,3.$$

Поэтому из теорем 12.1, 12.4, 12.10 и предложений 12.2, 12.5, 12.11 прямо вытекают следующие утверждения.

**Теорема 14.15** ([BSu5], [M2], [DSu2])**.** *Пусть операторы* $J_1(\tau)$, $J_2(\tau)$, $J_3(\tau)$ *определены в* (14.15)–(14.17)*. При* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\bigl\|J_1(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_1(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{14.18}$$

$$\bigl\|J_2(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_2(1+|\tau|), \tag{14.19}$$

$$\bigl\|J_3(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_2(1+|\tau|). \tag{14.20}$$

*Постоянные* $\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_2$, $\widetilde{\mathrm{C}}_2$ *зависят только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$.

Ранее оценка (14.18) была получена в [BSu5, теорема 10.2], неравенство (14.19) было установлено в [M2, теорема 8.1], а (14.20) — в [DSu2, теорема 10.5].

**Предложение 14.16.** *В условиях теоремы* 14.15 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\bigl\|J_3(\varepsilon^{-1}\tau)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_2'(1+\varepsilon^{-1/2}|\tau|^{1/2}). \tag{14.21}$$

*Постоянная* $\mathrm{C}_2'$ *зависит только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$.

**Теорема 14.17.** *Пусть выполнены условия теоремы* 14.15*. Пусть выполнено условие* 12.3 *либо условие* 12.7 (*или более сильное условие* 12.8)*. Тогда для* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\bigl\|J_1(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,$$

$$\bigl\|J_3(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/4}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_4(1+|\tau|)^{1/2}.$$

*При условии* 12.3 *постоянные* $\mathrm{C}_3$, $\mathrm{C}_4$ *зависят только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$*. При условии* 12.7 *эти константы зависят от тех же параметров и от* $n$, $c^\circ$.

**Предложение 14.18.** *В условиях теоремы* 14.17 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\bigl\|J_3(\varepsilon^{-1}\tau)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_4'(1+\varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3}). \tag{14.22}$$

*При условии* 12.3 *постоянная* $\mathrm{C}_4'$ *зависит только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$*. При условии* 12.7 *эта константа зависит от тех же параметров и от* $n$, $c^\circ$.

14.5. **Аппроксимация окаймлённого оператора** $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})$ **по энергетической норме.** Введём обозначение

$$J(\tau) := f\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}^{1/2})f^{-1} - (I+\Lambda b(\mathbf{D})\Pi)f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}. \tag{14.23}$$

Аналогично (14.10) из разложения в прямой интеграл получаем

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}J(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}J(\mathbf{k},\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.$$

Поэтому из теорем 12.12, 12.13, 12.14 прямо вытекают следующие утверждения.

**Теорема 14.19** ([M2]). *Пусть оператор $J(\tau)$ определен в* (14.23). *Для $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2} J(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_5(1+|\tau|)\varepsilon.$$

*Константа* $\mathrm{C}_5$ *зависит только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ *и* $r_1$.

**Теорема 14.20.** *Пусть выполнены условия теоремы* 14.19. *Пусть выполнено условие* 12.3 *либо условие* 12.7 (*или более сильное условие* 12.8). *Тогда для $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2} J(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_6(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

*При условии* 12.3 *постоянная* $\mathrm{C}_6$ *зависит только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ *и* $r_1$. *При условии* 12.7 *эта константа зависит от тех же параметров и от* $n$, $c^\circ$.

Теорема 14.19 была известна ранее (см. [M2, теорема 8.1]).

14.6. **Подтверждение точности результатов пунктов 14.4, 14.5.** Из теорем §13 вытекает точность результатов пунктов 14.4, 14.5. Начнем с точности относительно сглаживающего множителя. Применяя теорему 13.4, мы подтверждаем точность теоремы 14.15.

**Теорема 14.21.** *Пусть выполнено условие* 13.1.
$1^\circ$. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\|J_1(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{14.24}$$

*выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*
$2^\circ$. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant r < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\|J_2(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \tag{14.25}$$

*выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*
$3^\circ$. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant r < 1$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\|J_3(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \tag{14.26}$$

*выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

Из теоремы 13.5 вытекает следующее утверждение, демонстрирующее точность теоремы 14.17.

**Теорема 14.22.** *Пусть выполнено условие* 13.2.
$1^\circ$. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка* (14.24) *выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*
$2^\circ$. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant r < 1/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка* (14.26) *выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

Применяя теорему 13.6, мы подтверждаем точность теоремы 14.19.

**Теорема 14.23.** *Пусть выполнено условие* 13.1. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2} J(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{14.27}$$

*выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

Наконец, из теоремы 13.7 вытекает следующее утверждение, которое показывает, что теорема 14.20 точна.

**Теорема 14.24.** *Пусть выполнено условие* 13.2. *Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 3/2$. Тогда не существует такой постоянной $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка* (14.27) *выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.*

Перейдем к точности относительно зависимости оценок от параметра $\tau$. Применение теоремы 13.8 приводит к следующему утверждению, подтверждающему точность теоремы 14.15.

**Теорема 14.25.** *Пусть выполнено условие* 13.1.
$1^\circ$. *Пусть $s \geqslant 2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка* (14.24) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*
$2^\circ$. *Пусть $r \geqslant 1$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка* (14.25) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*
$3^\circ$. *Пусть $r \geqslant 1$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка* (14.26) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Из теоремы 13.9 выводится следующий результат, демонстрирующий, что теорема 14.17 точна.

**Теорема 14.26.** *Пусть выполнено условие* 13.2.
$1^\circ$. *Пусть $s \geqslant 3/2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка* (14.24) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*
$2^\circ$. *Пусть $r \geqslant 1/2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка* (14.26) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Применяя теорему 13.10, убеждаемся в точности теоремы 14.19.

**Теорема 14.27.** *Пусть выполнено условие* 13.1. *Пусть $s \geqslant 2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка* (14.27) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

Наконец, теорема 13.11 приводит к следующему результату, демонстрирующему точность теоремы 14.20.

**Теорема 14.28.** *Пусть выполнено условие* 13.2. *Пусть $s \geqslant 3/2$. Не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка* (14.27) *при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.*

14.7. **О возможности устранения сглаживающего оператора $\Pi$ в корректоре.** Рассмотрим теперь вопрос о возможности устранения оператора $\Pi$ в корректоре (то есть, замены $\Pi$ тождественным оператором с сохранением порядка погрешностей) в теоремах 14.5, 14.6, 14.19, 14.20. Будем рассматривать сразу более общий случай оператора $\mathcal{A}$ (тогда результаты для $\widehat{\mathcal{A}}$ получатся при $f = \mathbf{1}$).

**Лемма 14.29.** *При $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|b(\mathbf{D})(I-\Pi)f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}^{(1)}\varepsilon^2, \tag{14.28}$$

$$\|b(\mathbf{D})(I-\Pi)f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}^{(2)}\varepsilon^{3/2}. \tag{14.29}$$

*Постоянные $\mathrm{C}^{(1)}$ и $\mathrm{C}^{(2)}$ зависят от $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и $r_0$.*

*Доказательство.* Записывая норму в левой части (14.28) в Фурье-представлении и вспоминая, что символ оператора $\Pi$ есть $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$, а символ оператора $\mathcal{A}^0$ есть $f_0 b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) f_0$, получаем:

$$\begin{aligned}
&\|b(\mathbf{D})(I-\Pi)f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{-1/2})f_0^{-1}\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)(1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))\big|b(\boldsymbol{\xi})f_0(f_0 b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) f_0)^{-1/2}\big||f_0^{-1}|\varepsilon^2(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^{-1} \\
&\leqslant \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\varepsilon^2\sup_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant r_0}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \mathrm{C}^{(1)}\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

где $\mathrm{C}^{(1)} = \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(1+r_0^{-2})$. Мы учли (8.21) и (11.2).

Аналогичным образом проверяется оценка (14.29) с $\mathrm{C}^{(2)} = \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(1+r_0^{-2})^{3/4}$. $\square$

Пусть $[\Lambda]$ — оператор умножения на $\Gamma$-периодическое решение задачи (8.9). Сформулируем следующие дополнительные условия.

**Условие 14.30.** *Оператор* $[\Lambda]$ *непрерывен из* $H^2(\mathbb{R}^d)$ *в* $H^1(\mathbb{R}^d)$.

**Условие 14.31.** *Оператор* $[\Lambda]$ *непрерывен из* $H^{3/2}(\mathbb{R}^d)$ *в* $H^1(\mathbb{R}^d)$.

Положим

$$\widehat{J}^\circ(\tau) := \widehat{\mathcal{A}}^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}) - (I+\Lambda b(\mathbf{D}))(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \tag{14.30}$$

$$J^\circ(\tau) := f\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}^{1/2})f^{-1} - (I+\Lambda b(\mathbf{D}))f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}. \tag{14.31}$$

Устранить оператор $\Pi$ в оценках из теорем 14.5 и 14.19 возможно при условии 14.30.

**Теорема 14.32.** *Пусть выполнено условие* 14.30. *Пусть операторы* $\widehat{J}^\circ(\tau)$ *и* $J^\circ(\tau)$ *определены в* (14.30), (14.31).
$1^\circ$. *В условиях теоремы* 14.5 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\widehat{J}^\circ(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_5^\circ(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{14.32}$$

*Константа* $\widehat{\mathrm{C}}_5^\circ$ *зависит только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, $r_1$, *а также от нормы* $\|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^2\to L_2}$.
$2^\circ$. *В условиях теоремы* 14.19 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}J^\circ(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_5^\circ(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{14.33}$$

*Константа* $\mathrm{C}_5^\circ$ *зависит только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, $r_1$, *а также от нормы* $\|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^2\to L_2}$.

*Доказательство.* Проверим утверждение $2^\circ$. Утверждение $1^\circ$ проверяется аналогично. С учетом (7.7) справедлива оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda]\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \|g^{1/2}b(\mathbf{D})[\Lambda]\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из (14.28) следует, что при $\tau\in\mathbb{R}$ и $0<\varepsilon\leqslant 1$ выполнена оценка

$$\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}[\Lambda]b(\mathbf{D})(I-\Pi)f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}^{(3)}\varepsilon.$$

Здесь $\mathrm{C}^{(3)} = \mathrm{C}^{(1)}\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^2\to L_2}$. Комбинируя это неравенство и теорему 14.19, приходим к (14.33). $\square$

Устранить оператор $\Pi$ в оценках из теорем 14.6 и 14.20 возможно при условии 14.31.

**Теорема 14.33.** *Пусть выполнено условие* 14.31. *Пусть операторы* $\widehat{J}^\circ(\tau)$ *и* $J^\circ(\tau)$ *определены в* (14.30), (14.31).
$1^\circ$. *В условиях теоремы* 14.6 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\widehat{J}^\circ(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_6^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{14.34}$$

*При условии* 9.3 *постоянная* $\widehat{\mathrm{C}}_6^\circ$ *зависит только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, $r_1$, *а также от нормы* $\|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^{3/2}\to L_2}$. *При условии* 9.6 *эта константа зависит от тех же параметров и от* $n$, $\widehat{c}^\circ$.
$2^\circ$. *В условиях теоремы* 14.20 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}J^\circ(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_6^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

*При условии* 12.3 *постоянная* $\mathrm{C}_6^\circ$ *зависит от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, $r_1$, *а также от нормы* $\|\mathbf{D}[\Lambda]\|_{H^{3/2}\to L_2}$. *При условии* 12.7 *эта константа зависит от тех же параметров и от* $n$, $c^\circ$.

В некоторых случаях условие 14.30 или условие 14.31 выполнено автоматически. Нам понадобятся следующие результаты, первый установлен в [Su3, предложение 9.3], а второй проверен в [BSu4, лемма 8.3].

**Предложение 14.34** ([Su3])**.** *Пусть $\Lambda$ — $\Gamma$-периодическое решение задачи* (8.9)*. Пусть $l = 1$ при $d = 1$, $l > 1$ при $d = 2$ и $l = d/2$ при $d \geqslant 3$. Тогда оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^l\to H^1}$ контролируется через $d$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки $\Gamma$, а при $d = 2$ зависит также от $l$.*

**Предложение 14.35** ([BSu4])**.** *Пусть $\Lambda$ — $\Gamma$-периодическое решение задачи* (8.9)*. Предположим, что $\Lambda \in L_\infty$. Тогда оператор $[\Lambda]$ непрерывен из $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^1\to H^1}$ контролируется через $d$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, параметры решетки $\Gamma$ и норму $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.*

Укажем некоторые случаи, когда выполнено условие 14.30.

**Предложение 14.36.** *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений*:
$1^\circ$) $d \leqslant 4$;
$2^\circ$) *размерность $d$ произвольна и $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}$, причем матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вещественные элементы*;
$3^\circ$) *размерность $d$ произвольна и $g^0 = \underline{g}$ (т. е., выполнены соотношения* (8.23)*).*
*Тогда условие* 14.30 *заведомо выполнено, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^2\to H^1}$ контролируется через $d$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки $\Gamma$.*

*Доказательство.* Выполнение условия 14.30 при $d \leqslant 4$ гарантируется предложением 14.34.

В случае $2^\circ$ включение $\Lambda \in L_\infty$ (вместе с оценкой нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ в терминах $d$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\Omega$) следует из теоремы 13.1 главы III книги [LaU]. Остается применить предложение 14.35.

В случае $g^0 = \underline{g}$ включение $\Lambda \in L_\infty$ (вместе с подходящей оценкой нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$) установлено в [BSu3, предложение 6.9]. Снова применяем предложение 14.35. $\square$

Аналогичным образом проверяется следующее утверждение, выделяющее некоторые случаи выполнения условия 14.31.

**Предложение 14.37.** *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений*:
$1^\circ$) $d \leqslant 3$;
$2^\circ$) *размерность $d$ произвольна и $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}$, причем матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вещественные элементы*;
$3^\circ$) *размерность $d$ произвольна и $g^0 = \underline{g}$ (т. е., выполнены соотношения* (8.23)*).*
*Тогда условие* 14.31 *заведомо выполнено, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^{3/2}\to H^1}$ контролируется через $d$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки $\Gamma$.*

**Замечание 14.38.** $1^\circ$. *При $d \leqslant 4$ условие* 14.30 *выполнено автоматически. Как показано в* [M2, лемма 8.7]*, при $d \geqslant 5$ для выполнения условия* 14.30 *достаточно, чтобы $\Lambda \in L_d(\Omega)$.*
$2^\circ$*. При $d \leqslant 3$ условие* 14.31 *выполнено автоматически. По аналогии с* [M2, лемма 8.7] *нетрудно проверить, что при $d \geqslant 4$ для выполнения условия* 14.31 *достаточно, чтобы $\Lambda \in L_{2d}(\Omega)$.*

# Глава 3. Задачи усреднения для гиперболических уравнений

## § 15. Аппроксимация операторов $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$

15.1. **Операторы $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_\varepsilon$. Постановка задачи.** Если $\psi(\mathbf{x})$ — измеримая $\Gamma$-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, условимся использовать обозначение $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. *Наши основные объекты* — операторы $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_\varepsilon$, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, формально заданные выражениями

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon := b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \qquad (15.1)$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon := (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}). \qquad (15.2)$$

Строгие определения даются через соответствующие квадратичные формы (ср. п. 7.3). Коэффициенты операторов (15.1) и (15.2) быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

*Наша цель* — получить аппроксимацию операторов $\cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ при малом $\varepsilon$ и применить полученные результаты к усреднению решений задачи Коши для гиперболических уравнений.

15.2. **Масштабное преобразование.** Пусть $T_\varepsilon$ — *унитарный в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *оператор масштабного преобразования*:

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x}),\ \varepsilon > 0.$$

Тогда справедливо тождество $\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2}T_\varepsilon^*\mathcal{A}T_\varepsilon$. Следовательно,

$$\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) = T_\varepsilon^*\cos(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})T_\varepsilon, \quad \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) = \varepsilon T_\varepsilon^*\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})T_\varepsilon. \tag{15.3}$$

Аналогичные соотношения выполнены и для $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$.

Применяя масштабное преобразование к резольвенте оператора $\mathcal{H}_0 = -\Delta$, получаем

$$(\mathcal{H}_0 + I)^{-1} = \varepsilon^2 T_\varepsilon^*(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1}T_\varepsilon = T_\varepsilon^*\mathcal{R}(\varepsilon)T_\varepsilon. \tag{15.4}$$

Здесь использовано обозначение (14.3).

Наконец, если $\psi(\mathbf{x})$ — $\Gamma$-периодическая функция, то оператор $[\psi^\varepsilon]$ умножения на функцию $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ под действием масштабного преобразования перейдёт в оператор $[\psi]$ умножения на $\psi(\mathbf{x})$:

$$[\psi^\varepsilon] = T_\varepsilon^*[\psi]T_\varepsilon. \tag{15.5}$$

15.3. **Аппроксимация операторов** $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ **и** $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ **в старшем порядке.** Положим

$$\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau) := \cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \tag{15.6}$$

$$\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau) := \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \tag{15.7}$$

Применяя соотношения вида (15.3) для операторов $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0$, а также (15.4), при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ получаем

$$\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = T_\varepsilon^*\widehat{J}_1(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}T_\varepsilon, \tag{15.8}$$

$$\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = \varepsilon T_\varepsilon^*\widehat{J}_2(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}T_\varepsilon. \tag{15.9}$$

Заметим, что оператор $(\mathcal{H}_0 + I)^{s/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. С учетом этого, применяя теоремы 14.1, 14.3, и соотношения (15.8), (15.9), непосредственно получаем следующие две теоремы.

**Теорема 15.1** ([BSu5], [M2])**.** *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — *оператор* (15.1) *и пусть* $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — *эффективный оператор* (8.18). *Пусть операторы* $\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau)$, $\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)$ *определены в* (15.6), (15.7). *Тогда для* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\big\|\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_1(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{15.10}$$

$$\big\|\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_2(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{15.11}$$

*Постоянные* $\widehat{\mathrm{C}}_1$ *и* $\widehat{\mathrm{C}}_2$ *зависят только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$.

**Теорема 15.2.** *Пусть выполнены условия теоремы* 15.1. *Пусть выполнено условие* 9.3 *либо условие* 9.6 (*или более сильное условие* 9.7). *Тогда для* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\big\|\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{15.12}$$

$$\big\|\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_4(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{15.13}$$

*При условии* 9.3 *постоянные* $\widehat{\mathrm{C}}_3$ *и* $\widehat{\mathrm{C}}_4$ *зависят только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$. *При условии* 9.6 *эти константы зависят от тех же параметров и от* $n$, $\widehat{c}^\circ$.

Теорема 15.1 была известна ранее: оценка (15.10) получена в [BSu5, теорема 13.1], а (15.11) — в [M2, теорема 9.1].

С помощью интерполяции из теорем 15.1, 15.2 и предложений 14.2, 14.4 выводим следствия.

**Следствие 15.3.** *В условиях теоремы* 15.1 *справедливы оценки*

$$\big\|\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_1(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}, \quad 0\leqslant s\leqslant 2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0; \tag{15.14}$$

$$\big\|\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_2(r)(1+|\tau|)^{(r+1)/2}\varepsilon^{(r+1)/2}, \quad 0\leqslant r\leqslant 1,\ \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.15}$$

*Доказательство.* Очевидно,

$$\big\|\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2, \quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0. \tag{15.16}$$

Интерполируя между (15.16) и (15.10), приходим к оценке (15.14) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_1(s)=2^{1-s/2}\widehat{\mathrm{C}}_1^{s/2}$.

В силу (14.7) и (15.9) (при $s=0$)

$$\big\|\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_2'\varepsilon(1+\varepsilon^{-1/2}|\tau|^{1/2}) \leqslant 2\widehat{\mathrm{C}}_2'\varepsilon^{1/2}(1+|\tau|)^{1/2}, \quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.17}$$

Интерполируя между (15.17) и (15.11), получаем оценку (15.15) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_2(r)=(2\widehat{\mathrm{C}}_2')^{1-r}\widehat{\mathrm{C}}_2^r$. $\square$

**Следствие 15.4.** *В условиях теоремы* 15.2 *справедливы оценки*

$$\big\|\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_3(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0; \tag{15.18}$$

$$\big\|\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_4(r)(1+|\tau|)^{(r+1)/3}\varepsilon^{2(r+1)/3}, \quad 0\leqslant r\leqslant 1/2,\ \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.19}$$

*Доказательство.* Интерполируя между (15.16) и (15.12), приходим к оценке (15.18) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_3(s)=2^{1-2s/3}\widehat{\mathrm{C}}_3^{2s/3}$.

В силу (14.8) и (15.9) (при $s=0$)

$$\big\|\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_4'\varepsilon(1+\varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3}) \leqslant 2\widehat{\mathrm{C}}_4'\varepsilon^{2/3}(1+|\tau|)^{1/3}, \quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.20}$$

Интерполируя между (15.20) и (15.13), получаем оценку (15.19) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_4(r)=(2\widehat{\mathrm{C}}_4')^{1-2r}\widehat{\mathrm{C}}_4^{2r}$. $\square$

**Замечание 15.5.** 1) *В условиях теоремы* 15.1 *можно рассматривать большие значения времени* $\tau=O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$, *и получать квалифицированные оценки:*

$$\big\|\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/2}), \quad 0\leqslant s\leqslant 2;$$
$$\big\|\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{(r+1)(1-\alpha)/2}), \quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

2) *В условиях теоремы* 15.2 *можно рассматривать значения* $\tau=O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0<\alpha<2$, *и получать квалифицированные оценки:*

$$\big\|\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/3}), \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2;$$
$$\big\|\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{(r+1)(2-\alpha)/3}), \quad 0\leqslant r\leqslant 1/2.$$

15.4. **Аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ в энергетической норме.** Положим $\Pi_\varepsilon := T_\varepsilon^*\Pi T_\varepsilon$. Тогда $\Pi_\varepsilon$ — это псевдодифференциальный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$:

$$(\Pi_\varepsilon\mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}. \tag{15.21}$$

Следующие утверждения были проверены в [BSu4, п. 10.2] и [PSu, предложение 1.4] соответственно.

**Предложение 15.6** ([BSu4]). *Пусть* $\Phi(\mathbf{x})$ *—* $\Gamma$*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$*, причем* $\Phi \in L_2(\Omega)$*. Тогда оператор* $[\Phi^\varepsilon]\Pi_\varepsilon$ *ограничен в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и*

$$\|[\Phi^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \varepsilon > 0.$$

**Предложение 15.7** ([PSu]). *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|\Pi_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_0^{-1}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Положим:

$$\widehat{J}_\varepsilon(\tau) := \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \tag{15.22}$$

Применяя соотношения вида (15.3) для операторов $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0$, а также (15.4) и (15.5), получаем тождество

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\widehat{J}_\varepsilon(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = T_\varepsilon^*\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}\widehat{J}(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{15.23}$$

Следующий результат установлен в [M2, теоремы 9.5 и 10.8] (см. также [M3, теорема 2]); для полноты изложения приведем доказательство.

**Теорема 15.8** ([M2]). *Пусть* $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ *— оператор* (15.1) *и пусть* $\widehat{\mathcal{A}}^0$ *— эффективный оператор* (8.18)*. Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ *—* $\Gamma$*-периодическое решение задачи* (8.9)*, а* $\Pi_\varepsilon$ *— оператор* (15.21)*. Пусть оператор* $\widehat{J}_\varepsilon(\tau)$ *определен в* (15.22)*. Положим*

$$\widehat{I}_\varepsilon(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \tag{15.24}$$

*где* $\widetilde{g}$ *определено в* (8.11)*. Тогда для* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\bigl\|\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\bigr\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_7(1 + |\tau|)\varepsilon, \tag{15.25}$$

$$\bigl\|\widehat{I}_\varepsilon(\tau)\bigr\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_8(1 + |\tau|)\varepsilon. \tag{15.26}$$

*Постоянные* $\widehat{\mathrm{C}}_7$ *и* $\widehat{\mathrm{C}}_8$ *зависят только от* $\alpha_0$*,* $\alpha_1$*,* $\|g\|_{L_\infty}$*,* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$*,* $r_0$ *и* $r_1$*.*

*Доказательство.* Используя (15.23) и унитарность оператора $T_\varepsilon$, из (14.11) получаем оценку

$$\bigl\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\widehat{J}_\varepsilon(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_5(1 + |\tau|)\varepsilon. \tag{15.27}$$

Аналогично (7.11) имеем:

$$\widehat{c}_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \qquad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n). \tag{15.28}$$

Следовательно,

$$\bigl\|\mathbf{D}\widehat{J}_\varepsilon(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{c}_*^{-1/2}\widehat{\mathrm{C}}_5(1 + |\tau|)\varepsilon. \tag{15.29}$$

Затем, для разности $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})$ справедлива оценка (15.11):

$$\Bigl\|\Bigl(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\Bigr)(\mathcal{H}_0 + I)^{-1/2}\Bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_2(1 + |\tau|)\varepsilon. \tag{15.30}$$

Теперь оценим норму корректора. Пусть $\Pi_\varepsilon^{(m)}$ — псевдодифференциальный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$. Согласно предложению 15.6 и (8.14)

$$\|\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon^{(m)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M_1. \tag{15.31}$$

Используя (8.21) и (15.31), получаем

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\leqslant \varepsilon\|\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon^{(m)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon M_1\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}.\end{aligned} \tag{15.32}$$

Вместе с (15.30) это приводит к оценке

$$\bigl\|\widehat{J}_\varepsilon(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-1}\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \bigl(\widehat{\mathrm{C}}_2 + M_1\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\bigr)(1 + |\tau|)\varepsilon. \tag{15.33}$$

Оценки (15.29) и (15.33) влекут неравенство (15.25) с постоянной $\widehat{\mathrm{C}}_7 = \widehat{c}_*^{-1/2}\widehat{\mathrm{C}}_5 + \widehat{\mathrm{C}}_2 + M_1\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$.

Теперь проверим оценку (15.26). Из (15.27) вытекает, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty}\widehat{\mathrm{C}}_5(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{15.34}$$

С учетом (8.11) имеем:

$$\begin{aligned} &g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \\ &+ g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I-\Pi_\varepsilon)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) + \varepsilon g^\varepsilon\sum_{l=1}^d b_l\Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}). \end{aligned} \tag{15.35}$$

В силу предложения 15.7 справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I-\Pi_\varepsilon)(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|I-\Pi_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_0^{-1}\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \end{aligned} \tag{15.36}$$

Далее, из (7.8) и (15.31) следует, что

$$\Big\|\varepsilon g^\varepsilon\sum_{l=1}^d b_l\Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\Big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}M_1 d^{1/2}. \tag{15.37}$$

В итоге, из (15.34)–(15.37) с учетом (15.22) и (15.24) вытекает искомая оценка (15.26). $\square$

С помощью интерполяции из теоремы 15.8 выводится следующий результат.

**Следствие 15.9.** *Пусть выполнены условия теоремы* 15.8. *Тогда справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_5(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}, \quad 0\leqslant s\leqslant 2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0, \tag{15.38}$$

$$\|\widehat{I}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_6(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}, \quad 0\leqslant s\leqslant 2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0. \tag{15.39}$$

*Доказательство.* Перепишем оценку (15.29) в виде

$$\big\|\mathbf{D}\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{c}_*^{-1/2}\widehat{\mathrm{C}}_5(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{15.40}$$

Теперь оценим величину $\big\|\mathbf{D}\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$. Из (15.28) и аналогичной оценки для оператора $\widehat{\mathcal{A}}^0$ вытекает неравенство

$$\big\|\mathbf{D}\big(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\widehat{c}_*^{-1/2}. \tag{15.41}$$

Далее,

$$\begin{aligned} &D_l\big(\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big) = (D_l\Lambda)^\varepsilon\Pi_\varepsilon^{(m)}b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \\ &+ \varepsilon\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon^{(m)}b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})D_l\Pi_\varepsilon, \quad l=1,\dots,d. \end{aligned} \tag{15.42}$$

Согласно предложению 15.6 и (8.15)

$$\|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon\Pi_\varepsilon^{(m)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M_2. \tag{15.43}$$

Следовательно,

$$\big\|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon\Pi_\varepsilon^{(m)}b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M_2\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{15.44}$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} &\big\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon^{(m)}b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\mathbf{D}\Pi_\varepsilon\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon\big\|\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon^{(m)}\big\|_{L_2\to L_2}\big\|b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\big\|_{L_2\to L_2}\big\|\mathbf{D}\Pi_\varepsilon\big\|_{L_2\to L_2}. \end{aligned} \tag{15.45}$$

С учетом (15.21) справедлива оценка

$$\big\|\mathbf{D}\Pi_\varepsilon\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}/\varepsilon}|\boldsymbol{\xi}| \leqslant \varepsilon^{-1}r_1. \tag{15.46}$$

Теперь из (15.31), (15.45), (15.46) вытекает неравенство

$$\big\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon \Pi_\varepsilon^{(m)} b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\mathbf{D}\Pi_\varepsilon\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M_1\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} r_1. \tag{15.47}$$

В итоге, из (15.42), (15.44), (15.47) следует оценка

$$\big\|\mathbf{D}\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (M_1 r_1 + M_2)\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{15.48}$$

Объединяя (15.41) и (15.48), получаем

$$\big\|\mathbf{D}\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}'_7, \tag{15.49}$$

где $\widehat{\mathrm{C}}'_7 = 2\widehat{c}_*^{-1/2} + (M_1 r_1 + M_2)\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$.

Интерполируя между (15.49) и (15.40), приходим к оценке (15.38) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_5(s) = (\widehat{\mathrm{C}}'_7)^{1-s/2}(\widehat{c}_*^{-1/2}\widehat{\mathrm{C}}_5)^{s/2}$.

Перейдем к доказательству оценки (15.39). Оценим норму $\big\|\widehat{I}_\varepsilon(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$. Очевидно,

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{15.50}$$

Далее, из (8.11), (8.13) и предложения 15.6 следует оценка

$$\big\|\widetilde{g}^\varepsilon \Pi_\varepsilon^{(m)}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|g\|_{L_\infty}. \tag{15.51}$$

Поэтому

$$\big\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{15.52}$$

Объединяя (15.50) и (15.52), получаем

$$\big\|\widehat{I}_\varepsilon(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}'_8, \tag{15.53}$$

где $\widehat{\mathrm{C}}'_8 = \|g\|^{1/2}_{L_\infty} + 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$.

Интерполируя между (15.53) и (15.26), приходим к оценке (15.39) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_6(s) = (\widehat{\mathrm{C}}'_8)^{1-s/2}\widehat{\mathrm{C}}_8^{s/2}$. □

**Замечание 15.10.** *Из* (15.17), (15.32) *и* (15.49) *вытекает оценка*

$$\|\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}''_7\big(1 + (1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon^{1/2}\big), \quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.54}$$

*Интерполируя между* (15.54) *и* (15.25), *при* $\tau\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ *получаем оценку*

$$\|\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}'_5(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\big(1 + (1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon^{1/2}\big)^{1-s/2}, \quad 0\leqslant s\leqslant 2. \tag{15.55}$$

*Ясно, что эта оценка представляет интерес при ограниченных значениях величины* $(1+|\tau|)\varepsilon$, *а тогда правая часть в* (15.55) *оценивается через* $C(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}$, *то есть, имеет тот же порядок, что и оценка* (15.38).

По аналогии с доказательством теоремы 15.8 из теоремы 14.6 выводим следующее утверждение.

**Теорема 15.11.** *Пусть выполнены условия теоремы* 15.8. *Пусть выполнено условие* 9.3 *либо условие* 9.6 (*или более сильное условие* 9.7). *Тогда для* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\big\|\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{15.56}$$
$$\big\|\widehat{I}_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_{10}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

*При условии* 9.3 *постоянные* $\widehat{\mathrm{C}}_9$, $\widehat{\mathrm{C}}_{10}$ *зависят только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ *и* $r_1$. *При условии* 9.6 *эти константы зависят от тех же параметров и от* $n$, $\widehat{c}^\circ$.

С помощью интерполяции из теоремы 15.11 и соотношений (15.49), (15.53) получаем следствие.

**Следствие 15.12.** *В условиях теоремы* 15.11 *справедливы оценки*

$$\left\|\mathbf{D}\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_7(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0, \tag{15.57}$$

$$\left\|\widehat{I}_\varepsilon(\tau)\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_8(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0.$$

**Замечание 15.13.** *В условиях теоремы* 15.11 *из* (15.20), (15.32) *и* (15.49) *вытекает оценка*

$$\|\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_9'\big(1+(1+|\tau|)^{1/3}\varepsilon^{2/3}\big), \quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.58}$$

*Интерполируя между* (15.58) *и* (15.56), *при* $\tau\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ *получаем оценку*

$$\|\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_7'(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\big(1+(1+|\tau|)^{1/3}\varepsilon^{2/3}\big)^{1-2s/3}, \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2. \tag{15.59}$$

*Эта оценка представляет интерес при ограниченных значениях величины* $(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon$, *а тогда правая часть в* (15.59) *оценивается через* $C(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}$, *то есть, имеет тот же порядок, что и оценка* (15.57).

**Замечание 15.14.** 1) *В условиях теоремы* 15.8 *можно рассматривать большие значения времени* $\tau=O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$, *и получать квалифицированные оценки:*

$$\left\|\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/2}), \quad 0\leqslant s\leqslant 2;$$

$$\left\|\widehat{I}_\varepsilon(\tau)\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/2}), \quad 0\leqslant s\leqslant 2.$$

2) *В условиях теоремы* 15.11 *можно рассматривать значения* $\tau=O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0<\alpha<2$, *и получать квалифицированные оценки:*

$$\left\|\widehat{J}_\varepsilon(\tau)\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/3}), \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2;$$

$$\left\|\widehat{I}_\varepsilon(\tau)\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/3}), \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2.$$

15.5. **Подтверждение точности результатов пунктов 15.3, 15.4.** Применяя теоремы из пункта 14.3, подтвердим точность результатов пунктов 15.3, 15.4. Сначала обсудим точность результатов относительно типа операторной нормы. Следующее утверждение, подтверждающее точность теоремы 15.1, выводится из теоремы 14.7.

**Теорема 15.15.** *Пусть выполнено условие* 10.1.
$1^\circ$. *Пусть* $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0\leqslant s<2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau)>0$, *чтобы оценка*

$$\left\|\widehat{J}_{1,\varepsilon}(\tau)\right\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{15.60}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$.
$2^\circ$. *Пусть* $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0\leqslant r<1$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau)>0$, *чтобы оценка*

$$\left\|\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)\right\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{15.61}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$.

*Доказательство.* Проверим утверждение $1^\circ$. Предположим, что при некоторых $\tau\neq 0$ и $0\leqslant s<2$ выполнено (15.60) при достаточно малом $\varepsilon$. Применяя масштабное преобразование (см. (15.8)), получаем, что выполнена оценка (14.12). Но это противоречит утверждению $1^\circ$ теоремы 14.7.

Утверждение $2^\circ$ выводится с помощью (15.9) из утверждения $2^\circ$ теоремы 14.7. $\square$

Далее, теорема 14.8 позволяет подтвердить точность теоремы 15.2.

**Теорема 15.16.** *Пусть выполнено условие* 10.2.
$1^\circ$. *Пусть* $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0\leqslant s<3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau)>0$, *чтобы оценка* (15.60) *выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$.
$2^\circ$. *Пусть* $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0\leqslant r<1/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau)>0$, *чтобы оценка* (15.61) *выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$.

Из теоремы 14.9 вытекает точность теоремы 15.8.

**Теорема 15.17.** *Пусть выполнено условие* 10.1. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\left\| \widehat{J}_\varepsilon(\tau) \right\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{15.62}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$.

*Доказательство.* Доказательство проведём от противного. Предположим, что при некоторых $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 2$ выполнено (15.62). Следовательно,

$$\left\| \mathbf{D}\widehat{J}_\varepsilon(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

при достаточно малом $\varepsilon$. Тогда при некоторой постоянной $\widehat{\mathcal{C}}(\tau)$ выполнена также оценка

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2} \widehat{J}_\varepsilon(\tau)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon$$

при достаточно малом $\varepsilon$. Применяя масштабное преобразование, получаем, что при достаточно малом $\varepsilon$ выполнена оценка (14.14). Но это противоречит утверждению теоремы 14.9. $\square$

Аналогичным образом, теорема 14.10 демонстрирует точность теоремы 15.11.

**Теорема 15.18.** *Пусть выполнено условие* 10.2. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (15.62) *выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$.

Обсудим теперь точность результатов относительно зависимости оценок от параметра $\tau$. Из теоремы 14.11 вытекает следующее утверждение, подтверждающее точность теоремы 15.1.

**Теорема 15.19.** *Пусть выполнено условие* 10.1.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (15.60) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (15.61) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Теорема 14.12 показывает, что теорема 15.2 точна.

**Теорема 15.20.** *Пусть выполнено условие* 10.2.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (15.60) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (15.61) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Далее, применяя теорему 14.13, мы подтверждаем точность теоремы 15.8.

**Теорема 15.21.** *Пусть выполнено условие* 10.1. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (15.62) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Наконец, из теоремы 14.14 следует точность теоремы 15.11.

**Теорема 15.22.** *Пусть выполнено условие* 10.2. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (15.62) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

15.6. **Аппроксимация окаймлённых операторов** $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ **и** $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ **в старшем порядке.** Перейдём теперь к рассмотрению оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ (см. (15.2)). Пусть $\mathcal{A}^0$ — оператор (11.3). Положим:

$$J_{1,\varepsilon}(\tau) := f^\varepsilon\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}, \tag{15.63}$$

$$J_{2,\varepsilon}(\tau) := f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}, \tag{15.64}$$

$$J_{3,\varepsilon}(\tau) := f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{*} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0. \tag{15.65}$$

Из соотношений (15.3), (15.4) вытекают тождества

$$J_{1,\varepsilon}(\tau)(\mathcal{H}_0+I)^{-s/2} = T_\varepsilon^* J_1(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}T_\varepsilon, \tag{15.66}$$

$$J_{l,\varepsilon}(\tau)(\mathcal{H}_0+I)^{-s/2} = \varepsilon T_\varepsilon^* J_l(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}T_\varepsilon, \quad l=2,3. \tag{15.67}$$

Применяя теоремы 14.15 и 14.17, с учетом (15.66), (15.67) получаем следующие две теоремы.

**Теорема 15.23** ([BSu5], [M2], [DSu2]). *Пусть* $\mathcal{A}_\varepsilon$ *— оператор* (15.2) *и пусть* $\mathcal{A}^0$ *— оператор* (11.3). *Пусть операторы* $J_{1,\varepsilon}(\tau)$, $J_{2,\varepsilon}(\tau)$, $J_{3,\varepsilon}(\tau)$ *определены в* (15.63)–(15.65). *Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\big\|J_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_1(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{15.68}$$

$$\big\|J_{2,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_2(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{15.69}$$

$$\big\|J_{3,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_2(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{15.70}$$

*Постоянные* $\mathrm{C}_1$, $\mathrm{C}_2$, $\widetilde{\mathrm{C}}_2$ *зависят от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$.

**Теорема 15.24.** *Пусть выполнены условия теоремы* 15.23. *Пусть выполнено условие* 12.3 *либо условие* 12.7 (*или более сильное условие* 12.8). *Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\big\|J_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_3(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{15.71}$$

$$\big\|J_{3,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_4(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{15.72}$$

*При условии* 12.3 *постоянные* $\mathrm{C}_3$, $\mathrm{C}_4$ *зависят от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $r_0$. *При условии* 12.7 *эти константы зависят от тех же параметров и от* $n$, $c^\circ$.

Теорема 15.23 была известна: оценка (15.68) получена в [BSu5, теорема 13.3], неравенство (15.69) установлено в [M2, теорема 9.1], а (15.70) доказано в [DSu2, теорема 11.6].

С помощью интерполяции из теорем 15.23, 15.24 и предложений 14.16, 14.18 выводим следствия.

**Следствие 15.25.** *В условиях теоремы* 15.23 *справедливы оценки*

$$\big\|J_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}, \quad 0\leqslant s\leqslant 2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0; \tag{15.73}$$

$$\big\|J_{3,\varepsilon}(\tau)\big\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_2(r)(1+|\tau|)^{(r+1)/2}\varepsilon^{(r+1)/2}, \quad 0\leqslant r\leqslant 1,\ \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.74}$$

*Доказательство.* С учетом (11.2) имеем

$$\big\|J_{1,\varepsilon}(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0. \tag{15.75}$$

Интерполируя между (15.75) и (15.68), приходим к оценке (15.73) с постоянной $\mathfrak{C}_1(s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/2}\mathrm{C}_1^{s/2}$.

В силу (14.21) и (15.67) (при $s=0$) справедлива оценка

$$\big\|J_{3,\varepsilon}(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_2'\varepsilon(1+\varepsilon^{-1/2}|\tau|^{1/2}) \leqslant 2\mathrm{C}_2'\varepsilon^{1/2}(1+|\tau|)^{1/2}, \quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.76}$$

Интерполируя между (15.76) и (15.70), получаем оценку (15.74) с постоянной $\mathfrak{C}_2(r) = (2\mathrm{C}_2')^{1-r}\widetilde{\mathrm{C}}_2^r$. $\square$

**Замечание 15.26.** *В условиях теоремы* 15.23 *можно получить результат и для оператора* $J_{2,\varepsilon}(\tau)$*, интерполируя между очевидной оценкой* $\|J_{2,\varepsilon}(\tau)\|_{L_2\to L_2} \leqslant 2|\tau|\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* (15.69)*. Это дает неравенство*

$$\|J_{2,\varepsilon}(\tau)\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_2(r)(1+|\tau|)\varepsilon^r, \quad 0\leqslant r\leqslant 1,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0.$$

*Получить аналог оценки* (15.74) *для* $J_{2,\varepsilon}(\tau)$ *не удается. См. замечание* 12.6.

**Следствие 15.27.** *В условиях теоремы* 15.24 *справедливы оценки*

$$\bigl\|J_{1,\varepsilon}(\tau)\bigr\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_3(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0; \tag{15.77}$$

$$\bigl\|J_{3,\varepsilon}(\tau)\bigr\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_4(r)(1+|\tau|)^{(r+1)/3}\varepsilon^{2(r+1)/3}, \quad 0\leqslant r\leqslant 1/2,\ \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.78}$$

*Доказательство.* Интерполируя между (15.75) и (15.71), приходим к оценке (15.77) с постоянной $\mathfrak{C}_3(s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-2s/3}\mathrm{C}_3^{2s/3}$.

В силу (14.22) и (15.67) (при $s=0$)

$$\bigl\|J_{3,\varepsilon}(\tau)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_4'\varepsilon(1+\varepsilon^{-1/3}|\tau|^{1/3}) \leqslant 2\mathrm{C}_4'\varepsilon^{2/3}(1+|\tau|)^{1/3}, \quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.79}$$

Интерполируя между (15.79) и (15.72), получаем оценку (15.78) с постоянной $\mathfrak{C}_4(r) = (2\mathrm{C}_4')^{1-2r}\mathrm{C}_4^{2r}$. $\square$

**Замечание 15.28.** 1) *В условиях теоремы* 15.23 *можно рассматривать большие значения времени* $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$, *и получать квалифицированные оценки:*

$$\bigl\|J_{1,\varepsilon}(\tau)\bigr\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/2}), \quad 0\leqslant s\leqslant 2;$$

$$\bigl\|J_{3,\varepsilon}(\tau)\bigr\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{(r+1)(1-\alpha)/2}), \quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

2) *В условиях теоремы* 15.24 *можно рассматривать значения* $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0<\alpha<2$, *и получать квалифицированные оценки:*

$$\bigl\|J_{1,\varepsilon}(\tau)\bigr\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/3}), \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2;$$

$$\bigl\|J_{2,\varepsilon}(\tau)\bigr\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{(r+1)(2-\alpha)/3}), \quad 0\leqslant r\leqslant 1/2.$$

15.7. **Аппроксимация окаймлённого оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ в энергетической норме.** Положим

$$J_\varepsilon(\tau) := f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - (I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}. \tag{15.80}$$

Применяя соотношения вида (15.3) для операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{A}^0$, а также (15.4) и (15.5), получаем тождество

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}J_\varepsilon(\tau)(\mathcal{H}_0+I)^{-s/2} = T_\varepsilon^*\widehat{\mathcal{A}}^{1/2}J(\varepsilon^{-1}\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}T_\varepsilon, \quad \varepsilon>0.$$

По аналогии с доказательством теоремы 15.8, используя это тождество, из теоремы 14.19 выводим следующий результат (см. [M2, теоремы 9.5 и 10.8]).

**Теорема 15.29** ([M2])**.** *Пусть* $\mathcal{A}_\varepsilon$ — *оператор* (15.2) *и пусть* $\mathcal{A}^0$ — *оператор* (11.3)*. Пусть оператор* $J_\varepsilon(\tau)$ *определен в* (15.80)*. Положим*

$$I_\varepsilon(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D})f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}.$$

*Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\bigl\|J_\varepsilon(\tau)\bigr\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_7(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{15.81}$$

$$\bigl\|I_\varepsilon(\tau)\bigr\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_8(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{15.82}$$

*Постоянные* $\mathrm{C}_7$, $\mathrm{C}_8$ *зависят от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ *и* $r_1$.

С помощью интерполяции из теоремы 15.29 выводится следующий результат.

**Следствие 15.30.** *В условиях теоремы* 15.29 *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}J_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_5(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}, \quad 0\leqslant s\leqslant 2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0, \tag{15.83}$$

$$\|I_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_6(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}, \quad 0\leqslant s\leqslant 2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0. \tag{15.84}$$

*Доказательство.* В силу (15.81)

$$\big\|\mathbf{D}J_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_7(1+|\tau|)\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0. \tag{15.85}$$

Оценим теперь норму $\big\|\mathbf{D}J_\varepsilon(\tau)\big\|_{L_2\to L_2}$. Аналогично (7.11) имеем

$$\|\mathbf{D}(f^\varepsilon\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad f^\varepsilon\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Следовательно,

$$\big\|\mathbf{D}f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty} = c_*^{-1/2}. \tag{15.86}$$

Аналогично,

$$\big\|\mathbf{D}f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_*^{-1/2}. \tag{15.87}$$

По аналогии с (15.42)–(15.48) нетрудно проверить оценку

$$\big\|\mathbf{D}\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (M_1r_1+M_2)\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}.$$

В итоге получаем

$$\big\|\mathbf{D}J_\varepsilon(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_7', \quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0, \tag{15.88}$$

где $\mathrm{C}_7' = 2c_*^{-1/2} + (M_1r_1+M_2)\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

Интерполируя между (15.88) и (15.85), приходим к оценке (15.83) с постоянной $\mathfrak{C}_5(s) = (\mathrm{C}_7')^{1-s/2}\mathrm{C}_7^{s/2}$.

Проверим неравенство (15.84). Аналогично (15.50)–(15.53) легко убедиться, что

$$\big\|I_\varepsilon(\tau)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_8', \quad \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0, \tag{15.89}$$

где $\mathrm{C}_8' = \big(\|g\|^{1/2}_{L_\infty} + 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\big)\|f^{-1}\|_{L_\infty}$. Интерполируя между (15.89) и (15.82), приходим к оценке (15.84) с постоянной $\mathfrak{C}_6(s) = (\mathrm{C}_8')^{1-s/2}\mathrm{C}_8^{s/2}$. □

**Замечание 15.31.** *С учетом* (15.31) *получаем*

$$\|J_\varepsilon(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2|\tau|\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty} + \varepsilon M_1\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}.$$

*Вместе с* (15.88) *это дает оценку*

$$\|J_\varepsilon(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_7''(1+|\tau|), \quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.90}$$

*Интерполируя между* (15.90) *и* (15.81), *при* $\tau\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ *получаем оценку*

$$\|J_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_5'(s)(1+|\tau|)\varepsilon^{s/2}, \quad 0\leqslant s\leqslant 2.$$

*Получить оценку для* $\|J_\varepsilon(\tau)\|_{H^s\to H^1}$ *того же порядка, что в* (15.83), *не удается из-за отсутствия аналога неравенства* (15.17) *для оператора* $J_{2,\varepsilon}(\tau)$; *ср. замечание* 15.10.

По аналогии с доказательством теоремы 15.8 из теоремы 14.20 выводим следующее утверждение.

**Теорема 15.32.** *Пусть выполнены условия теоремы* 15.29. *Пусть выполнено условие* 12.3 *либо условие* 12.7 (*или более сильное условие* 12.8). *Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\big\|J_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,$$

$$\big\|I_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_{10}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

*При условии* 12.3 *постоянные* $\mathrm{C}_9$, $\mathrm{C}_{10}$ *зависят только от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$ *и* $r_1$. *При условии* 12.7 *эти константы зависят от тех же параметров и от* $n$, $c^\circ$.

С помощью интерполяции из теоремы 15.32 и оценок (15.88), (15.89) получаем следствие.

**Следствие 15.33.** *В условиях теоремы* 15.32 *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}J_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_7(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0,$$

$$\|I_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_8(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2,\ \tau\in\mathbb{R},\ \varepsilon>0.$$

**Замечание 15.34.** 1) *В условиях теоремы* 15.29 *можно рассматривать значения* $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0<\alpha<1$, *и получать квалифицированные оценки:*

$$\big\|\mathbf{D}J_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/2}), \quad 0\leqslant s\leqslant 2;$$

$$\big\|I_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(1-\alpha)/2}), \quad 0\leqslant s\leqslant 2.$$

2) *В условиях теоремы* 15.32 *можно рассматривать значения* $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $0<\alpha<2$, *и получать квалифицированные оценки:*

$$\big\|\mathbf{D}J_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/3}), \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2;$$

$$\big\|I_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = O(\varepsilon^{s(2-\alpha)/3}), \quad 0\leqslant s\leqslant 3/2.$$

15.8. **Подтверждение точности результатов пунктов 15.6, 15.7.** Применяя теоремы из пункта 14.6, подтвердим точность результатов пунктов 15.6, 15.7. Сначала обсудим точность результатов относительно типа операторной нормы. Следующее утверждение, подтверждающее точность теоремы 15.23, выводится из теоремы 14.21 с помощью масштабного преобразования.

**Теорема 15.35.** *Пусть выполнено условие* 13.1.
$1^\circ$. *Пусть* $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0\leqslant s<2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau)>0$, *чтобы оценка*

$$\|J_{1,\varepsilon}(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{15.91}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$.
$2^\circ$. *Пусть* $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0\leqslant r<1$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau)>0$, *чтобы оценка*

$$\|J_{2,\varepsilon}(\tau)\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{15.92}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$.
$3^\circ$. *Пусть* $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0\leqslant r<1$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau)>0$, *чтобы оценка*

$$\|J_{3,\varepsilon}(\tau)\|_{H^r(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{15.93}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$.

Далее, теорема 14.22 подтверждает точность теоремы 15.24.

**Теорема 15.36.** *Пусть выполнено условие* 13.2.
$1^\circ$. *Пусть* $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0\leqslant s<3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau)>0$, *чтобы оценка* (15.91) *выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$.
$2^\circ$. *Пусть* $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0\leqslant r<1/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau)>0$, *чтобы оценка* (15.93) *выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$.

Применяя теорему 14.23, мы подтверждаем точность теоремы 15.29.

**Теорема 15.37.** *Пусть выполнено условие* 13.1. *Пусть* $0\neq\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0\leqslant s<2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau)>0$, *чтобы оценка*

$$\|J_\varepsilon(\tau)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{15.94}$$

*выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon>0$.

Из теоремы 14.24 вытекает точность теоремы 15.32.

**Теорема 15.38.** *Пусть выполнено условие* 13.2. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 3/2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка* (15.94) *выполнялась при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$.

Обсудим теперь точность результатов относительно зависимости оценок от параметра $\tau$. Из теоремы 14.25 вытекает следующее утверждение, демонстрирующее точность теоремы 15.23.

**Теорема 15.39.** *Пусть выполнено условие* 13.1.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (15.91) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (15.92) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$3^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (15.93) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Теорема 14.26 демонстрирует точность теоремы 15.24.

**Теорема 15.40.** *Пусть выполнено условие* 13.2.
$1^\circ$. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (15.91) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.
$2^\circ$. *Пусть* $r \geqslant 1/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (15.93) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Применяя теорему 14.27, убеждаемся в точности теоремы 15.29.

**Теорема 15.41.** *Пусть выполнено условие* 13.1. *Пусть* $s \geqslant 2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка* (15.94) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

Наконец, применение теоремы 14.28 подтверждает точность теоремы 15.32.

**Теорема 15.42.** *Пусть выполнено условие* 13.2. *Пусть* $s \geqslant 3/2$. *Не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка* (15.94) *при всех* $\tau \in \mathbb{R}$ *и достаточно малом* $\varepsilon > 0$.

15.9. **О возможности устранения сглаживающего оператора $\Pi_\varepsilon$ в корректоре.** Рассмотрим теперь вопрос о возможности устранения оператора $\Pi_\varepsilon$ в корректоре в теоремах 15.8, 15.11, 15.29, 15.32.

Положим

$$\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau) := \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \tag{15.95}$$

$$\widehat{I}^\circ_\varepsilon(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}), \tag{15.96}$$

$$J^\circ_\varepsilon(\tau) := f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}, \tag{15.97}$$

$$I^\circ_\varepsilon(\tau) := g^\varepsilon b(\mathbf{D})f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}. \tag{15.98}$$

Из теоремы 14.32 выводится следующий результат.

**Теорема 15.43.** *Пусть выполнено условие* 14.30.
$1^\circ$. *В условиях теоремы* 15.8 *для операторов* (15.95), (15.96) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\bigl\|\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\bigr\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}^\circ_7(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{15.99}$$

$$\bigl\|\widehat{I}^\circ_\varepsilon(\tau)\bigr\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}^\circ_8(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{15.100}$$

*Постоянные* $\widehat{\mathrm{C}}^\circ_7$, $\widehat{\mathrm{C}}^\circ_8$ *зависят от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, $r_1$, *а также от нормы* $\|[\Lambda]\|_{H^2\to H^1}$.

$2^\circ$. *В условиях теоремы* 15.29 *для операторов* (15.97), (15.98) *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\left\| J_\varepsilon^\circ(\tau) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_7^\circ (1 + |\tau|)\varepsilon, \tag{15.101}$$
$$\left\| I_\varepsilon^\circ(\tau) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_8^\circ (1 + |\tau|)\varepsilon.$$

*Постоянные* $\mathrm{C}_7^\circ$, $\mathrm{C}_8^\circ$ *зависят от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, $r_1$, *а также от нормы* $\|[\Lambda]\|_{H^2 \to H^1}$.

*Доказательство.* Проверим утверждение $1^\circ$. Утверждение $2^\circ$ проверяется аналогично.

Из (14.32) и (15.28) вытекает оценка

$$\left\| \mathbf{D} \widehat{J}_\varepsilon^\circ(\tau) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{c}_*^{-1/2} \widehat{\mathrm{C}}_5^\circ (1 + |\tau|)\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \ 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{15.102}$$

Оценим теперь норму $\left\| \widehat{J}_\varepsilon^\circ(\tau) \right\|_{H^2 \to L_2}$. В силу (15.11)

$$\left\| \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_2 (1 + |\tau|)\varepsilon. \tag{15.103}$$

Чтобы оценить корректор, применим масштабное преобразование:

$$\begin{aligned}
&\left\| \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \varepsilon \left\| \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \varepsilon \left\| \Lambda b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} \tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \varepsilon \left\| \Lambda \mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \left\| b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \varepsilon \|[\Lambda]\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \|\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^2(\mathbb{R}^d)} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{15.104}$$

Мы учли, что оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ коммутирует с дифференцированием, а потому и с функциями от $\widehat{\mathcal{A}}^0$. Далее,

$$\|\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^2(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2) \varepsilon^2 (|\boldsymbol{\xi}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \leqslant 1 + \varepsilon^2 \leqslant 2, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{15.105}$$

В итоге из (15.103)–(15.105) следует, что

$$\left\| \widehat{J}_\varepsilon^\circ(\tau) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \big( \widehat{\mathrm{C}}_2 + 2 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \|[\Lambda]\|_{H^2 \to L_2} \big) (1 + |\tau|)\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \ 0 < \varepsilon \leqslant 1.$$

Вместе с (15.102) это влечет искомую оценку (15.99).

Проверим теперь (15.100). Из (14.32) выводим оценку

$$\left\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widehat{J}_\varepsilon^\circ(\tau) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \widehat{\mathrm{C}}_5^\circ (1 + |\tau|)\varepsilon, \quad \tau \in \mathbb{R}, \ 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{15.106}$$

С учетом (8.11) имеем

$$\begin{aligned}
g^\varepsilon b(\mathbf{D}) (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) &= \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \\
&+ \varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}).
\end{aligned} \tag{15.107}$$

Оценим $(H^2 \to L_2)$-норму второго слагаемого. Аналогично (15.104) имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon \left\| \Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \right\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \left\| \Lambda D_l b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1} \tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \left\| \Lambda D_l \mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \left\| b(\mathbf{D}) (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \|[\Lambda]\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \|D_l \mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}.
\end{aligned} \tag{15.108}$$

Отметим, что условие 14.30 гарантирует ограниченность оператора $[\Lambda]$ из $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. При этом норма $\|[\Lambda]\|_{H^1\to L_2}$ контролируется через $\|[\Lambda]\|_{H^2\to H^1}$. См. [MSh, п. 1.3.2].

Очевидно,

$$\|D_l\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{1/2}|\xi_l|\varepsilon^2(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \varepsilon+\varepsilon^2 \leqslant 2\varepsilon, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.109}$$

Из (15.108) и (15.109) видно, что $(H^2\to L_2)$-норма второго слагаемого в (15.107) допускает оценку через $C\varepsilon$. Вместе с (15.106) это влечет оценку (15.100). $\square$

Аналогично из теоремы 14.33 выводится следующее утверждение.

**Теорема 15.44.** *Пусть выполнено условие* 14.31.
$1^\circ$. *В условиях теоремы* 15.11 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\big\|\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}^\circ_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{15.110}$$

$$\big\|\widehat{I}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}^\circ_{10}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{15.111}$$

*При условии* 9.3 *постоянные* $\widehat{\mathrm{C}}^\circ_9$ *и* $\widehat{\mathrm{C}}^\circ_{10}$ *зависят от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, $r_1$, *а также от нормы* $\|[\Lambda]\|_{H^{3/2}\to H^1}$. *При условии* 9.6 *эти константы зависят от тех же параметров и от* $n$, $\widehat{c}^\circ$.
$2^\circ$. *В условиях теоремы* 15.32 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\big\|J^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}^\circ_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{15.112}$$

$$\big\|I^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}^\circ_{10}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon.$$

*При условии* 12.3 *постоянные* $\mathrm{C}^\circ_9$ *и* $\mathrm{C}^\circ_{10}$ *зависят от* $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, $r_0$, $r_1$, *а также от нормы* $\|[\Lambda]\|_{H^{3/2}\to H^1}$. *При условии* 12.7 *эти константы зависят от тех же параметров и от* $n$, $c^\circ$.

*Доказательство.* Проверим утверждение $1^\circ$. Утверждение $2^\circ$ проверяется аналогично.

Из (14.34) и (15.28) вытекает оценка

$$\big\|\mathbf{D}\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{c}_*^{\,-1/2}\widehat{\mathrm{C}}^\circ_6(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.113}$$

Оценим теперь норму $\big\|\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}\to L_2}$. В силу (15.13)

$$\big\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_4(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{15.114}$$

Аналогично (15.104) имеем:

$$\begin{aligned}
&\big\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&= \varepsilon\big\|\Lambda b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\leqslant \varepsilon\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|[\Lambda]\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^{3/2}(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned} \tag{15.115}$$

Очевидно,

$$\|\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{3/4}\varepsilon^{3/2}(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant (1+\varepsilon^2)^{3/4} \leqslant 2^{3/4}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.116}$$

В итоге из (15.114)–(15.116) следует, что

$$\big\|\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \big(\widehat{\mathrm{C}}_4 + 2^{3/4}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|[\Lambda]\|_{H^{3/2}\to L_2}\big)(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1.$$

Вместе с (15.113) это влечет искомую оценку (15.110).

Проверим теперь (15.111). Из (14.34) выводим оценку

$$\big\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty}\widehat{\mathrm{C}}^\circ_6(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.117}$$

Используем соотношение (15.107) и оценим $(H^{3/2} \to L_2)$-норму второго слагаемого. Аналогично (15.108) имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\big\|\Lambda^\varepsilon D_l b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&=\big\|\Lambda D_l b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\leqslant \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|[\Lambda]\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|D_l\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^{1/2}(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}\tag{15.118}$$

Отметим, что условие 14.31 обеспечивает ограниченность оператора $[\Lambda]$ из $H^{1/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем норма $\|[\Lambda]\|_{H^{1/2}\to L_2}$ контролируется через $\|[\Lambda]\|_{H^{3/2}\to H^1}$; см. [MSh, п. 2.2.2]. Очевидно,

$$\|D_l\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/4}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^{1/2}(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(1+|\boldsymbol{\xi}|^2)^{1/4}|\xi_l|\varepsilon^{3/2}(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^{-3/4} \leqslant 2^{1/4}\varepsilon, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.119}$$

Из (15.118) и (15.119) видно, что $(H^{3/2} \to L_2)$-норма второго слагаемого в (15.107) допускает оценку через $C\varepsilon$. Вместе с (15.117) это влечет оценку (15.111). $\square$

15.10. **Интерполяционные результаты без сглаживателя.** Интерполяционные результаты без сглаживающего оператора отличаются от результатов следствий 15.9, 15.12, 15.25, 15.27. Причина в том, что операторы $\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})$ и $\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0$ не ограничены из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Наложим дополнительное условие.

**Условие 15.45.** *Пусть* $\Gamma$*-периодическое решение* $\Lambda$ *задачи* (8.9) *ограничено, т. е.* $\Lambda\in L_\infty$.

Нам понадобится следующее утверждение, установленное в [PSu, следствие 2.4].

**Предложение 15.46** ([PSu])**.** *Пусть выполнено условие* 15.45. *Тогда для любой функции* $u\in H^1(\mathbb{R}^d)$ *при* $\varepsilon>0$ *справедливо неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d}|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta_1\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\beta_2\varepsilon^2\|\Lambda\|^2_{L_\infty}\|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

*Постоянные* $\beta_1$ *и* $\beta_2$ *зависят от* $m$, $d$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$ *и* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Мы опираемся на следующее утверждение.

**Предложение 15.47.** *Пусть выполнено условие* 15.45. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *и* $\tau\in\mathbb{R}$ *справедливы оценки*

$$\big\|\mathbf{D}\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_{11}, \tag{15.120}$$

$$\big\|\widehat{I}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_{12}. \tag{15.121}$$

*Постоянные* $\widehat{\mathrm{C}}_{11}$ *и* $\widehat{\mathrm{C}}_{12}$ *зависят от* $m$, $d$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$ *и* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$*, а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

*Доказательство.* Проверим (15.120). Для оператора $\mathbf{D}\big(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})-(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big)$ применим прежнюю оценку (15.41).

Теперь оценим норму корректора. С учетом предложения 15.46 имеем:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{D}\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\leqslant \|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1\to L_2}+\varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1\to L_2}\\
&\leqslant \sqrt{\beta_1}\|b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1\to L_2}\\
&+\big(1+\sqrt{\beta_2}\big)\varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1\to L_2}\\
&\leqslant \sqrt{\beta_1}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}+\big(1+\sqrt{\beta_2}\big)\varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (15.41) вытекает оценка (15.120) при $\widehat{\mathrm{C}}_{11}=2\widehat{c}_*^{-1/2}+\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\big(\sqrt{\beta_1}+(1+\sqrt{\beta_2})\|\Lambda\|_{L_\infty}\big)$.

Проверим теперь оценку (15.121). С учетом (8.11) и (15.96)

$$\widehat{I}^\circ_\varepsilon(\tau) = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big) - g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}).$$

Обозначим слагаемые справа через $\widehat{I}^\circ_{1,\varepsilon}(\tau)$ и $\widehat{I}^\circ_{2,\varepsilon}(\tau)$. Очевидно,

$$\|\widehat{I}^\circ_{1,\varepsilon}(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty} + \|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}.$$

Применяя формулу $b(\mathbf{D})\Lambda = \sum_{l=1}^d b_l D_l\Lambda$ и предложение 15.46, с учетом (7.8) получаем

$$\begin{aligned}
&\|\widehat{I}^\circ_{2,\varepsilon}(\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\\
&\times\big(\sqrt{\beta_1}\|b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1\to L_2} + \sqrt{\beta_2}\varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1\to L_2}\big)\\
&\leqslant \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\big(\sqrt{\beta_1}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} + \sqrt{\beta_2}\varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\big).
\end{aligned}$$

В итоге приходим к оценке (15.121) при

$$\widehat{\mathrm{C}}_{12} = \|g\|^{1/2}_{L_\infty} + \|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} + (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\big(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2}\|\Lambda\|_{L_\infty}\big).$$

$\square$

Согласно замечанию 14.38 условие 15.45 является более сильным, нежели условия 14.30 и 14.31, и гарантирует их выполнение. С помощью интерполяции из теорем 15.43(1°), 15.44(1°) и предложения 15.47 непосредственно вытекает следствие.

**Следствие 15.48.** *Пусть выполнено условие* 15.45.
1°. *В условиях теоремы* 15.8 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\big\|\mathbf{D}\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^\circ_5(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r,\quad 0\leqslant r\leqslant 1, \tag{15.122}$$

$$\big\|\widehat{I}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^\circ_6(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r,\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

2°. *В условиях теоремы* 15.11 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\big\|\mathbf{D}\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^\circ_7(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r},\quad 0\leqslant r\leqslant 1/2, \tag{15.123}$$

$$\big\|\widehat{I}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^\circ_8(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r},\quad 0\leqslant r\leqslant 1/2.$$

**Замечание 15.49.** *Пусть выполнено условие* 15.45.
1°. *В условиях теоремы* 15.8 *из* (15.11), (15.120) *и очевидной оценки*

$$\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} \tag{15.124}$$

*следует, что*

$$\big\|\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_{13}\big(1+(1+|\tau|)\varepsilon\big),\quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.125}$$

*Интерполируя между* (15.125) *и* (15.99), *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *получаем оценку*

$$\big\|\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_9(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r\big(1+(1+|\tau|)\varepsilon\big)^{1-r},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

*При ограниченных значениях величины* $(1+|\tau|)\varepsilon$ *правая часть оценивается через* $C(1+|\tau|)^r\varepsilon^r$, *то есть, имеет тот же порядок, что и оценка* (15.122).
2°. *В условиях теоремы* 15.11 *из* (15.13), (15.120) *и* (15.124) *следует, что*

$$\big\|\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_{14}\big(1+(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\big),\quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{15.126}$$

*Интерполируя между* (15.126) *и* (15.110), *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *получаем оценку*

$$\big\|\widehat{J}^\circ_\varepsilon(\tau)\big\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_{10}(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r}\big(1+(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\big)^{1-2r},\quad 0\leqslant r\leqslant 1/2. \tag{15.127}$$

*При ограниченных значениях величины* $(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon$ *правая часть оценивается через* $C(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r}$, *то есть, имеет тот же порядок, что и оценка* (15.123).

Нетрудно проверить аналог предложения 15.47 для операторов $J_\varepsilon^\circ(\tau)$ и $I_\varepsilon^\circ(\tau)$:

**Предложение 15.50.** *Пусть выполнено условие* 15.45. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *и* $\tau\in\mathbb{R}$ *справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\left\|\mathbf{D}J_\varepsilon^\circ(\tau)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathrm{C}_{11}, \\ \left\|I_\varepsilon^\circ(\tau)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathrm{C}_{12}.\end{gathered}\tag{15.128}$$

*Постоянные* $\mathrm{C}_{11}$ *и* $\mathrm{C}_{12}$ *зависят от* $m$, $d$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, *а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

С помощью интерполяции из теорем 15.43(2°), 15.44(2°) и предложения 15.50 выводится следствие.

**Следствие 15.51.** *Пусть выполнено условие* 15.45.
1°. *В условиях теоремы* 15.29 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\left\|\mathbf{D}J_\varepsilon^\circ(\tau)\right\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathfrak{C}_5^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r,\quad 0\leqslant r\leqslant 1, \\ \left\|I_\varepsilon^\circ(\tau)\right\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathfrak{C}_6^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r,\quad 0\leqslant r\leqslant 1.\end{gathered}\tag{15.129}$$

2°. *В условиях теоремы* 15.32 *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\begin{gathered}\left\|\mathbf{D}J_\varepsilon^\circ(\tau)\right\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathfrak{C}_7^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r},\quad 0\leqslant r\leqslant 1/2, \\ \left\|I_\varepsilon^\circ(\tau)\right\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathfrak{C}_8^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r},\quad 0\leqslant r\leqslant 1/2.\end{gathered}$$

**Замечание 15.52.** *Пусть выполнено условие* 15.45.
1°. *В условиях теоремы* 15.29 *из* (15.69), (15.128) *и очевидной оценки*

$$\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$$

*следует неравенство*

$$\left\|J_\varepsilon^\circ(\tau)\right\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathrm{C}_{13}\big(1+(1+|\tau|)\varepsilon\big),\quad \tau\in\mathbb{R},\ 0<\varepsilon\leqslant 1.\tag{15.130}$$

*Интерполируя между* (15.130) *и* (15.101), *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *получаем оценку*

$$\left\|J_\varepsilon^\circ(\tau)\right\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathfrak{C}_9(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r\big(1+(1+|\tau|)\varepsilon\big)^{1-r},\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

*При ограниченных значениях величины* $(1+|\tau|)\varepsilon$ *правая часть оценивается через* $C(1+|\tau|)^r\varepsilon^r$, *то есть, имеет тот же порядок, что и оценка* (15.129).
2°. *В условиях теоремы* 15.32, *интерполируя между* (15.130) *и* (15.112), *при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *получаем оценку*

$$\left\|J_\varepsilon^\circ(\tau)\right\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant \mathfrak{C}_{10}(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r}\big(1+(1+|\tau|)\varepsilon\big)^{1-2r},\quad 0\leqslant r\leqslant 1/2.$$

*Порядок этой оценки хуже, чем в* (15.127). *Причина в том, что нет аналога оценки* (15.72) *для оператора* $J_{2,\varepsilon}(\tau)$.

Некоторые случаи, когда условие 15.45 заведомо выполнено, были указаны в [BSu4, лемма 8.7].
.

**Предложение 15.53.** *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений*:
1°) $d\leqslant 2$;
2°) *размерность* $d$ *произвольна и* $\widehat{\mathcal{A}}=\mathbf{D}^*g(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *причем матрица* $g(\mathbf{x})$ *имеет вещественные элементы*;
3°) *размерность* $d$ *произвольна и* $g^0=\underline{g}$ (*т. е., выполнены соотношения* (8.23)).
*Тогда условие* 15.45 *заведомо выполнено, причем норма* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *контролируется через* $d$, $\alpha_0$, $\alpha_1$, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметры решетки* $\Gamma$.

15.11. **Специальные случаи.** Предположим, что $g^0 = \overline{g}$, т. е. выполнены соотношения (8.22). Тогда $\Gamma$-периодическое решение задачи (8.9) равно нулю: $\Lambda = 0$. В этом случае корректор обращается в ноль и оператор (15.95) принимает вид

$$\widehat{J}_\varepsilon^\circ(\tau) = \widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau) = \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}).$$

Согласно (8.26), (8.27) выполнено также условие $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тем самым, выполнены условия теоремы 15.44(1°), в силу которой

$$\|\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_9^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{15.131}$$

Для оператора $\mathbf{D}\widehat{J}_{2,\varepsilon}(\tau)$ используем оценку (15.41). Тогда с помощью интерполяции с (15.131) получаем следующее утверждение.

**Предложение 15.54.** *Пусть $g^0 = \overline{g}$, т. е. выполнены соотношения* (8.22). *Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{D}\big(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\big)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_{11}(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 3/2.$$

Аналогичным образом при условии $g^0 = \overline{g}$ оператор (15.97) принимает вид

$$J_\varepsilon^\circ(\tau) = J_{2,\varepsilon}(\tau) = f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}.$$

Согласно (11.10) выполнено $\Lambda_Q(\mathbf{x}) = 0$, а тогда и $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$; см. (11.12), (11.13).

Тем самым, выполнены условия теоремы 15.44(2°), в силу которой

$$\|J_{2,\varepsilon}(\tau)\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_9^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{15.132}$$

Из (15.86) и (15.87) следует неравенство

$$\|\mathbf{D}J_{2,\varepsilon}(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2c_*^{-1/2}. \tag{15.133}$$

Интерполируя между (15.133) и (15.132), приходим к следующему утверждению.

**Предложение 15.55.** *Пусть $g^0 = \overline{g}$, т. е. выполнены соотношения* (8.22). *Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{D}\big(f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\big)\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_{11}(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $g^0 = \underline{g}$, т. е. выполнены соотношения (8.23). Согласно [BSu3, замечание 3.5] в этом случае матрица (8.11) совпадает с $g^0$, т. е. $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Из предложения 8.4(3°) следует, что $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Кроме того, в силу предложения 15.53(3°) выполнено условие 15.45.

Оператор $\widehat{I}_\varepsilon^\circ(\tau)$ сейчас принимает вид

$$\widehat{I}_\varepsilon^\circ(\tau) = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - g^0 b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}).$$

Очевидно,

$$\|\widehat{I}_\varepsilon^\circ(\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|g\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{15.134}$$

В силу теоремы 15.44(1°) справедлива оценка (15.111). Интерполируя между (15.134) и (15.111), приходим к следующему утверждению.

**Предложение 15.56.** *Пусть $g^0 = \underline{g}$, т. е. выполнены соотношения* (8.23). *Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - g^0 b(\mathbf{D})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_{12}(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}.$$

Отметим, что при $g^0 = \underline{g}$ оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ может быть отличен от нуля при некотором $\boldsymbol{\theta}$ (нет аналога предложения 8.4(3°)). Поэтому мы применяем теорему 15.43(1°). Интерполируя между (15.134) и (15.100), приходим к следующему утверждению.

**Предложение 15.57.** *Пусть $g^0 = \underline{g}$, т. е. выполнены соотношения* (8.23). *Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D}) f_0 (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) f_0^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \mathfrak{C}_{12}(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}.\end{aligned}$$

## § 16. Усреднение задачи Коши для гиперболического уравнения

16.1. **Задача Коши с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$.** Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{16.1}$$

где $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n))$ — заданные функции. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = \cos(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\phi} + \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\psi} + \int_0^\tau \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin((\tau-\tilde{\tau})\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) \mathbf{F}(\cdot,\tilde{\tau})\, d\tilde{\tau}. \tag{16.2}$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение "усреднённой" задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{16.3}$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) = \cos(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\boldsymbol{\phi} + (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\boldsymbol{\psi} + \int_0^\tau (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin((\tau-\tilde{\tau})(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2}) \mathbf{F}(\cdot,\tilde{\tau})\, d\tilde{\tau}. \tag{16.4}$$

**Теорема 16.1.** *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (16.1) *и $\mathbf{u}_0$ — решение усредненной задачи* (16.3).
$1^\circ$. *Если $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\psi} \in H^r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$, где $0 \leqslant s \leqslant 2$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_1(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_2(r)(1+|\tau|)^{(r+1)/2}\varepsilon^{(r+1)/2}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^r(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned} \tag{16.5}$$

$2^\circ$. *Если $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n))$, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

*Доказательство.* Оценка (16.5) прямо вытекает из следствия 15.3 и представлений (16.2), (16.4). Утверждение $2^\circ$ следует из $1^\circ$ по теореме Банаха-Штейнгауза. □

Утверждение $1^\circ$ теоремы 16.1 можно усилить при дополнительных предположениях. Из следствия 15.4 вытекает следующий результат.

**Теорема 16.2.** *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (16.1) *и $\mathbf{u}_0$ — решение усредненной задачи* (16.3). *Пусть выполнено условие* 9.3 *либо условие* 9.6 (*или более сильное условие* 9.7). *Если $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\psi} \in H^r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n))$, где $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $0 \leqslant r \leqslant 1/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_3(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_4(r)(1+|\tau|)^{(r+1)/3}\varepsilon^{2(r+1)/3}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^r(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $\boldsymbol{\phi}=0$ и обозначим через $\mathbf{v}_\varepsilon$ первое приближение к решению задачи (16.1):

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau):=\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)+\varepsilon\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0)(\mathbf{x},\tau). \tag{16.6}$$

Введем также обозначение для "потока":

$$\mathbf{p}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau):=g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau). \tag{16.7}$$

**Теорема 16.3.** *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (16.1) *при* $\boldsymbol{\phi}=0$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{p}_\varepsilon$ *определены в* (16.6) *и* (16.7) *соответственно.*
$1^\circ$. *Если* $\boldsymbol{\psi}\in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathrm{C}}_7(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right),$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathrm{C}}_8(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).$$

$2^\circ$. *Если* $\boldsymbol{\psi}\in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, $0\leqslant s\leqslant 2$, *то при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathfrak{C}}_5(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right),$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathfrak{C}}_6(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

$3^\circ$. *Если* $\boldsymbol{\psi}\in L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}=0,\quad\tau\in\mathbb{R},$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}=0,\quad\tau\in\mathbb{R}.$$

*Доказательство.* Утверждение $1^\circ$ следует из теоремы 15.8 и представлений (16.2), (16.4). Аналогично, утверждение $2^\circ$ вытекает из следствия 15.9.

С учетом замечания 15.10 утверждение $3^\circ$ следует из $1^\circ$ по теореме Банаха-Штейнгауза. ☐

**Замечание 16.4.** *В силу замечания* 15.10 *при* $0\leqslant s\leqslant 2$, $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathfrak{C}}_5'(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\big(1+(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon^{1/2}\big)^{1-s/2}\times\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

*При ограниченной величине* $(1+|\tau|)\varepsilon$ *правая часть имеет порядок* $(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}$.

Утверждения $1^\circ$ и $2^\circ$ теоремы 16.3 допускают усиление при дополнительных предположениях. Из теоремы 15.11 и следствия 15.12 вытекает следующий результат.

**Теорема 16.5.** *Пусть выполнены условия теоремы* 16.3. *Пусть выполнено условие* 9.3 *либо условие* 9.6 (*или более сильное условие* 9.7).
$1^\circ$. *Если* $\boldsymbol{\psi}\in H^{3/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^{3/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathrm{C}}_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{3/2}(\mathbb{R}^d))}\right),$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathrm{C}}_{10}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{3/2}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

$2^\circ$. *Если* $\boldsymbol{\psi}\in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, $0\leqslant s\leqslant 3/2$, *то при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathfrak{C}}_7(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right),$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widehat{\mathfrak{C}}_8(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

**Замечание 16.6.** *В силу замечания* 15.13 *в условиях теоремы* 16.5 *при* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}'_7(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\big(1+(1+|\tau|)^{1/3}\varepsilon^{2/3}\big)^{1-2s/3} \times \left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

*При ограниченной величине* $(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon$ *правая часть имеет порядок* $(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}$.

Обсудим теперь возможность замены первого приближения (16.6) на функцию

$$\mathbf{v}^0_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) := \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \varepsilon\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau). \tag{16.8}$$

Из теоремы 15.43(1°), следствия 15.48(1°) и замечания 15.49(1°) вытекает следующий результат.

**Теорема 16.7.** *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (16.1) *при* $\boldsymbol{\phi} = 0$. *Пусть* $\mathbf{v}^0_\varepsilon$ *и* $\mathbf{p}_\varepsilon$ *определены в* (16.8) *и* (16.7) *соответственно.*
1°. *Пусть выполнено условие* 14.30. *Если* $\boldsymbol{\psi} \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}^0_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}^\circ_7(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right),$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}^\circ_8(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).$$

2°. *Пусть выполнено условие* 15.45. *Если* $\boldsymbol{\psi} \in H^{1+r}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^{1+r}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}^0_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^\circ_5(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right),$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^\circ_6(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

3°. *Пусть выполнено условие* 15.45. *Если* $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}^0_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

**Замечание 16.8.** *В силу замечания* 15.49(1°) *в условиях теоремы* 16.7(2°) *при* $0 \leqslant r \leqslant 1$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}^0_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_9(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r\big(1+(1+|\tau|)\varepsilon\big)^{1-r}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

*При ограниченных значениях величины* $(1+|\tau|)\varepsilon$ *правая часть имеет порядок* $(1+|\tau|)^r\varepsilon^r$.

Утверждения 1° и 2° теоремы 16.7 можно усилить при дополнительных предположениях. Из теоремы 15.44(1°) и следствия 15.48(2°) получаем следующий результат.

**Теорема 16.9.** *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (16.1) *при* $\boldsymbol{\phi} = 0$. *Пусть* $\mathbf{v}^0_\varepsilon$ *и* $\mathbf{p}_\varepsilon$ *определены в* (16.8) *и* (16.7) *соответственно. Пусть выполнено условие* 9.3 *либо условие* 9.6 (*или более сильное условие* 9.7).
1°. *Пусть выполнено условие* 14.31. *Если* $\boldsymbol{\psi} \in H^{3/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^{3/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}^0_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}^\circ_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{3/2}(\mathbb{R}^d))}\right),$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}^\circ_{10}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{3/2}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

$2^\circ$. *Пусть выполнено условие* 15.45. *Если* $\boldsymbol{\psi} \in H^{1+r}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^{1+r}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, $0 \leqslant r \leqslant 1/2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_7^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right),$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_8^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

**Замечание 16.10.** *В силу замечания* 15.49($2^\circ$) *в условиях теоремы* 16.9($2^\circ$) *при* $0 \leqslant r \leqslant 1/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_{10}(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r}\bigl(1+(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\bigr)^{1-2r}\\ &\times\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right).\end{aligned}$$

*При ограниченных значениях величины* $(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon$ *правая часть имеет порядок* $(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r}$.

16.2. **Задача Коши с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$.** Возможны различные постановки задачи Коши, к которым применимы полученные выше результаты. Пользуясь линейностью задачи, мы рассмотрим единую постановку задачи в виде

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + Q^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x},\tau),\\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial\mathbf{u}_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) + (Q^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}).\end{cases} \tag{16.9}$$

Здесь $\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2 \in L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$ — заданные функции, а $Q(\mathbf{x})$ — $\Gamma$–периодическая эрмитова $(n\times n)$-матричнозначная функция такая, что

$$Q(\mathbf{x}) > 0; \quad Q, Q^{-1} \in L_\infty.$$

Факторизуем матрицу $Q(\mathbf{x})^{-1}$:

$$Q(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x})f^*(\mathbf{x}).$$

Без ограничения общности считаем $(n\times n)$-матрицу-функцию $f(\mathbf{x})$ периодической. Автоматически выполнено $f, f^{-1} \in L_\infty$. Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор (15.2).

Делая замену $\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) := (f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)$, можно переписать задачу (16.9) следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -(f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\tau) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\mathbf{F}_2(\mathbf{x},\tau),\\ \mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = (f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial\mathbf{z}_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}).\end{cases}$$

Для решения этой задачи справедливо представление

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_\varepsilon(\cdot,\tau) &= \cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\phi} + \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\psi}_1 + \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\psi}_2\\ &+ \int_0^\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin((\tau-\tilde\tau)\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}_1(\cdot,\tilde\tau)\,d\tilde\tau + \int_0^\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin((\tau-\tilde\tau)\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^*\mathbf{F}_2(\cdot,\tilde\tau)\,d\tilde\tau,\end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) &= f^\varepsilon\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\phi} + f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\psi}_1 + f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\psi}_2\\ &+ \int_0^\tau f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin((\tau-\tilde\tau)\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}_1(\cdot,\tilde\tau)\,d\tilde\tau + \int_0^\tau f^\varepsilon\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin((\tau-\tilde\tau)\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(f^\varepsilon)^*\mathbf{F}_2(\cdot,\tilde\tau)\,d\tilde\tau.\end{aligned} \tag{16.10}$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение "усреднённой" задачи

$$\begin{cases} \overline{Q}\dfrac{\partial^2\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \overline{Q}\mathbf{F}_1(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) + (\overline{Q})^{-1}\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{16.11}$$

где $\overline{Q}$ — среднее значение матрицы $Q(\mathbf{x})$ по $\Omega$. Полагая $f_0 = (\overline{Q})^{-1/2}$ и делая замену $\mathbf{z}_0(\cdot,\tau) := f_0^{-1}\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)$, приходим к представлению

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) &= f_0\cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\boldsymbol{\phi} + f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\boldsymbol{\psi}_1 + f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0\boldsymbol{\psi}_2 \\ &+ \int_0^\tau f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin((\tau-\tilde\tau)(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0^{-1}\mathbf{F}_1(\cdot,\tilde\tau)\,d\tilde\tau + \int_0^\tau f_0(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin((\tau-\tilde\tau)(\mathcal{A}^0)^{1/2})f_0\mathbf{F}_2(\cdot,\tilde\tau)\,d\tilde\tau. \end{aligned} \tag{16.12}$$

Применяя теорему 15.23, следствие 15.25 и замечание 15.26 и используя представления (16.10), (16.12), получаем следующий результат.

**Теорема 16.11.** *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (16.9) *и $\mathbf{u}_0$ — решение усредненной задачи* (16.11).
$1^\circ$. *Если $\boldsymbol{\phi} \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2 \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathrm{C}_1(1+|\tau|)\varepsilon\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \mathrm{C}_2(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^1(\mathbb{R}^d))}\right) \\ &+ \widetilde{\mathrm{C}}_2(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}_2\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_2\|_{L_1((0,\tau);H^1(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$

$2^\circ$. *Если $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2 \in H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, где $0 \leqslant s \leqslant 2$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathfrak{C}_1(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \mathfrak{C}_2(r)(1+|\tau|)^{(r+1)/2}\varepsilon^{(r+1)/2}\left(\|\boldsymbol{\psi}_2\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_2\|_{L_1((0,\tau);H^r(\mathbb{R}^d))}\right) \\ &+ \widetilde{\mathfrak{C}}_2(r)(1+|\tau|)\varepsilon^r\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^r(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$

$3^\circ$. *Если $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2 \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}_1,\mathbf{F}_2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

В случае, когда $\boldsymbol{\psi}_1 = 0$ и $\mathbf{F}_1 = 0$, можно усилить утверждения пунктов $1^\circ$ и $2^\circ$ теоремы 16.11 при дополнительных предположениях. Следствие 15.27 приводит к следующему результату.

**Теорема 16.12.** *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (16.9) *и $\mathbf{u}_0$ — решение усредненной задачи* (16.11), *причем $\boldsymbol{\psi}_1 = 0$ и $\mathbf{F}_1 = 0$. Пусть выполнено условие* 12.3 *либо условие* 12.7 (*или более сильное условие* 12.8). *Если $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\psi}_2 \in H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}_2 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, где $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $0 \leqslant r \leqslant 1/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathfrak{C}_3(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \mathfrak{C}_4(r)(1+|\tau|)^{(r+1)/3}\varepsilon^{2(r+1)/3}\left(\|\boldsymbol{\psi}_2\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_2\|_{L_1((0,\tau);H^r(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что $\boldsymbol{\phi} = 0$, $\boldsymbol{\psi}_2 = 0$ и $\mathbf{F}_2 = 0$. В этом случае можно приблизить решение задачи (16.9) в энергетической норме. Применяя теорему 15.29, следствие 15.30 и замечание 15.31, приходим к следующему результату.

**Теорема 16.13.** *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (16.9) *при* $\boldsymbol{\phi} = 0$, $\boldsymbol{\psi}_2 = 0$ *и* $\mathbf{F}_2 = 0$. *Пусть* $\mathbf{u}_0$ — *решение усредненной задачи* (16.11). *Положим* $\mathbf{v}_\varepsilon := \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0$, $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$.
$1^\circ$. *Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_7(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right),$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_8(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).$$

$2^\circ$. *Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_5(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right),$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_6(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

$3^\circ$. *Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

**Замечание 16.14.** *В силу замечания* 15.31 *при* $0 \leqslant s \leqslant 2$, $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}'_5(s)(1+|\tau|)\varepsilon^{s/2}\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Утверждения $1^\circ$ и $2^\circ$ теоремы 16.13 можно усилить при дополнительных предположениях. Из теоремы 15.32 и следствия 15.33 вытекает следующий результат.

**Теорема 16.15.** *Пусть выполнены условия теоремы* 16.13. *Пусть выполнено условие* 12.3 *либо условие* 12.7 (*или более сильное условие* 12.8).
$1^\circ$. *Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^{3/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{3/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^{3/2}(\mathbb{R}^d))}\right),$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_{10}(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^{3/2}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

$2^\circ$. *Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_7(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right),$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_8(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Обсудим возможность устранения сглаживающего оператора в корректоре. Из теоремы 15.43($2^\circ$), следствия 15.51($1^\circ$) и замечания 15.52($1^\circ$) получаем следующий результат.

**Теорема 16.16.** *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (16.9) *при* $\boldsymbol{\phi} = 0$, $\boldsymbol{\psi}_2 = 0$ *и* $\mathbf{F}_2 = 0$. *Пусть* $\mathbf{u}_0$ — *решение усредненной задачи* (16.11). *Положим* $\mathbf{v}^0_\varepsilon := \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$, $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$.
$1^\circ$. *Пусть выполнено условие* 14.30. *Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}^0_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}^\circ_7(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right),$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}^\circ_8(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).$$

$2^\circ$. *Пусть выполнено условие* 15.45. *Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^{1+r}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^{1+r}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_5^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r \left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right),$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_6^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r \left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

$3^\circ$. *Пусть выполнено условие* 15.45. *Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau\in\mathbb{R},$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau\in\mathbb{R}.$$

**Замечание 16.17.** *В силу замечания* $15.52(1^\circ)$ *в условиях теоремы* $16.16(2^\circ)$ *при* $0\leqslant r\leqslant 1$, $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_9(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^r\bigl(1+(1+|\tau|)\varepsilon\bigr)^{1-r} \left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

*При ограниченных значениях величины* $(1+|\tau|)\varepsilon$ *правая часть имеет порядок* $(1+|\tau|)^r\varepsilon^r$.

Утверждения $1^\circ$ и $2^\circ$ теоремы 16.16 можно усилить при дополнительных предположениях. Из теоремы $15.44(2^\circ)$ и следствия $15.51(2^\circ)$ вытекает следующий результат.

**Теорема 16.18.** *Пусть выполнены условия теоремы* 16.16. *Пусть выполнено условие* 12.3 *либо условие* 12.7 (*или более сильное условие* 12.8).
$1^\circ$. *Пусть выполнено условие* 14.31. *Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^{3/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^{3/2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_9^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon \left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^{3/2}(\mathbb{R}^d))}\right),$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_{10}^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon \left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^{3/2}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

$2^\circ$. *Пусть выполнено условие* 15.45. *Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^{1+r}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}_1 \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^{1+r}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, $0\leqslant r\leqslant 1/2$, *то при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_7^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r} \left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right), \tag{16.13}$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_8^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r} \left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

**Замечание 16.19.** *В силу замечания* $15.52(2^\circ)$ *в условиях теоремы* $16.18(2^\circ)$ *при* $0\leqslant r\leqslant 1/2$, $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathfrak{C}_{10}(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r}\bigl(1+(1+|\tau|)\varepsilon\bigr)^{1-2r} \\ &\times \left(\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}_1\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right).\end{aligned}$$

*Порядок этой оценки хуже, чем в* (16.13).

## § 17. Применение общих результатов: уравнение акустики

17.1. **Модельный оператор.** В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор

$$\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla. \tag{17.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — $\Gamma$-периодическая эрмитова $(d\times d)$-матрица-функция такая, что $g(\mathbf{x})>0$ и $g, g^{-1}\in L_\infty$. Оператор (17.1) является частным случаем оператора (8.1). В этом случае $n=1$, $m=d$ и $b(\mathbf{D})=\mathbf{D}$. Очевидно, условие (7.7) выполнено при $\alpha_0=\alpha_1=1$. Согласно (8.18) эффективный оператор для оператора (17.1) имеет вид $\widehat{\mathcal{A}}^0 = \mathbf{D}^* g^0\mathbf{D} = -\operatorname{div} g^0\nabla$. В сответствии с (8.11), (8.12), эффективная матрица $g^0$ определяется следующим образом. Пусть $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_d$

— стандартный ортонормированный базис в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\Phi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — слабое $\Gamma$-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})\,(\nabla\Phi_j(\mathbf{x})+\mathbf{e}_j)=0,\quad \int\limits_{\Omega}\Phi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0.$$

Тогда $\Lambda(\mathbf{x})$ — это матрица-строка $\Lambda(\mathbf{x}) = i(\Phi_1(\mathbf{x}),\dots,\Phi_d(\mathbf{x}))$, а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — это $(d\times d)$-матрица со столбцами $\widetilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\,(\nabla\Phi_j(\mathbf{x})+\mathbf{e}_j)$, $j=1,\dots,d$. Эффективная матрица определяется соотношением $g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. В случае $d=1$ выполнено $m=n=1$, а потому $g^0=\underline{g}$.

Если $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами, то в силу предложения 8.4(1°) выполнено $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Если же $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами, то в общей ситуации оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля. Поскольку $n=1$, то оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})=\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ есть оператор умножения на $\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$, где $\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ — коэффициент при $t^3$ в разложении первого собственного значения

$$\widehat{\lambda}(t,\boldsymbol{\theta})=\widehat{\gamma}(\boldsymbol{\theta})t^2+\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})t^3+\widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})t^4+\dots$$

оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})=\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$. Вычисление (см. [BSu3, п. 10.3]) показывает, что

$$\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})=\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})=-i\sum_{j,l,k=1}^{d}\left(a_{jlk}-a_{jlk}^*\right)\theta_j\theta_l\theta_k,\quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1},$$

$$a_{jlk}=|\Omega|^{-1}\int_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})^*\langle g(\mathbf{x})(\nabla\Phi_l(\mathbf{x})+\mathbf{e}_l),\mathbf{e}_k\rangle\,d\mathbf{x},\quad j,l,k=1,\dots,d.$$

Следующий пример заимствован из [BSu3, п. 10.4].

**Пример 17.1.** *Пусть $d=2$, $\Gamma=(2\pi\mathbb{Z})^2$ и матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вид*

$$g(\mathbf{x})=\begin{pmatrix}1 & i\beta'(x_1)\\ -i\beta'(x_1) & 1\end{pmatrix},$$

*где $\beta(x_1)$ — гладкая вещественная функция такая, что $1-(\beta'(x_1))^2>0$ и $\int_0^{2\pi}\beta(x_1)\,dx_1=0$. Тогда $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})=-\alpha\pi^{-1}\theta_2^3$, где $\alpha=\int_0^{2\pi}\beta(x_1)(\beta'(x_1))^2\,dx_1$. Легко привести конкретный пример, когда $\alpha\neq 0$: если $\beta(x_1)=c(\sin x_1+\cos 2x_1)$ при $0<c<1/3$, то $\alpha=-(3\pi/2)c^3\neq 0$. В данном примере $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})=\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})\neq 0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^1$ за исключением точек $(\pm1,0)$.*

Опишем теперь оператор $\widehat{\mathcal{N}}^{(1)}(\boldsymbol{\theta})$ — оператор умножения на $\widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})$. Пусть $\Psi_{jl}(\mathbf{x})$ — $\Gamma$-периодическое решение задачи

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\,(\nabla\Psi_{jl}(\mathbf{x})-\Phi_j(\mathbf{x})\mathbf{e}_l)=g^0_{lj}-\widetilde{g}_{lj}(\mathbf{x}),\quad \int\limits_\Omega\Psi_{jl}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0.$$

Как проверено в [VSu2, п. 14.5],

$$\widehat{\mathcal{N}}^{(1)}(\boldsymbol{\theta})=\widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})=\sum_{p,q,l,k=1}^{d}\left(\alpha_{pqlk}-(\overline{\Phi_p^*\Phi_q})g^0_{lk}\right)\theta_p\theta_q\theta_l\theta_k,$$

$$\alpha_{pqlk}=|\Omega|^{-1}\int_\Omega(\widetilde{g}_{lp}(\mathbf{x})\Psi_{qk}(\mathbf{x})+\widetilde{g}_{kq}(\mathbf{x})\Psi_{pl}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}$$
$$+|\Omega|^{-1}\int_\Omega\langle g(\mathbf{x})(\nabla\Psi_{qk}(\mathbf{x})-\Phi_q(\mathbf{x})\mathbf{e}_k,\nabla\Psi_{pl}(\mathbf{x})-\Phi_p(\mathbf{x})\mathbf{e}_l\rangle\,d\mathbf{x},\quad p,q,l,k=1,\dots,d.$$

**Замечание 17.2.** *В* [D1, лемма 5.8] *показано, что при $d=1$ и $g(x)\neq\mathrm{const}$ всегда выполнено $\widehat{\nu}(1)=\widehat{\nu}(-1)\neq 0$. Поэтому авторы полагают, что и в многомерном случае, как правило, $\widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})\neq 0$.*

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + F(\mathbf{x},\tau), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{17.2}$$

где $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$.

Пусть $u_0$ — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -\mathbf{D}^* g^0(\mathbf{x})\mathbf{D} u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + F(\mathbf{x},\tau), \\ u_0(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial u_0}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{17.3}$$

Применяя теорему 16.1 в общем случае и теорему 16.2 в "вещественном" случае, получаем следующий результат.

**Предложение 17.3.** *Пусть* $u_\varepsilon$ *— решение задачи* (17.2) *и* $u_0$ *— решение усредненной задачи* (17.3)*.*

1°*. Если* $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$*,* $\psi \in H^r(\mathbb{R}^d)$ *и* $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d))$*, где* $0 \leqslant s \leqslant 2$*,* $0 \leqslant r \leqslant 1$*, то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_1(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_2(r)(1+|\tau|)^{(r+1)/2}\varepsilon^{(r+1)/2}\left(\|\psi\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,\tau);H^r(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$

*Если* $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ *и* $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$*, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

2°*. Пусть* $g(\mathbf{x})$ *— симметричная матрица с вещественными элементами. Если* $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$*,* $\psi \in H^r(\mathbb{R}^d)$ *и* $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d))$*, где* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$*,* $0 \leqslant r \leqslant 1/2$*, то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_3(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widehat{\mathfrak{C}}_4(r)(1+|\tau|)^{(r+1)/3}\varepsilon^{2(r+1)/3}\left(\|\psi\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,\tau);H^r(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\phi = 0$, и приблизим решение в энергетической норме. Согласно (16.6) первое приближение к решению имеет вид

$$v_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = u_0(\mathbf{x},\tau) + \varepsilon\sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon(\mathbf{x})(\Pi_\varepsilon \partial_j u_0)(\mathbf{x},\tau). \tag{17.4}$$

Согласно предложению 15.53(2°) в "вещественном" случае выполнено $\Lambda \in L_\infty$, а тогда можно использовать первое приближение без сглаживателя:

$$v_\varepsilon^0(\mathbf{x},\tau) = u_0(\mathbf{x},\tau) + \varepsilon\sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon(\mathbf{x})\partial_j u_0(\mathbf{x},\tau). \tag{17.5}$$

В общем случае применимы теорема 16.3 и замечание 16.4, а в "вещественном" случае — теорема 16.9 и замечание 16.10.

**Предложение 17.4.** *Пусть* $u_\varepsilon$ *— решение задачи* (17.2) *и* $u_0$ *— решение усредненной задачи* (17.3) *при* $\phi = 0$*. Пусть* $v_\varepsilon$ *определено в* (17.4)*, а* $v_\varepsilon^0$ *— в* (17.5)*.*

1°*. Если* $\psi \in H^2(\mathbb{R}^d)$ *и* $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^2(\mathbb{R}^d))$*, то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - v_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_7(1+|\tau|)\varepsilon\left(\|\psi\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).$$

*Если $\psi \in H^s(\mathbb{R}^d)$ и $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d))$, где $0 \leqslant s \leqslant 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|\nabla u_\varepsilon(\cdot,\tau) - \nabla v_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_5(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\left(\|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right),$$
$$\|g^\varepsilon\nabla u_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon\Pi_\varepsilon\nabla u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_6(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\left(\|\psi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

*Если $\psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - v_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|g^\varepsilon\nabla u_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon\Pi_\varepsilon\nabla u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

$2^\circ$. *Пусть $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Если $\psi \in H^{3/2}(\mathbb{R}^d)$ и $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{3/2}(\mathbb{R}^d))$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - v^0_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}^0_9(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\left(\|\psi\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,\tau);H^{3/2}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

*Если $\psi \in H^{1+r}(\mathbb{R}^d)$ и $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^{1+r}(\mathbb{R}^d))$, где $0 \leqslant r \leqslant 1/2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|\nabla u_\varepsilon(\cdot,\tau) - \nabla v^0_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^\circ_7(s)(1+|\tau|)^{r}\varepsilon^{2r}\left(\|\psi\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right),$$
$$\|g^\varepsilon\nabla u_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon\nabla u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}^\circ_8(r)(1+|\tau|)^{r}\varepsilon^{2r}\left(\|\psi\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,\tau);H^{1+r}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

*Если $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$ и $F \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^1(\mathbb{R}^d))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - v^0_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|g^\varepsilon\nabla u_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon\nabla u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

17.2. **Уравнение акустики.** В условиях пункта 17.1 предположим дополнительно, что $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами. Матрица $g(\mathbf{x})$ характеризует параметры акустической (вообще говоря, анизотропной) среды. Пусть $Q(\mathbf{x})$ — Г-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, причем $Q(\mathbf{x}) > 0$; $Q, Q^{-1} \in L_\infty$. Эта функция играет роль плотности среды. Положим $f(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})^{-1/2}$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения акустики в среде с быстро осциллирующими характеристиками:

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x})\dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \\ u_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \psi_1(\mathbf{x}) + (Q^\varepsilon)^{-1}\psi_2(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{17.6}$$

где $\phi, \psi_1, \psi_2 \in L_2(\mathbb{R}^d)$. (Для простоты рассматриваем однородное уравнение.)

Пусть $u_0$ — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \overline{Q}\dfrac{\partial^2 u_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -\mathbf{D}^* g^0(\mathbf{x})\mathbf{D}u_0(\mathbf{x},\tau), \\ u_0(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial u_0}{\partial\tau}(\mathbf{x},0) = \psi_1(\mathbf{x}) + (\overline{Q})^{-1}\psi_2(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{17.7}$$

В силу предложения 11.1($1^\circ$) выполнено $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. В общем случае применима теорема 16.11, а в случае $\psi_1 = 0$ — теорема 16.12.

Приблизить решение в энергетической норме удается, если $\phi = 0$ и $\psi_2 = 0$. Как уже отмечалось, выполнено условие $\Lambda \in L_\infty$, а потому применима теорема 16.18. Сформулируем результаты.

**Предложение 17.5.** *Пусть $u_\varepsilon$ — решение задачи* (17.6) *и $u_0$ — решение усредненной задачи* (17.7).

$1^\circ$. *Если* $\phi \in H^s(\mathbb{R}^d)$, $\psi_1 \in H^r(\mathbb{R}^d)$, $\psi_2 \in H^\rho(\mathbb{R}^d)$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \rho \leqslant 1/2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_3(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{2s/3}\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$
$$+ \widetilde{\mathfrak{C}}_2(r)(1+|\tau|)\varepsilon^r\|\psi_1\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}_4(\rho)(1+|\tau|)^{(1+\rho)/3}\varepsilon^{2(1+\rho)/3}\|\psi_2\|_{H^\rho(\mathbb{R}^d)}.$$

*Если* $\phi, \psi_1, \psi_2 \in L_2(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

$2^\circ$. *Пусть* $\phi = 0$ *и* $\psi_2 = 0$. *Положим*

$$v_\varepsilon^0 = u_0 + \varepsilon\sum_{j=1}^d \Phi_j^\varepsilon \partial_j u_0.$$

*Если* $\psi_1 \in H^{3/2}(\mathbb{R}^d)$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - v_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_9^\circ(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon\|\psi_1\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)}.$$

*Если* $\psi_1 \in H^{1+r}(\mathbb{R}^d)$, *где* $0 \leqslant r \leqslant 1/2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\nabla u_\varepsilon(\cdot,\tau) - \nabla v_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_7^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r}\|\psi_1\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)},$$
$$\|g^\varepsilon\nabla u_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon\nabla u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_8^\circ(r)(1+|\tau|)^r\varepsilon^{2r}\|\psi_1\|_{H^{1+r}(\mathbb{R}^d)}.$$

*Если* $\psi_1 \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - v_\varepsilon^0(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|g^\varepsilon\nabla u_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon\nabla u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

## § 18. Применение общих результатов: система теории упругости

18.1. **Оператор теории упругости.** Пусть $d \geqslant 2$. Мы записываем оператор теории упругости, следуя [BSu1, глава 5, §2]. Пусть $\zeta$ — ортогональный тензор второго ранга в $\mathbb{R}^d$. В стандартном ортонормированном базисе в $\mathbb{R}^d$ он представляется в виде матрицы $\zeta = \{\zeta_{jl}\}_{j,l=1}^d$. Рассматриваем симметричные тензоры $\zeta$ и отождествляем их с векторами $\zeta_* \in \mathbb{C}^m$, $2m = d(d+1)$, по следующему правилу. Вектор $\zeta_*$ состоит из всех компонент $\zeta_{jl}$, $j \leqslant l$, упорядоченных каким-либо фиксированным способом.

Для вектора смещений $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$ введем тензор деформаций $e(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\{\partial_l u_j + \partial_j u_l\}$. Пусть $e_*(\mathbf{u})$ — вектор, отвечающий тензору $e(\mathbf{u})$ в соответствии с описанным правилом. Равенство $b(\mathbf{D})\mathbf{u} = -ie_*(\mathbf{u})$ определяет однозначно $(m \times d)$-матричный ДО $b(\mathbf{D})$ (причем символ $b(\boldsymbol{\xi})$ является матрицей с вещественными элементами). Например, при подходящем упорядочении

$$b(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 \\ \frac{1}{2}\xi_2 & \frac{1}{2}\xi_1 \\ 0 & \xi_2 \end{pmatrix}, \quad d = 2.$$

Сейчас $n = d$, $m = d(d+1)/2$. Легко видеть, что условие (7.7) выполнено, причем $\alpha_0$, $\alpha_1$ зависят только от $d$.

Пусть $\sigma(\mathbf{u})$ — тензор напряжений, а $\sigma_*(\mathbf{u})$ — соответствующий вектор. Тогда закон Гука о пропорциональности напряжений деформациям можно выразить соотношением $\sigma_*(\mathbf{u}) = g(\mathbf{x})e_*(\mathbf{u})$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная $(m \times m)$-матрица с вещественными элементами. Матрица $g$ характеризует параметры упругой (вообще говоря, анизотропной) среды. Мы предполагаем, что матрица $g(\mathbf{x})$ периодична, $g(\mathbf{x}) > 0$ и $g, g^{-1} \in L_\infty$.

Энергия упругих деформаций задается квадратичной формой

$$w[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\langle\sigma_*(\mathbf{u}), e_*(\mathbf{u})\rangle\,d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\langle g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d). \tag{18.1}$$

Оператор $\mathcal{W}$, порожденный этой формой в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, называют оператором упругости. Таким образом, $2\mathcal{W} = \widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$.

В случае изотропной среды матрица $g(\mathbf{x})$ выражается через два функциональных параметра $\lambda(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ (параметры Ламе). Параметр $\mu$ — модуль сдвига. Часто вместо $\lambda$ вводят другой параметр $K(\mathbf{x})$ — модуль объемного сжатия. Нам понадобится еще один модуль — $\beta(\mathbf{x})$. Выпишем соотношения:

$$K(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) + \frac{2\mu(\mathbf{x})}{d}, \quad \beta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \frac{\lambda(\mathbf{x})}{2}.$$

Условия положительной определенности матрицы $g(\mathbf{x})$ в изотропном случае имеют вид: $\mu(\mathbf{x}) \geqslant \mu_0 > 0$, $K(\mathbf{x}) \geqslant K_0 > 0$. Для примера выпишем матрицу $g(\mathbf{x})$ в изотропном случае при $d = 2$:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} K(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) & 0 & K(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) \\ 0 & 4\mu(\mathbf{x}) & 0 \\ K(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{x}) & 0 & K(\mathbf{x}) + \mu(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

18.2. **Усреднение системы теории упругости.** Рассмотрим теперь оператор упругости $\mathcal{W}_\varepsilon = \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \frac{1}{2} b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ с быстро осциллирующими коэффициентами. Эффективная матрица $g^0$ и эффективный оператор $\mathcal{W}^0 = \frac{1}{2}\widehat{\mathcal{A}}^0 = \frac{1}{2} b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ строятся по общим правилам (см. п. 8.2, 8.3). Отметим, что в изотропном случае эффективная среда, вообще говоря, является анизотропной.

Оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$, вообще говоря, отличен от нуля. Более того, известны примеры, в которых $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ в некоторых точках $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ (даже в изотропном случае). См. [Su6, пример 8.7], [DSu2, п. 14.3].

Пусть $Q(\mathbf{x})$ — $\Gamma$-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция с вещественными элементами, причем $Q(\mathbf{x}) > 0$; $Q, Q^{-1} \in L_\infty$. (Обычно $Q$ — скалярная функция, имеющая смысл плотности среды). Положим $f(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})^{-1/2}$. Рассмотрим задачу Коши для системы теории упругости с быстро осциллирующими коэффициентами:

$$\begin{cases} Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2} = -\mathcal{W}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial \tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) + (Q^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{18.2}$$

где $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$. (Для простоты рассматриваем однородное уравнение.)

Пусть $\mathbf{u}_0$ — решение усредненной задачи

$$\begin{cases} \overline{Q} \dfrac{\partial^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau^2} = -\mathcal{W}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \dfrac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \tau}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}_1(\mathbf{x}) + (\overline{Q})^{-1}\boldsymbol{\psi}_2(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{18.3}$$

Применима теорема 16.11. Приблизить решение в энергетической норме удается, если $\boldsymbol{\phi} = 0$ и $\boldsymbol{\psi}_2 = 0$. Применима теорема 16.13. Сформулируем результаты.

**Предложение 18.1.** *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (18.2) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение усредненной задачи* (18.3).

1°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, $\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in H^r(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 2$, $0 \leqslant r \leqslant 1$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widetilde{\mathfrak{C}}_2(s)(1+|\tau|)\varepsilon^r\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{C}_2(r)(1+|\tau|)^{(1+r)/2}\varepsilon^{(1+r)/2}\|\boldsymbol{\psi}_2\|_{H^r(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

*Если* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2 \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, *то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

2°. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} = 0$ *и* $\boldsymbol{\psi}_2 = 0$. *Положим*

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0.$$

*Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_7(1+|\tau|)\varepsilon\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

*Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d)$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{D}\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_5(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^s(\mathbb{R}^d)},$$
$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_6(s)(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\|\boldsymbol{\psi}_1\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}.$$

*Если* $\boldsymbol{\psi}_1 \in L_2(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

18.3. **Тело Хилла.** Так в механике называют изотропную среду, когда $\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 = \mathrm{const}$ (см., например, [ZhKO]). Для этого случая возможна более простая факторизация оператора $\mathcal{W}$; см. [BSu1, глава 5, п. 2.3]. Форму (18.1) можно представить в виде

$$w[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d}\langle g_\wedge(\mathbf{x})b_\wedge(\mathbf{D})\mathbf{u}, b_\wedge(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^d).$$

При этом $m_\wedge = 1 + d(d-1)/2$. Символ оператора $b_\wedge(\mathbf{D})$ — матрица $b_\wedge(\boldsymbol{\xi})$ размера $m_\wedge \times d$ определяется следующим образом. Первая строка есть $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)$. Остальные строки соответвуют парам индексов $(j,l)$, $1 \leqslant j < l \leqslant d$. Элемент, стоящий в $(j,l)$-й строке и $j$-м столбце, есть $\xi_l$; элемент, стоящий в $(j,l)$-й строке и $l$-м столбце, есть $-\xi_j$; остальные элементы $(j,l)$-й строки равны нулю. Матрица $g_\wedge(\mathbf{x})$ диагональна и имеет вид

$$g_\wedge(\mathbf{x}) = \mathrm{diag}\{\beta(\mathbf{x}), \mu_0/2, \ldots, \mu_0/2\}.$$

Эффективный оператор имеет вид

$$\mathcal{W}^0 = b_\wedge(\mathbf{D})^* g^0 b_\wedge(\mathbf{D}),$$

причем эффективная матрица $g^0$ совпадает с $\underline{g}$ и равна

$$g^0 = \underline{g} = \mathrm{diag}\{\underline{\beta}, \mu_0/2, \ldots, \mu_0/2\}.$$

В силу предложения 15.53(3°) выполнено условие $\Lambda \in \infty$. Для задачи (18.2) применима теорема 16.11, а в случае, когда $\boldsymbol{\phi} = 0$ и $\boldsymbol{\psi}_2 = 0$ — теорема 16.16.

Обсудим случай, когда $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{1}$. В силу предложения 8.4(3°) выполнено $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Поэтому применима теорема 16.2, а в случае, когда $\boldsymbol{\phi} = 0$ и $\boldsymbol{\psi}_2 = 0$, применима теорема 16.9.

## Список литературы


[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учётом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 69–90.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 6, 30–107.

[COrVa] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *Bloch approximation in homogenization and applications*, SIAM J. Math. Anal. **33** (2002), no. 5, 1166–1198.

[D1] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger type equations: dependence on time*, preprint (2019), arXiv:1905.04583.

[D2] Дородный М. А., *Усреднении периодических уравнений типа Шрёдингера при включении членов младшего порядка*, Алгебра и анализ **31** (2019), вып. 6.

[DSu1] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений*, Функц. анализ и его прил. **50** (2016), вып. 4, 91–96.

[DSu2] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Diff. Equ. **264** (2018), no. 12, 7463–7522.

[V] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 1, 3–60.

[VSu1] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **23** (2011), вып. 2, 102–146.

[VSu2] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учёте первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 2, 1–103.

[Zh1] Жиков В. В., *Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии*, Дифференциальные уравнения **25** (1989), вып. 1, 44–50.

[Zh2] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.

[ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Операторные оценки в теории усреднения*, Успехи матем. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.

[Ka] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[LaU] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[MSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1986.

[M1] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), вып. 6, 125-177.

[M2] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients*, preprint (2017), arXiv:1705.02531v4.

[M3] Мешкова Ю. М., *Об усреднении периодических гиперболических систем*, Матем. заметки **105** (2019), вып. 6, 937–942.

[M4] Мешкова Ю. М., *Усреднение периодических параболических систем по $L_2(\mathbb{R}^d)$-норме при учете корректора*, Алгебра и анализ **31** (2019), вып. 4, 137-197.

[M5] Meshkova Yu. M., *On homogenization of periodic hyperbolic systems. Variations on the theme of the Trotter–Kato theorem*, preprint (2019), arXiv:1904.02781.

[PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.

[Se] Севостьянова Е. В., *Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами*, Мат. сб. **115** (1981), № 2, 204–222.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, 201–233.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.

[Su4] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 1, 108–221.

[Su5] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с учетом корректора*, Алгебра и анализ **26** (2014), вып. 4, 195–263.

[Su6] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. Appl. **446** (2017), no. 2, 1466–1523.