ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 1/2019

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ВЫТЯНУТОМ ТЕЛЕ

В. Б. ФИЛИППОВ

С.-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Ст.-Петербург, Россия

e-mail: vbph@mail.ru

6 мая 2019 г.

АННОТАЦИЯ

В статье рассматривается задача рассеяния монохроматической электромагнитной волны на вытянутом теле, размеры которого велики по сравнению с длиной волны падающего поля в продольном направлении и малы в поперечном. Предложена процедура получения асимптотики тока на границе. Получены явные формулы для главного значения и первого приближения. На основе формул для тока получены выражения для диаграммы направленности. Сделаны выводы о характере и свойствах рассеянного поля.

Ключевые слова: дифракция, электромагнитные волны, ток, диаграмма направленности

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

1 Введение

Пусть на вытянутое тело Ω падает монохроматическая плоская волна

$$\mathbf{E}^e = E^e \exp(-i\mathbf{kr})$$

$$\mathbf{H}^e = H^e \exp(-i\mathbf{kr})$$

где $\mathbf{k}$ волновой вектор, $k = i\omega/c$ волновое число, ω частота, c скорость света в вакууме.

Скалярный случай ранее был рассмотрен в [1]. Случай бесконечного цилиндра с медленно меняющимся диаметром поперечного сечения рассмотрен в [2].

В области R^3/Ω,заполненной изотропной однородной средой (вакуумом) выполняются уравнения Максвелла

$$k\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{H} \tag{1}$$

$$ik\mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{E} \tag{2}$$

Предполагается, что тело Ω является вытянутым телом вращения с гладкой плавно меняющейся границей, т.е. выполняются условия

$$kl \gg 1, \quad k\rho_{max} \ll 1 \tag{3}$$

где l-длина тела, ρ_{max} - максимальный радиус поперечного сечения.

На границе тела $S = \partial\Omega$ выполняются контактные условия

$$\mathbf{n} \times [\mathbf{E^1} - \mathbf{E^2}] = 0, \mathbf{n} \times [\mathbf{H^1} - \mathbf{H^2}] = \mathbf{j}, \tag{4}$$

где $\mathbf{j}$ -ток на границе.

Предположим, что наше тело является идеальным проводником, т.е. внутри тела электромагнитное поле отсутствует ($E = 0, H = 0$), а ток сосредоточен на границе.

2 Ток на границе

Для начала рассмотрим случай падения плоской электромагнитной волны на конечный круговой цилиндре. Предположим сначала, что волна падает перпендикулярно к образующей цилиндра, т.е. $\mathbf{ke}_z = 0$

Введем цилиндрическую систему координат (ρ, φ, z), тогда уравнение нашей поверхности будет: $\rho = a, \mid z \mid < b$

Возможно 2 случая:

- вектор $\mathbf{H}^e$ перпендикулярен образующей цилиндра, т.е. $\mathbf{H}^e\mathbf{e}_z = 0$,
- вектор $\mathbf{H}^e$ параллелен ей, т.е.$\mathbf{H}^e \times \mathbf{e}_z = 0$;

Рассмотрим первый случай. Пусть плоскость, в которой расположены векторы E и H касается поверхности цилиндра в точке $P = (a, \frac{\pi}{2}, 0)$. Полное поле складывается из двух частей: падающего поля и поля, рассеянного на теле

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^s$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^e + \mathbf{H}^s$$

Будем искать рассеянное поле в виде векторного потенциала A

$$\mathbf{H}^{\mathbf{s}} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{5}$$

В дальнейшем, если в этом нет особой необходимости, значок s будем опускать. Напряженность электрического поля будет выражаться через потенциал A следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{ik}(\nabla(\nabla\mathbf{A}) + k^2\mathbf{A}) \tag{6}$$

Учитывая, что в точке касания выполняется условие $\mathbf{H}^e\mathbf{e}_z = 0$, а также (5), естественно предположить, что

$$\mathbf{A} = A_z\mathbf{e}_z \tag{7}$$

Обозначим

$$A_z = \psi$$

Скалярная величина ψ удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$(\triangle + k^2)\psi = 0 \tag{8}$$

Получим для неё граничные условия

На границе должны выполняться следующие условия: вектор электрической напряженности $\mathbf{E}$ и касательные производные непрерывны, вектор магнитной напряженности $\mathbf{H}$ имеет скачок на границе. Учитывая, что тело Ω является, по предположению, идеальным проводником, т.е. внутри тела $\mathbf{E}, \mathbf{H} = 0$, получим, что на границе с внешней стороны должно выполняться условие $\mathbf{E} = 0$

Запишем (6) в цилиндрической системе координат. Учитывая (7), имеем:

$$\nabla\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

т.е.

$$\nabla(\nabla \mathbf{A}) + k^2\mathbf{A} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial\rho\partial z}\mathbf{e}_\rho +$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 A_z}{\partial\varphi\partial z}\mathbf{e}_\varphi + (\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2)A_z\mathbf{e}_z \tag{9}$$

Очевидно, что главный член потенциала A_z для случая длинного цилиндра вне окрестности концов должен совпадать с потенциалом для бесконечного цилиндра, который, как легко видеть, является решением задачи Дирихле для поперечного сечения. В случае нормального падения он равен падающему полю на границе и ток ($\partial A_z/\partial\rho$ для $\rho = a$) постоянен на границе. Поэтому естественно предположить, что в формуле (9) все слагаемые кроме последнего являются поправочными. Таким образом для потенциала $\psi = A_z$ в главном приближении получаем задачу:

$$(\triangle + k^2)\psi = 0 \quad in \quad R^3 \setminus \Omega \tag{10}$$

$$\psi = \psi^e \quad on \quad S \tag{11}$$

где $\psi^e = \frac{1}{ik}E^e$, "внешний"потенциал, созданный падающим полем. Будем искать функцию ψ в виде потенциала простого слоя

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\exp(kR)}{R} j dS \tag{12}$$

Покажем, что на S

$$\frac{\partial}{\partial n}A_z = H_\varphi \tag{13}$$

Действительно, для этого запишем $\nabla \times \mathbf{A}$ в цилиндрической системе координат

$$\nabla \times \mathbf{A} = (\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z})\mathbf{e}_\rho + (\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho})\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{\rho}(\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi})\mathbf{e}_z$$

отсюда, учитывая (7), получим на S

$$\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\mathbf{e}_\varphi \tag{14}$$

или, что то же самое (13).

Покажем, что в нашем случае "внешний"ток, создаваемый падающим магнитным полем $\mathbf{H}$, не вносит вклад в $\mathbf{A}$.

Действительно:

$$\mathbf{j}^e = \mathbf{n} \times \mathbf{H^e} = H^e \sin\varphi \mathbf{e}_z \tag{15}$$

поскольку, в силу условия (3) H^e мало меняется на S. Тогда, подставляя (15) в интеграл (12) видим, что интеграл обратится в ноль.

Беря точку наблюдения на границе, из (11) получим интегральное уравнение для тока $j(\varphi, z)$

$$\psi^e = -\frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\exp(kR)}{R} j dS \tag{16}$$

Дополним границу S до бесконечного цилиндра S_0, добавив к ней два полубесконечных цилиндра S_+, S_- справа и слева:

$$S_0 = S \cup S_+ \cup S_-$$

Решение интегрального уравнения (16) будем искать методом последовательных приближений:

$$j = j^{(0)} + j^{(1)} + j^{(2)} + ...$$

Главный член $j^{(0)}$ находится из уравнения () для бесконечного цилиндра S_0 и совпадает с решением задачи Дирихле для внешности круга

$$j^{(0)} = E_z^e \tag{17}$$

Следующее приближение $j^{(1)} = j_+^{(1)} + j_-^{(1)}$ находится из уравнений

$$f_\pm^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\exp(kR)}{R} j_\pm^{(1)} dS \tag{18}$$

где

$$f_\pm^{(1)} = -\frac{1}{4\pi}\int_{S_\pm} \frac{\exp(kR)}{R} j^{(0)} dS \tag{19}$$

и т.д.

Рассмотрим функцию $f_+^{(1)}$, на S имеем:

$$R^2(\varphi, z; \varphi', z') = a^2(\cos\varphi - \cos\varphi')^2 + a^2(\sin\varphi - \sin\varphi')^2 + (z - z')^2 =$$
$$4a^2 \sin^2(\frac{\varphi - \varphi'}{2}) + (z - z')^2 \tag{20}$$

в области $\mid z - z' \mid \gg a$ получим:

$$R(\varphi, z; \varphi', z') = \mid z - z' \mid (1 + O(ka)) \tag{21}$$

Возможны три случая:

$$b - z = O(a), \tag{22}$$

$$ka \ll k(b-z) = O(1) \tag{23}$$

$$k(b-z) \gg 1 \tag{24}$$

для функции $f_+^{(1)}$ имеем выражение:

$$f_+^{(1)}(\varphi, z) = -\frac{ika}{4\pi}\int_b^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\exp(kR)}{R} d\varphi^{'} dz^{'} \tag{25}$$

Рассмотрим случай (22). Поскольку интеграл (25) не зависит от φ, можно положить $\varphi = 0$. С проблемой бесконечности можно справиться, добавляя небольшую мнимую часть в волновое число $k = k + i\varepsilon$. Введем новые переменные $s = 2a\sin(\frac{\varphi^{'}}{2}), t = b - z^{'} > 0, \tau = b - z > 0$ поскольку $z < b, z^{'} > b$, тогда получим: Таким образом имеем:

$$R() \sim \sqrt{s^2 + (t+\tau)^2}$$

$$d\varphi^{'} = \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds$$

Учитывая (22), имеем $kR \ll 1$, т.е. $\exp(kR) \sim 1$ и следовательно для функции получим:

$$f_+^{(1)}(\tau) \sim -\frac{ik}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^a \frac{\exp(-\varepsilon t)}{\sqrt{s^2+(t+\tau)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} ds dt = c_1(\tau) ika$$

где $0 < c_1(\tau) < \frac{1}{2}$

Введем растянутые координаты $s^{'} = ks, t^{'} = kt, \tau^{'} = k\tau$ (штрихи в дальнейшем будем опускать), тогда

$$f_+^{(1)}(\tau) \sim -\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^{ka} \frac{\exp(-(\frac{\varepsilon}{k})t)}{\sqrt{s^2+(t+\tau)^2}} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{s}{k})^2}} ds dt$$

Для положительных величин имеет место неравенство

$$a^2 + b^2 > 2ab$$

Тогда имеем:

$$\mid f_+^{(1)}(\tau) \mid < \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_0^{ka} \frac{\exp(-(\frac{\varepsilon}{k})t)}{\sqrt{2s(t+\tau)}} \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{s}{k})^2}} ds dt$$

,

Следовательно:

$$| f_+^{(1)}(\tau) |< c\sqrt{ka}\sqrt{k\tau} < c_1 ka \tag{26}$$

Получим оценку для случая (23). Имеем $R \sim t+\tau$, и следовательно

$$| f_+^{(1)}(\tau) |< ka \int_0^\infty \frac{\exp(-(\frac{\varepsilon}{k})t)}{t+\tau} dt \sim ka \ln(\tau) < c_1 ka \tag{27}$$

Рассмотрим случай (25), как и в предыдущем пункте, имеем $R \sim t+\tau$ и следовательно:

$$f_+^{(1)}(\tau) \sim -\frac{ika}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\exp(i(k+i\varepsilon)t)}{t+\tau} dt$$

Применим к интегралу (27) формулу интегрирования по частям, тогда

$$f_+^{(1)}(\tau) \sim -\frac{ika}{2\pi} [\frac{1}{ik\tau} - \frac{1}{ik} \int_0^\infty \frac{\exp(i(k+i\varepsilon)t)}{(t+\tau)^2} dt] \tag{28}$$

Откуда получаем:

$$f_+^{(1)}(\tau) \sim -\frac{ka}{2k\tau} \tag{29}$$

Тогда для тока $j_+^{(1)}$, который, напомним, является решением интегрального уравнения (18), получим следующие оценки:

$$| j_+^{(1)} |< c_1 k(ka) \quad for \quad k(b-z) = O(1) \tag{30}$$

$$j_+^{(1)} \sim c_2 k \frac{ka}{k(b-z)} \exp(ik(b-z)) \quad for \quad k(b-z) \gg 1 \tag{31}$$

Аналогичные оценки можно получить для функции $j_-^{(1)}$.

Напомним, что все вышеприведенные формулы относятся к случаю нормального падения. Предположим теперь, что волна падает под углом в оси цилиндра, разложим волновой вектор $\mathbf{k}$ на два

$$\begin{aligned} \mathbf{k} = \mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}_\| \\ \mathbf{k}_\perp e_z = 0 \\ \mathbf{k}_\| \times e_z = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Будем искать решение в виде:

$$\mathbf{A} = \exp(ik_{\parallel}z)\mathbf{A}(k_{\perp}) \tag{33}$$

Все полученные формулы сохранятся, если в них k заменить на $k_{\perp}$.

Рассмотрим теперь второй случай поляризации, когда вектор электрической напряженности касается цилиндра, т.е.

$$\mathbf{E} = E_{\varphi}\mathbf{e}_{\varphi}$$
$$\mathbf{H} = H_z\mathbf{e}_z$$

В этом случае падающая волна не может создать значительный ток, поскольку суммарное электрическое поле, в силу (4), должно быть равно нулю на границе, а падающее поле мало меняется. Если ток и возникнет, то он будет иметь очень маленькую величину порядка ka.

3 Диаграмма направленности

Получим теперь выражения для диаграммы направленности поля, рассеянного на теле Ω, для этого получим асимптотические выражения при $r \to \infty$ интеграла (12)

Имеем:

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

Введем сферические координаты (r, θ, φ) с осью z , тогда при $r \gg 1$

$$\begin{gathered} R = r + \frac{x}{r}x^{'} + \frac{y}{r}y^{'} + \frac{z}{r}z^{'} + O(\frac{1}{r}) = \\ r + a\cos(\varphi - \varphi^{'})\sin\theta + z^{'}\cos\theta + O(\frac{1}{r}) \end{gathered} \tag{34}$$

Пусть на тело Ω падает плоская волна первой поляризации под углом θ_0.

$$k_{\perp} = k\sin\theta_0$$
$$k_{\parallel} = k\cos\theta_0$$

Найдем диаграмму направленности рассеянного на теле поля

$$\psi^s = \hat{A}(\varphi, \theta)\frac{\exp(ikr)}{r} \tag{35}$$

Подставляя (34) в (12), получим для $\hat{A}()$ выражение:

$$\hat{A}() = \frac{1}{4\pi}\int_S \exp(ikz^{'}(\cos\theta - \cos\theta_0))j(k_\perp)dS \tag{36}$$

Главное значение для диаграммы направленности мы получим, если подставим в (12) главное значение для тока (17):

$$\hat{A}^0() = \frac{1}{4\pi}\int_S \exp(ikz^{'}(\cos\theta - \cos\theta_0))j^0(k_\perp)dS = \tag{37}$$

$$E_z^e \cos\theta_0 \frac{ik}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-b}^{b} \exp(ikz^{'}(\cos\theta - \cos\theta_0))d\varphi^{'}dz^{'} =$$

$$E_z^e \frac{\sin(kb(\cos\theta - \cos\theta_0))}{\cos\theta - \cos\theta_0} \tag{38}$$

Найдем диаграмму направленности для электромагнитного поля, рассеянного на теле. Для этого запишем $\nabla \times \mathbf{A}$ в сферической системе координат:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\Big[\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(rA_\theta)\Big]\mathbf{e}_r \tag{39}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\Big[\frac{\partial}{\partial\varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta A_\varphi)\Big]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\Big[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r\Big]\mathbf{e}_\varphi \tag{40}$$

Имеем:

$$\mathbf{A} = A_z\mathbf{e}_z = A_z\cos\theta\mathbf{e}_r + A_z\sin\theta\mathbf{e}_\theta \tag{41}$$

Причем в главных приближениях $A_z = A_z(r,\theta)$. Таким образом в формуле (5) останется только член при $\mathbf{e}_\varphi$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}A_r]\mathbf{e}_\varphi \tag{42}$$

Тогда на бесконечности (при $r \to \infty$) получим:

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \sim A_\theta\mathbf{e}_\varphi = \hat{A}(\theta)\sin\theta\frac{\exp(ikr)}{r}\mathbf{e}_\varphi \tag{43}$$

Аналогичным образом находится диаграмма направленности для электрической напряженности $\mathbf{E}$.

Таким образом мы видим, что рассеянное поле представляет собой коническую волну с осью совпадающей с осью цилиндра и имеющее максимум при угле раствора равного углу падения, при этом максимальное значение пропорционально площади поверхности тела Ω. Этот факт сохранится и для других случаев.

Покажем, что он имеет место, в частности, для эллиптического цилиндра. Это будет следовать из того факта, что главное значение тока совпадает с током для задачи Дирихле во внешности границы поперечного сечения. Известно, что это решение выражается с помощью функции, дающей конформное отображение границы на единичный круг. Для эллипса

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

она равна:

$$z = \frac{1}{2}\Big((a-b)\omega + \frac{a+b}{\omega}\Big)$$

и решение задачи Дирихле:

$$\psi = \ln(\mid \omega \mid)$$

Как и для круга, производная по нормали на границе будет постоянна и, следовательно, сохранится тот вывод, который был сделан для случая кругового цилиндра, что максимальное значение диаграммы направленности пропорционално площади поверхности тела.

Предположим теперь, что Ω тело вращения с медленно меняющимся размером сечения. Пусть уравнение его поверхности

$$\rho = \rho(\varepsilon z), \quad \mid z \mid < b$$
$$\varepsilon \ll 1$$

Очевидно, что, как и в случае кругового цилиндра, основной вклад даст волна первой поляризацией, т.е. плоская волна, у которой вектор электрической напряженности $\mathbf{E}$ направлен параллельно оси z. Главное значение тока будет складываться из тока для задачи Дирихле для поперечного сечения, умноженного на проекцию вектора $\mathbf{E}$ на ось z

$$j^{(0)} = ik(\mathbf{nk})E_z^e \tag{44}$$

Следовательно, сохраняются все выкладки и выводы, сделанные для кругового цилиндра.

Все рассмотрения сделаны в предположении, что на тело падает плоская волна, однако легко сделать обобщение на случай, когда падающее поле возбуждается любыми, достаточно-удаленными источниками, такими, что поле в окрестности тела задается лучевым разложением.

4 Выводы

Поле, рассеянное на вытянутом теле, представляет собой линейно поляризованную волну, с вектором электрической напряженности **E** лежащим в плоскости, образованной лучом и осью тела. Главное значение диаграммы направленности зависит только от интегральных характеристик тела. Этот свойство имеет место, как для тел вращения, так и для тел не являющихся таковыми. Имеется простой алгоритм для нахождения следующих приближений для асимптотик тока и поля.

Список литературы

[1] В.Б.Филиппов. Дифракция на вытянутом теле. *Препринт ПОМИ*, 14:3–12, 2015.

[2] Федорюк М. В. Рассеяние плоской волны на цилиндрической поверхности с длинным возмущением. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 49, вып. 1:160–193, 1985.