ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов, Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 10/2018

УСРЕДНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: t.suslina@spbu.ru

5 октября 2018 г.

АННОТАЦИЯ

В ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ класса $C^{1,1}$ рассматривается стационарная система Максвелла при условиях идеальной проводимости на границе. Предполагается, что диэлектрическая и магнитная проницаемости имеют вид $\eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$ и $\mu(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\eta(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ — симметричные (3×3)-матрицы-функции, периодические относительно некоторой решетки, ограниченные и положительно определенные. Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Известно, что при $\varepsilon \to 0$ решения системы Максвелла — электрическая напряженность $\mathbf{u}_\varepsilon$, электрическая индукция $\mathbf{w}_\varepsilon$, магнитная напряженность $\mathbf{v}_\varepsilon$ и магнитная индукция $\mathbf{z}_\varepsilon$ слабо сходятся в $L_2(\mathcal{O})$ к соответствующим усредненным полям $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{z}_0$ (решениям усредненной системы Максвелла с эффективными коэффициентами). Мы усиливаем классические результаты и находим аппроксимации для полей $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ по норме в $L_2(\mathcal{O})$. Погрешности оцениваются через $C\sqrt{\varepsilon}(\|\mathbf{q}\|_{L_2}+\|\mathbf{r}\|_{L_2})$, где соленоидальные вектор-функции $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ — правые части уравнений системы Максвелла.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, усреднение, операторные оценки погрешности, стационарная система Максвелла.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 17-11-01069).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ
В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин.

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов. Литература по теории усреднения обширна; мы ограничимся упоминанием монографий [BeLPap, BaPa, Sa, ZhKO].

0.1. **Операторные оценки погрешности.** Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0.$$

В серии статей [BSu1, BSu2, BSu3] Бирмана и Суслиной был предложен и развит теоретико-операторный подход к теории усреднения. Изучался широкий класс матричных сильно эллиптических операторов A_ε второго порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{0.1}$$

Здесь матрица-функция $g(\mathbf{x})$ ограничена, положительно определена и периодична относительно решетки Γ, а $b(\mathbf{D})$ — матричный оператор первого порядка вида $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$, причем его символ имеет максимальный ранг. Простейший пример оператора (0.1) — это скалярный эллиптический оператор $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}$ (оператор акустики). Оператор упругости также допускает запись в виде (0.1). В электродинамике возникает вспомогательный оператор $A_\varepsilon = \operatorname{rot} a^\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{rot} - \nabla \nu^\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{div}$, который можно записать в форме (0.1).

В [BSu1] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной матрицей*. Справедлива оценка погрешности

$$\| (A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

В [BSu3] была найдена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$:

$$\| (A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.3}$$

Здесь $K(\varepsilon)$ — так называемый *корректор*. Он содержит быстро осциллирующий множитель; при этом $\|K(\varepsilon)\|_{L_2 \to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$.

Оценки (0.2), (0.3) точны по порядку. Результаты такого типа получили название *операторных оценок погрешности* в теории усреднения. Другой подход к операторным оценкам погрешности — модифицированный метод первого приближения или метод сдвига — был предложен Жиковым. В работах [Zh, ZhPas1] этим методом оценки (0.2), (0.3) были установлены для операторов акустики и упругости. Дальнейшие результаты обсуждаются в недавнем обзоре [ZhPas2].

Операторные оценки погрешности изучались также и для краевых задач в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с достаточно гладкой границей; см. [ZhPas1, ZhPas2, Gr1, Gr2, KeLiS, PSu, Su3, Su4, Su5]. Пусть $A_{D,\varepsilon}$ и $A_{N,\varepsilon}$ — операторы в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, заданные выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ при условии Дирихле либо Неймана на границе. Пусть A_D^0 и A_N^0 — соответствующие эффективные операторы. Справедливы оценки

$$\|(A_{\flat,\varepsilon}+I)^{-1}-(A_\flat^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon, \qquad (0.4)$$

$$\|(A_{\flat,\varepsilon}+I)^{-1}-(A_\flat^0+I)^{-1}-\varepsilon K_\flat(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \qquad (0.5)$$

Здесь $\flat = D, N$, а $K_\flat(\varepsilon)$ — соответствующий корректор. Оценка (0.4) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$ (такой же, как для задачи в $\mathbb{R}^d$). Порядок оценки (0.5) хуже по сравнению с (0.3); это объясняется влиянием границы области.

В [ZhPas1] с помощью метода сдвига для операторов акустики и упругости была получена оценка (0.5) и аналог оценки (0.4), но с погрешностью $O(\sqrt{\varepsilon})$. Аналогичные результаты независимо были установлены Гризо [Gr1, Gr2] для оператора акустики с помощью метода анфолдинга. Оценка точного порядка (0.4) впервые была получена в [Gr2]. Случай матричных эллиптических операторов изучался в [KeLiS] (где рассматривались равномерно эллиптические операторы при некоторых условиях регулярности коэффициентов) и в работах [PSu, Su3, Su4, Su5] (где были получены оценки (0.4), (0.5) для описанного выше класса сильно эллиптических операторов).

0.2. **Усреднение системы Максвелла в $\mathbb{R}^3$.** Обсудим теперь задачу об усреднении стационарной системы Максвелла в $\mathbb{R}^3$.

Предположим, что диэлектрическая и магнитная проницаемости заданы матрицами-функциями $\eta^\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mu^\varepsilon(\mathbf{x})$, где $\eta(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ ограничены, положительно определены и периодичны относительно решетки Γ. Через $J(\mathbb{R}^3)$ обозначим подпространство вектор-функций $\mathbf{f} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, для которых $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$ (в смысле распределений). Через $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$ обозначим напряженности электрического и магнитного полей; $\mathbf{w}_\varepsilon = \eta^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon = \mu^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon$ — векторы электрической и магнитной индукций. Оператор Максвелла M_ε мы записываем в терминах индукций, считая поля $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ соленоидальными. Тогда оператор M_ε действует в пространстве $J(\mathbb{R}^3) \oplus J(\mathbb{R}^3)$ и задается выражением

$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & i\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1} \\ -i\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

на естественной области определения. Оператор M_ε самосопряжен, если рассматривать $J(\mathbb{R}^3) \oplus J(\mathbb{R}^3)$ как подпространство в весовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3;(\eta^\varepsilon)^{-1}) \oplus L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3;(\mu^\varepsilon)^{-1})$. Точка $\lambda = i$ является регулярной точкой для оператора M_ε.

Обсудим задачу о поведении резольвенты $(M_\varepsilon - iI)^{-1}$ при малом ε. Иначе говоря, нас интересует поведение решений $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ системы Максвелла

$$(M_\varepsilon - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q} \\ \mathbf{r}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}, \mathbf{r} \in J(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3), \tag{0.6}$$

а также поведение полей $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$.

Усредненный оператор Максвелла M^0 имеет коэффициенты η^0, μ^0; хорошо известно, что эффективные матрицы η^0 и μ^0 — такие же, как для скалярных эллиптических операторов $-\mathrm{div}\, \eta^\varepsilon \nabla$ и $-\mathrm{div}\, \mu^\varepsilon \nabla$. Пусть $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ — решение усредненной системы Максвелла

$$(M^0 - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q} \\ \mathbf{r}\end{pmatrix},$$

и $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0 = (\mu^0)^{-1}\mathbf{z}_0$. Из классических результатов (см., например, [BeLPap, Sa, ZhKO]) известно, что при $\varepsilon \to 0$ вектор-функции $\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon$ *слабо сходятся* в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ к соответствующим усредненным полям $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{z}_0$.

Операторные оценки погрешности для системы Максвелла (0.6) изучались в работах [BSu1, глава 7], [BSu2, §14], [BSu3, §22], [Su1, BSu4] и [Su2]. В [BSu1, BSu2, BSu3] рассматривался случай $\mu = \mathbf{1}$ и были получены аппроксимации не для всех физических полей; в [Su1] рассматривался общий случай, но аппроксимации были найдены не для всех полей; в [BSu4] задача была полностью решена в случае постоянной магнитной проницаемости; наконец, в [Su2] задача была полностью решена в общем случае. Метод состоял в редукции к задаче усреднения для вспомогательного уравнения второго порядка. Решение системы (0.6) можно записать в виде $\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} + \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$, $\mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$, где $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})$ — решение системы при $\mathbf{r} = 0$, а $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})$ — решение системы при $\mathbf{q} = 0$. Рассмотрим для примера $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})$. Первое уравнение $\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ подставим во второе и придем к следующей задаче для поля $\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$:

$$\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = i\mathbf{r}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = 0.$$

После замены $\mathbf{f}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ и снятия условия соленоидальности, получаем, что $\mathbf{f}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ является решением эллиптического уравнения второго порядка

$$L_\varepsilon \mathbf{f}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} + \mathbf{f}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = i(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{r}, \tag{0.7}$$

где

$$L_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2} - (\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}. \tag{0.8}$$

При этом поле $\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ выражается через производные решения:

$$\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{f}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}.$$

В случае постоянного μ оператор (0.8) относится к классу операторов (0.1), что позволяет применить к уравнению (0.7) общие результаты работ [BSu1, BSu2, BSu3]. В случае переменного μ это уже не так, однако удается воспользоваться результатами абстрактной схемы из [BSu1, BSu2, BSu3] для изучения оператора (0.8); это было проделано в [Su1, Su2]. Итогом этих рассмотрений явилась аппроксимация резольвенты $(M_\varepsilon - iI)^{-1}$. В отличие от резольвенты оператора (0.1) в общем случае эта резольвента не имеет предела по операторной норме, но для нее можно указать аппроксимацию через сумму резольвенты $(M^0 - iI)^{-1}$ и некоторого корректора нулевого порядка (слабо сходящегося к нулю); оценка погрешности имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. В терминах решений это влечет аппроксимации для всех физических полей по норме в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ с оценками погрешностей порядка $O(\varepsilon)$. К примеру, выпишем результат для $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\varepsilon(\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}).$$

Здесь поправка $\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}$ интерпретируется как корректор нулевого порядка; она выражается через $\mathbf{u}_0$, решение некоторой “поправочной” системы Максвелла и некоторый быстро осциллирующий множитель. При этом слабый предел поправки $\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}$ равен нулю.

0.3. **Постановка задачи. Основные результаты.** В настоящей работе изучается усреднение стационарной системы Максвелла в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ с границей класса $C^{1,1}$. Мы опираемся на общую теорию оператора Максвелла в произвольных областях, развитую в работах [BS1, BS2] Бирмана и Соломяка.

По-прежнему считаем, что диэлектрическая и магнитная проницаемости заданы быстро осциллирующими матрицами $\eta^\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mu^\varepsilon(\mathbf{x})$. На границе области ставятся условия идеальной проводимости. Для физических полей используются те же обозначения, что и выше в п. 0.2. Оператор Максвелла $\mathcal{M}_\varepsilon$, записанный в терминах индукций, действует в пространстве $J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O})$, где $J(\mathcal{O})$ и $J_0(\mathcal{O})$ — соленоидальные подпространства в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, определенные ниже в (1.3), (1.4). Оператор $\mathcal{M}_\varepsilon$ задается выражением

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & i\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1} \\ -i\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

на естественной области определения, учитывающей краевые условия (см. (2.1) ниже). Оператор $\mathcal{M}_\varepsilon$ самосопряжен, если рассматривать $J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O})$ как подпространство в весовом пространстве

$$L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;(\eta^\varepsilon)^{-1}) \oplus L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;(\mu^\varepsilon)^{-1}).$$

Мы изучаем резольвенту $(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)^{-1}$. Иными словами, нас интересует поведение решений $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ системы Максвелла

$$(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q} \\ \mathbf{r}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} \in J(\mathcal{O}),\ \mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O}), \tag{0.9}$$

а также поведение полей $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$.

Пусть $\mathcal{M}^0$ — усредненный оператор Максвелла с коэффициентами η^0, μ^0. Усредненная система Максвелла имеет вид

$$(\mathcal{M}^0 - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_0\\ \mathbf{z}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{r}\end{pmatrix}.$$

Положим $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0 = (\mu^0)^{-1}\mathbf{z}_0$. Как и в случае задачи в $\mathbb{R}^3$, классические результаты (см. [BeLPap, Sa, ZhKO]) дают слабую сходимость в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ вектор-функций $\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon$ к соответствующим усредненным полям $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{z}_0$.

Мы находим аппроксимации для всех четырех полей $\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon$ по норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Эти аппроксимации аналогичны друг другу. Например, для $\mathbf{u}_\varepsilon$ результат имеет вид

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}(\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}). \tag{0.10}$$

Поправку $\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}$ можно интерпретировать как корректор нулевого порядка; она выражается через $\mathbf{u}_0$, решение некоторой "поправочной" системы Максвелла и некоторый быстро осциллирующий множитель. При этом слабый предел поправки $\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}$ равен нулю. Ухудшение порядка оценки (0.10) по сравнению со случаем задачи в $\mathbb{R}^3$ объясняется влиянием границы области.

В случае, когда магнитная проницаемость задана постоянной матрицей μ_0 и $\mathbf{q} = 0$ в правой части (0.9), результат допускает усиление. Этот случай был исследован отдельно в работе [Su6]. Оказалось, что при таких предположениях поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ сходятся к $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{z}_0$ соответственно по норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, а погрешность оценивается через $C\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}$. Для полей $\mathbf{u}_\varepsilon$ и $\mathbf{w}_\varepsilon$ были найдены аппроксимации с погрешностью $C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}$.

0.4. **Метод.** Как и для задачи в $\mathbb{R}^3$, метод исследования основан на редукции к изучению некоторых краевых задач для уравнений второго порядка. В случае $\mathbf{q} = 0$ возникает задача

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = i\mathbf{r}, \quad \operatorname{div}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = 0,\\ &(\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0.\end{aligned}\right. \tag{0.11}$$

В случае $\mathbf{r} = 0$ дело сводится к задаче

$$\left\{\begin{aligned} &\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} + \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = i\mathbf{q}, \quad \operatorname{div}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = 0,\\ &((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad (\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0.\end{aligned}\right. \tag{0.12}$$

Задачи (0.11) и (0.12) похожи друг на друга, но отличаются типом краевых условий. Эти задачи исследуются по отдельности.

Обсудим для примера задачу (0.11). Мы опираемся на результаты для задачи в $\mathbb{R}^3$ и ищем приближение решения $\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ в виде суммы трех членов: эффективного поля $\mathbf{z}_0^{(\mathbf{r})}$, корректора (похожего на корректор в $\mathbb{R}^3$) и поправки типа пограничного слоя. Эта поправка является решением некоторой краевой задачи для уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами. Выясняется, что погрешность такого трехчленного приближения в энергетической норме имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Однако, поправку типа пограничного слоя трудно контролировать. Основная техническая работа связана с оцениванием поправки типа пограничного слоя. Оказывается, что она имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$ в энергетической норме. Эти рассмотрения позволяют приблизить решение $\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ суммой эффективного поля и корректора с точностью $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Аналогичным образом изучается задача (0.12). Сопоставляя результаты для задач (0.11) и (0.12), мы извлекаем результаты для системы Максвелла.

0.5. **План статьи.** Работа содержит семь параграфов. В §1 собраны предварительные сведения. В §2 дана постановка задачи и сформулированы основные результаты. В §3 проведена редукция задачи к изучению краевых задач (0.11), (0.12). В §4 исследуется задача (0.11), отвечающая случаю $\mathbf{q} = 0$. Описывается эффективная задача, определяется первое приближение к решению и вводится поправка типа пограничного слоя. Формулируется теорема 4.6 об оценке поправки типа пограничного слоя; из этой теоремы выводятся окончательные результаты для системы Максвелла в случае $\mathbf{q} = 0$. §5 посвящен доказательству теоремы 4.6. Аналогичное исследование задачи (0.12) (случай $\mathbf{r} = 0$) проведено в §6 и §7.

0.6. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot\,,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Символы $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — $(n\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как линейного оператора в $\mathbb{C}^n$. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2, 3$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, D_2, D_3)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций. Различные оценочные постоянные обозначаются символами c, C, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками).

1. Предварительные сведения

1.1. **Решетка.** Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, т. е.,

$$\Gamma = \big\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{a} = z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 + z_3\mathbf{a}_3, \ z_j \in \mathbb{Z} \big\}.$$

Через $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ обозначим элементарную ячейку решетки Γ:

$$\Omega = \big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + t_3\mathbf{a}_3, \ -1/2 < t_j < 1/2 \big\}.$$

Пусть $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3 \in \mathbb{R}^3$ — базис, двойственный к $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, т. е., $\langle \mathbf{b}_l, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi\delta_{lj}$. Ниже используем обозначения

$$2r_0 = \min_{j=1,2,3} |\mathbf{b}_j|, \quad 2r_1 = \operatorname{diam}\Omega.$$

Для Γ-периодических функций $f(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^3$ будем пользоваться обозначением $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Для квадратных периодических матриц-функций $f(\mathbf{x})$ обозначаем

$$\overline{f} := |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{f} := \Big(|\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega f(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x} \Big)^{-1}.$$

При определении $\overline{f}$ считается, что $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, а при определении $\underline{f}$ предполагается, что матрица $f(\mathbf{x})$ неособая и $f^{-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Через $\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^3$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^n)$.

1.2. **Сглаживание по Стеклову.** Нам понадобится оператор $S_\varepsilon^{(n)}$, $\varepsilon > 0$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^n)$ (где $n \in \mathbb{N}$) по правилу

$$(S_\varepsilon^{(n)}\mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^n), \tag{1.1}$$

и называемый *сглаживающим оператором по Стеклову*. Мы опускаем индекс n и пишем просто S_ε. Очевидно, $S_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^\sigma(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^n)$ и любом мультииндексе α, таком что $|\alpha| \leqslant \sigma$. Заметим, что

$$\| S_\varepsilon \|_{L_2(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Нам понадобятся следующие свойства оператора S_ε (см. [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] и [PSu, предложения 3.1 и 3.2]).

Предложение 1.1. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^n)$ *выполнено*

$$\| S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon r_1 \| \mathbf{D}\mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^3)},$$

где $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Предложение 1.2. *Пусть f — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^3$, причем $f \in L_2(\Omega)$. Пусть $[f^\varepsilon]$ — оператор умножения на функцию $f^\varepsilon(\mathbf{x})$. Тогда оператор $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^3)$ и справедлива оценка*

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

1.3. **Функциональные классы.** Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область. Если граница $\partial\mathcal{O}$ и вектор-функция $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ достаточно гладкие, то корректно определены нормальная и касательная компоненты на границе: $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{u}_\tau$ соответственно. В негладкой ситуации можно понимать равенства $\mathbf{u}_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ и $\mathbf{u}_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ в обобщенном смысле. Напомним следующие определения; см. [BS1, BS2].

Определение 1.3. *Пусть $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Если $\operatorname{div}\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O})$, то равенство $\mathbf{u}_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ по определению означает, что*

$$(\mathbf{u}, \nabla\omega)_{L_2(\mathcal{O})} = -(\operatorname{div}\mathbf{u}, \omega)_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall\omega \in H^1(\mathcal{O}).$$

Определение 1.4. *Пусть $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Если $\operatorname{rot}\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, то равенство $\mathbf{u}_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ по определению означает, что*

$$(\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})} = (\operatorname{rot}\mathbf{u}, \mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall\mathbf{z} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3):\ \operatorname{rot}\mathbf{z} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3).$$

Пусть $s(\mathbf{x})$ — симметричная (3×3)-матрица-функция в $\mathcal{O}$ с вещественными элементами, причем $s, s^{-1} \in L_\infty$ и $s(\mathbf{x}) > 0$. Помимо обычного пространства $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ нам понадобится весовое пространство вектор-функций $L_2(\mathcal{O};s) = L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;s)$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{L_2(\mathcal{O};s)} = \int\limits_{\mathcal{O}} \langle s(\mathbf{x})\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x}.$$

Введем два подпространства соленоидальных вектор-функций в L_2:

$$J(\mathcal{O}) :=\bigl\{\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3):\ \int_{\mathcal{O}} \langle\mathbf{u}, \nabla\omega\rangle\, d\mathbf{x} = 0,\ \forall\omega \in H^1_0(\mathcal{O})\bigr\}, \tag{1.3}$$

$$J_0(\mathcal{O}) :=\bigl\{\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3):\ \int_{\mathcal{O}} \langle\mathbf{u}, \nabla\omega\rangle\, d\mathbf{x} = 0,\ \forall\omega \in H^1(\mathcal{O})\bigr\}. \tag{1.4}$$

Подпространство (1.3) состоит из всех функций $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, для которых $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ в смысле распределений. Подпространство (1.4) образуют функции $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ такие, что $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ и $\mathbf{u}_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ (в смысле определения 1.3). Множества (1.3), (1.4) можно рассматривать как подпространства в весовом пространстве $L_2(\mathcal{O};s)$.

1.4. **Оценки в окрестности границы.** В этом пункте мы формулируем два вспомогательных утверждения, справедливых для ограниченных областей $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей; см. [ZhPas1] или [PSu, §5]. Точнее, предполагается следующее.

Условие 1.5. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область. Положим $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \operatorname{dist}\{\mathbf{x};\partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\}$. Предположим, что существует* *число* $\varepsilon_0 \in (0,1]$ *такое, что полоску* $(\partial\mathcal{O})_{2\varepsilon_0}$ *можно покрыть конечным числом окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса* $C^{0,1}$, *распрямляющие границу* $\partial\mathcal{O}$. *Обозначим* $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$, $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Условие 1.5 гарантируется липшицевостью границы. Число ε_0 зависит лишь от области $\mathcal{O}$, а ε_1 зависит от области $\mathcal{O}$ и параметров решетки Γ.

Лемма 1.6. *Пусть выполнено условие* 1.5. *Обозначим* $B_{2\varepsilon} = (\partial\mathcal{O})_{2\varepsilon} \cap \mathcal{O}$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*

1°. *Для любой функции* $u \in H^1(\mathcal{O})$ *выполнено неравенство*

$$\int_{B_{2\varepsilon}} |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_0 \varepsilon \|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \|u\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

2°. *Для любой функции* $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_{2\varepsilon}} |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_0 \varepsilon \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Постоянная β_0 *зависит только от области* $\mathcal{O}$.

Лемма 1.7. *Пусть выполнено условие* 1.5. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ — Γ-*периодическая функция в* $\mathbb{R}^3$ *такая, что* $f \in L_2(\Omega)$. *Пусть* S_ε — *оператор* (1.1). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^n)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_{2\varepsilon}} |f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}.$$

Здесь $\beta_* = \beta_0(1+r_1)$, $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

2. Постановка задачи. Основные результаты

2.1. **Постановка задачи.** Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы симметричные матрицы-функции $\eta(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ размера 3×3 с вещественными элементами, периодические относительно решетки Γ и такие, что

$$\eta, \eta^{-1} \in L_\infty, \quad \eta(\mathbf{x}) > 0; \quad \mu, \mu^{-1} \in L_\infty, \quad \mu(\mathbf{x}) > 0.$$

Предположим, что $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Мы изучаем электромагнитный резонатор, заполняющий область $\mathcal{O}$. Считаем, что диэлектрическая и магнитная проницаемости заданы матрицами $\eta^\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ и $\mu^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mu(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$.

Напряженности электрического и магнитного полей обозначаются через $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x})$ соответственно. Векторы электрической и магнитной индукций связаны с полями $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$ соотношениями $\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mu^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Оператор Максвелла $\mathcal{M}_\varepsilon$, записанный в терминах индукций, действует в пространстве $J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O})$, рассматриваемом как подпространство в весовом пространстве

$$L_2\big(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3; (\eta^\varepsilon)^{-1}\big) \oplus L_2\big(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3; (\mu^\varepsilon)^{-1}\big),$$

и задается выражением

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & i\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1} \\ -i\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

на области определения

$$\begin{aligned} \mathrm{Dom}\,\mathcal{M}_\varepsilon =& \big\{(\mathbf{w},\mathbf{z}) \in J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O}) :\ \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \\ & \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0\big\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь краевое условие для $\mathbf{w}$ понимается в смысле определения 1.4. Заметим, что в общем случае $\mathrm{Dom}\,\mathcal{M}_\varepsilon$ не содержится в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^6)$, поскольку коэффициенты не предполагаются гладкими.

Оператор $\mathcal{M}_\varepsilon$ самосопряжен; см. [BS1, BS2]. Поэтому точка $\lambda = i$ является регулярной точкой оператора $\mathcal{M}_\varepsilon$. *Наша цель* — изучить поведение резольвенты $(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)^{-1}$. Иными словами, нас интересует поведение решений $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ уравнения

$$(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)\begin{pmatrix} \mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} \in J(\mathcal{O}),\ \mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O}), \tag{2.2}$$

а также поведение полей $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$. В подробной записи система Максвелла (2.2) имеет вид

$$\begin{cases} i\,\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon - i\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{q}, \\ -i\,\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon - i\mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{r}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{w}_\varepsilon = 0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{z}_\varepsilon = 0, \\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases}$$

Замечание 2.1. *Вместо точки $\lambda = i$ можно было бы взять другую регулярную точку для оператора $\mathcal{M}_\varepsilon$.*

2.2. **Эффективные матрицы η^0 и μ^0.** Чтобы определить эффективную матрицу η^0, рассмотрим вспомогательную задачу на ячейке Ω. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — стандартные орты в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Phi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — периодическое решение задачи

$$\mathrm{div}\,\eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{2.3}$$

(Решение понимается в слабом смысле.) Определим (3×3)-матрицу $Y_\eta(\mathbf{x})$ со столбцами $\nabla\Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$, и матрицу

$$\widetilde{\eta}(\mathbf{x}) := \eta(\mathbf{x})(Y_\eta(\mathbf{x}) + \mathbf{1}). \tag{2.4}$$

Эффективная матрица η^0 определяется как среднее значение матрицы (2.4):

$$\eta^0 := |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{\eta}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Оказывается, что матрица η^0 положительна. Нам понадобится также матрица
$$G_\eta(\mathbf{x}) := \widetilde{\eta}(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1} - \mathbf{1}.$$

Аналогичным образом определяется положительная эффективная матрица μ^0. Пусть $\Psi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — периодическое решение задачи
$$\operatorname{div} \mu(\mathbf{x})(\nabla\Psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int\limits_\Omega \Psi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.5}$$
Определим (3×3)-матрицу $Y_\mu(\mathbf{x})$ со столбцами $\nabla\Psi_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$, и матрицу
$$\widetilde{\mu}(\mathbf{x}) := \mu(\mathbf{x})(Y_\mu(\mathbf{x}) + \mathbf{1}). \tag{2.6}$$
Эффективная матрица μ^0 определяется равенством
$$\mu^0 := |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega \widetilde{\mu}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{2.7}$$
Нам понадобится также матрица
$$G_\mu(\mathbf{x}) := \widetilde{\mu}(\mathbf{x})(\mu^0)^{-1} - \mathbf{1}.$$

Отметим некоторые свойства эффективных матриц, а также свойства решений задач (2.3) и (2.5).

Замечание 2.2. 1) *Следующие оценки для эффективных матриц известны как вилка Фойгта — Рейсса*:
$$\underline{\eta} \leqslant \eta^0 \leqslant \overline{\eta}, \quad \underline{\mu} \leqslant \mu^0 \leqslant \overline{\mu}.$$
Отсюда вытекают неравенства
$$|\eta^0| \leqslant \|\eta\|_{L_\infty}, \ |(\eta^0)^{-1}| \leqslant \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}; \quad |\mu^0| \leqslant \|\mu\|_{L_\infty}, \ |(\mu^0)^{-1}| \leqslant \|\mu^{-1}\|_{L_\infty}.$$
2) *Матрицы-функции Y_η, G_η, Y_μ, G_μ периодичны и имеют нулевое среднее значение.*
3) *Несложно проверить оценки*
$$\begin{aligned} \|Y_\eta\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant \|\eta\|^{1/2}_{L_\infty} \|\eta^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} |\Omega|^{1/2}, \\ \|Y_\mu\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant \|\mu\|^{1/2}_{L_\infty} \|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} |\Omega|^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.8}$$
$$\begin{aligned} \|\Phi_j\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant (2r_0)^{-1} \|\eta\|^{1/2}_{L_\infty} \|\eta^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} |\Omega|^{1/2}, \\ \|\Psi_j\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant (2r_0)^{-1} \|\mu\|^{1/2}_{L_\infty} \|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} |\Omega|^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.9}$$
4) *Согласно* [LaUr, гл. 3, теорема 3.1], *периодическое решение Φ_j задачи* (2.3) *и периодическое решение Ψ_j задачи* (2.5) *ограничены, причем*
$$\|\Phi_j\|_{L_\infty} \leqslant \widehat{C}_\eta, \quad \|\Psi_j\|_{L_\infty} \leqslant \widehat{C}_\mu, \quad j = 1,2,3.$$
Постоянная $\widehat{C}_\eta$ зависит только от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и Ω; постоянная $\widehat{C}_\mu$ зависит только от $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$ и Ω.

Нам понадобится также следующее мультипликаторное свойство матриц Y_η^ε и Y_μ^ε; см. [PSu, Следствие 2.4].

Лемма 2.3. *Для любой функции* $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ *при* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\int_{\mathbb{R}^3} |Y_\eta^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_{1,\eta} \int_{\mathbb{R}^3} |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} + \beta_{2,\eta}\varepsilon^2 \widehat{C}_\eta^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x},$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} |Y_\mu^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_{1,\mu} \int_{\mathbb{R}^3} |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} + \beta_{2,\mu}\varepsilon^2 \widehat{C}_\mu^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}.$$

Постоянные $\beta_{1,\eta}$ *и* $\beta_{2,\eta}$ *зависят только от* $\|\eta\|_{L_\infty}$ *и* $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$*; постоянные* $\beta_{1,\mu}$ *и* $\beta_{2,\mu}$ *зависят только от* $\|\mu\|_{L_\infty}$ *и* $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$.

Из леммы 2.3 следует, что матрицы-функции Y_η^ε и Y_μ^ε являются мультипликаторами из класса Соболева $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$.

2.3. **Эффективный оператор Максвелла.** *Эффективный оператор Максвелла* $\mathcal{M}^0$ действует в пространстве $J(\mathcal{O})\oplus J_0(\mathcal{O})$, рассматриваемом как подпространство в весовом пространстве

$$L_2\big(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;(\eta^0)^{-1}\big) \oplus L_2\big(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;(\mu^0)^{-1}\big),$$

и задается выражением

$$\mathcal{M}^0 = \begin{pmatrix} 0 & i\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1} \\ -i\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

на области определения

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\,\mathcal{M}^0 = &\big\{(\mathbf{w},\mathbf{z}) \in J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O}) :\ \mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathbf{w} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\\ &\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1}\mathbf{z} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\ ((\eta^0)^{-1}\mathbf{w})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0\big\}.\end{aligned}$$

Благодаря условию $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ область определения $\mathrm{Dom}\,\mathcal{M}^0$ содержится в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^6)$ и допускает следующее описание:

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\,\mathcal{M}^0 = &\big\{(\mathbf{w},\mathbf{z}) \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^6) :\ \mathrm{div}\,\mathbf{w} = 0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{z} = 0,\\ &((\eta^0)^{-1}\mathbf{w})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ \mathbf{z}_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0\big\}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь краевые условия на $\mathbf{w}$ и $\mathbf{z}$ понимаются в смысле теоремы о следах. Указанное свойство было установлено в [BS1, теорема 2.3] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^2$ и в [F, теорема 2.6] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^{3/2+\delta}$, $\delta > 0$.

Рассмотрим эффективную систему Максвелла

$$(\mathcal{M}^0 - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_0\\ \mathbf{z}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{r}\end{pmatrix}, \tag{2.11}$$

и положим $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{v}_0 = (\mu^0)^{-1}\mathbf{z}_0$. В подробной записи система Максвелла (2.11) имеет вид

$$\begin{cases} i\,\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1}\mathbf{z}_0 - i\mathbf{w}_0 = \mathbf{q},\\ -i\,\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0 - i\mathbf{z}_0 = \mathbf{r},\\ \mathrm{div}\,\mathbf{w}_0 = 0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{z}_0 = 0,\\ ((\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0.\end{cases}$$

Классические результаты (см. [BeLPap, Sa, ZhKO]) показывают, что при $\varepsilon \to 0$ вектор-функции $\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon$ *слабо сходятся* в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ к соответствующим усредненным полям $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{z}_0$.

2.4. **Основные результаты.** Мы устанавливаем аппроксимации для полей $\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon$ по норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Для формулировки результатов нам понадобится еще одна "поправочная" система Максвелла:

$$(\mathcal{M}^0 - iI)\begin{pmatrix}\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon \\ \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q}_\varepsilon \\ \mathbf{r}_\varepsilon\end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Это система с эффективными коэффициентами, но вектор-функции $\mathbf{q}_\varepsilon$, $\mathbf{r}_\varepsilon$ в правой части зависят от ε. Они определены следующим образом. Продолжим функции $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ нулем на $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$:

$$\widetilde{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) = \begin{cases}\mathbf{q}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O},\end{cases} \qquad \widetilde{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \begin{cases}\mathbf{r}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}.\end{cases}$$

Далее, рассмотрим вектор-функции $S_\varepsilon(Y_\eta^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{q}}$ и $S_\varepsilon(Y_\mu^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{r}}$, принадлежащие $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Мы учли, что операторы $S_\varepsilon[(Y_\eta^\varepsilon)^*] = ([Y_\eta^\varepsilon]S_\varepsilon)^*$ и $S_\varepsilon[(Y_\mu^\varepsilon)^*] = ([Y_\mu^\varepsilon]S_\varepsilon)^*$ непрерывны в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ в силу предложения 1.2. Пусть $\mathcal{P}_{\eta^0}$ — ортопроектор пространства $L_2(\mathcal{O};(\eta^0)^{-1})$ на $J(\mathcal{O})$ и $\mathcal{P}^0_{\mu^0}$ — ортопроектор пространства $L_2(\mathcal{O};(\mu^0)^{-1})$ на $J_0(\mathcal{O})$. Сужая вектор-функции $S_\varepsilon(Y_\eta^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{q}}$ и $S_\varepsilon(Y_\mu^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{r}}$ на область $\mathcal{O}$ и применяя проекторы $\mathcal{P}_{\eta^0}$ и $\mathcal{P}^0_{\mu^0}$ соответственно, определим функции

$$\mathbf{q}_\varepsilon := \mathcal{P}_{\eta^0}S_\varepsilon(Y_\eta^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{q}}, \quad \mathbf{r}_\varepsilon := \mathcal{P}^0_{\mu^0}S_\varepsilon(Y_\mu^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{r}}. \tag{2.13}$$

Таким образом, $\mathbf{q}_\varepsilon \in J(\mathcal{O})$ и $\mathbf{r}_\varepsilon \in J_0(\mathcal{O})$. Используя предложение 1.2 и неравенства (2.8), оценим нормы функций (2.13):

$$\begin{aligned}\|\mathbf{q}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \|\eta\|_{L_\infty(\Omega)}\|\eta^{-1}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ \|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \|\mu\|_{L_\infty(\Omega)}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty(\Omega)}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{2.14}$$

По решениям системы (2.12) определим "поправочные" поля

$$\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon = (\eta^0)^{-1}\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon, \quad \widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon = (\mu^0)^{-1}\widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon. \tag{2.15}$$

В силу (2.10) имеем $\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$.

Замечание 2.4. *"Поправочные" поля $\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon$ слабо сходятся к нулю в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ при $\varepsilon \to 0$. Это нетрудно проверить, используя "свойство среднего значения" и тот факт, что правые части $\mathbf{q}_\varepsilon, \mathbf{r}_\varepsilon$ системы* (2.12) *содержат быстро осциллирующие множители с нулевым средним значением; см.* (2.13).

Наш основной результат — следующая теорема.

Теорема 2.5. *Пусть $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ — решение системы* (2.2) *и $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$. Пусть $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ — решение эффективной системы* (2.11) *и $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0 = (\mu^0)^{-1}\mathbf{z}_0$. Пусть $(\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon)$ — решение поправочной* *системы* (2.12), *а* $\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon$, $\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon$ *определены в* (2.15). *Пусть* Y_η, G_η, Y_μ, G_μ — *периодические матрицы-функции, введенные в пункте* 2.2. *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 1.5. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - (\mathbf{1} + Y_\eta^\varepsilon)(\mathbf{u}_0 + \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_1 \varepsilon^{1/2} \left(\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right), \quad (2.16)$$

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - (\mathbf{1} + G_\eta^\varepsilon)(\mathbf{w}_0 + \widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_2 \varepsilon^{1/2} \left(\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right), \quad (2.17)$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - (\mathbf{1} + Y_\mu^\varepsilon)(\mathbf{v}_0 + \widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_3 \varepsilon^{1/2} \left(\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right), \quad (2.18)$$

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - (\mathbf{1} + G_\mu^\varepsilon)(\mathbf{z}_0 + \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4 \varepsilon^{1/2} \left(\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right). \quad (2.19)$$

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 *зависят от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Замечание 2.6. 1) *Заметим, что* $(\mathbf{1} + Y_\eta^\varepsilon)(\mathbf{u}_0 + \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon) \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$, *поскольку* $\mathbf{u}_0 + \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$, *а матрица-функция* Y_η^ε *является мультипликатором из* $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ *в* $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$; *см. лемму* 2.3. *Аналогично, аппроксимации для полей* $\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon$ *также принадлежат* $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$. 2) *Аппроксимации для* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{z}_\varepsilon$ *аналогичны друг другу. Например, поле* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *приближается суммой четырех членов:*

$$\mathbf{u}_\varepsilon \sim \mathbf{u}_0 + Y_\eta^\varepsilon \mathbf{u}_0 + \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon + Y_\eta^\varepsilon \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon.$$

Здесь первое слагаемое — усредненное поле, а остальные три члена слабо сходятся к нулю и могут быть интерпретированы как корректоры нулевого порядка. 3) *Порядок оценок из теоремы* 2.5 *ухудшается по сравнению с аналогичными оценками для задачи в* $\mathbb{R}^3$; *это объясняется влиянием границы области.* 4) *Результат теоремы* 2.5 *допускает формулировку в операторных терминах:*

$$\|(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)^{-1} - (I + \mathcal{G}^\varepsilon)(\mathcal{M}^0 - iI)^{-1}(I + \mathcal{Z}_\varepsilon)\| \leqslant C \varepsilon^{1/2},$$

где

$$\mathcal{G}^\varepsilon = \begin{pmatrix} G_\eta^\varepsilon & 0 \\ 0 & G_\mu^\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Z}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{\eta^0} S_\varepsilon (Y_\eta^\varepsilon)^* \Pi & 0 \\ 0 & \mathcal{P}^0_{\mu^0} S_\varepsilon (Y_\mu^\varepsilon)^* \Pi \end{pmatrix},$$

а Π — *оператор продолжения нулем.*

3. Редукция задачи к уравнениям второго порядка

Представим решение системы (2.2) в виде

$$\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} + \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})},$$

где $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})$ — решение системы (2.2) при $\mathbf{r} = 0$, а $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})$ — решение системы (2.2) при $\mathbf{q} = 0$. Положим

$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}, \quad \mathbf{v}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = (\mu^\varepsilon)^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})},$$
$$\mathbf{u}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{v}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = (\mu^\varepsilon)^{-1} \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}.$$

Тогда $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})$ — решение задачи

$$\begin{cases} \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \\ \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = i\mathbf{r}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = 0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = 0, \\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Пара $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})$ является решением задачи

$$\begin{cases} \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = -\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}, \\ \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} - \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = -i\mathbf{q}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = 0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = 0, \\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Из (3.1) видно, что $\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ является решением следующей краевой задачи для уравнения второго порядка

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = i\mathbf{r}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = 0, \\ (\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

В силу (3.2) функция $\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}$ является решением краевой задачи

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} + \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = i\mathbf{q}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = 0, \\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Задачи (3.3) и (3.4) похожи друг на друга, но отличаются переменой ролей коэффициентов η^ε и μ^ε, краевыми условиями, а также условиями на правые части: $\mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O})$, $\mathbf{q} \in J(\mathcal{O})$. Мы исследуем эти задачи по-отдельности, а затем сопоставим результаты.

Эффективные поля $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{z}_0$ и поправочные поля $\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon$ также представим в виде суммы двух слагаемых — с индексами $(\mathbf{q})$ и $(\mathbf{r})$ соответственно. Слагаемые с индексом $(\mathbf{q})$ отвечают случаю $\mathbf{r} = 0$, а слагаемые с индексом $(\mathbf{r})$ — случаю $\mathbf{q} = 0$.

4. Исследование задачи в случае $\mathbf{q} = 0$

4.1. Симметризация. Замена $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ сводит задачу (3.3) к

$$\begin{cases} (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = i(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{r},\ \mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = 0, \\ ((\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь $\mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O})$. Автоматически $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ является также решением эллиптического уравнения

$$(\mathcal{L}_\varepsilon + I)\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = i(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{r}, \tag{4.2}$$

где оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ формально задан дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2} - (\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}$$

с граничными условиями из (4.1). Строго говоря, оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ — это самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, отвечающий замкнутой неотрицательной квадратичной форме

$$\mathfrak{l}_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\mathcal{O}} \left(\langle (\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}, \operatorname{rot} (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}\rangle + |\operatorname{div} (\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\varphi}|^2 \right) d\mathbf{x},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} \mathfrak{l}_\varepsilon = \{\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) : \quad & \operatorname{div} (\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O}), \\ \operatorname{rot} (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad & ((\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Замкнутость формы (4.3) вытекает из результатов [BS1, BS2].

Замечание 4.1. 1) *Вообще говоря,* $\operatorname{Dom} \mathfrak{l}_\varepsilon \not\subset H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. 2) *Второе граничное условие в* (4.1) *— естественное, оно не отражается в области определения квадратичной формы* $\mathfrak{l}_\varepsilon$. 3) *Форма* $\mathfrak{l}_\varepsilon$ *и оператор* $\mathcal{L}_\varepsilon$ *распадаются в ортогональном разложении*

$$L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) = \mathcal{J}_0(\mathcal{O};\mu^\varepsilon) \oplus \mathcal{G}(\mathcal{O};\mu^\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(\mathcal{O};\mu^\varepsilon) &= \{\mathbf{f} : \ (\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{f} \in J_0(\mathcal{O})\}, \\ \mathcal{G}(\mathcal{O};\mu^\varepsilon) &= \{(\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\omega : \ \omega \in H^1(\mathcal{O})\}. \end{aligned}$$

4.2. **Эффективная задача.** Пусть η^0 и μ^0 — эффективные матрицы, определенные в п. 2.2. Положим $\boldsymbol{\varphi}_0 = (\mu^0)^{-1/2}\mathbf{z}_0^{(\mathbf{r})}$. Тогда $\boldsymbol{\varphi}_0$ является решением задачи

$$\left\{ \begin{array}{c} (\mu^0)^{-1/2}\operatorname{rot} (\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 = i(\mu^0)^{-1/2}\mathbf{r}, \ \operatorname{div} (\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 = 0, \\ ((\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \ ((\eta^0)^{-1}\operatorname{rot} (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Автоматически $\boldsymbol{\varphi}_0$ является также решением эллиптического уравнения

$$(\mathcal{L}^0 + I)\boldsymbol{\varphi}_0 = i(\mu^0)^{-1/2}\mathbf{r}, \tag{4.5}$$

где $\mathcal{L}^0$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, отвечающий замкнутой неотрицательной квадратичной форме

$$\mathfrak{l}_0[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\mathcal{O}} \left(\langle (\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}, \operatorname{rot} (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}\rangle + |\operatorname{div} (\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\varphi}|^2 \right) d\mathbf{x},$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} \mathfrak{l}_0 = &\{\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) : \ \operatorname{div} (\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O}), \\ &\operatorname{rot} (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \ ((\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

За счет условия гладкости границы ($\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$) множество $\operatorname{Dom} \mathfrak{l}_0$ совпадает с

$$\operatorname{Dom} \mathfrak{l}_0 = \{\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) : \ ((\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}.$$

Форма (4.6) коэрцитивна: справедливы двусторонние оценки

$$\mathfrak{c}_1\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{l}_0[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] + \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_2\|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in \operatorname{Dom} \mathfrak{l}_0. \tag{4.7}$$

Постоянная $\mathfrak{c}_1$ зависит от $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\eta\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$, а $\mathfrak{c}_2$ зависит от $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Указанные свойства были установлены в [BS1, теорема 2.3] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^2$ и в [F, теорема 2.6] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^{3/2+\delta}$, $\delta > 0$.

Оператор $\mathcal{L}^0$ является сильно эллиптическим оператором с постоянными коэффициентами. Условие гладкости границы $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ обеспечивает свойство повышения гладкости: резольвента $(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}$ непрерывна из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ в $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Выполнена оценка

$$\|(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant c_*, \tag{4.8}$$

где постоянная c_* зависит лишь от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Тем самым, оператор $\mathcal{L}^0$ можно задать дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}^0 = (\mu^0)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2} - (\mu^0)^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,(\mu^0)^{1/2}$$

на области определения

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\,\mathcal{L}^0 = \{\boldsymbol{\varphi} \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) :\ & ((\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\\ & ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}.\end{aligned}$$

Замечание 4.2. 1) *При условии $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ (и достаточно гладких коэффициентах) подобное свойство повышения гладкости решений задачи Дирихле либо Неймана для сильно эллиптических уравнений второго порядка можно найти, например, в книге* [McL, глава 4]. *Доказательство основано на методе разностных отношений и существенно опирается на условие коэрцитивности квадратичной формы. В нашем случае коэффициенты оператора $\mathcal{L}^0$ постоянны и выполнено условие коэрцитивности* (4.7)*, хотя граничные условия имеют смешанный тип. Нетрудно тем же методом установить свойство повышения гладкости и для оператора $\mathcal{L}^0$.* 2) *Форма $\mathfrak{l}_0$ и оператор $\mathcal{L}^0$ распадаются в ортогональном разложении*

$$L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) = \mathcal{J}_0(\mathcal{O};\mu^0) \oplus \mathcal{G}(\mathcal{O};\mu^0),$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_0(\mathcal{O};\mu^0) &= \{\mathbf{f} :\ (\mu^0)^{1/2}\mathbf{f} \in J_0(\mathcal{O})\},\\ \mathcal{G}(\mathcal{O};\mu^0) &= \{(\mu^0)^{1/2}\nabla\omega :\ \omega \in H^1(\mathcal{O})\}.\end{aligned}$$

В силу (4.5) и (4.8) выполнено $\boldsymbol{\varphi}_0 \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, причем

$$\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant c_*\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.9}$$

Пусть $P_\mathcal{O} : H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) \to H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ — линейный непрерывный оператор продолжения. Обозначим

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^2(\mathcal{O})\to H^2(\mathbb{R}^3)} =: C_\mathcal{O}. \tag{4.10}$$

Положим $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 := P_\mathcal{O}\boldsymbol{\varphi}_0 \in H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Согласно (4.9) и (4.10),

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_1\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.11}$$

где $\mathcal{C}_1 = C_{\mathcal{O}} c_* \|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$.

4.3. **Поправочная задача.** Положим $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon = (\mu^0)^{-1/2} \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$. Тогда $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ является решением задачи

$$\begin{cases} (\mu^0)^{-1/2} \mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1} \mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2} \boldsymbol{\rho}_\varepsilon + \boldsymbol{\rho}_\varepsilon = i(\mu^0)^{-1/2} \mathbf{r}_\varepsilon, \ \mathrm{div}\,(\mu^0)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_\varepsilon = 0, \\ ((\mu^0)^{1/2} \boldsymbol{\rho}_\varepsilon)_n|_{\partial \mathcal{O}} = 0, \ ((\eta^0)^{-1} \mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2} \boldsymbol{\rho}_\varepsilon)_\tau|_{\partial \mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{4.12}$$

Автоматически $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ является также решением эллиптического уравнения

$$(\mathcal{L}^0 + I) \boldsymbol{\rho}_\varepsilon = i(\mu^0)^{-1/2} \mathbf{r}_\varepsilon.$$

В силу (2.14) и (4.8) выполнено $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon \in H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$, причем

$$\|\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant c_* \|\mu\|_{L_\infty} \|\mu^{-1}\|^{3/2}_{L_\infty} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.13}$$

Положим $\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon := P_{\mathcal{O}} \boldsymbol{\rho}_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$. Согласно (4.10) и (4.13),

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_2 \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.14}$$

где $\mathcal{C}_2 = C_{\mathcal{O}} c_* \|\mu\|_{L_\infty} \|\mu^{-1}\|^{3/2}_{L_\infty}$.

4.4. **Первое приближение к $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$.** Пусть $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ — решение уравнения (4.2). Будем искать первое приближение $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$ к решению $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ в форме, похожей на первое приближение к решению аналогичной задачи в $\mathbb{R}^3$, изученной в [Su2]. Введем сначала необходимые объекты. Пусть $W^*_\mu(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая (3×3)-матрица-функция, определенная выражением

$$W^*_\mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})^{-1/2} \widetilde{\mu}(\mathbf{x}) (\mu^0)^{-1/2} = \mu(\mathbf{x})^{1/2} (\mathbf{1} + Y_\mu(\mathbf{x})) (\mu^0)^{-1/2}, \tag{4.15}$$

где $\widetilde{\mu}(\mathbf{x})$ — матрица (2.6). Положим $\mathbf{c}_j := (\mu^0)^{-1/2} \mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3$. Пусть $\check{\Psi}_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$\mathrm{div}\, \mu(\mathbf{x}) (\nabla \check{\Psi}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) = 0, \quad \int_\Omega \check{\Psi}_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Пусть $\mathbf{f}_{lj}(\mathbf{x})$ (где $l, j = 1, 2, 3$) — Γ-периодическое решение задачи

$$\begin{aligned} &\mu(\mathbf{x})^{-1/2} \mathrm{rot}\, \eta(\mathbf{x})^{-1} \left(\mathrm{rot}\, \mu(\mathbf{x})^{-1/2} \mathbf{f}_{lj}(\mathbf{x}) + i \mathbf{e}_l \times (\nabla \check{\Psi}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) \right) \\ &- \mu(\mathbf{x})^{1/2} \nabla \left(\mathrm{div}\, \mu(\mathbf{x})^{1/2} \mathbf{f}_{lj}(\mathbf{x}) + i \mathbf{e}_l \cdot (\mu(\mathbf{x}) (\nabla \check{\Psi}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) \right) = 0, \\ &\int_\Omega \mathbf{f}_{lj}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Пусть $\Lambda_l(\mathbf{x})$ (где $l = 1, 2, 3$) — Γ-периодическая (3×3)-матрица-функция со столбцами $\mathbf{f}_{lj}(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$. Отметим оценку

$$\|\Lambda_l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda |\Omega|^{1/2}, \tag{4.17}$$

где постоянная C_Λ зависит от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ; см. [Su2, п. 5.3].

Замечание 4.3. *Нетрудно проверить* (*см.* [Su1, п. 4.4]), *что для решения задачи* (4.16) *выполнены соотношения*

$$\operatorname{div} \mu(\mathbf{x})^{1/2}\mathbf{f}_{lj}(\mathbf{x}) = i\mathbf{e}_l \cdot ((\mu^0)^{1/2}\mathbf{e}_j) - i\mathbf{e}_l \cdot (\widetilde{\mu}(\mathbf{x})(\mu^0)^{-1/2}\mathbf{e}_j), \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} &\eta(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{rot} \mu(\mathbf{x})^{-1/2}\mathbf{f}_{lj}(\mathbf{x}) = i(\mathbf{1} + Y_\eta(\mathbf{x}))(\eta^0)^{-1}\left(\mathbf{e}_l \times ((\mu^0)^{-1/2}\mathbf{e}_j)\right) \\ &+ i\eta(\mathbf{x})^{-1}\left(\left((\mathbf{1} + Y_\mu(\mathbf{x}))(\mu^0)^{-1/2}\mathbf{e}_j\right) \times \mathbf{e}_l\right). \end{aligned} \tag{4.19}$$

Пусть функции $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0, \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ введены в пунктах 4.2 и 4.3 соответственно. Пусть S_ε — оператор сглаживания по Стеклову (см. (1.1)). Первое приближение $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$ к решению $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ уравнения (4.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} &\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon = (W_\mu^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon) + \varepsilon \sum_{l=1}^{3} \Lambda_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon), \\ &\boldsymbol{\psi}_\varepsilon = \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Выражение (4.20) подсказано видом первого приближения к решению уравнения в $\mathbb{R}^3$, аналогичного (4.2); см. [Su2].

Лемма 4.4. *Выполнены соотношения* $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, $\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, $\operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O})$ *и оценки*

$$\|\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - (W_\mu^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} &\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - (\mathbf{1} + Y_\eta^\varepsilon)(\eta^0)^{-1}\operatorname{rot}(\mu^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}_4\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\|\operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.23}$$

Постоянные $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$ *зависят лишь от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ *и области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. В силу предложения 1.2 и (4.17), (4.20) имеем

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - (W_\mu^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} &= \varepsilon\Big\|\sum_{l=1}^{3}\Lambda_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\Big\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon C_\Lambda\sqrt{3}\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Вместе с (4.11) и (4.14) это влечет оценку (4.21) с постоянной $\mathcal{C}_3 = C_\Lambda\sqrt{3}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$.

Проверим теперь (4.23). Согласно (4.15) и (4.20) имеем:

$$(\mu^\varepsilon)^{1/2}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon = \widetilde{\mu}^\varepsilon(\mu^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon) + \varepsilon\sum_{l=1}^{3}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\Lambda_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon).$$

Из уравнений (2.5) следует, что $\operatorname{div}\widetilde{\mu}(\mathbf{x}) = 0$ (т. е., дивергенция от столбцов матрицы $\widetilde{\mu}(\mathbf{x})$ равна нулю). Следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon = & \sum_{j=1}^{3}(\widetilde{\mu}^\varepsilon(\mu^0)^{-1/2}\mathbf{e}_j)\cdot\nabla[S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)]_j \\ & + \varepsilon\sum_{l=1}^{3}[\operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\Lambda_l^\varepsilon]S_\varepsilon D_l(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon) \\ & + \varepsilon\sum_{l,j=1}^{3}((\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{f}_{lj}^\varepsilon)\cdot\nabla D_l[S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)]_j. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Здесь $[S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)]_j$ — j-ая координата вектор-функции $S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)$, а $\operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\Lambda_l^\varepsilon$ — это матрица-строка (с элементами $\operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{f}_{lj}^\varepsilon$, $j = 1,2,3$). Обозначим последовательные слагаемые в (4.24) через $J_1(\varepsilon)$, $J_2(\varepsilon)$, $J_3(\varepsilon)$. Последний член оценим с помощью предложения 1.2 и (4.17):

$$\|J_3(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 3\varepsilon\|\mu\|_{L_\infty}^{1/2}C_\Lambda\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_5'\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.25}$$

где $\mathcal{C}_5' = 3\|\mu\|_{L_\infty}^{1/2}C_\Lambda(\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2)$. Мы учли (4.11) и (4.14).

В силу (4.18), $\varepsilon\operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\Lambda_l^\varepsilon$ — это матрица-строка с элементами

$$i\mathbf{e}_l\cdot((\mu^0)^{1/2}\mathbf{e}_j) - i\mathbf{e}_l\cdot(\widetilde{\mu}^\varepsilon(\mu^0)^{-1/2}\mathbf{e}_j), \quad j = 1,2,3.$$

С учетом этого выражение для $J_1(\varepsilon)+J_2(\varepsilon)$ упрощается:

$$J_1(\varepsilon)+J_2(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{3}(\nabla[S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)]_j)\cdot((\mu^0)^{1/2}\mathbf{e}_j) = \operatorname{div}(\mu^0)^{1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon).$$

В силу предложения 1.1 и (4.11), (4.14) имеем

$$\begin{aligned} & \|\operatorname{div}(\mu^0)^{1/2}(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ & \leqslant \varepsilon r_1\|\mu\|_{L_\infty}^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_5''\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_5'' = r_1\|\mu\|_{L_\infty}^{1/2}(\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2)$. Учитывая, что $\operatorname{div}(\mu^0)^{1/2}(\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\rho}_\varepsilon) = 0$ в области $\mathcal{O}$ (см. (4.4), (4.12)), получаем

$$\|J_1(\varepsilon)+J_2(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5''\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.26}$$

Из (4.25) и (4.26) вытекает оценка (4.23) с постоянной $\mathcal{C}_5 = \mathcal{C}_5' + \mathcal{C}_5''$.

Остается проверить (4.22). Имеем:

$$(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon = (\mathbf{1}+Y_\mu^\varepsilon)(\mu^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon) + \varepsilon\sum_{l=1}^{3}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\Lambda_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon).$$

Поскольку $Y_\mu(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\nabla\Psi_j(\mathbf{x})$, то $\operatorname{rot}(Y_\mu^\varepsilon+\mathbf{1})=0$. Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&(\eta^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon \\
&=(\eta^\varepsilon)^{-1}\sum_{j=1}^{3}(\nabla[S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)]_j)\times\Big((Y_\mu^\varepsilon+\mathbf{1})(\mu^0)^{-1/2}\mathbf{e}_j\Big) \\
&+\varepsilon(\eta^\varepsilon)^{-1}\sum_{l=1}^{3}[\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\Lambda_l^\varepsilon]S_\varepsilon D_l(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon) \\
&+\varepsilon(\eta^\varepsilon)^{-1}\sum_{l,j=1}^{3}b_j(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\Lambda_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l D_j(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon).
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Здесь использовано представление $\operatorname{rot}=\sum_{j=1}^{3}b_jD_j$, где

$$
b_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\quad b_2=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix},\quad b_3=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.
$$

Выражение $\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\Lambda_l^\varepsilon$ есть матрица со столбцами $\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{f}_{lj}^\varepsilon$, $j=1,2,3$. Обозначим последовательные слагаемые в (4.27) через $\mathbf{F}_1(\varepsilon)$, $\mathbf{F}_2(\varepsilon)$, $\mathbf{F}_3(\varepsilon)$. В силу предложения 1.2 и (4.11), (4.14), (4.17)

$$
\|\mathbf{F}_3(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\varepsilon\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}3C_\Lambda\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}\leqslant\mathcal{C}_4\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},
\tag{4.28}
$$

где $\mathcal{C}_4=\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}3C_\Lambda(\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2)$.

Согласно (4.19), $\varepsilon(\eta^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\Lambda_l^\varepsilon$ — это матрица со столбцами

$$
i(\mathbf{1}+Y_\eta^\varepsilon)(\eta^0)^{-1}\Big(\mathbf{e}_l\times\Big((\mu^0)^{-1/2}\mathbf{e}_j\Big)\Big)+i(\eta^\varepsilon)^{-1}\Big(\Big((\mathbf{1}+Y_\mu^\varepsilon)(\mu^0)^{-1/2}\mathbf{e}_j\Big)\times\mathbf{e}_l\Big).
$$

Это позволяет упростить выражение для суммы $\mathbf{F}_1(\varepsilon)+\mathbf{F}_2(\varepsilon)$:

$$
\mathbf{F}_1(\varepsilon)+\mathbf{F}_2(\varepsilon)=(\mathbf{1}+Y_\eta^\varepsilon)(\eta^0)^{-1}\operatorname{rot}(\mu^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon).
$$

Вместе с (4.28) это доказывает искомую оценку (4.22). $\square$

4.5. **Введение поправки типа пограничного слоя.** Обозначим

$$
\begin{aligned}
\mathcal{R}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]:=&((\mathbf{1}+Y_\eta^\varepsilon)(\eta^0)^{-1}\operatorname{rot}(\mu^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon),\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+((W_\mu^\varepsilon)^*S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon),\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}-i((\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{r},\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Введем поправку типа пограничного слоя $\mathbf{s}_\varepsilon$ как вектор-функцию в области $\mathcal{O}$, удовлетворяющую условиям

$$
\mathbf{s}_\varepsilon\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\ \operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{s}_\varepsilon\in L_2(\mathcal{O}),\ \operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{s}_\varepsilon\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),
\tag{4.30}
$$

тождеству

$$((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{s}_\varepsilon, \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{s}_\varepsilon, \mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\mathbf{s}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{R}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}],\ \forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathrm{Dom}\,\mathfrak{l}_\varepsilon, \tag{4.31}$$

и краевому условию

$$((\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{s}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = ((\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}}. \tag{4.32}$$

Напомним, что $\mathrm{Dom}\,\mathfrak{l}_\varepsilon$ определено в (4.3).

Покажем, что разность первого приближения $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$ и поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ дает приближение точного порядка $O(\varepsilon)$ в "энергетической" норме к решению $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ задачи (4.1).

Лемма 4.5. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ *— решение задачи* (4.1). *Пусть* $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$ *— первое приближение к решению, определенное в* (4.20). *Пусть* $\mathbf{s}_\varepsilon$ *— поправка, удовлетворяющая соотношениям* (4.30)–(4.32). *Положим* $\mathbf{V}_\varepsilon := \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon + \mathbf{s}_\varepsilon$. *Тогда* $\mathbf{V}_\varepsilon \in \mathrm{Dom}\,\mathfrak{l}_\varepsilon$ *и выполнена оценка*

$$\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_6\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.33}$$

Постоянная $\mathcal{C}_6$ *зависит лишь от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ *и области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Из условий на $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$, $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$ и $\mathbf{s}_\varepsilon$ видно, что

$$\mathbf{V}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\ \mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O}),\ \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{V}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3).$$

В силу (4.1) решение $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ удовлетворяет краевому условию $((\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$. Вместе с (4.32) это влечет $((\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$. Следовательно, $\mathbf{V}_\varepsilon \in \mathrm{Dom}\,\mathfrak{l}_\varepsilon$.

Далее, функция $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ удовлетворяет тождеству

$$((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = i((\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{r}, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathrm{Dom}\,\mathfrak{l}_\varepsilon,$$

и условию $\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = 0$. Вместе с (4.29) и (4.31) это приводит к тождеству

$$\begin{aligned}\mathfrak{l}_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}] + (\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = &-((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &- (\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ ((\mathbf{1} + Y_\eta^\varepsilon)(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon), \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ ((W_\mu^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon), \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathrm{Dom}\,\mathfrak{l}_\varepsilon.\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 4.4 вытекает оценка

$$\left|\mathfrak{l}_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}] + (\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant \mathcal{C}_6'\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big),$$

где $\mathcal{C}_6' = \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_5$. Подставляя $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{V}_\varepsilon$, приходим к оценке (4.33) с постоянной $\mathcal{C}_6 = 3\mathcal{C}_6' \max\{\|\eta\|_{L_\infty}; 1\}$. $\square$

Лемма 4.5 показывает, что разность $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - \mathbf{s}_\varepsilon$ дает приближение к решению $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ с погрешностью точного порядка $O(\varepsilon)$. Однако, контролировать поправку $\mathbf{s}_\varepsilon$ трудно, поскольку она является решением эллиптического уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами. Зато удается оценить $\mathbf{s}_\varepsilon$ в "энергетической" норме.

Теорема 4.6. *Пусть* $\mathbf{s}_\varepsilon$ *удовлетворяет соотношениям* (4.30)–(4.32). *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 1.5. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_7\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.34}$$

Постоянная $\mathcal{C}_7$ *зависит лишь от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ *и области* $\mathcal{O}$.

Доказательство теоремы 4.6 требует большой технической работы; ему посвящен § 5.

4.6. **Аппроксимация функции $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$.** Из леммы 4.5 и теоремы 4.6 выводится аппроксимация функции $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$.

Теорема 4.7. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ — *решение задачи* (4.1). *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 1.5. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнены оценки*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - (W_\mu^\varepsilon)^*(\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\rho}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_8\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}&\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - (\mathbf{1} + Y_\eta^\varepsilon)(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}(\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\rho}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \mathcal{C}_9\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{4.36}$$

Постоянные $\mathcal{C}_8$, $\mathcal{C}_9$ *зависят лишь от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ *и области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Из леммы 4.5 и теоремы 4.6 непосредственно вытекает оценка

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (\mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_7)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Вместе с леммой 4.4 это влечет следующие неравенства:

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - (W_\mu^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_8'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}&\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - (\mathbf{1} + Y_\eta^\varepsilon)(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \mathcal{C}_9'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,\end{aligned} \tag{4.38}$$

где $\mathcal{C}_8' = \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_7$, $\mathcal{C}_9' = \mathcal{C}_4 + (\mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_7)\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$.

Остается показать, что сглаживающий оператор S_ε в неравенствах (4.37), (4.38) можно заменить тождественным; это отразится лишь на константах в оценках. В силу (4.15) и леммы 2.3

$$
\begin{aligned}
&\|(W^\varepsilon_\mu)^*(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&= \|(\mu^\varepsilon)^{1/2}(\mathbf{1} + Y^\varepsilon_\mu)(\mu^0)^{-1/2}(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\
&+ \|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\|Y^\varepsilon_\mu(\mu^0)^{-1/2}(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leqslant \|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\Big((1 + \sqrt{\beta_{1,\mu}})\|(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\
&+\varepsilon\sqrt{\beta_{2,\mu}}\widehat{C}_\mu\|(S_\varepsilon - I)\nabla(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\Big).
\end{aligned}
$$

Первое слагаемое в скобках оценим с помощью предложения 1.1, а второе с помощью оценки (1.2). Учтем также (4.11) и (4.14). Это влечет

$$
\|(W^\varepsilon_\mu)^*(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}''_8\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.39}
$$

где $\mathcal{C}''_8 = \|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\Big((1 + \sqrt{\beta_{1,\mu}})r_1 + 2\sqrt{\beta_{2,\mu}}\widehat{C}_\mu\Big)(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$. Из (4.37) и (4.39) вытекает искомая оценка (4.35) с постоянной $\mathcal{C}_8 = \mathcal{C}'_8 + \mathcal{C}''_8$.

Аналогичным образом, с помощью леммы 2.3, предложения 1.1, оценки (1.2) и неравенств (4.11) и (4.14) выводится оценка

$$
\|(\mathbf{1} + Y^\varepsilon_\eta)(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}''_9\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.40}
$$

где $\mathcal{C}''_9 = \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\Big(r_1(1 + \sqrt{\beta_{1,\eta}}) + 2\sqrt{\beta_{2,\eta}}\widehat{C}_\eta\Big)(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$. Из (4.38) и (4.40) вытекает оценка (4.36) с постоянной $\mathcal{C}_9 = \mathcal{C}'_9 + \mathcal{C}''_9$. □

4.7. **Окончательный результат в случае $\mathbf{q} = 0$.** Выпишем выражения для полей с индексом $\mathbf{r}$ в терминах функции $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$, введенной в пункте 4.1:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}^{(\mathbf{r})}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \quad \mathbf{z}^{(\mathbf{r})}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \\
&\mathbf{u}^{(\mathbf{r})}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \quad \mathbf{w}^{(\mathbf{r})}_\varepsilon = \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Аналогичным образом, эффективные поля с индексом $\mathbf{r}$ связаны с функцией $\boldsymbol{\varphi}_0$, введенной в пункте 4.2:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{v}^{(\mathbf{r})}_0 = (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{z}^{(\mathbf{r})}_0 = (\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0, \\
&\mathbf{u}^{(\mathbf{r})}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0, \quad \mathbf{w}^{(\mathbf{r})}_0 = \mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0.
\end{aligned}
$$

Поправочные поля с индексом $\mathbf{r}$ выражаются через $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ (см. пункт 4.3):

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mathbf{v}}^{(\mathbf{r})}_\varepsilon = (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \quad \widehat{\mathbf{z}}^{(\mathbf{r})}_\varepsilon = (\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \\
&\widehat{\mathbf{u}}^{(\mathbf{r})}_\varepsilon = (\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \quad \widehat{\mathbf{w}}^{(\mathbf{r})}_\varepsilon = \mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\rho}_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Эти соотношения вместе с теоремой 4.7 непосредственно приводят к окончательному результату в случае $\mathbf{q} = 0$.

Теорема 4.8. *Пусть* $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})$ *— решение системы* (2.2) *при* $\mathbf{q} = 0$ *и* $\mathbf{u}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$, $\mathbf{v}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = (\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$. *Пусть* $(\mathbf{w}_0^{(\mathbf{r})}, \mathbf{z}_0^{(\mathbf{r})})$ *— решение эффективной системы* (2.11) *при* $\mathbf{q} = 0$ *и* $\mathbf{u}_0^{(\mathbf{r})} = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0^{(\mathbf{r})}$, $\mathbf{v}_0^{(\mathbf{r})} = (\mu^0)^{-1}\mathbf{z}_0^{(\mathbf{r})}$. *Пусть* $(\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})$ *— решение поправочной системы* (2.12) *при* $\mathbf{q} = 0$, *а* $\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = (\eta^0)^{-1}\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$, $\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = (\mu^0)^{-1}\widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$. *Пусть* Y_η, G_η, Y_μ, G_μ *— периодические матрицы-функции, введенные в пункте* 2.2. *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 1.5. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} - (\mathbf{1} + Y_\eta^\varepsilon)(\mathbf{u}_0^{(\mathbf{r})} + \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_9 \varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},\\
\|\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} - (\mathbf{1} + G_\eta^\varepsilon)(\mathbf{w}_0^{(\mathbf{r})} + \widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_9 \|\eta\|_{L_\infty}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},\\
\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} - (\mathbf{1} + Y_\mu^\varepsilon)(\mathbf{v}_0^{(\mathbf{r})} + \widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_8 \|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},\\
\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} - (\mathbf{1} + G_\mu^\varepsilon)(\mathbf{z}_0^{(\mathbf{r})} + \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_8 \|\mu\|_{L_\infty}^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_8$, $\mathcal{C}_9$ *зависят от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ *и области* $\mathcal{O}$.

5. Оценка поправки типа пограничного слоя

Этот параграф посвящен доказательству теоремы 4.6.

5.1. **Отождествление** $\operatorname{Dom}\mathfrak{l}_\varepsilon$ **и** $\operatorname{Dom}\mathfrak{l}_0$**.** Ключевое значение для дальнейшего имеет следующая лемма.

Лемма 5.1. *Существует линейный оператор* $T_\varepsilon : \operatorname{Dom}\mathfrak{l}_\varepsilon \to \operatorname{Dom}\mathfrak{l}_0$, *такой что для функции* $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 = T_\varepsilon\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\zeta} \in \operatorname{Dom}\mathfrak{l}_\varepsilon$, *выполнены равенства*

$$\operatorname{div}(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 = \operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}, \quad \operatorname{rot}(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 = \operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}, \tag{5.1}$$

и оценки

$$\|\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{10}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.2}$$

$$\|\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{11}\left(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\right). \tag{5.3}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{10}$ *зависит лишь от* $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *а* $\mathcal{C}_{11}$ *зависит от тех же велисин и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Рассмотрим две вспомогательных задачи.

Первая вспомогательная задача. Пусть $\boldsymbol{\zeta} \in \operatorname{Dom}\mathfrak{l}_\varepsilon$. Обозначим $f_\varepsilon := \operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta} \in L_2(\mathcal{O})$. Пусть $\phi_{\varepsilon,1} \in H^1(\mathcal{O})$ — обобщенное решение задачи Неймана

$$\operatorname{div}\mu^0\nabla\phi_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}) = f_\varepsilon(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad (\mu^0\nabla\phi_{\varepsilon,1})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{5.4}$$

Условие разрешимости выполнено, поскольку

$$\int_{\mathcal{O}} f_\varepsilon(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\,d\mathbf{x} = 0$$

в силу условия $((\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$. Решение задачи (5.4) определено с точностью до постоянного слагаемого; нам понадобится только (однозначно определенный) градиент решения. Решение удовлетворяет тождеству

$$\int_{\mathcal{O}} \langle \mu^0 \nabla \phi_{\varepsilon,1}, \nabla \omega\rangle \, d\mathbf{x} = \int_{O} \langle (\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}, \nabla\omega\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \forall \omega \in H^1(\mathcal{O}). \tag{5.5}$$

Положим $\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,1} = (\mu^0)^{1/2}\nabla\phi_{\varepsilon,1}$. Тогда выполнены соотношения

$$\operatorname{div}(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,1} = \operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta},\ \operatorname{rot}(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,1} = 0,\ ((\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,1})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{5.6}$$

Подставляя $\omega = \phi_{\varepsilon,1}$ в тождество (5.5), приходим к оценке

$$\|\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.7}$$

Условие гладкости границы ($\partial\mathcal{O}\in C^{1,1}$) обеспечивает свойство повышения гладкости решения задачи (5.4): выполнено включение $\phi_{\varepsilon,1}\in H^2(\mathcal{O})$ и оценка

$$\|\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,1}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_1\|f_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} = c_1\|\operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.8}$$

Постоянная c_1 зависит лишь от норм $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$.

Вторая вспомогательная задача. Пусть $\boldsymbol{\zeta} \in \operatorname{Dom}\mathfrak{l}_\varepsilon$. Обозначим $g_\varepsilon := \operatorname{div}\mu^0(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\in H^{-1}(\mathcal{O})$. Пусть $\phi_{\varepsilon,2}\in H^1(\mathcal{O})$ — обобщенное решение задачи Неймана

$$\operatorname{div}\mu^0\nabla\phi_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}) = g_\varepsilon(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathcal{O}; \quad (\mu^0\nabla\phi_{\varepsilon,2})_n|_{\partial\mathcal{O}} = (\mu^0(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}}.$$

Строго говоря, решение $\phi_{\varepsilon,2}$ понимается как элемент пространства $H^1(\mathcal{O})$, удовлетворяющий интегральному тождеству

$$\int_{\mathcal{O}} \langle \mu^0\nabla\phi_{\varepsilon,2}, \nabla\omega\rangle\, d\mathbf{x} = \int_{O} \langle \mu^0(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}, \nabla\omega\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \forall\omega\in H^1(\mathcal{O}). \tag{5.9}$$

Решение определяется с точностью до постоянного слагаемого; нам понадобится только градиент решения. Положим $\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,2} = (\mu^0)^{1/2}((\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} - \nabla\phi_{\varepsilon,2})$. Тогда выполнены равенства

$$\operatorname{div}(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,2} = 0,\ \operatorname{rot}(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,2} = \operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta},\ ((\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,2})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{5.10}$$

Подставляя $\omega = \phi_{\varepsilon,2}$ в тождество (5.9), приходим к оценке

$$\|(\mu^0)^{1/2}\nabla\phi_{\varepsilon,2}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.11}$$

Следовательно,

$$\|\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,2}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.12}$$

Из (5.10) и (5.12) следует, что $\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,2}\in\operatorname{Dom}\mathfrak{l}_0\subset H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. При этом (ср. (4.7))

$$\|\boldsymbol{\zeta}^0_{\varepsilon,2}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_2(\|\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}). \tag{5.13}$$

Постоянная c_2 зависит лишь от норм $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$.

Положим $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 = \boldsymbol{\zeta}_{\varepsilon,1}^0 + \boldsymbol{\zeta}_{\varepsilon,2}^0$. Тогда из (5.6) и (5.10) следует, что выполнены соотношения (5.1). Из (5.7) и (5.12) вытекает оценка (5.2) с постоянной $\mathcal{C}_{10} = 3\|\mu\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}$. Наконец, (5.8) и (5.13) влекут неравенство (5.3) с постоянной $\mathcal{C}_{11} = \max\{c_1, c_2\}$. $\square$

Замечание 5.2. *В условиях леммы* 5.1 *справедливо равенство*

$$(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 - (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} = \nabla(\phi_{\varepsilon,1} - \phi_{\varepsilon,2}). \tag{5.14}$$

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ (где число ε_0 выбрано в соответствии с условием 1.5). Фиксируем срезку $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$ на (2ε)-окрестность границы $\partial\mathcal{O}$, обладающую следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &\theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad 0 \leqslant \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1, \quad \operatorname{supp}\theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_{2\varepsilon},\\ &\theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in (\partial\mathcal{O})_\varepsilon, \quad \varepsilon|\nabla\theta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \kappa = \mathrm{Const}\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Постоянная κ зависит лишь от области $\mathcal{O}$.

5.2. **Анализ первого члена в $\mathcal{R}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]$.** Обозначим первое слагаемое в (4.29) через $\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]$ и представим его в виде суммы четырех членов:

$$\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \sum_{l=1}^{4} \mathcal{J}_\varepsilon^{(l)}[\boldsymbol{\zeta}], \quad \boldsymbol{\zeta} \in \operatorname{Dom}\mathfrak{l}_\varepsilon, \tag{5.16}$$

где

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] = (Y_\eta^\varepsilon(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon), \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.17}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\zeta}] = ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0, \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.18}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\zeta}] = ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.19}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\zeta}] = ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon), \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.20}$$

Лемма 5.3. *Член* (5.17) *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *подчинен оценке*

$$|\mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}_{12}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\zeta} \in \operatorname{Dom}\mathfrak{l}_\varepsilon. \tag{5.21}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{12}$ *зависит от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *области* $\mathcal{O}$ *и параметров решетки* Γ.

Доказательство. Обозначим $h_{\varepsilon,j} := [(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)]_j$, $j = 1,2,3$. Столбцы матрицы Y_η^ε имеют вид $(\nabla\Phi_j)^\varepsilon = \varepsilon\nabla\Phi_j^\varepsilon$, $j = 1,2,3$. Очевидно, $\varepsilon(\nabla\Phi_j^\varepsilon)h_{\varepsilon,j} = \varepsilon\nabla(\Phi_j^\varepsilon h_{\varepsilon,j}) - \varepsilon\Phi_j^\varepsilon\nabla h_{\varepsilon,j}$. Следовательно,

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] = \widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] - \widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}], \tag{5.22}$$

где

$$\widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] = \varepsilon\sum_{j=1}^{3}\Big(\nabla(\Phi_j^\varepsilon h_{\varepsilon,j}), \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\Big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.23}$$

$$\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] = \varepsilon\sum_{j=1}^{3}\Big(\Phi_j^\varepsilon\nabla h_{\varepsilon,j}, \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\Big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.24}$$

Пусть θ_ε — срезка, подчиненная условиям (5.15). Член (5.23) можно представить в виде

$$\widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] = \varepsilon \sum_{j=1}^{3} \Big(\nabla(\theta_\varepsilon \Phi_j^\varepsilon h_{\varepsilon,j}), \operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} \Big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.25}$$

поскольку

$$\Big(\nabla((1-\theta_\varepsilon)\Phi_j^\varepsilon h_{\varepsilon,j}), \operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} \Big)_{L_2(\mathcal{O})} = 0,$$

что проверяется интегрированием по частям с учетом тождества $\operatorname{div}\operatorname{rot} = 0$. (При проверке можно заменить $\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}$ на $\operatorname{rot}(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0$, где $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 \in \operatorname{Dom}\mathfrak{l}_0$. Сначала считаем, что $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, а затем замыкаем результат по непрерывности.)

Далее, имеем

$$\varepsilon\nabla(\theta_\varepsilon \Phi_j^\varepsilon h_{\varepsilon,j}) = (\varepsilon\nabla\theta_\varepsilon)\Phi_j^\varepsilon h_{\varepsilon,j} + \theta_\varepsilon(\nabla\Phi_j)^\varepsilon h_{\varepsilon,j} + \varepsilon\theta_\varepsilon\Phi_j^\varepsilon\nabla h_{\varepsilon,j}. \tag{5.26}$$

Первое слагаемое справа оценим с помощью (5.15) и леммы 1.7:

$$\begin{aligned}
&\|(\varepsilon\nabla\theta_\varepsilon)\Phi_j^\varepsilon h_{\varepsilon,j}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \kappa\|\Phi_j^\varepsilon h_{\varepsilon,j}\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_{2\varepsilon})} \\
&\leqslant \varepsilon^{1/2}\kappa\beta_*^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\|\Phi_j\|_{L_2(\Omega)}\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Вместе с (2.9), (4.11), (4.14) это влечет

$$\|(\varepsilon\nabla\theta_\varepsilon)\Phi_j^\varepsilon h_{\varepsilon,j}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}'_{12}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

где $\mathcal{C}'_{12} = \kappa\beta_*^{1/2}(2r_0)^{-1}\|\eta\|_{L_\infty}^{1/2}\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{3/2}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$.

Для оценки второго слагаемого в правой части (5.26) применим (5.15) и лемму 1.7:

$$\begin{aligned}
&\|\theta_\varepsilon(\nabla\Phi_j)^\varepsilon h_{\varepsilon,j}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|(\nabla\Phi_j)^\varepsilon h_{\varepsilon,j}\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_{2\varepsilon})} \\
&\leqslant \varepsilon^{1/2}\beta_*^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\|\nabla\Phi_j\|_{L_2(\Omega)}\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Учитывая (2.8), (4.11) и (4.14), приходим к неравенству

$$\|\theta_\varepsilon(\nabla\Phi_j)^\varepsilon h_{\varepsilon,j}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}''_{12}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

где $\mathcal{C}''_{12} = \beta_*^{1/2}\|\eta\|_{L_\infty}^{1/2}\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{3/2}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$.

Наконец, третье слагаемое в правой части (5.26) оценивается с помощью предложения 1.2:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\|\theta_\varepsilon\Phi_j^\varepsilon\nabla h_{\varepsilon,j}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon\|\Phi_j^\varepsilon\nabla h_{\varepsilon,j}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leqslant \varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|\Phi_j\|_{L_2(\Omega)}\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Вместе с (2.9), (4.11) и (4.14) это дает

$$\varepsilon\|\theta_\varepsilon\Phi_j^\varepsilon\nabla h_{\varepsilon,j}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}'''_{12}\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.28}$$

где $\mathcal{C}'''_{12} = (2r_0)^{-1}\|\eta\|_{L_\infty}^{1/2}\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{3/2}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$.

В итоге получаем

$$\|\varepsilon\nabla(\theta_\varepsilon\Phi_j^\varepsilon h_{\varepsilon,j})\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_{12}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{5.29}$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_{12} = \mathcal{C}'_{12} + \mathcal{C}''_{12} + \mathcal{C}'''_{12}$. Отсюда следует оценка члена (5.25):

$$|\widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant 3\widehat{\mathcal{C}}_{12}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{5.30}$$

Перейдем к рассмотрению члена (5.24). Аналогично (5.27), (5.28)

$$\|\Phi_j^\varepsilon \nabla h_{\varepsilon,j}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}'''_{12}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следовательно,

$$|\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant 3\mathcal{C}'''_{12}\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.31}$$

В итоге, из (5.22), (5.30) и (5.31) получаем искомую оценку (5.21) с постоянной $\mathcal{C}_{12} = 3(\widehat{\mathcal{C}}_{12} + \mathcal{C}'''_{12})$. $\square$

Член (5.20) оценим с помощью предложения 1.1:

$$|\mathcal{J}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \varepsilon r_1\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^3)}\|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Учитывая (4.11) и (4.14), приходим к неравенству

$$|\mathcal{J}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}_{13}\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.32}$$

где $\mathcal{C}_{13} = r_1\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$.

Член (5.18) преобразуем, используя лемму 5.1. Пусть $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 = T_\varepsilon\boldsymbol{\zeta}$. Тогда $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 \in \mathrm{Dom}\,\mathfrak{l}_0$ и $\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} = \mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0$. Следовательно,

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\zeta}] = ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0, \mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Поскольку $\boldsymbol{\varphi}_0$ является обобщенным решением задачи (4.4), выполнено

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\zeta}] = -(\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})} + i((\mu^0)^{-1/2}\mathbf{r}, \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.33}$$

Аналогичным образом преобразуем член (5.19):

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\zeta}] = ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Поскольку $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ является обобщенным решением задачи (4.12), выполнено

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\zeta}] = -(\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})} + i((\mu^0)^{-1/2}\mathbf{r}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.34}$$

5.3. **Дальнейший анализ $\mathcal{R}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]$.** Из (5.16), (5.33) и (5.34) следует, что функционал (4.29) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] =& \mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\zeta}] + ((W_\mu^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon), \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &- (\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})} + i((\mu^0)^{-1/2}\mathbf{r}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ i(\mathbf{r}, (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 - (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{5.35}$$

В силу (5.14) последнее слагаемое в (5.35) обращается в ноль:

$$(\mathbf{r}, (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0 - (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{r}, \nabla(\phi_{\varepsilon,1} - \phi_{\varepsilon,2}))_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \tag{5.36}$$

поскольку $\mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O})$ (см. (1.4)).

Используя (4.15), представим третье слагаемое в (5.35) в виде

$$
\begin{aligned}
&((W_\mu^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon),\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\widetilde{\mu}^\varepsilon(\mu^0)^{-1/2} S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon),(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\
&= \mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}] + ((\mu^0)^{1/2}(\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\rho}_\varepsilon),(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})},
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

где

$$
\mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] = ((\widetilde{\mu}^\varepsilon-\mu^0)(\mu^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon),(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.38}
$$

$$
\mathcal{J}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}] = ((\mu^0)^{1/2}(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon),(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.39}
$$

Теперь из (5.35)–(5.37) следует представление

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{R}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}] \\
&+ i((\mu^0)^{-1/2}\mathbf{r}_\varepsilon,\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})} + ((\mu^0)^{1/2}(\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\rho}_\varepsilon),(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} - (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

В силу (5.14) последнее слагаемое в (5.40) обращается в ноль:

$$
\begin{aligned}
&((\mu^0)^{1/2}(\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\rho}_\varepsilon),(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} - (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})} \\
&= ((\mu^0)^{1/2}(\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\rho}_\varepsilon),\nabla(\phi_{\varepsilon,2}-\phi_{\varepsilon,1}))_{L_2(\mathcal{O})} = 0,
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

поскольку $(\mu^0)^{1/2}(\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\rho}_\varepsilon) \in J_0(\mathcal{O})$. Согласно (5.40) и (5.41),

$$
\mathcal{R}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}], \tag{5.42}
$$

$$
\mathcal{J}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] := i((\mu^0)^{-1/2}\mathbf{r}_\varepsilon,\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.43}
$$

5.4. **Оценка членов $\mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}]$ и $\mathcal{J}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}]$.** Следующая лемма традиционна в теории усреднения. Для полноты изложения мы приведем ее с доказательством.

Лемма 5.4. *Пусть $\widetilde{\mu}(\mathbf{x})$ — матрица-функция* (2.6), *а μ^0 — эффективная матрица* (2.7). *Существуют функции $M_{lj}^{(i)} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, $i,l,j=1,2,3$, такие что*

$$
\widetilde{\mu}_{li}(\mathbf{x}) - \mu_{li}^0 = \sum_{j=1}^3 \partial_j M_{lj}^{(i)}(\mathbf{x}), \quad l,i=1,2,3, \tag{5.44}
$$

$$
M_{lj}^{(i)}(\mathbf{x}) = -M_{jl}^{(i)}(\mathbf{x}), \quad i,l,j=1,2,3. \tag{5.45}
$$

Выполнены оценки

$$
\begin{aligned}
&\|M_{lj}^{(i)}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_M'|\Omega|^{1/2}, \quad C_M' := r_0^{-1}\|\mu\|_{L_\infty}, \quad i,l,j=1,2,3, \\
&\|\nabla M_{lj}^{(i)}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_M''|\Omega|^{1/2}, \quad C_M'' := 2\|\mu\|_{L_\infty}, \quad i,l,j=1,2,3.
\end{aligned}
\tag{5.46}
$$

Доказательство. Пусть $U_{li}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение уравнения

$$
\Delta U_{li}(\mathbf{x}) = \widetilde{\mu}_{li}(\mathbf{x}) - \mu_{li}^0. \tag{5.47}
$$

Условие разрешимости обеспечено соотношением (2.7). Поскольку правая часть в (5.47) принадлежит $L_2(\Omega)$, то $U_{li} \in \widetilde{H}^2(\Omega)$. Положим

$$M_{lj}^{(i)}(\mathbf{x}) := \partial_j U_{li}(\mathbf{x}) - \partial_l U_{ji}(\mathbf{x}), \quad i,l,j = 1,2,3. \tag{5.48}$$

Очевидно, выполнено (5.45). В силу (2.5) дивергенция от столбцов матрицы $\widetilde{\mu}(\mathbf{x}) - \mu^0$ равна нулю, т. е.,

$$\sum_{j=1}^{3} \partial_j (\widetilde{\mu}_{ji}(\mathbf{x}) - \mu_{ji}^0) = 0, \quad i = 1,2,3.$$

Обозначим $f_i(\mathbf{x}) := \sum_{j=1}^3 \partial_j U_{ji}(\mathbf{x})$. Тогда, согласно (5.47),

$$\Delta f_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j \Delta U_{ji}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j (\widetilde{\mu}_{ji}(\mathbf{x}) - \mu_{ji}^0) = 0.$$

Таким образом, $f_i(\mathbf{x})$ — периодическое решение уравнения Лапласа с нулевым средним. Следовательно, $f_i(\mathbf{x}) = 0$. Отсюда с учетом (5.48)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{3} \partial_j M_{lj}^{(i)}(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 U_{li}(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{3} \partial_j \partial_l U_{ji}(\mathbf{x}) \\ &= \Delta U_{li}(\mathbf{x}) - \partial_l f_i(\mathbf{x}) = \Delta U_{li}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Вместе с (5.47) это приводит к искомому тождеству (5.44).

С помощью рядов Фурье легко видеть, что периодическое решение уравнения (5.47) допускает оценки

$$\begin{aligned}\|\nabla U_{li}\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant (2r_0)^{-1} \|\widetilde{\mu}_{li} - \mu_{li}^0\|_{L_2(\Omega)}, \\ \|\nabla_2 U_{li}\|_{L_2(\Omega)} &\leqslant \|\widetilde{\mu}_{li} - \mu_{li}^0\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

В свою очередь, из уравнения (2.5) вытекает неравенство

$$\|\widetilde{\mu}_{li} - \mu_{li}^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\widetilde{\mu}_{li}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|\mu\|_{L_\infty} |\Omega|^{1/2}.$$

Это приводит к искомым оценкам (5.46). □

Лемма 5.5. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *член* (5.38) *подчинен оценке*

$$\begin{aligned}&|\mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}_{14} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\times \left(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2} \boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right).\end{aligned} \tag{5.49}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{14}$ *зависит от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ *и области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Обозначим $[(\mu^0)^{-1/2} S_\varepsilon (\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)]_i =: q_{\varepsilon,i}$, $i = 1,2,3$. Запишем член (5.38) в виде

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] = \sum_{l,i=1}^{3} \left((\widetilde{\mu}_{li}^\varepsilon - \mu_{li}^0) q_{\varepsilon,i}, [(\mu^\varepsilon)^{-1/2} \boldsymbol{\zeta}]_l \right)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.50}$$

В силу (5.44) имеем:

$$\widetilde{\mu}_{li}^{\varepsilon} - \mu_{li}^{0} = \varepsilon \sum_{j=1}^{3} \partial_j (M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon}, \quad l, i = 1, 2, 3. \tag{5.51}$$

Следовательно,

$$\mathcal{J}_{\varepsilon}^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] = \widehat{\mathcal{J}}_{\varepsilon}^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] - \widetilde{\mathcal{J}}_{\varepsilon}^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}], \tag{5.52}$$

где

$$\widehat{\mathcal{J}}_{\varepsilon}^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] = \varepsilon \sum_{l,i,j=1}^{3} \Big(\partial_j ((M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,i}), [(\mu^{\varepsilon})^{-1/2} \boldsymbol{\zeta}]_l \Big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.53}$$

$$\widetilde{\mathcal{J}}_{\varepsilon}^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] = \varepsilon \sum_{l,i,j=1}^{3} \Big((M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} \partial_j q_{\varepsilon,i}, [(\mu^{\varepsilon})^{-1/2} \boldsymbol{\zeta}]_l \Big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.54}$$

Пусть θ_ε — срезка, подчиненная условиям (5.15). Запишем член (5.53) в виде

$$\widehat{\mathcal{J}}_{\varepsilon}^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] = \mathcal{J}_{\varepsilon}^{(8)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{J}_{\varepsilon}^{(9)}[\boldsymbol{\zeta}], \tag{5.55}$$

$$\mathcal{J}_{\varepsilon}^{(8)}[\boldsymbol{\zeta}] = \varepsilon \sum_{l,i,j=1}^{3} \Big(\partial_j (\theta_\varepsilon (M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,i}), [(\mu^{\varepsilon})^{-1/2} \boldsymbol{\zeta}]_l \Big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.56}$$

$$\mathcal{J}_{\varepsilon}^{(9)}[\boldsymbol{\zeta}] = \varepsilon \sum_{l,i,j=1}^{3} \Big(\partial_j ((1-\theta_\varepsilon) (M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,i}), [(\mu^{\varepsilon})^{-1/2} \boldsymbol{\zeta}]_l \Big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.57}$$

Рассмотрим член (5.56). Имеем:

$$\varepsilon \partial_j (\theta_\varepsilon (M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,i}) = \varepsilon (\partial_j \theta_\varepsilon) (M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,i} + \theta_\varepsilon (\partial_j M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,i} + \varepsilon \theta_\varepsilon (M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} \partial_j q_{\varepsilon,i}. \tag{5.58}$$

Первое слагаемое справа оценим с помощью (5.15) и леммы 1.7

$$\begin{aligned} &\| \varepsilon (\partial_j \theta_\varepsilon) (M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,i} \|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \kappa \| (M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,i} \|_{L_2((\partial \mathcal{O})_{2\varepsilon})} \\ &\leqslant \varepsilon^{1/2} \kappa \beta_*^{1/2} |\Omega|^{-1/2} \| M_{lj}^{(i)} \|_{L_2(\Omega)} \| \mu^{-1} \|_{L_\infty}^{1/2} \| \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon \|_{H^1(\mathbb{R}^3)}, \ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Вместе с (4.11), (4.14) и (5.46) это влечет

$$\| \varepsilon (\partial_j \theta_\varepsilon) (M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,j} \|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{14}' \varepsilon^{1/2} \| \mathbf{r} \|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

где $\mathcal{C}_{14}' = \kappa \beta_*^{1/2} C_M' \| \mu^{-1} \|_{L_\infty}^{1/2} (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$. Аналогично, для оценки второго слагаемого в (5.58) применим (5.15) и лемму 1.7:

$$\begin{aligned} &\| \theta_\varepsilon (\partial_j M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,i} \|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon^{1/2} \beta_*^{1/2} |\Omega|^{-1/2} \| \partial_j M_{lj}^{(i)} \|_{L_2(\Omega)} \| \mu^{-1} \|_{L_\infty}^{1/2} \| \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon \|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \end{aligned}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Учитывая (4.11), (4.14) и (5.46), получаем

$$\| \theta_\varepsilon (\partial_j M_{lj}^{(i)})^{\varepsilon} q_{\varepsilon,i} \|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{14}'' \varepsilon^{1/2} \| \mathbf{r} \|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

где $\mathcal{C}''_{14} = \beta_*^{1/2} C''_M \|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$. Третье слагаемое в правой части (5.58) оценивается с помощью предложения 1.2:

$$\varepsilon\|\theta_\varepsilon (M^{(i)}_{lj})^\varepsilon \partial_j q_{\varepsilon,i}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|M^{(i)}_{lj}\|_{L_2(\Omega)}\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}. \tag{5.59}$$

Вместе с (4.11), (4.14) и (5.46) это дает

$$\varepsilon\|\theta_\varepsilon (M^{(i)}_{lj})^\varepsilon \partial_j q_{\varepsilon,i}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}'''_{14}\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.60}$$

где $\mathcal{C}'''_{14} = C'_M \|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$. В итоге приходим к оценке

$$\varepsilon\|\partial_j(\theta_\varepsilon (M^{(i)}_{lj})^\varepsilon q_{\varepsilon,i})\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathcal{C}}_{14}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{5.61}$$

где $\check{\mathcal{C}}_{14} = \mathcal{C}'_{14} + \mathcal{C}''_{14} + \mathcal{C}'''_{14}$. Отсюда вытекает оценка члена (5.56):

$$|\mathcal{J}^{(8)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant 9\sqrt{3}\check{\mathcal{C}}_{14}\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{5.62}$$

Перейдем к рассмотрению члена (5.57). В силу (5.14), $(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} = (\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_\varepsilon + \nabla(\phi_{\varepsilon,2} - \phi_{\varepsilon,1})$. Это позволяет записать член (5.57) в виде

$$\mathcal{J}^{(9)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \varepsilon\sum_{l,i,j=1}^{3}\Big(\partial_j((1-\theta_\varepsilon)(M^{(i)}_{lj})^\varepsilon q_{\varepsilon,i}), [(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_\varepsilon]_l\Big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.63}$$

Мы учли, что

$$\begin{aligned}&\sum_{l,j=1}^{3}\Big(\partial_j((1-\theta_\varepsilon)(M^{(i)}_{lj})^\varepsilon q_{\varepsilon,i}), \partial_l(\phi_{\varepsilon,2} - \phi_{\varepsilon,1})\Big)_{L_2(\mathcal{O})}\\ &= -\sum_{l,j=1}^{3}\Big((1-\theta_\varepsilon)(M^{(i)}_{lj})^\varepsilon q_{\varepsilon,i}, \partial_j\partial_l(\phi_{\varepsilon,2} - \phi_{\varepsilon,1})\Big)_{L_2(\mathcal{O})} = 0,\end{aligned}$$

что получается интегрированием по частям с учетом соотношений (5.45). (При проверке можно заменить функцию $\phi_{\varepsilon,2} - \phi_{\varepsilon,1}$ на $\phi \in H^2(\mathcal{O})$, а затем замкнуть результат по непрерывности.)

Включение $\boldsymbol{\zeta}^0_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ позволяет проинтегрировать по частям в (5.63):

$$\mathcal{J}^{(9)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = -\varepsilon\sum_{l,i,j=1}^{3}\Big((1-\theta_\varepsilon)(M^{(i)}_{lj})^\varepsilon q_{\varepsilon,i}, \partial_j[(\mu^0)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_\varepsilon]_l\Big)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Аналогично (5.59), (5.60) выполнена оценка

$$\|(1-\theta_\varepsilon)(M^{(i)}_{lj})^\varepsilon q_{\varepsilon,i}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}'''_{14}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с (5.3) это влечет

$$\begin{aligned}&|\mathcal{J}^{(9)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant 9\mathcal{C}'''_{14}\mathcal{C}_{11}\|\mu^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times\Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big).\end{aligned} \tag{5.64}$$

Наконец, член (5.54) оценивается аналогично (5.59), (5.60):

$$|\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{14}\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.65}$$

где $\widetilde{\mathcal{C}}_{14} = 9\sqrt{3}\mathcal{C}_{14}'''\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}$.

В итоге, соотношения (5.52), (5.55), (5.62), (5.64), (5.65) приводят к оценке (5.49) с постоянной $\mathcal{C}_{14} = 9\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(\sqrt{3}\check{\mathcal{C}}_{14} + \mathcal{C}_{14}'''\mathcal{C}_{11}) + \widetilde{\mathcal{C}}_{14}$. $\square$

Член (5.39) оценивается с помощью предложения 1.1:

$$|\mathcal{J}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \varepsilon r_1\|\mu\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с (4.11) и (4.14) это дает оценку

$$|\mathcal{J}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}_{15}\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.66}$$

где $\mathcal{C}_{15} = r_1(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)\|\mu\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}$.

5.5. **Оценка члена $\mathcal{J}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}]$.** Используя (2.13), запишем член (5.43) в виде

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] = i((\mu^0)^{-1/2}\mathcal{P}_{\mu^0}^0 S_\varepsilon(Y_\mu^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{r}}, \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.67}$$

Замечание 5.6. *Пусть $\mathcal{P}_{\mu^0}^0$ — ортопроектор пространства $L_2(\mathcal{O};(\mu^0)^{-1})$ на $J_0(\mathcal{O})$. Нетрудно показать, что $\mathcal{P}_{\mu^0}^0\mathbf{f} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, если $\mathbf{f} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. При этом выполнена оценка*

$$\|\mathcal{P}_{\mu^0}^0\mathbf{f}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}\|\mathbf{f}\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{5.68}$$

Постоянная $\mathfrak{c}$ зависит лишь от норм $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$ и области $\mathcal{O}$.

Учитывая самосопряженность оператора $\mathcal{P}_{\mu^0}^0$ в весовом пространстве $L_2(\mathcal{O};(\mu^0)^{-1})$, представим функционал (5.67) в виде

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] = i((\mu^0)^{-1}S_\varepsilon(Y_\mu^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{r}}, \mathcal{P}_{\mu^0}^0(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.69}$$

Пусть θ_ε — срезка, удовлетворяющая условиям (5.15). Запишем член (5.69) как сумму двух слагаемых:

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] = \widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] + \widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}], \tag{5.70}$$

$$\widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] := i((\mu^0)^{-1}S_\varepsilon(Y_\mu^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{r}}, \theta_\varepsilon\mathcal{P}_{\mu^0}^0(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.71}$$

$$\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] := i((\mu^0)^{-1}S_\varepsilon(Y_\mu^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{r}}, (1-\theta_\varepsilon)\mathcal{P}_{\mu^0}^0(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.72}$$

Член (5.71) оценим с помощью предложения 1.2, (2.8) и леммы 1.6

$$\begin{aligned}|\widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}]| &\leqslant \|\mu^{-1}\|_{L_\infty}\|S_\varepsilon(Y_\mu^\varepsilon)^*\widetilde{\mathbf{r}}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\|\mathcal{P}_{\mu^0}^0(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0\|_{L_2(B_{2\varepsilon})}\\ &\leqslant \varepsilon^{1/2}\|\mu\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{3/2}\beta_0^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathcal{P}_{\mu^0}^0(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon^0\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Учитывая (5.3) и (5.68), приходим к оценке

$$\begin{aligned}|\widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}]| &\leqslant \mathcal{C}_{16}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times \Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big)\end{aligned} \tag{5.73}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где $\mathcal{C}_{16} = \mathfrak{c}\|\mu\|_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|^{3/2}_{L_\infty}\beta_0^{1/2}\mathcal{C}_{11}$.

Перейдем к рассмотрению члена (5.72). Функция $(1-\theta_\varepsilon)\mathcal{P}^0_{\mu^0}(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_\varepsilon$ принадлежит классу $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ и обращается в ноль на $\partial\mathcal{O}$. Продолжим ее нулем на $\mathbb{R}^3\setminus\mathcal{O}$, продолженную функцию обозначим через $\mathbf{p}_\varepsilon$. Заметим, что $\mathbf{p}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Перепишем член (5.72) в виде

$$\widetilde{\mathcal{J}}^{(7)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] := i(\mathbf{r}, Y^\varepsilon_\mu S_\varepsilon(\mu^0)^{-1}\mathbf{p}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Столбцы матрицы Y^ε_μ имеют вид $\varepsilon\nabla\Psi^\varepsilon_j$, $j=1,2,3$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{J}}^{(7)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] =& i\varepsilon\sum_{j=1}^3(\mathbf{r}, \nabla\left(\Psi^\varepsilon_j[S_\varepsilon(\mu^0)^{-1}\mathbf{p}_\varepsilon]_j\right))_{L_2(\mathcal{O})}\\ &- i\varepsilon\sum_{j=1}^3(\mathbf{r}, \Psi^\varepsilon_j\nabla[S_\varepsilon(\mu^0)^{-1}\mathbf{p}_\varepsilon]_j)_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Первое слагаемое справа обращается в ноль, поскольку $\mathbf{r}\in J_0(\mathcal{O})$. Тогда в силу предложения 1.2 и (2.9) получаем

$$|\widetilde{\mathcal{J}}^{(7)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant 3\varepsilon(2r_0)^{-1}\|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|^{3/2}_{L_\infty}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\nabla\mathbf{p}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.74}$$

Рассмотрим производные

$$\partial_l\mathbf{p}_\varepsilon = -(\partial_l\theta_\varepsilon)\mathcal{P}^0_{\mu^0}(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_\varepsilon + (1-\theta_\varepsilon)\partial_l\mathcal{P}^0_{\mu^0}(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_\varepsilon.$$

Следовательно, с учетом (5.15), леммы 1.6 и (5.68) имеем:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|\nabla\mathbf{p}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \kappa\|\mathcal{P}^0_{\mu^0}(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_\varepsilon\|_{L_2(B_{2\varepsilon})} + \varepsilon\|\mathcal{P}^0_{\mu^0}(\mu^0)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}^0_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\\ &\leqslant (\varepsilon^{1/2}\kappa\beta_0^{1/2}+\varepsilon)\mathfrak{c}\|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\|\boldsymbol{\zeta}^0_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0.\end{aligned}$$

Вместе с (5.3) это влечет

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|\nabla\mathbf{p}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{17}\varepsilon^{1/2}\\ &\times\Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big)\end{aligned} \tag{5.75}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где $\mathcal{C}_{17} = (\kappa\beta_0^{1/2}+1)\mathfrak{c}\|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\mathcal{C}_{11}$. Теперь из (5.74) и (5.75) вытекает оценка

$$\begin{aligned}&|\widetilde{\mathcal{J}}^{(7)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}_{18}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times\Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big)\end{aligned} \tag{5.76}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, где $\mathcal{C}_{18} = 3(2r_0)^{-1}\|\mu\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mu^{-1}\|^{3/2}_{L_\infty}\mathcal{C}_{17}$.

Соотношения (5.70), (5.73) и (5.76) влекут

$$\begin{aligned}&|\mathcal{J}^{(7)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant (\mathcal{C}_{16}+\mathcal{C}_{18})\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times\Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big), \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0.\end{aligned} \tag{5.77}$$

5.6. **Учет краевого условия. Завершение доказательства теоремы 4.6.** В итоге соотношения (5.21), (5.32), (5.42), (5.49), (5.66) и (5.77) дают оценку функционала (4.29):

$$|\mathcal{R}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}^\circ \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \times \Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big), \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \tag{5.78}$$

где $\mathcal{C}^\circ = \mathcal{C}_{12}+\mathcal{C}_{13}+\mathcal{C}_{14}+\mathcal{C}_{15}+\mathcal{C}_{16}+\mathcal{C}_{18}$.

Чтобы учесть краевое условие (4.32), рассмотрим обобщенное решение ξ_ε задачи Неймана

$$\operatorname{div}\mu^\varepsilon\nabla\xi_\varepsilon = \operatorname{div}(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \quad (\mu^\varepsilon\nabla\xi_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = ((\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}}. \tag{5.79}$$

Решение $\xi_\varepsilon\in H^1(\mathcal{O})$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{\mathcal{O}} \langle \mu^\varepsilon\nabla\xi_\varepsilon, \nabla\omega\rangle\,d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \langle (\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \nabla\omega\rangle\,d\mathbf{x}, \quad \forall\omega\in H^1(\mathcal{O}). \tag{5.80}$$

Лемма 5.7. *Решение ξ_ε задачи* (5.79) *подчинено оценке*

$$\|(\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\xi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{19}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1. \tag{5.81}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{19}$ зависит от норм $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, параметров решетки Γ и области $\mathcal{O}$.

Доказательство. Оценим правую часть тождества (5.80). В силу (4.21) имеем:

$$\left|\int_{\mathcal{O}} \langle (\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \nabla\omega\rangle\,d\mathbf{x} - \mathcal{I}_\varepsilon[\omega]\right| \leqslant \mathcal{C}_3\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|(\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\omega\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.82}$$

где

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\omega] = \int_{\mathcal{O}} \langle (\mu^\varepsilon)^{1/2}(W_\mu^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon), \nabla\omega\rangle\,d\mathbf{x}.$$

Согласно (4.15) имеем:

$$\begin{aligned}
&(\mu^\varepsilon)^{1/2}(W_\mu^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon) = \widetilde{\mu}^\varepsilon(\mu^0)^{-1/2} S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\\
&= (\widetilde{\mu}^\varepsilon-\mu^0)(\mu^0)^{-1/2} S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon) + (\mu^0)^{1/2}(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon)\\
&+ (\mu^0)^{1/2}(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Поскольку $(\mu^0)^{1/2}(\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\rho}_\varepsilon)\in J_0(\mathcal{O})$, то $((\mu^0)^{1/2}(\boldsymbol{\varphi}_0+\boldsymbol{\rho}_\varepsilon), \nabla\omega)_{L_2(\mathcal{O})} = 0$. Следовательно,

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\omega] = \mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\omega] + \mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\omega], \tag{5.83}$$

где

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\omega] = \int_{\mathcal{O}} \langle (\widetilde{\mu}^\varepsilon-\mu^0)(\mu^0)^{-1/2} S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon), \nabla\omega\rangle\,d\mathbf{x}, \tag{5.84}$$

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\omega] = \int_{\mathcal{O}} \langle (\mu^0)^{1/2}(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{\rho}}_\varepsilon), \nabla\omega\rangle\,d\mathbf{x}. \tag{5.85}$$

Член (5.85) оценим с помощью предложения 1.1 и (4.11), (4.14):

$$|\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\omega]| \leqslant \mathcal{C}'_{19}\varepsilon \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\omega\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.86}$$

где $\mathcal{C}'_{19} = \|\mu\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} r_1(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$.

Член (5.84) рассматривается аналогично (5.50)–(5.62). Имеем:

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\omega] = \sum_{l,i=1}^{3} \left((\widetilde{\mu}_{li}^\varepsilon - \mu_{li}^0) q_{\varepsilon,i}, \partial_l \omega \right)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с (5.51) это влечет

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\omega] = \widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\omega] - \widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\omega], \tag{5.87}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\omega] = \varepsilon \sum_{l,i,j=1}^{3} \Big(\partial_j ((M_{lj}^{(i)})^\varepsilon q_{\varepsilon,i}), \partial_l \omega \Big)_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\omega] = \varepsilon \sum_{l,i,j=1}^{3} \Big((M_{lj}^{(i)})^\varepsilon \partial_j q_{\varepsilon,i}, \partial_l \omega \Big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.88}$$

Пусть θ_ε — срезка, подчиненная (5.15). Тогда

$$\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\omega] = \varepsilon \sum_{l,i,j=1}^{3} \Big(\partial_j (\theta_\varepsilon (M_{lj}^{(i)})^\varepsilon q_{\varepsilon,i}), \partial_l \omega \Big)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Мы учли, что

$$\sum_{l,j=1}^{3} \Big(\partial_j ((1-\theta_\varepsilon)(M_{lj}^{(i)})^\varepsilon q_{\varepsilon,i}), \partial_l \omega \Big)_{L_2(\mathcal{O})} = 0,$$

что проверяется интегрированием по частям с учетом (5.45). Используя (5.61), получаем

$$|\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\omega]| \leqslant 9\sqrt{3}\check{\mathcal{C}}_{14} \|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\omega\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{5.89}$$

ср. (5.62). Член (5.88) оценивается аналогично члену (5.54):

$$|\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(1)}[\omega]| \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{14}\varepsilon \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\omega\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.90}$$

ср. (5.65).

В итоге, из (5.83), (5.86), (5.87), (5.89) и (5.90) вытекает оценка

$$|\mathcal{I}_\varepsilon[\omega]| \leqslant \check{\mathcal{C}}_{19}\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\omega\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

где $\check{\mathcal{C}}_{19} = \mathcal{C}'_{19} + 9\sqrt{3}\check{\mathcal{C}}_{14}\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} + \widetilde{\mathcal{C}}_{14}$. Вместе с (5.82) это влечет

$$\left| \int_{\mathcal{O}} \langle (\mu^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \nabla\omega \rangle \, d\mathbf{x} \right| \leqslant \mathcal{C}_{19}\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\omega\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{5.91}$$

где $\mathcal{C}_{19} = \mathcal{C}_3 + \check{\mathcal{C}}_{19}$. Подставляя $\omega = \xi_\varepsilon$ в (5.80) и используя (5.91), приходим к искомому неравенству (5.81). $\square$

Положим $\mathbf{f}_\varepsilon := (\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\xi_\varepsilon$. В силу (5.79) функция $\mathbf{f}_\varepsilon$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{f}_\varepsilon = 0, \quad \mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{f}_\varepsilon = \mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon,\\ &((\mu^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{f}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = ((\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}}.\end{aligned} \tag{5.92}$$

Отсюда и из (4.30)–(4.32) следует, что $\mathbf{s}_\varepsilon - \mathbf{f}_\varepsilon \in \mathrm{Dom}\,\mathfrak{l}_\varepsilon$ и выполнено тождество

$$\mathfrak{l}_\varepsilon[\mathbf{s}_\varepsilon - \mathbf{f}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}] + (\mathbf{s}_\varepsilon - \mathbf{f}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = \widetilde{\mathcal{R}}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}], \quad \forall \boldsymbol{\zeta} \in \mathrm{Dom}\,\mathfrak{l}_\varepsilon, \tag{5.93}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{R}}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \mathcal{R}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] - (\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\mathbf{f}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В силу (4.23), (5.78) и (5.81)

$$\begin{aligned}&|\widetilde{\mathcal{R}}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}^\circ \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times \Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \Big), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,\end{aligned} \tag{5.94}$$

где $\widetilde{\mathcal{C}}^\circ = \mathcal{C}^\circ + \mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_{19}$. Подставляя $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{s}_\varepsilon - \mathbf{f}_\varepsilon$ в (5.93) и используя (5.94), получаем

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{s}_\varepsilon - \mathbf{f}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}(\mathbf{s}_\varepsilon - \mathbf{f}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ \|\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}(\mathbf{s}_\varepsilon - \mathbf{f}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_7' \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,\end{aligned} \tag{5.95}$$

где $\mathcal{C}_7' = 3\max\{1, \|\eta\|_{L_\infty}\}\widetilde{\mathcal{C}}^\circ$.

Сопоставляя (4.23), (5.92), (5.95) и лемму 5.7, приходим к искомому неравенству (4.34) с постоянной $\mathcal{C}_7 = \mathcal{C}_7' + \mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_{19}$. Это *завершает доказательство теоремы* 4.6.

6. Исследование задачи в случае $\mathbf{r} = 0$

6.1. **Симметризация.** Замена $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}$ сводит задачу (3.4) к

$$\left\{\begin{aligned}&(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon + \boldsymbol{\phi}_\varepsilon = i(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{q}, \quad \mathrm{div}\,(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon = 0,\\ &((\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \ (\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0.\end{aligned}\right. \tag{6.1}$$

Здесь $\mathbf{q} \in J(\mathcal{O})$. Автоматически $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ является также решением эллиптического уравнения

$$(\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon + I)\boldsymbol{\phi}_\varepsilon = i(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{q}, \tag{6.2}$$

где оператор $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ формально задан дифференциальным выражением

$$\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2} - (\eta^\varepsilon)^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,(\eta^\varepsilon)^{1/2}$$

с граничными условиями из (6.1). Строго говоря, оператор $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ — это самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, отвечающий замкнутой неотрицательной квадратичной форме

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon[\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\phi}] &= \int_{\mathcal{O}} \left(\langle (\mu^\varepsilon)^{-1} \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}, \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}\rangle + |\mathrm{div}\,(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\phi}|^2 \right) d\mathbf{x},\\ \mathrm{Dom}\,\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon =& \{\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3):\quad \mathrm{div}\,(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathcal{O}),\\ &\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\quad ((\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi})_\tau|_{\partial\mathcal{O}}=0\}.\end{aligned} \tag{6.3}$$

Замкнутость формы (6.3) вытекает из результатов [BS1, BS2].

Замечание 6.1. 1) *Вообще говоря,* $\mathrm{Dom}\,\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon \not\subset H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. 2) *Второе граничное условие в* (6.1) *— естественное, оно не отражается в области определения квадратичной формы* $\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon$. 3) *Форма* $\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon$ *и оператор* $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ *распадаются в ортогональном разложении*

$$L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) = \mathcal{J}(\mathcal{O};\eta^\varepsilon)\oplus\mathcal{G}_0(\mathcal{O};\eta^\varepsilon),$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\mathcal{O};\eta^\varepsilon) &= \{\mathbf{f}:\ (\eta^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{f}\in J(\mathcal{O})\},\\ \mathcal{G}_0(\mathcal{O};\eta^\varepsilon) &= \{(\eta^\varepsilon)^{1/2}\nabla\omega:\ \omega\in H^1_0(\mathcal{O})\}.\end{aligned}$$

6.2. **Эффективная задача.** Пусть η^0 и μ^0 — эффективные матрицы, определенные в п. 2.2. Положим $\boldsymbol{\phi}_0 = (\eta^0)^{-1/2}\mathbf{w}_0^{(\mathbf{q})}$. Тогда $\boldsymbol{\phi}_0$ является решением задачи

$$\left\{\begin{array}{c}(\eta^0)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{\phi}_0 = i(\eta^0)^{-1/2}\mathbf{q},\ \mathrm{div}\,(\eta^0)^{1/2}\boldsymbol{\phi}_0 = 0,\\ ((\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}}=0,\ (\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}}=0.\end{array}\right. \tag{6.4}$$

Автоматически $\boldsymbol{\phi}_0$ является также решением эллиптического уравнения

$$(\widehat{\mathcal{L}}^0 + I)\boldsymbol{\phi}_0 = i(\eta^0)^{-1/2}\mathbf{q}, \tag{6.5}$$

где $\widehat{\mathcal{L}}^0$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, отвечающий замкнутой неотрицательной квадратичной форме

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{l}}_0[\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\phi}] &= \int_{\mathcal{O}} \left(\langle (\mu^0)^{-1} \mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}, \mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}\rangle + |\mathrm{div}\,(\eta^0)^{1/2}\boldsymbol{\phi}|^2 \right) d\mathbf{x},\\ \mathrm{Dom}\,\widehat{\mathfrak{l}}_0 =& \{\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3):\ \mathrm{div}\,(\eta^0)^{1/2}\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathcal{O}),\\ &\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\ ((\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi})_\tau|_{\partial\mathcal{O}}=0\}.\end{aligned} \tag{6.6}$$

За счет условия гладкости границы ($\partial\mathcal{O}\in C^{1,1}$) множество $\mathrm{Dom}\,\widehat{\mathfrak{l}}_0$ совпадает с

$$\mathrm{Dom}\,\widehat{\mathfrak{l}}_0 = \{\boldsymbol{\phi}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3):\ ((\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi})_\tau|_{\partial\mathcal{O}}=0\}.$$

Форма (6.6) коэрцитивна: справедливы двусторонние оценки

$$\widehat{\mathfrak{c}}_1\|\boldsymbol{\phi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathfrak{l}}_0[\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\phi}] + \|\boldsymbol{\phi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathfrak{c}}_2\|\boldsymbol{\phi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})},\quad \boldsymbol{\phi}\in\mathrm{Dom}\,\widehat{\mathfrak{l}}_0. \tag{6.7}$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{c}}_1$ зависит от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$, а $\widehat{\mathfrak{c}}_2$ зависит от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Указанные свойства были установлены в [BS1, теорема 2.3] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^2$ и в [F, теорема 2.3] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^{3/2+\delta}$, $\delta > 0$.

Оператор $\widehat{\mathcal{L}}^0$ является сильно эллиптическим оператором с постоянными коэффициентами. Условие гладкости границы $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ обеспечивает свойство повышения гладкости: резольвента $(\widehat{\mathcal{L}}^0 + I)^{-1}$ непрерывна из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ в $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Выполнена оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{L}}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}_*, \tag{6.8}$$

где постоянная $\widehat{c}_*$ зависит лишь от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Тем самым, оператор $\widehat{\mathcal{L}}^0$ можно задать дифференциальным выражением

$$\widehat{\mathcal{L}}^0 = (\eta^0)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2} - (\eta^0)^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,(\eta^0)^{1/2}$$

на области определения

$$\begin{aligned}\mathrm{Dom}\,\widehat{\mathcal{L}}^0 = \{\boldsymbol{\phi} \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) :\ &((\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\\ &(\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}.\end{aligned}$$

Обоснование этого свойства аналогично замечанию 4.2(1).

Форма $\widehat{\mathfrak{l}}_0$ и оператор $\widehat{\mathcal{L}}^0$ распадаются в ортогональном разложении

$$L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) = \mathcal{J}(\mathcal{O};\eta^0) \oplus \mathcal{G}_0(\mathcal{O};\eta^0),$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\mathcal{O};\eta^0) &= \{\mathbf{f} :\ (\eta^0)^{1/2}\mathbf{f} \in J(\mathcal{O})\},\\ \mathcal{G}_0(\mathcal{O};\eta^0) &= \{(\eta^0)^{1/2}\nabla\omega :\ \omega \in H^1_0(\mathcal{O})\}.\end{aligned}$$

В силу (6.5) и (6.8) выполнено $\boldsymbol{\phi}_0 \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, причем

$$\|\boldsymbol{\phi}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}_*\|\eta^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.9}$$

Пусть $P_\mathcal{O} : H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) \to H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ — линейный непрерывный оператор продолжения; см. п. 4.2. Положим $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 := P_\mathcal{O}\boldsymbol{\phi}_0 \in H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Согласно (4.10) и (6.9),

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_1\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.10}$$

где $\mathfrak{C}_1 = C_\mathcal{O}\widehat{c}_*\|\eta^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$.

6.3. **Поправочная задача.** Положим $\boldsymbol{v}_\varepsilon = (\eta^0)^{-1/2}\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}$. Тогда $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ является решением задачи

$$\left\{\begin{array}{c}(\eta^0)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\mu^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon + \boldsymbol{v}_\varepsilon = i(\eta^0)^{-1/2}\mathbf{q}_\varepsilon,\ \mathrm{div}\,(\eta^0)^{1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon = 0,\\ ((\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0.\end{array}\right. \tag{6.11}$$

Автоматически $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ является также решением эллиптического уравнения

$$(\widehat{\mathcal{L}}^0 + I)\boldsymbol{v}_\varepsilon = i(\eta^0)^{-1/2}\mathbf{q}_\varepsilon.$$

В силу (2.14) и (6.8) выполнено $\boldsymbol{v}_\varepsilon \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, причем

$$\|\boldsymbol{v}_\varepsilon\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}_* \|\eta\|_{L_\infty} \|\eta^{-1}\|^{3/2}_{L_\infty} \|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.12}$$

Положим $\widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon := P_{\mathcal{O}} \boldsymbol{v}_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Согласно (4.10) и (6.12),

$$\|\widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_2 \|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.13}$$

где $\mathfrak{C}_2 = C_{\mathcal{O}} \widehat{c}_* \|\eta\|_{L_\infty} \|\eta^{-1}\|^{3/2}_{L_\infty}$.

6.4. **Первое приближение к $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$.** Пусть $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ — решение уравнения (6.2). Действуя по аналогии с п. 4.4, будем искать первое приближение $\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon$ к решению $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ в форме, похожей на первое приближение к решению аналогичной задачи в $\mathbb{R}^3$.

Введем необходимые объекты. Пусть $W^*_\eta(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая (3×3)-матрица-функция, определенная выражением

$$W^*_\eta(\mathbf{x}) = \eta(\mathbf{x})^{-1/2} \widetilde{\eta}(\mathbf{x}) (\eta^0)^{-1/2} = \eta(\mathbf{x})^{1/2} (\mathbf{1} + Y_\eta(\mathbf{x})) (\eta^0)^{-1/2}, \tag{6.14}$$

где $\widetilde{\eta}(\mathbf{x})$ — матрица (2.4). Положим $\widehat{\mathbf{c}}_j := (\eta^0)^{-1/2} \mathbf{e}_j$, $j = 1,2,3$. Пусть $\widehat{\Phi}_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} \eta(\mathbf{x}) (\nabla \widehat{\Phi}_j(\mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{c}}_j) = 0, \qquad \int_\Omega \widehat{\Phi}_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Пусть $\widehat{\mathbf{f}}_{lj}(\mathbf{x})$ (где $l, j = 1,2,3$) — Γ-периодическое решение задачи

$$\begin{aligned} &\eta(\mathbf{x})^{-1/2} \operatorname{rot} \mu(\mathbf{x})^{-1} \Big(\operatorname{rot} \eta(\mathbf{x})^{-1/2} \widehat{\mathbf{f}}_{lj}(\mathbf{x}) + i\mathbf{e}_l \times (\nabla \widehat{\Phi}_j(\mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{c}}_j) \Big) \\ &- \eta(\mathbf{x})^{1/2} \nabla \Big(\operatorname{div} \eta(\mathbf{x})^{1/2} \widehat{\mathbf{f}}_{lj}(\mathbf{x}) + i\mathbf{e}_l \cdot (\eta(\mathbf{x})(\nabla \widehat{\Phi}_j(\mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{c}}_j) \Big) = 0, \\ &\int_\Omega \widehat{\mathbf{f}}_{lj}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Пусть $\widehat{\Lambda}_l(\mathbf{x})$ (где $l = 1,2,3$) — Γ-периодическая (3×3)-матрица-функция со столбцами $\widehat{\mathbf{f}}_{lj}(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$. Аналогично (4.17) имеем

$$\|\widehat{\Lambda}_l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_{\widehat{\Lambda}} |\Omega|^{1/2}. \tag{6.15}$$

Для функций $\widehat{\mathbf{f}}_{lj}$ справедлив аналог замечания 4.3, откуда, в частности, (при учете (2.8)) следует оценка

$$\|\operatorname{rot} \eta^{-1/2} \widehat{\Lambda}_l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C'_{\widehat{\Lambda}} |\Omega|^{1/2}. \tag{6.16}$$

Постоянные $C_{\widehat{\Lambda}}$ и $C'_{\widehat{\Lambda}}$ зависят от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Пусть функции $\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0, \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon \in H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ введены в пунктах 6.2 и 6.3 соответственно. Пусть S_ε — оператор сглаживания по Стеклову (см. (1.1)).

Первое приближение $\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon$ к решению $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ уравнения (6.2) ищем в виде

$$\begin{aligned} &\widetilde{\boldsymbol{\vartheta}}_\varepsilon = (W_\eta^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon) + \varepsilon \sum_{l=1}^{3} \widehat{\Lambda}_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), \\ &\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon = \widetilde{\boldsymbol{\vartheta}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Следующее утверждение полностью аналогично лемме 4.4.

Лемма 6.2. *Выполнены соотношения* $\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, $\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, $\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O})$ *и оценки*

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon - (W_\eta^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_3\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ &\|(\mu^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon - (\mathbf{1}+Y_\mu^\varepsilon)(\mu^0)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathfrak{C}_4\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ &\|\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_5\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$, $\mathfrak{C}_5$ *зависят лишь от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ *и области* $\mathcal{O}$.

6.5. **Введение поправки типа пограничного слоя.** Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] := &((\mathbf{1}+Y_\mu^\varepsilon)(\mu^0)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ ((W_\eta^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} - i((\eta^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{q}, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Введем поправку типа пограничного слоя $\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon$ как вектор-функцию в области $\mathcal{O}$, удовлетворяющую условиям

$$\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\ \operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O}),\ \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \tag{6.19}$$

тождеству

$$\begin{aligned} &((\mu^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon, \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ (\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon, \operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{Q}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}],\ \forall \boldsymbol{\zeta} \in \operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon, \end{aligned} \tag{6.20}$$

и краевому условию

$$((\eta^\varepsilon)^{-1/2}\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = ((\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}}. \tag{6.21}$$

Напомним, что $\operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon$ определено в (6.3).

Лемма 6.3. *Пусть* $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ *— решение задачи* (6.1). *Пусть* $\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon$ *— первое приближение к решению, определенное в* (6.17). *Пусть* $\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon$ *— поправка, удовлетворяющая соотношениям* (6.19)–(6.21). *Положим* $\widehat{\mathbf{V}}_\varepsilon := \boldsymbol{\phi}_\varepsilon - \boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon + \widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon$. *Тогда* $\widehat{\mathbf{V}}_\varepsilon \in \operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon$ *и выполнена оценка*

$$\|\widehat{\mathbf{V}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\widehat{\mathbf{V}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\widehat{\mathbf{V}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_6\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_6$ *зависит лишь от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ *и области* $\mathcal{O}$.

Лемма 6.3 выводится из леммы 6.2 абсолютно аналогично доказательству леммы 4.5.

Лемма 6.3 показывает, что разность $\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon$ дает приближение к решению $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ в "энергетической" норме с погрешностью точного порядка $O(\varepsilon)$. Однако, контролировать поправку $\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon$ затруднительно. Мы оцениваем $\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon$ в "энергетической" норме.

Теорема 6.4. *Пусть $\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon$ удовлетворяет соотношениям* (6.19)–(6.21). *Пусть число ε_1 подчинено условию* 1.5. *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнена оценка*

$$\|\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\eta^\varepsilon)^{1/2}\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_7 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.22}$$

Постоянная $\mathfrak{C}_7$ зависит лишь от норм $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, параметров решетки Γ и области $\mathcal{O}$.

Доказательству теоремы 6.4 посвящен §7.

6.6. **Аппроксимация функции $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$.** Из леммы 6.3 и теоремы 6.4 выводится аппроксимация функции $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$. Доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 4.7.

Теорема 6.5. *Пусть $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ — решение задачи* (6.1). *Пусть число ε_1 подчинено условию* 1.5. *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнены оценки*

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon - (W_\eta^\varepsilon)^*(\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{v}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_8 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})},\\
&\|(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon - (\mathbf{1} + Y_\mu^\varepsilon)(\mu^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}(\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{v}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}\\
&\leqslant \mathfrak{C}_9 \varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_8$, $\mathfrak{C}_9$ зависят лишь от норм $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, параметров решетки Γ и области $\mathcal{O}$.

6.7. **Окончательный результат в случае $\mathbf{r} = 0$.** Выпишем выражения для полей с индексом $\mathbf{q}$ в терминах функции $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$, введенной в пункте 6.1:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \quad \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = (\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon,\\
&\mathbf{v}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = -(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \quad \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = -\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом, эффективные поля с индексом $\mathbf{q}$ связаны с функцией $\boldsymbol{\phi}_0$, введенной в пункте 6.2:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}_0^{(\mathbf{q})} = (\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_0, \quad \mathbf{w}_0^{(\mathbf{q})} = (\eta^0)^{1/2}\boldsymbol{\phi}_0,\\
&\mathbf{v}_0^{(\mathbf{q})} = -(\mu^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_0, \quad \mathbf{z}_0^{(\mathbf{q})} = -\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_0.
\end{aligned}$$

Поправочные поля с индексом $\mathbf{q}$ выражаются через $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ (см. пункт 6.3):

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = (\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon, \quad \widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = (\eta^0)^{1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon,\\
&\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = -(\mu^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon, \quad \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} = -\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Эти соотношения вместе с теоремой 6.5 непосредственно приводят к окончательному результату в случае $\mathbf{r}=0$.

Теорема 6.6. *Пусть* $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})},\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})$ *— решение системы* (2.2) *при* $\mathbf{r}=0$ *и* $\mathbf{u}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}=(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}$, $\mathbf{v}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}=(\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}$. *Пусть* $(\mathbf{w}_0^{(\mathbf{q})},\mathbf{z}_0^{(\mathbf{q})})$ *— решение эффективной системы* (2.11) *при* $\mathbf{r}=0$ *и* $\mathbf{u}_0^{(\mathbf{q})}=(\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0^{(\mathbf{q})}$, $\mathbf{v}_0^{(\mathbf{q})}=(\mu^0)^{-1}\mathbf{z}_0^{(\mathbf{q})}$. *Пусть* $(\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})},\widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})$ *— решение поправочной системы* (2.12) *при* $\mathbf{r}=0$, *а* $\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}=(\eta^0)^{-1}\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}$, $\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}=(\mu^0)^{-1}\widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}$. *Пусть* Y_η, G_η, Y_μ, G_μ *— периодические матрицы-функции, введенные в пункте* 2.2. *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 1.5. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}-(\mathbf{1}+Y_\eta^\varepsilon)(\mathbf{u}_0^{(\mathbf{q})}+\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_8\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}-(\mathbf{1}+G_\eta^\varepsilon)(\mathbf{w}_0^{(\mathbf{q})}+\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_8\|\eta\|_{L_\infty}^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{v}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}-(\mathbf{1}+Y_\mu^\varepsilon)(\mathbf{v}_0^{(\mathbf{q})}+\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_9\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}-(\mathbf{1}+G_\mu^\varepsilon)(\mathbf{z}_0^{(\mathbf{q})}+\widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_9\|\mu\|_{L_\infty}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Постоянные $\mathfrak{C}_8$, $\mathfrak{C}_9$ *зависят от норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ *и области* $\mathcal{O}$.

6.8. **Завершение доказательства основной теоремы.** Сопоставляя теоремы 4.8 и 6.6, непосредственно получаем утверждения теоремы 2.5. Постоянные в оценках (2.16)–(2.19) имеют вид

$$C_1=\max\{\mathcal{C}_9;\mathfrak{C}_8\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\};\quad C_2=\max\{\mathcal{C}_9\|\eta\|_{L_\infty};\mathfrak{C}_8\|\eta\|_{L_\infty}^{1/2}\};$$
$$C_3=\max\{\mathcal{C}_8\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2},\mathfrak{C}_9\};\quad C_4=\max\{\mathcal{C}_8\|\mu\|_{L_\infty}^{1/2};\mathfrak{C}_9\|\mu\|_{L_\infty}\}.$$

7. Оценка поправки $\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon$

Этот параграф посвящен доказательству теоремы 6.4.

7.1. **Отождествление** $\operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon$ **и** $\operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_0$**.** Ключевое значение для дальнейшего имеет следующая лемма, аналогичная лемме 5.1.

Лемма 7.1. *Существует линейный оператор* $\widehat{T}_\varepsilon:\operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon\to\operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_0$, *такой что для функции* $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon=\widehat{T}_\varepsilon\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\zeta}\in\operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon$, *выполнены равенства*

$$\operatorname{div}(\eta^0)^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon=\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta},\quad \operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon=\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta},\tag{7.1}$$

и оценки

$$\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_{10}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})},\tag{7.2}$$
$$\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_{11}\left(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\right).\tag{7.3}$$

Постоянная $\mathfrak{C}_{10}$ *зависит лишь от* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, *а* $\mathfrak{C}_{11}$ *зависит от тех же величин и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Рассмотрим две вспомогательных задачи.

Первая вспомогательная задача. Пусть $\boldsymbol{\zeta} \in \operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon$. Обозначим $\widehat{f}_\varepsilon := \operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta} \in L_2(\mathcal{O})$. Пусть $\widehat{\phi}_{\varepsilon,1} \in H^1_0(\mathcal{O})$ — обобщенное решение задачи Дирихле

$$\operatorname{div}\eta^0\nabla\widehat{\phi}_{\varepsilon,1}(\mathbf{x}) = \widehat{f}_\varepsilon(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathcal{O};\quad \widehat{\phi}_{\varepsilon,1}|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{7.4}$$

Решение удовлетворяет тождеству

$$\int_{\mathcal{O}}\langle\eta^0\nabla\widehat{\phi}_{\varepsilon,1},\nabla\omega\rangle\,d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}}\langle(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta},\nabla\omega\rangle\,d\mathbf{x},\quad \forall\omega\in H^1_0(\mathcal{O}). \tag{7.5}$$

Положим $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,1} = (\eta^0)^{1/2}\nabla\widehat{\phi}_{\varepsilon,1}$. Тогда выполнены соотношения

$$\operatorname{div}(\eta^0)^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,1} = \operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta},\ \operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,1} = 0,\ ((\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,1})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{7.6}$$

Краевое условие выполнено за счет того, что функция $\widehat{\phi}_{\varepsilon,1}$ обращается в ноль на границе $\partial\mathcal{O}$, а тогда и касательная составляющая ее градиента также обращается в ноль. Подставляя $\omega = \widehat{\phi}_{\varepsilon,1}$ в тождество (7.5), приходим к оценке

$$\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,1}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\eta\|^{1/2}_{L_\infty}\|\eta^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.7}$$

Условие гладкости границы ($\partial\mathcal{O}\in C^{1,1}$) обеспечивает свойство повышения гладкости решения задачи (7.4): выполнено включение $\widehat{\phi}_{\varepsilon,1}\in H^2(\mathcal{O})$ и оценка

$$\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,1}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}_1\|\widehat{f}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} = \widehat{c}_1\|\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.8}$$

Постоянная $\widehat{c}_1$ зависит лишь от норм $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$.

Вторая вспомогательная задача. Пусть $\boldsymbol{\zeta} \in \operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon$. Обозначим $\widehat{g}_\varepsilon := \operatorname{div}\eta^0(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\in H^{-1}(\mathcal{O})$. Пусть $\widehat{\phi}_{\varepsilon,2}\in H^1_0(\mathcal{O})$ — обобщенное решение задачи Дирихле

$$\operatorname{div}\eta^0\nabla\widehat{\phi}_{\varepsilon,2}(\mathbf{x}) = \widehat{g}_\varepsilon(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathcal{O};\quad \widehat{\phi}_{\varepsilon,2}|_{\partial\mathcal{O}} = 0.$$

Решение $\widehat{\phi}_{\varepsilon,2}$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\mathcal{O}}\langle\eta^0\nabla\widehat{\phi}_{\varepsilon,2},\nabla\omega\rangle\,d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}}\langle\eta^0(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta},\nabla\omega\rangle\,d\mathbf{x},\quad \forall\omega\in H^1_0(\mathcal{O}). \tag{7.9}$$

Положим $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,2} = (\eta^0)^{1/2}((\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} - \nabla\widehat{\phi}_{\varepsilon,2})$. Тогда выполнены равенства

$$\operatorname{div}(\eta^0)^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,2} = 0,\ \operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,2} = \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta},\ ((\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,2})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{7.10}$$

Подставляя $\omega = \widehat{\phi}_{\varepsilon,2}$ в тождество (7.9), приходим к оценке

$$\|(\eta^0)^{1/2}\nabla\widehat{\phi}_{\varepsilon,2}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\eta\|^{1/2}_{L_\infty}\|\eta^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.11}$$

Следовательно,

$$\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,2}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\|\eta\|^{1/2}_{L_\infty}\|\eta^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.12}$$

Из (7.10) и (7.12) следует, что $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,2} \in \operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_0 \subset H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, причем (см. (6.7))

$$\|\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,2}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}_2(\|\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}). \tag{7.13}$$

Постоянная $\widehat{c}_2$ зависит лишь от норм $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$.

Положим $\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon = \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,1} + \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_{\varepsilon,2}$. Тогда из (7.6) и (7.10) следует, что выполнены соотношения (7.1). Из (7.7) и (7.12) вытекает оценка (7.2) с постоянной $\mathfrak{C}_{10} = 3\|\eta\|^{1/2}_{L_\infty}\|\eta^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$. Наконец, (7.8) и (7.13) влекут неравенство (7.3) с постоянной $\mathfrak{C}_{11} = \max\{\widehat{c}_1, \widehat{c}_2\}$. $\square$

Замечание 7.2. *В условиях леммы* 7.1 *справедливо равенство*

$$(\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon - (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} = \nabla(\widehat{\phi}_{\varepsilon,1} - \widehat{\phi}_{\varepsilon,2}). \tag{7.14}$$

7.2. **Оценка функционала $\mathcal{Q}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]$.** Обозначим первое слагаемое в (6.18) через $\mathcal{T}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]$:

$$\mathcal{T}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = ((\mathbf{1} + Y^\varepsilon_\mu)(\mu^0)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \tag{7.15}$$

и представим его в виде суммы четырех членов:

$$\mathcal{T}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \sum_{l=1}^4 \mathcal{T}^{(l)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}], \quad \boldsymbol{\zeta} \in \operatorname{Dom}\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon, \tag{7.16}$$

где

$$\mathcal{T}^{(1)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = (Y^\varepsilon_\mu(\mu^0)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\mathcal{T}^{(2)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = ((\mu^0)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_0, \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.17}$$

$$\mathcal{T}^{(3)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = ((\mu^0)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon, \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.18}$$

$$\mathcal{T}^{(4)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = ((\mu^0)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.19}$$

Абсолютно аналогично доказательству леммы 5.3 проверяется оценка

$$|\mathcal{T}^{(1)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathfrak{C}_{12}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{7.20}$$

Член (7.19) оценивается по аналогии с (5.32):

$$|\mathcal{T}^{(4)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathfrak{C}_{13}\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.21}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_{12}$ и $\mathfrak{C}_{13}$ зависят от норм $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, области $\mathcal{O}$ и параметров решетки Γ.

Преобразуем теперь член (7.17), используя лемму 7.1 и тот факт, что $\boldsymbol{\phi}_0$ является обобщенным решением задачи (6.4). Имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{(2)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] &= ((\mu^0)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{\phi}_0, \operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}\\ &= -(\boldsymbol{\phi}_0, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + i((\eta^0)^{-1/2}\mathbf{q}, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{7.22}$$

Аналогичным образом преобразуем член (7.18):

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^{(3)}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] &= ((\mu^0)^{-1}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}\boldsymbol{v}_\varepsilon, \operatorname{rot}(\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}\\ &= -(\boldsymbol{v}_\varepsilon, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + i((\eta^0)^{-1/2}\mathbf{q}_\varepsilon, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{7.23}$$

Мы учли, что $\boldsymbol{v}_\varepsilon$ является обобщенным решением задачи (6.11).

Сопоставляя (6.18), (7.15), (7.16), (7.22) и (7.23), приходим к представлению

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] =& \mathcal{T}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\zeta}] + ((W_\eta^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &- (\boldsymbol{\phi}_0, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} - (\boldsymbol{v}_\varepsilon, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + i((\eta^0)^{-1/2}\mathbf{q}_\varepsilon, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ i(\mathbf{q}, (\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon - (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{7.24}$$

В силу (7.14) последнее слагаемое в (7.24) обращается в ноль:

$$(\mathbf{q}, (\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon - (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{q}, \nabla(\widehat{\phi}_{\varepsilon,1} - \widehat{\phi}_{\varepsilon,2}))_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \tag{7.25}$$

поскольку $\mathbf{q} \in J(\mathcal{O})$ и $\widehat{\phi}_{\varepsilon,1} - \widehat{\phi}_{\varepsilon,2} \in H_0^1(\mathcal{O})$ (см. (1.3)).

Из (6.14) следует, что третье слагаемое в (7.24) представляется в виде

$$\begin{aligned}&((W_\eta^\varepsilon)^* S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\widetilde{\eta}^\varepsilon(\eta^0)^{-1/2} S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= \mathcal{T}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}] + ((\eta^0)^{1/2}(\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{v}_\varepsilon), (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{7.26}$$

где

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] = ((\widetilde{\eta}^\varepsilon - \eta^0)(\eta^0)^{-1/2} S_\varepsilon(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.27}$$

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}] = ((\eta^0)^{1/2}(S_\varepsilon - I)(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.28}$$

Теперь из (7.24)–(7.26) следует представление

$$\begin{aligned}&\mathcal{Q}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \mathcal{T}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}] \\ &+ i((\eta^0)^{-1/2}\mathbf{q}_\varepsilon, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + ((\eta^0)^{1/2}(\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{v}_\varepsilon), (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} - (\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{7.29}$$

В силу (7.14) последнее слагаемое в (7.29) обращается в ноль:

$$\begin{aligned}&((\eta^0)^{1/2}(\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{v}_\varepsilon), (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta} - (\eta^0)^{-1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= ((\eta^0)^{1/2}(\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{v}_\varepsilon), \nabla(\widehat{\phi}_{\varepsilon,2} - \widehat{\phi}_{\varepsilon,1}))_{L_2(\mathcal{O})} = 0,\end{aligned} \tag{7.30}$$

поскольку $(\eta^0)^{1/2}(\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{v}_\varepsilon) \in J(\mathcal{O})$, а $\widehat{\phi}_{\varepsilon,2} - \widehat{\phi}_{\varepsilon,1} \in H_0^1(\mathcal{O})$.

Согласно (7.29) и (7.30),

$$\mathcal{Q}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \mathcal{T}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(4)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{T}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}], \tag{7.31}$$

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] := i((\eta^0)^{-1/2}\mathbf{q}_\varepsilon, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.32}$$

Следующие оценки для членов (7.27) и (7.28) получаются аналогично доказательству леммы 5.5 и оценки (5.66) соответственно:

$$\begin{aligned}&|\mathcal{T}_\varepsilon^{(5)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathfrak{C}_{14}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\times \Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,\end{aligned} \tag{7.33}$$

$$|\mathcal{T}_\varepsilon^{(6)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathfrak{C}_{15}\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.34}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_{14}$ и $\mathfrak{C}_{15}$ зависят от норм $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, области $\mathcal{O}$ и параметров решетки Γ.

Анализ члена (7.32) похож на рассмотрения пункта 5.5 (но есть некоторые отличия). Используя (2.13), запишем член (7.32) в виде

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] = i((\eta^0)^{-1/2}\mathcal{P}_{\eta^0} S_\varepsilon (Y_\eta^\varepsilon)^* \widetilde{\mathbf{q}}, \widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.35}$$

Замечание 7.3. *Пусть $\mathcal{P}_{\eta^0}$ — ортопроектор пространства $L_2(\mathcal{O};(\eta^0)^{-1})$ на $J(\mathcal{O})$. Нетрудно показать, что $\mathcal{P}_{\eta^0}\mathbf{f} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, если $\mathbf{f} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. При этом выполнена оценка*

$$\|\mathcal{P}_{\eta^0}\mathbf{f}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathfrak{c}}\|\mathbf{f}\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{7.36}$$

Постоянная $\widehat{\mathfrak{c}}$ зависит лишь от норм $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и области $\mathcal{O}$.

Учитывая самосопряженность оператора $\mathcal{P}_{\eta^0}$ в весовом пространстве $L_2(\mathcal{O};(\eta^0)^{-1})$, представим функционал (7.35) в виде

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] = i((\eta^0)^{-1} S_\varepsilon (Y_\eta^\varepsilon)^* \widetilde{\mathbf{q}}, \mathcal{P}_{\eta^0}(\eta^0)^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.37}$$

Пусть θ_ε — срезка, удовлетворяющая условиям (5.15). Запишем член (7.37) как сумму двух слагаемых:

$$\mathcal{T}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] = \widehat{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] + \widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}], \tag{7.38}$$

$$\widehat{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] := i((\eta^0)^{-1} S_\varepsilon (Y_\eta^\varepsilon)^* \widetilde{\mathbf{q}}, \theta_\varepsilon \mathcal{P}_{\eta^0}(\eta^0)^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.39}$$

$$\widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] := i((\eta^0)^{-1} S_\varepsilon (Y_\eta^\varepsilon)^* \widetilde{\mathbf{q}}, (1-\theta_\varepsilon) \mathcal{P}_{\eta^0}(\eta^0)^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.40}$$

Член (7.39) оценим с помощью предложения 1.2, (2.8) и леммы 1.6:

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \|\eta^{-1}\|_{L_\infty} \|S_\varepsilon (Y_\eta^\varepsilon)^* \widetilde{\mathbf{q}}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \|\mathcal{P}_{\eta^0}(\eta^0)^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon\|_{L_2(B_{2\varepsilon})} \\
&\leqslant \varepsilon^{1/2}\|\eta\|_{L_\infty}^{1/2}\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{3/2}\beta_0^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathcal{P}_{\eta^0}(\eta^0)^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.
\end{aligned}$$

Учитывая (7.3) и (7.36), приходим к оценке

$$\begin{aligned}
&|\widehat{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathfrak{C}_{16}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\times \Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,
\end{aligned} \tag{7.41}$$

где $\mathfrak{C}_{16} = \widehat{\mathfrak{c}}\|\eta\|_{L_\infty}\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{3/2}\beta_0^{1/2}\mathfrak{C}_{11}$.

Перейдем к рассмотрению члена (7.40). Функция $(1-\theta_\varepsilon)\mathcal{P}_{\eta^0}(\eta^0)^{1/2}\widehat{\boldsymbol{\zeta}}_\varepsilon$ принадлежит классу $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ и обращается в ноль в ε-окрестности границы $\partial\mathcal{O}$. Продолжим ее нулем на $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{O}$, продолженную функцию обозначим через $\widehat{\mathbf{p}}_\varepsilon$. Заметим, что $\widehat{\mathbf{p}}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, причем $\operatorname{supp}\widehat{\mathbf{p}}_\varepsilon \subset \mathcal{O}\setminus B_\varepsilon$. Перепишем член (7.40) в виде

$$\widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] := i(\mathbf{q}, Y_\eta^\varepsilon S_\varepsilon (\eta^0)^{-1}\widehat{\mathbf{p}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Столбцы матрицы Y_η^ε имеют вид $\varepsilon\nabla\Phi_j^\varepsilon$, $j=1,2,3$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}] =& i\varepsilon\sum_{j=1}^3(\mathbf{q},\nabla\left(\Phi_j^\varepsilon[S_\varepsilon(\eta^0)^{-1}\widehat{\mathbf{p}}_\varepsilon]_j\right))_{L_2(\mathcal{O})}\\ &- i\varepsilon\sum_{j=1}^3(\mathbf{q},\Phi_j^\varepsilon\nabla[S_\varepsilon(\eta^0)^{-1}\widehat{\mathbf{p}}_\varepsilon]_j)_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Первое слагаемое справа обращается в ноль, поскольку $\mathbf{q}\in J(\mathcal{O})$, а $\Phi_j^\varepsilon[S_\varepsilon(\eta^0)^{-1}\widehat{\mathbf{p}}_\varepsilon]_j\in H_0^1(\mathcal{O})$. (Здесь мы учитываем свойство сглаживающего оператора S_ε: функция $S_\varepsilon f$ равна нулю вне ε-окрестности носителя функции f). Далее, по аналогии с выводом неравенства (5.76) получаем

$$\begin{aligned}&|\widetilde{\mathcal{T}}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}]|\leqslant\mathfrak{C}_{17}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times\Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big),\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0.\end{aligned}\tag{7.42}$$

Постоянная $\mathfrak{C}_{17}$ зависит от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и области $\mathcal{O}$.

Теперь из (7.38), (7.41) и (7.42) следует, что

$$\begin{aligned}&|\mathcal{T}_\varepsilon^{(7)}[\boldsymbol{\zeta}]|\leqslant(\mathfrak{C}_{16}+\mathfrak{C}_{17})\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times\Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big),\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0.\end{aligned}\tag{7.43}$$

7.3. **Учет краевого условия. Завершение доказательства теоремы 6.4.** В итоге соотношения (7.20), (7.21), (7.31), (7.33), (7.34) и (7.43) дают оценку функционала (6.18):

$$\begin{aligned}&|\mathcal{Q}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]|\leqslant\mathfrak{C}^\circ\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times\Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\operatorname{div}(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big),\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\end{aligned}\tag{7.44}$$

где $\mathfrak{C}^\circ=\mathfrak{C}_{12}+\mathfrak{C}_{13}+\mathfrak{C}_{14}+\mathfrak{C}_{15}+\mathfrak{C}_{16}+\mathfrak{C}_{17}$.

Остается учесть краевое условие (6.21). В силу (6.17) имеем

$$\begin{aligned}(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon &= (\mathbf{1}+Y_\eta^\varepsilon)S_\varepsilon(\eta^0)^{-1/2}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon)\\ &+\varepsilon\sum_{l=1}^3(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\widehat{\Lambda}_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon)\\ &=(\eta^0)^{-1/2}(\boldsymbol{\phi}_0+\boldsymbol{v}_\varepsilon)+(S_\varepsilon-I)(\eta^0)^{-1/2}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon)\\ &+\varepsilon\sum_{l=1}^3(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\widehat{\Lambda}_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0+\widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon)\\ &+\varepsilon\sum_{j=1}^3\nabla\left(\Phi_j^\varepsilon S_\varepsilon b_{\varepsilon,j}\right)-\varepsilon\sum_{j=1}^3\Phi_j^\varepsilon S_\varepsilon\nabla b_{\varepsilon,j},\end{aligned}$$

где $b_{\varepsilon,j} = [(\eta^0)^{-1/2}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon)]_j$. Мы учли, что Y_η^ε — это матрица со столбцами $\varepsilon\nabla\Phi_j^\varepsilon$, $j = 1, 2, 3$. Первое слагаемое справа удовлетворяет однородному краевому условию $((\eta^0)^{-1/2}(\boldsymbol{\phi}_0 + \boldsymbol{v}_\varepsilon))_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0$. Поэтому выполнено

$$((\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\vartheta}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = (\mathbf{a}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}}, \tag{7.45}$$

где

$$\mathbf{a}_\varepsilon = \sum_{k=1}^{4} \mathbf{a}_\varepsilon^{(k)}, \tag{7.46}$$

$$\mathbf{a}_\varepsilon^{(1)} = (S_\varepsilon - I)(\eta^0)^{-1/2}(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon), \tag{7.47}$$

$$\mathbf{a}_\varepsilon^{(2)} = \varepsilon\theta_\varepsilon \sum_{l=1}^{3} (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\widehat{\Lambda}_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l(\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon) \tag{7.48}$$

$$\mathbf{a}_\varepsilon^{(3)} = \varepsilon \sum_{j=1}^{3} \nabla\left(\theta_\varepsilon \Phi_j^\varepsilon S_\varepsilon b_{\varepsilon,j}\right), \tag{7.49}$$

$$\mathbf{a}_\varepsilon^{(4)} = -\varepsilon\theta_\varepsilon \sum_{j=1}^{3} \Phi_j^\varepsilon S_\varepsilon \nabla b_{\varepsilon,j}. \tag{7.50}$$

Здесь θ_ε — срезка, удовлетворяющая условиям (5.15).

Лемма 7.4. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{a}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{18}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.51}$$

$$\|\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{19}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.52}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_{18}$ *и* $\mathfrak{C}_{19}$ *зависят от* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ *и области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Член (7.47) оценивается с помощью предложения 1.1 и (6.10), (6.13):

$$\|\mathbf{a}_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon r_1 \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \|\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{18}^{(1)}\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.53}$$

где $\mathfrak{C}_{18}^{(1)} = r_1\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2)$. Член (7.48) оценивается на основании предложения 1.2 и соотношений (6.10), (6.13), (6.15):

$$\|\mathbf{a}_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} C_{\widehat{\Lambda}}\sqrt{3}\|\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{18}^{(2)}\varepsilon\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.54}$$

где $\mathfrak{C}_{18}^{(2)} = \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} C_{\widehat{\Lambda}}\sqrt{3}(\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2)$.

Член (7.49) рассматривается по аналогии с выводом оценки (5.29). Имеем:

$$\varepsilon\nabla\left(\theta_\varepsilon\Phi_j^\varepsilon S_\varepsilon b_{\varepsilon,j}\right) = (\varepsilon\nabla\theta_\varepsilon)\Phi_j^\varepsilon S_\varepsilon b_{\varepsilon,j} + \theta_\varepsilon(\nabla\Phi_j)^\varepsilon S_\varepsilon b_{\varepsilon,j} + \varepsilon\theta_\varepsilon\Phi_j^\varepsilon S_\varepsilon\nabla b_{\varepsilon,j}.$$

Первое слагаемое оценивается с помощью (5.15), леммы 1.7 и (2.9). Второе — с помощью (5.15), леммы 1.7 и (2.8). Третье слагаемое оценивается за счет предложения 1.2 и (2.9). Кроме того, каждый раз мы учитываем неравенства (6.10), (6.13). Эти соображения приводят к оценке

$$\|\mathbf{a}_\varepsilon^{(3)}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{18}^{(3)} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{7.55}$$

где постоянная $\mathfrak{C}_{18}^{(3)}$ зависит от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, параметров решетки Γ и области $\mathcal{O}$.

Член (7.50) оценивается на основании предложения 1.2 и (2.9), (6.10), (6.13):

$$\|\mathbf{a}_\varepsilon^{(4)}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon (2r_0)^{-1} \|\eta\|_{L_\infty}^{1/2} \|\eta^{-1}\|_{L_\infty} \sqrt{3} \|\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{18}^{(4)} \varepsilon \|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.56}$$

где $\mathfrak{C}_{18}^{(4)} = (2r_0)^{-1} \|\eta\|_{L_\infty}^{1/2} \|\eta^{-1}\|_{L_\infty} \sqrt{3} (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2)$.

Теперь из (7.46), (7.53)–(7.56) вытекает искомая оценка (7.51) с постоянной $\mathfrak{C}_{18} = \sum_{k=1}^4 \mathfrak{C}_{18}^{(k)}$.

Рассмотрим ротор функции (7.46):

$$\operatorname{rot} \mathbf{a}_\varepsilon = \operatorname{rot} \mathbf{a}_\varepsilon^{(1)} + \operatorname{rot} \mathbf{a}_\varepsilon^{(2)} + \operatorname{rot} \mathbf{a}_\varepsilon^{(4)}. \tag{7.57}$$

Мы учли, что ротор функции (7.49), очевидно, равен нулю. Первое слагаемое оценим с помощью предложения 1.1 и (6.10), (6.13):

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{a}_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon r_1 \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \|\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_{19}^{(1)} \varepsilon \|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.58}$$

где $\mathfrak{C}_{19}^{(1)} = r_1 \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} (\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{C}_2)$.

Далее, имеем:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a}_\varepsilon^{(2)} = & \sum_{l=1}^3 (\varepsilon \nabla \theta_\varepsilon) \times \Big((\eta^\varepsilon)^{-1/2} \widehat{\Lambda}_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l (\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon) \Big) \\ & + \theta_\varepsilon \sum_{l=1}^3 [\operatorname{rot} \eta^{-1/2} \widehat{\Lambda}_l]^\varepsilon S_\varepsilon D_l (\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon) \\ & + \varepsilon\, \theta_\varepsilon \sum_{l,j=1}^3 b_j (\eta^\varepsilon)^{-1/2} \widehat{\Lambda}_l^\varepsilon S_\varepsilon D_l D_j (\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{v}}_\varepsilon). \end{aligned}$$

Первое слагаемое оценивается с помощью (5.15), леммы 1.7 и (6.15). Второе слагаемое — с помощью (5.15), леммы 1.7 и (6.16). Оценка третьего слагаемого получается на основании предложения 1.2 и (6.15). Кроме того, каждый раз используются неравенства (6.10), (6.13). Эти соображения приводят к оценке

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{a}_\varepsilon^{(2)}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{19}^{(2)} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{7.59}$$

где постоянная $\mathfrak{C}_{19}^{(2)}$ зависит от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, параметров решетки Γ и области $\mathcal{O}$.

Рассмотрим теперь ротор функции (7.50):

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_\varepsilon^{(4)} = -\sum_{j=1}^{3}(\varepsilon\nabla\theta_\varepsilon)\times(\Phi_j^\varepsilon S_\varepsilon \nabla b_{\varepsilon,j}) - \theta_\varepsilon \sum_{j=1}^{3}(\nabla\Phi_j)^\varepsilon \times (S_\varepsilon\nabla b_{\varepsilon,j}).$$

Первое слагаемое оценивается с помощью (5.15), леммы 1.7 и (2.9). Оценка для второго слагаемого получается на основании (5.15), леммы 1.7 и (2.8). Мы также учитываем (6.10) и (6.13). Это влечет оценку

$$\|\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_\varepsilon^{(4)}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{19}^{(4)}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \tag{7.60}$$

где постоянная $\mathfrak{C}_{19}^{(4)}$ зависит от $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mu\|_{L_\infty}$, $\|\mu^{-1}\|_{L_\infty}$, параметров решетки Γ и области $\mathcal{O}$.

В итоге соотношения (7.57)–(7.60) приводят к искомому неравенству (7.52) с постоянной $\mathfrak{C}_{19} = \mathfrak{C}_{19}^{(1)} + \mathfrak{C}_{19}^{(2)} + \mathfrak{C}_{19}^{(4)}$. $\square$

Пусть вектор-функция $\mathbf{h}_\varepsilon$ является решением задачи

$$\begin{gathered}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{h}_\varepsilon = \mathrm{rot}\,\mathbf{a}_\varepsilon, \quad \mathrm{div}\,(\eta^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{h}_\varepsilon = 0,\\ ((\eta^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{h}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = (\mathbf{a}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}}.\end{gathered} \tag{7.61}$$

Ищем решение в виде $\mathbf{h}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1/2}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon$, где $\mathrm{div}\,\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon = 0$. Тогда $\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ удовлетворяет тождеству

$$\int_{\mathcal{O}}\langle(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon, \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\rangle\,d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}}\langle\mathbf{a}_\varepsilon, \mathrm{rot}\,\mathbf{F}\rangle\,d\mathbf{x}, \quad \forall\mathbf{F}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3).$$

Подставляя $\mathbf{F} = \boldsymbol{\Upsilon}_\varepsilon$ и учитывая (7.51), получаем оценку

$$\|\mathbf{h}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\eta\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mathbf{a}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{20}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.62}$$

где $\mathfrak{C}_{20} = \mathfrak{C}_{18}\|\eta\|_{L_\infty}^{1/2}$.

Теперь из (6.19)–(6.21), (7.45) и (7.61) видно, что $\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon - \mathbf{h}_\varepsilon \in \mathrm{Dom}\,\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon$ и выполнено тождество

$$\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon[\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon - \mathbf{h}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}] + (\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon - \mathbf{h}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = \widetilde{\mathcal{Q}}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}], \quad \forall\boldsymbol{\zeta}\in\mathrm{Dom}\,\widehat{\mathfrak{l}}_\varepsilon, \tag{7.63}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \mathcal{Q}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] - ((\mu^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{a}_\varepsilon, \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\mathbf{h}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В силу (7.44), (7.52) и (7.62) справедлива оценка

$$\begin{aligned}&|\widetilde{\mathcal{Q}}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}^\circ\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times\Big(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\eta^\varepsilon)^{1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\Big)\end{aligned} \tag{7.64}$$

при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$, где $\widetilde{\mathfrak{C}}^\circ = \mathfrak{C}^\circ + \mathfrak{C}_{20} + \|\mu^{-1}\|_{L_\infty}\mathfrak{C}_{19}$. Подставляя $\boldsymbol{\zeta} = \widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon - \mathbf{h}_\varepsilon$ в (7.63) и используя (7.64), получаем

$$\begin{aligned}&\|\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon - \mathbf{h}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathrm{div}\,(\eta^\varepsilon)^{1/2}(\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon - \mathbf{h}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ \|\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1/2}(\widehat{\mathbf{s}}_\varepsilon - \mathbf{h}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_7'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathcal{O})}\end{aligned} \tag{7.65}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, где $\mathfrak{C}_7' = 3\max\{1, \|\mu\|_{L_\infty}\}\widetilde{\mathfrak{C}}^\circ$.

Сопоставляя (7.52), (7.61), (7.62) и (7.65), приходим к искомому неравенству (6.22) с постоянной $\mathfrak{C}_7 = \mathfrak{C}_7' + \mathfrak{C}_{19} + \mathfrak{C}_{20}$. Это *завершает доказательство теоремы* 6.4.

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLPap] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publ. Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BS1] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях*, Успехи мат. наук **42** (1987), вып. 6, 61–76.

[BS2] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Самосопряженный оператор Максвелла в произвольных областях*, Алгебра и анализ **1** (1989), вып. 1, 96–110.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в случае постоянной магнитной проницаемости*, Функц. анал. и его прил. **41** (2007), вып. 2, 3–23.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[Zh] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.

[ZhPas2] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи мат. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[LaUr] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

[McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.

[Sa] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

[Su1] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла*, Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 5, 162–244.

[Su2] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла с учетом корректора*, Алгебра и анализ **19** (2007), вып. 3, 183–235.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463–476.

[Su4] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453–3493.

[Su5] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), вып. 4, 87–166.

[Su6] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в ограниченной области в случае постоянной магнитной проницаемости*, Алгебра и анализ **30** (2018), вып. 3, 169–209.

[F] Филонов Н. Д., *Главные особенности магнитной составляющей поля в резонаторах с границей заданного класса гладкости*, Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 2, 241–255.