ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 4/2018

УСРЕДНЕНИЕ СТАЦИОНАРНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ В СЛУЧАЕ ПОСТОЯННОЙ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: t.suslina@spbu.ru

Светлой памяти Михаила Захаровича Соломяка

АННОТАЦИЯ

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В области $\mathcal{O}$ рассматривается стационарная система Максвелла при условиях идеальной проводимости на границе. Предполагается, что магнитная проницаемость задана постоянной положительной (3×3)-матрицей μ_0, а диэлектрическая проницамость имеет вид $\eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\eta(\mathbf{x})$ — вещественная $(3{\times}3)$-матрица-функция, периодическая относительно некоторой решетки, ограниченная и положительно определенная. Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Считается, что одно из уравнений системы Максвелла (то, которое содержит ротор магнитной напряженности) однородно, а правая часть $\mathbf{r}$ второго уравнения — соленоидальная вектор-функция класса L_2. Известно, что при $\varepsilon \to 0$ решения системы Максвелла — электрическая напряженность $\mathbf{u}_\varepsilon$, электрическая индукция $\mathbf{w}_\varepsilon$, магнитная напряженность $\mathbf{v}_\varepsilon$ и магнитная индукция $\mathbf{z}_\varepsilon$ слабо сходятся в L_2 к соответствующим усредненным полям $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{z}_0$ (решениям усредненной системы Максвелла с эффективными коэффициентами). Мы усиливаем классические результаты. Показано, что поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ сходятся к $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{z}_0$ соответственно по норме в L_2, причем погрешности оцениваются через $C\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2}$ (порядок точный). Для полей $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ получены также аппроксимации по энергетической норме с погрешностями вида $C\sqrt{\varepsilon}\|\mathbf{r}\|_{L_2}$. Для $\mathbf{u}_\varepsilon$ и $\mathbf{w}_\varepsilon$ найдены аппроксимации по норме в L_2 с погрешностями $C\sqrt{\varepsilon}\|\mathbf{r}\|_{L_2}$.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, оператор Максвелла, усреднение, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 17-11-01069).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов. Литература по теории усреднения обширна; мы ограничимся упоминанием монографий [BeLPap, BaPa, Sa, ZhKO].

0.1 Операторные оценки погрешности

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

В серии статей [BSu1, BSu2, BSu3] Бирмана и Суслиной был предложен и развит теоретико-операторный подход к теории усреднения. Изучался широкий класс матричных сильно эллиптических операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ второго порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{0.1}$$

Здесь матрица-функция $g(\mathbf{x})$ ограничена, положительно определена и периодична относительно решетки Γ, а $b(\mathbf{D})$ — матричный оператор первого порядка вида $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$, причем его символ имеет максимальный ранг. Простейший пример оператора (0.1) — это скалярный эллиптический оператор $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$ (оператор акустики). Оператор упругости также допускает запись в виде (0.1). В электродинамике возникает вспомогательный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon = \operatorname{rot} a^\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{rot} - \nabla \nu^\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{div}$, который можно записать в форме (0.1).

В [BSu1] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной матрицей.* Справедлива оценка погрешности

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

В [BSu3] была найдена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.3}$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon)$ — так называемый *корректор.* Он содержит быстро осциллирующий множитель, а потому зависит от ε; при этом $\|\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$.

Оценки (0.2), (0.3) точны по порядку. Результаты такого типа получили название *операторных оценок погрешности* в теории усреднения. Другой подход к операторным оценкам погрешности — модифицированный метод первого приближения или метод сдвига — был предложен Жиковым. В работах

[Zh, ZhPas1] этим методом оценки (0.2), (0.3) были установлены для операторов акустики и упругости. Дальнейшие результаты обсуждаются в недавнем обзоре [ZhPas2].

Операторные оценки погрешности изучались также и для краевых задач в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с достаточно гладкой границей; см. [ZhPas1, ZhPas2, Gr1, Gr2, KeLiS, PSu, Su3, Su4, Su5]. Пусть $A_{D,\varepsilon}$ и $A_{N,\varepsilon}$ — операторы в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, заданные выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ при условиях Дирихле либо Неймана на границе. Пусть A_D^0 и A_N^0 — соответствующие эффективные операторы. Справедливы оценки

$$\|(A_{\flat,\varepsilon}+I)^{-1} - (A_\flat^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon, \tag{0.4}$$

$$\|(A_{\flat,\varepsilon}+I)^{-1} - (A_\flat^0+I)^{-1} - \varepsilon K_\flat(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \tag{0.5}$$

Здесь $\flat = D, N$, а $K_\flat(\varepsilon)$ — соответствующий корректор. Оценка (0.4) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$ (такой же, как для задачи в $\mathbb{R}^d$). Порядок оценки (0.5) хуже по сравнению с (0.3); это объясняется влиянием границы области.

В [ZhPas1] с помощью метода сдвига для операторов акустики и упругости была получена оценка (0.5) и аналог оценки (0.4), но с погрешностью $O(\sqrt{\varepsilon})$. Аналогичные результаты независимо были установлены Гризо [Gr1, Gr2] для оператора акустики с помощью метода анфолдинга. Оценка точного порядка (0.4) впервые была получена в [Gr2]. Случай матричных эллиптических операторов изучался в [KeLiS] (где рассматривались равномерно эллиптические операторы при некоторых условиях регулярности коэффициентов) и в работах [PSu, Su3, Su4, Su5] (где были получены оценки (0.4), (0.5) для описанного выше класса сильно эллиптических операторов).

0.2 Усреднение системы Максвелла в $\mathbb{R}^3$

Обсудим теперь задачу об усреднении стационарной системы Максвелла в $\mathbb{R}^3$.

Предположим, что диэлектрическая и магнитная проницаемости заданы матрицами-функциями $\eta^\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mu^\varepsilon(\mathbf{x})$, где $\eta(\mathbf{x})$ и $\mu(\mathbf{x})$ ограничены, положительно определены и периодичны относительно решетки Γ. Через $J(\mathbb{R}^3)$ обозначим подпространство вектор-функций $\mathbf{f} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, для которых $\operatorname{div}\mathbf{f} = 0$ (в смысле распределений). Через $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$ обозначим напряженности электрического и магнитного полей; $\mathbf{w}_\varepsilon = \eta^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon = \mu^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon$ — векторы электрической и магнитной индукций. Оператор Максвелла $\mathcal{M}_\varepsilon$ мы записываем в терминах индукций, считая поля $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ соленоидальными. Тогда оператор $\mathcal{M}_\varepsilon$ действует в пространстве $J(\mathbb{R}^3) \oplus J(\mathbb{R}^3)$ и задается выражением

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & i\operatorname{rot}(\mu^\varepsilon)^{-1} \\ -i\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

на естественной области определения. Оператор $\mathcal{M}_\varepsilon$ самосопряжен, если рассматривать $J(\mathbb{R}^3) \oplus J(\mathbb{R}^3)$ как подпространство в весовом пространстве $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3; (\eta^\varepsilon)^{-1}) \oplus L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3; (\mu^\varepsilon)^{-1})$. Точка $\lambda = i$ является регулярной точкой для оператора $\mathcal{M}_\varepsilon$.

Обсудим задачу о поведении резольвенты $(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)^{-1}$ при малом ε. Иначе говоря, нас интересует поведение решений $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ системы Максвелла

$$(\mathcal{M}_\varepsilon - iI) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}, \mathbf{r} \in J(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3), \tag{0.6}$$

а также поведение полей $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$.

Усредненный оператор Максвелла $\mathcal{M}^0$ имеет коэффициенты η^0, μ^0; хорошо известно, что эффективные матрицы η^0 и μ^0 — такие же, как для скалярных эллиптических операторов $-\operatorname{div} \eta^\varepsilon \nabla$ и $-\operatorname{div} \mu^\varepsilon \nabla$. Пусть $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ — решение усредненной системы Максвелла

$$(\mathcal{M}^0 - iI) \begin{pmatrix} \mathbf{w}_0 \\ \mathbf{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix},$$

и $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0 = (\mu^0)^{-1}\mathbf{z}_0$. Из классических результатов (см., например, [BeLPap, BaPa, Sa, ZhKO]) известно, что при $\varepsilon \to 0$ вектор-функции $\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{v}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon$ *слабо сходятся* в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ к соответствующим усредненным полям $\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{z}_0$.

Операторные оценки погрешности для системы Максвелла (0.6) изучались в работах [BSu1, глава 7], [BSu2, §14], [BSu3, §22], [Su1], [BSu4] и [Su2]. В [BSu1, BSu2, BSu3] рассматривался случай $\mu = \mathbf{1}$ и были получены аппроксимации не для всех физических полей; в [Su1] рассматривался общий случай, но аппроксимации были найдены не для всех полей; в [BSu4] задача была полностью решена в случае постоянной магнитной проницаемости; наконец, в [Su2] задача была полностью решена в общем случае. Метод состоял в редукции к задаче усреднения для вспомогательного уравнения второго порядка. Решение системы (0.6) можно записать в виде $\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} + \mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$, $\mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$, где $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{q})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{q})})$ — решение системы при $\mathbf{r} = 0$, а $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})$ — решение системы при $\mathbf{q} = 0$. Рассмотрим для примера $(\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}, \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})})$. Первое уравнение $\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = \operatorname{rot} (\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ подставим во второе и придем к следующей задаче для поля $\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$:

$$\operatorname{rot} (\eta^\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} (\mu^\varepsilon)^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} + \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = i\mathbf{r}, \quad \operatorname{div} \mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = 0.$$

После замены $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{z}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ и снятия условия соленоидальности, получаем, что $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ является решением эллиптического уравнения второго порядка

$$\mathcal{L}_\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} + \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = i(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathbf{r}, \tag{0.7}$$

где

$$\mathcal{L}_\varepsilon = (\mu^\varepsilon)^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2} - (\mu^\varepsilon)^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,(\mu^\varepsilon)^{1/2}. \tag{0.8}$$

При этом поле $\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$ выражается через производные решения: $\mathbf{w}_\varepsilon^{(\mathbf{r})} = \mathrm{rot}\,(\mu^\varepsilon)^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon^{(\mathbf{r})}$.

В случае постоянного μ оператор (0.8) относится к классу операторов (0.1), что позволяет применить к уравнению (0.7) общие результаты работ [BSu1, BSu2, BSu3]. В случае переменного μ это уже не так, однако удается воспользоваться результатами абстрактной схемы из [BSu1, BSu2, BSu3] для изучения оператора (0.8); это было проделано в [Su1, Su2]. Итогом этих рассмотрений явилась аппроксимация резольвенты $(\mathcal{M}_\varepsilon - iI)^{-1}$. В отличие от резольвенты оператора (0.1) эта резольвента не имеет предела по операторной норме, но для нее можно указать аппроксимацию через сумму резольвенты $(\mathcal{M}^0 - iI)^{-1}$ и некоторого корректора нулевого порядка (слабо сходящегося к нулю); оценка погрешности имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. В терминах решений это влечет аппроксимации для всех физических полей по норме в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ с оценками погрешностей порядка $O(\varepsilon)$. К примеру, выпишем результат для $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C\varepsilon(\|\mathbf{q}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}).$$

Здесь поправка $\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}$ интерпретируется как корректор нулевого порядка; она выражается через $\mathbf{u}_0$, решение некоторой „поправочной“ системы Максвелла и некоторый быстро осциллирующий множитель. При этом слабый предел поправки $\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}$ равен нулю.

0.3 Постановка задачи. Основные результаты

В настоящей работе изучается усреднение стационарной системы Максвелла в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ с границей класса $C^{1,1}$. Мы опираемся на общую теорию оператора Максвелла в произвольных областях, развитую в работах [BS1, BS2] Бирмана и Соломяка.

Предположим, что магнитная проницаемость задана постоянной положительной матрицей μ_0, а диэлектрическая проницаемость — быстро осциллирующей матрицей $\eta^\varepsilon(\mathbf{x})$. На границе ставятся условия идеальной проводимости. Для физических полей используются те же обозначения, что и выше в п. 0.2. Оператор Максвелла M_ε, записанный в терминах индукций, действует в пространстве $J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O})$, где $J(\mathcal{O})$ и $J_0(\mathcal{O})$ — соленоидальные подпространства

в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, определенные ниже в (5.1), (5.2). Оператор M_ε задается выражением
$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & i\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1} \\ -i\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$
на естественной области определения, учитывающей краевые условия (см. (5.4) ниже). Оператор M_ε самосопряжен, если рассматривать $J(\mathcal{O})\oplus J_0(\mathcal{O})$ как подпространство в весовом пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;(\eta^\varepsilon)^{-1})\oplus L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;\mu_0^{-1})$.

Мы изучаем резольвенту $(M_\varepsilon - iI)^{-1}$. Иными словами, нас интересует поведение решений $(\mathbf{w}_\varepsilon,\mathbf{z}_\varepsilon)$ системы Максвелла
$$(M_\varepsilon - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_\varepsilon\\ \mathbf{z}_\varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{r}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}\in J(\mathcal{O}),\ \mathbf{r}\in J_0(\mathcal{O}), \tag{0.9}$$
а также поведение полей $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$.

Пусть M^0 — усредненный оператор Максвелла с коэффициентами η^0, μ_0. Усредненная система Максвелла имеет вид
$$(M^0 - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_0\\ \mathbf{z}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{r}\end{pmatrix}.$$
Положим $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0 = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_0$. Как и в случае задачи в $\mathbb{R}^3$, классические результаты (см. [BeLPap, BaPa, Sa, ZhKO]) дают слабую сходимость в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ вектор-функций $\mathbf{u}_\varepsilon,\mathbf{w}_\varepsilon,\mathbf{v}_\varepsilon,\mathbf{z}_\varepsilon$ к соответствующим усредненным полям $\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_0,\mathbf{v}_0,\mathbf{z}_0$.

Мы усиливаем классические результаты в случае $\mathbf{q}=0$. Опишем наши основные результаты. При $\mathbf{q}=0$ поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ сходятся по норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ к $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{z}_0$, причем имеют место оценки погрешностей точного порядка:
$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$
Помимо этого, мы находим аппроксимации для $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ по норме в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$:
$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0 - \varepsilon\mathbf{z}_\varepsilon^{(1)}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$
Здесь корректоры $\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}$ и $\mathbf{z}_\varepsilon^{(1)}$ содержат быстро осциллирующие множители, их нормы в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$. Наконец, мы получаем аппроксимации для полей $\mathbf{u}_\varepsilon$ и $\mathbf{w}_\varepsilon$ по норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$:
$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}_0 - \mathbf{w}_\varepsilon^{(1)}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Поправки $\mathbf{u}_\varepsilon^{(1)}$ и $\mathbf{w}_\varepsilon^{(1)}$ могут быть интерпретированы как корректоры нулевого порядка, их слабый предел равен нулю.

Случай системы (0.9) при $\mathbf{r} = 0$ сложнее и не рассматривается в настоящей работе.

0.4 Метод

Как и в случае задачи в $\mathbb{R}^3$, метод исследования основан на редукции к изучению вспомогательного оператора L_ε второго порядка. Сначала мы изучаем усреднение этого оператора, а потом уже извлекаем результаты для системы Максвелла.

Оператор L_ε действует в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ и формально задается выражением

$$L_\varepsilon = \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2}\nabla\nu^\varepsilon(\mathbf{x})\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2} \tag{0.10}$$

при граничных условиях

$$(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}))_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{0.11}$$

Строгое определение оператора L_ε дается через квадратичную форму. Для применения к системе Максвелла было бы достаточно считать $\nu(\mathbf{x}) = 1$, но для большей общности мы изучаем оператор (0.10) с переменным коэффициентом $\nu^\varepsilon(\mathbf{x})$. Оператор L_ε допускает запись в факторизованном виде $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, однако прямая ссылка на результаты работ [PSu, Su3, Su4] невозможна, поскольку в этих работах изучались случаи краевых условий Дирихле либо Неймана, а в рассматриваемом сейчас случае краевые условия (0.11) имеют смешанный тип. Поэтому нам необходимо установить аналоги оценок (0.4), (0.5) для резольвенты оператора L_ε.

Метод получения таких оценок основан на рассмотрении ассоциированной задачи в $\mathbb{R}^3$, использовании готовых результатов в $\mathbb{R}^3$, введении поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ типа пограничного слоя и на тщательном анализе этой поправки. Существенную роль играют использование сглаживания по Стеклову (первоначально заимствованного из [Zh, ZhPas1]), оценки в ε-окрестности границы и соображения двойственности.

0.5 План статьи

Работа содержит пять параграфов. В §1 рассматривается модельный оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$; построен эффективный оператор и приведены известные результаты об аппроксимации резольвенты $(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1}$. В §2 вводится модельный оператор L_ε в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, описывается эффективный оператор и приводятся вспомогательные утверждения (об оценках в ε-окрестности границы). В §3 сформулированы основные результаты об аппроксимации резольвенты $(L_\varepsilon + I)^{-1}$ и проведены первые два этапа доказательств: рассмотрена ассоциированная задача в $\mathbb{R}^3$, введена поправка $\mathbf{s}_\varepsilon$ типа пограничного слоя, доказательство основных теорем сведено к получению оценок норм поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ в пространствах $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ и $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. В §4 получены требуемые оценки норм поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ и завершено доказательство теорем из §3. §5 посвящен усреднению стационарной системы Максвелла при $\mathbf{q} = 0$. Проведена редукция задачи к вопросу о поведении резольвенты оператора L_ε. Получен итоговый результат об аппроксимации решений системы Максвелла (теорема 5.3).

0.6 Обозначения

Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{H}$ и $\|\cdot\|_\mathfrak{H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ – единичная $(n \times n)$-матрица. Если a — $(n \times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как линейного оператора в $\mathbb{C}^n$. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, 2, 3$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, D_2, D_3)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций. Различные оценочные постоянные обозначаются символами c, C, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками).

0.7

Более общей задаче об усреднении стационарной системы Максвелла в ограниченной области в случае, когда обе проницаемости заданы быстро осциллирующими периодическими матрицами-функциями, автор планирует посвятить отдельную статью. Задача (0.9) при $\mathbf{r} = 0$ (оставшаяся не рассмотренной в настоящей работе) окажется частным случаем этой общей задачи.

Автор выражает благодарность Н. Д. Филонову за консультацию по поводу свойств оператора Максвелла и полезные замечания.

1 Модельный оператор второго порядка в $\mathbb{R}^3$

1.1 Решетка

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, т. е.,

$$\Gamma = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{a} = z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 + z_3\mathbf{a}_3, \ z_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Через $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ обозначим элементарную ячейку решетки Γ:

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \ \mathbf{x} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + t_3\mathbf{a}_3, \ -1/2 < t_j < 1/2\}.$$

Для Γ-периодических функций $f(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^3$ будем пользоваться обозначением $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$. Для квадратных периодических матриц-функций $f(\mathbf{x})$ обозначаем

$$\overline{f} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{f} := \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega f(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x}\right)^{-1}.$$

При определении $\overline{f}$ считается, что $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, а при определении $\underline{f}$ предполагается, что матрица $f(\mathbf{x})$ неособая и $f^{-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Через $\widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^3$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^n)$.

1.2 Сглаживание по Стеклову

Нам понадобится оператор $S_\varepsilon^{(k)}$, $\varepsilon > 0$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^k)$ (где $k \in \mathbb{N}$) по правилу

$$(S_\varepsilon^{(k)}\mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^k), \tag{1.1}$$

называемый *сглаживающим оператором по Стеклову*. Мы опускаем индекс k и пишем просто S_ε. Очевидно, $S_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^\sigma(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^k)$ и любом мультииндексе α, таком что $|\alpha| \leqslant \sigma$. Заметим, что

$$\|S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant 1. \tag{1.2}$$

Нам понадобятся следующие свойства оператора S_ε (см. [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] и [PSu, предложения 3.1 и 3.2]).

Предложение 1.1. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^k)$ *выполнено*

$$\|S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)},$$

где $2r_1 = \operatorname{diam} \Omega$.

Предложение 1.2. *Пусть f — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^3$, причем $f \in L_2(\Omega)$. Пусть $[f^\varepsilon]$ — оператор умножения на функцию $f^\varepsilon(\mathbf{x})$. Тогда оператор $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^3)$ и справедлива оценка*

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

1.3 Определение оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$

Пусть μ_0 — симметричная положительная (3×3)-матрица с вещественными элементами. Пусть симметричная (3×3)-матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ с вещественными элементами и вещественная функция $\nu(\mathbf{x})$ периодичны относительно решетки Γ, причем

$$\eta, \eta^{-1} \in L_\infty, \quad \eta(\mathbf{x}) > 0; \quad \nu, \nu^{-1} \in L_\infty, \quad \nu(\mathbf{x}) > 0. \tag{1.3}$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2}\nabla\nu^\varepsilon(\mathbf{x})\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}. \tag{1.4}$$

Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ принадлежит классу операторов, представимых в факторизованном виде (0.1), т. е., $\mathcal{L}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Этот класс изучался в работах [BSu1, BSu2, BSu3]. В нашем случае $g(\mathbf{x})$ — (4×4)-матрица-функция, а $b(\mathbf{D})$ — (4×3)-матричный дифференциальный оператор первого порядка. А именно,

$$b(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} -i\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2} \\ -i\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2} \end{pmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \eta(\mathbf{x})^{-1} & 0 \\ 0 & \nu(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Из (1.3) следует, что матрица $g(\mathbf{x})$ положительно определена и ограничена. Очевидно,

$$\|g\|_{L_\infty} = \max\{\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}; \|\nu\|_{L_\infty}\}, \quad \|g^{-1}\|_{L_\infty} = \max\{\|\eta\|_{L_\infty}; \|\nu^{-1}\|_{L_\infty}\}.$$

Оператор $b(\mathbf{D})$ можно записать в виде $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^3 b_j D_j$, где b_j — постоянные матрицы. Символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^3 b_j \xi_j$ оператора $b(\mathbf{D})$ имеет вид

$$b(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} r(\boldsymbol{\xi})\mu_0^{-1/2} \\ \boldsymbol{\xi}^t \mu_0^{1/2} \end{pmatrix}, \quad r(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^t = \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Выполнено условие

$$\mathrm{rank}\, b(\boldsymbol{\xi}) = 3, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3. \tag{1.6}$$

Это условие равносильно оценкам

$$\alpha_0 \mathbf{1}_3 \leqslant b(\boldsymbol{\xi})^* b(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_3, \quad |\boldsymbol{\xi}| = 1, \tag{1.7}$$

с положительными постоянными α_0, α_1. Легко убедиться в справедливости этих оценок с постоянными

$$\alpha_0 = \min\{|\mu_0|^{-1}; |\mu_0^{-1}|^{-1}\}, \quad \alpha_1 = |\mu_0| + |\mu_0^{-1}|.$$

Строгое определение оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{l}_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}] := \int\limits_{\mathbb{R}^3} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}\rangle \, d\mathbf{x}$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^3} \left(\langle (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}), \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi})\rangle + \nu^\varepsilon(\mathbf{x}) |\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})|^2 \right) d\mathbf{x},$$
$$\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3).$$

При наших предположениях справедливы двусторонние оценки

$$\begin{gathered} c_1 \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{l}_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}] \leqslant c_2 \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3), \\ c_1 = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}, \quad c_2 = \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Таким образом, форма $\mathfrak{l}_\varepsilon$ замкнута и неотрицательна. Порожденный ею самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ мы и обозначаем через $\mathcal{L}_\varepsilon$.

1.4 Эффективный оператор $\mathcal{L}^0$

В соответствии с общими правилами строится *эффективный оператор*

$$\mathcal{L}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \tag{1.9}$$

где g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной*. Она определяется через решение вспомогательной задачи на ячейке Ω. Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — (3×4)-матрица, являющаяся Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}) = 0, \quad \int\limits_\Omega \Lambda(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.10}$$

Тогда

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}). \tag{1.11}$$

Отметим сразу, что легко проверяется оценка

$$\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda |\Omega|^{1/2}, \tag{1.12}$$

где постоянная $\mathfrak{C}_\Lambda$ зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметров решетки Γ.

Эффективный оператор для $\mathcal{L}_\varepsilon$ был построен в [BSu1, глава 7] в случае $\mu_0 = \mathbf{1}$ и в [BSu4] в общем случае. Для полноты изложения мы повторяем соответствующие построения.

Найдем матрицу $\Lambda(\mathbf{x})$. Пусть $\mathbf{e}_j$, $j = 1, 2, 3, 4,$ — стандартные орты в $\mathbb{C}^4$ и $\widetilde{\mathbf{e}}_j$, $j = 1, 2, 3,$ — стандартные орты в $\mathbb{C}^3$. Вектору $\mathbf{C} = \sum_{j=1}^4 C_j \mathbf{e}_j \in \mathbb{C}^4$ сопоставим вектор $\widetilde{\mathbf{C}} = \sum_{j=1}^3 C_j \widetilde{\mathbf{e}}_j \in \mathbb{C}^3$. Вектор-функция $\mathbf{v} = \Lambda\mathbf{C} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^3)$ является решением уравнения $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}) = 0$, которое сейчас принимает вид

$$\mu_0^{-1/2} \mathrm{rot}\,(\eta(\mathbf{x}))^{-1} \left(\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}) + i\widetilde{\mathbf{C}} \right) - \mu_0^{1/2} \nabla \nu(\mathbf{x}) \left(\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}) + iC_4 \right) = 0.$$

Иначе говоря, $\mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^3)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \langle (\eta(\mathbf{x}))^{-1} (\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}) + i\widetilde{\mathbf{C}}), \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{z}) \rangle \, d\mathbf{x} \\ &+ \int_\Omega \nu(\mathbf{x}) \left(\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}) + iC_4 \right) \overline{\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\mathbf{z})} \, d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{z} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^3). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Используя разложение $\mu_0^{-1/2}\mathbf{z} = \mathbf{f} + \nabla h$, где $\mathbf{f} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^3)$ и $\mathrm{div}\,(\mu_0 \mathbf{f}) = 0$ (разложение Вейля), запишем тождество (1.13) при $\mathbf{z} = \mu_0^{1/2}\mathbf{f}$. Тогда второе слагаемое в (1.13) обратится в ноль. Учитывая, что $\mathrm{rot}\,\mathbf{f} = \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{z})$, приходим к тождеству

$$\int_\Omega \langle (\eta(\mathbf{x}))^{-1} (\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}) + i\widetilde{\mathbf{C}}), \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{z}) \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{z} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^3). \tag{1.14}$$

Из (1.14) следует, что

$$(\eta(\mathbf{x}))^{-1} (\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}(\mathbf{x})) + i\widetilde{\mathbf{C}}) = i(\nabla\Phi(\mathbf{x}) + \mathbf{c})$$

при некоторых $\Phi \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ и $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^3$. Следовательно,

$$\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}(\mathbf{x})) + i\widetilde{\mathbf{C}} = i\eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi(\mathbf{x}) + \mathbf{c}). \tag{1.15}$$

Из (1.15) вытекает, что

$$\int_\Omega \langle \eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi(\mathbf{x})+\mathbf{c}), \nabla F(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x} = 0, \quad F \in \widetilde{H}^1(\Omega).$$

Таким образом, $\Phi \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ есть решение уравнения

$$\operatorname{div} \eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi(\mathbf{x})+\mathbf{c}) = 0. \tag{1.16}$$

Вспоминая определение эффективной матрицы η^0 для оператора $-\operatorname{div}\eta(\mathbf{x})\nabla$, имеем

$$\eta^0\mathbf{c} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi(\mathbf{x})+\mathbf{c})\, d\mathbf{x}. \tag{1.17}$$

Интегрируя (1.15) и учитывая (1.17), находим

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \eta^0\mathbf{c}. \tag{1.18}$$

С другой стороны, из (1.13) и (1.14) вытекает тождество

$$\int_\Omega \nu(\mathbf{x})\left(\operatorname{div}(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}) + iC_4\right)\overline{\operatorname{div}(\mu_0^{1/2}\mathbf{z})}\, d\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{z} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3).$$

Это означает, что найдется такая постоянная $\alpha \in \mathbb{C}$, что

$$\nu(\mathbf{x})\left(\operatorname{div}(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}) + iC_4\right) = i\alpha. \tag{1.19}$$

Домножая (1.19) на $\nu(\mathbf{x})^{-1}$ и интегрируя, получаем $C_4|\Omega| = \alpha\int_\Omega \nu(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x}$. Тем самым,

$$\alpha = \underline{\nu} C_4. \tag{1.20}$$

Подставляя $\mathbf{C} = \mathbf{e}_j$, найдем столбцы $\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$ матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$. Из (1.15), (1.18), (1.19) и (1.20) видно, что при $j = 1, 2, 3$ столбец $\mathbf{v}_j \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ — это периодическое решение задачи

$$\begin{gathered} \operatorname{rot}(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}_j(\mathbf{x})) = i\eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x})+\mathbf{c}_j) - i\widetilde{\mathbf{e}}_j, \\ \operatorname{div}(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}_j(\mathbf{x})) = 0, \quad \int_\Omega \mathbf{v}_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \end{gathered} \tag{1.21}$$

Здесь $\mathbf{c}_j = (\eta^0)^{-1}\widetilde{\mathbf{e}}_j$, а $\Phi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — решение уравнения (1.16) при $\mathbf{c} = \mathbf{c}_j$. Решение задачи (1.21) можно представить в виде

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) = i\mu_0^{-1/2}\operatorname{rot}\mathbf{p}_j(\mathbf{x}),$$

где $\mathbf{p}_j \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ — решение задачи

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}(\mu_0^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{p}_j(\mathbf{x})) = \eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) - \widetilde{\mathbf{e}}_j,\\ \operatorname{div}\mathbf{p}_j(\mathbf{x}) = 0, \quad \int\limits_\Omega \mathbf{p}_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.\end{gathered} \tag{1.22}$$

При $\mathbf{C} = \mathbf{e}_4$ из (1.15), (1.18), (1.19) и (1.20) видно, что $\mathbf{v}_4 \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ — это периодическое решение задачи

$$\operatorname{rot}(\mu_0^{-1/2}\mathbf{v}_4(\mathbf{x})) = 0, \quad \operatorname{div}(\mu_0^{1/2}\mathbf{v}_4(\mathbf{x})) = i\left(\underline{\nu}\nu(\mathbf{x})^{-1} - 1\right), \quad \int\limits_\Omega \mathbf{v}_4(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Следовательно, $\mathbf{v}_4(\mathbf{x}) = i\mu_0^{1/2}\nabla\rho(\mathbf{x})$, где $\rho(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение уравнения

$$-\operatorname{div}(\mu_0\nabla\rho(\mathbf{x})) = 1 - \underline{\nu}\nu(\mathbf{x})^{-1}. \tag{1.23}$$

Таким образом, матрица $\Lambda(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\Lambda(\mathbf{x}) = i\begin{pmatrix}\mu_0^{-1/2}\Psi(\mathbf{x}) & \mu_0^{1/2}\nabla\rho(\mathbf{x})\end{pmatrix}, \tag{1.24}$$

где $\Psi(\mathbf{x})$ — (3×3)-матрица со столбцами $\operatorname{rot}\mathbf{p}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$. Матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1})$ представляется в виде

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\eta(\mathbf{x})^{-1}(\operatorname{rot}(\mu_0^{-1}\Psi(\mathbf{x})) + \mathbf{1}_3) & 0\\ 0 & \nu(\mathbf{x})(\operatorname{div}(\mu_0\nabla\rho(\mathbf{x})) + 1)\end{pmatrix}.$$

С учетом (1.22) и (1.23),

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\Sigma(\mathbf{x}) + (\eta^0)^{-1} & 0\\ 0 & \underline{\nu}\end{pmatrix}, \tag{1.25}$$

где $\Sigma(\mathbf{x})$ — (3×3)-матрица со столбцами $\nabla\Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$. Отсюда согласно (1.11) получаем

$$g^0 = \begin{pmatrix}(\eta^0)^{-1} & 0\\ 0 & \underline{\nu}\end{pmatrix}. \tag{1.26}$$

Таким образом, эффективный оператор (1.9) задается дифференциальным выражением

$$\mathcal{L}^0 = \mu_0^{-1/2}\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1}\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2}\nabla\underline{\nu}\operatorname{div}\mu_0^{1/2} \tag{1.27}$$

на области $H^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$.

Отметим известные оценки для норм эффективных коэффициентов:

$$|\eta^0| \leqslant \|\eta\|_{L_\infty}, \quad |(\eta^0)^{-1}| \leqslant \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}, \quad |\underline{\nu}| \leqslant \|\nu\|_{L_\infty}, \quad |(\underline{\nu})^{-1}| \leqslant \|\nu^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.28}$$

Символ эффективного оператора задается выражением

$$a(\boldsymbol{\xi}) = \mu_0^{-1/2} r(\boldsymbol{\xi})^t (\eta^0)^{-1} r(\boldsymbol{\xi}) \mu_0^{-1/2} + \mu_0^{1/2} \boldsymbol{\xi} \underline{\nu} \boldsymbol{\xi}^t \mu_0^{1/2}.$$

С учетом (1.28) символ $a(\boldsymbol{\xi})$ подчинен оценкам

$$c_1 |\boldsymbol{\xi}|^2 \mathbf{1} \leqslant a(\boldsymbol{\xi}) \leqslant c_2 |\boldsymbol{\xi}|^2 \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3. \tag{1.29}$$

Здесь постоянные c_1 и c_2 — те же, что в (1.8).

1.5 Свойства эффективной матрицы η^0. Свойства функций Φ_j

Для эффективной матрицы η^0 выполнены оценки

$$\underline{\eta} \leqslant \eta^0 \leqslant \overline{\eta}, \tag{1.30}$$

известные как вилка Фойгта-Рейсса. См., например, [BSu1, глава 3, теорема 1.5]. Выделим случаи, когда одно из неравенств в (1.30) превращается в равенство; см., например, [BSu1, глава 3, предложения 1.6 и 1.7].

Предложение 1.3. 1) *Равенство $\eta^0 = \overline{\eta}$ равносильно соленоидальности столбцов $\boldsymbol{\eta}_j(\mathbf{x})$ матрицы $\eta(\mathbf{x})$:* $\operatorname{div} \boldsymbol{\eta}_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, 3$.
2) *Равенство $\eta^0 = \underline{\eta}$ равносильно потенциальности столбцов $\boldsymbol{\kappa}_j(\mathbf{x})$ матрицы $\eta(\mathbf{x})^{-1}$: $\boldsymbol{\kappa}_j(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_j^0 + \nabla f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$, при некоторых $\mathbf{c}_j^0 \in \mathbb{C}^3$ и $f_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$.*

Замечание 1.4. 1) *Если $\eta^0 = \overline{\eta}$, то $\Phi_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, 3$, и $\Sigma(\mathbf{x}) = 0$. Согласно (1.25), в этом случае выполнено $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$.*
2) *Если $\eta^0 = \underline{\eta}$, то $\eta(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) = \widetilde{\mathbf{e}}_j$, $j = 1, 2, 3$; см.* [BSu2, Замечание 3.5]. *В этом случае $\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) = 0$, $j = 1, 2, 3$, то есть $\Psi(\mathbf{x}) = 0$. Если, кроме того,* $\nu(\mathbf{x}) = \mathrm{Const}$, *то $\mathbf{v}_4(\mathbf{x}) = 0$. Следовательно, в этом случае $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$.*

Ниже нам понадобятся некоторые свойства функций Φ_j, $j = 1, 2, 3$.

Замечание 1.5. *Столбцы матрицы $\Sigma(\mathbf{x})$ — это вектор-функции $\nabla \Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$, где Φ_j — периодическое решение задачи*

$$\operatorname{div} \eta(\mathbf{x})(\nabla \Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) = 0, \quad \int_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \tag{1.31}$$

при $\mathbf{c}_j = (\eta^0)^{-1} \widetilde{\mathbf{e}}_j$. Согласно [LaUr, глава 3, теорема 13.1] *решение этой задачи ограничено: $\Phi_j \in L_\infty$, причем норма $\|\Phi_j\|_{L_\infty}$ контролируется через $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ.*

Следующее утверждение проверено в [PSu, следствие 2.4].

Предложение 1.6. *Для любой функции $u \in H^1(\mathbb{R}^3)$ выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^3} |(\nabla\Phi_j)^\varepsilon|^2 |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \beta_2 \varepsilon^2 \|\Phi_j\|^2_{L_\infty} \|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)},$$

где постоянные β_1, β_2 зависят только от $\|\eta\|_{L_\infty}$ и $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$.

1.6 Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$

Применяя теорему 2.1 из [BSu1, глава 4] к оператору (1.4), получаем следующий результат.

Теорема 1.7. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (1.4). *Пусть эффективный оператор $\mathcal{L}^0$ определен в* (1.27). *При $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_1 \varepsilon.$$

Постоянная C_1 зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Аппроксимация резольвенты по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, была получена в [BSu3, теорема 10.6]; аппроксимация содержала корректор, включающий сглаживающий оператор иного типа, чем S_ε. В [PSu, теорема 3.3] было показано, что можно перейти к сглаживанию по Стеклову. Сформулируем результат из [PSu] в применении к оператору (1.4). Введем *корректор*

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}. \tag{1.32}$$

Здесь S_ε — оператор сглаживания по Стеклову, определенный в (1.1), а матрица Λ — периодическое решение задачи (1.10). Оператор $b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ в $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$. В силу предложения 1.2 и включения $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ оператор $\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon$ непрерывно переводит $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ в $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Поэтому корректор (1.32) непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ в $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. С учетом (1.5) и (1.24) получаем

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \left(\mu_0^{-1/2}\Psi^\varepsilon S_\varepsilon \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} + \mu_0^{1/2}(\nabla\rho)^\varepsilon S_\varepsilon \mathrm{div}\, \mu_0^{1/2}\right)(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}. \tag{1.33}$$

Теорема 1.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.7. *Пусть корректор* $\mathcal{K}_\varepsilon$ *определен в* (1.33). *При* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2 \varepsilon.$$

Постоянная C_2 *зависит лишь от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Из теоремы 1.8 несложно выводится аппроксимация для „потока“ $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1}$; см. [Su4, теорема 1.8]. Справедлива оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \check{C}_3 \varepsilon, \tag{1.34}$$

где $\check{C}_3$ зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ. С учетом (1.5) и (1.25) имеем

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} = -i \begin{pmatrix} (\eta^\varepsilon)^{-1} \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} \\ \nu^\varepsilon \mathrm{div}\, \mu_0^{1/2} (\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} \end{pmatrix}, \tag{1.35}$$

$$\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1} = -i \begin{pmatrix} ((\eta^0)^{-1} + \Sigma^\varepsilon) S_\varepsilon \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \\ \underline{\nu} S_\varepsilon \mathrm{div}\, \mu_0^{1/2} (\mathcal{L}^0 + I)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

Покажем, что в оценке (1.34) можно заменить S_ε тождественным оператором; это приведет лишь к изменению константы в оценке.

Лемма 1.9. *При* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C' \varepsilon. \tag{1.37}$$

Постоянная C' *зависит лишь от* $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. В силу (1.36) левая часть в (1.37) оценивается через

$$\begin{aligned} &\|g^0 (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &+ \|\Sigma^\varepsilon (S_\varepsilon - I) \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} (\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Применяя предложение 1.1, оценим первый член в (1.38):

$$\begin{aligned} &\|g^0 (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} r_1 \|\mathbf{D} b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Вспоминая, что Σ^ε — матрица со столбцами $(\nabla\Phi_j)^\varepsilon$, $j=1,2,3$, оценим второй член в (1.38). Используя предложение 1.6, а затем предложение 1.1 и неравенство (1.2), имеем:

$$\begin{aligned}
&\|(\nabla\Phi_j)^\varepsilon(S_\varepsilon-I)\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\\
&\leqslant\sqrt{\beta_1}\|(S_\varepsilon-I)\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\\
&+\sqrt{\beta_2}\varepsilon\|\Phi_j\|_{L_\infty}\|(S_\varepsilon-I)\mathbf{D}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\\
&\leqslant\varepsilon(\sqrt{\beta_1}r_1+2\sqrt{\beta_2}\|\Phi_j\|_{L_\infty})\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}\tag{1.40}$$

Из (1.7) и (1.29) вытекает оценка

$$\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\leqslant\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^3}|\boldsymbol{\xi}b(\boldsymbol{\xi})(a(\boldsymbol{\xi})+\mathbf{1})^{-1}|\leqslant\alpha_1^{1/2}c_1^{-1}.\tag{1.41}$$

В итоге неравенства (1.39)–(1.41) вместе с замечанием 1.5 влекут искомую оценку (1.37). $\square$

Теперь из (1.34)–(1.37) вытекает следующий результат.

Теорема 1.10. *При $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}_\varepsilon+I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{L}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_3\varepsilon.$$

Иначе говоря,

$$\begin{aligned}
&\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}_\varepsilon+I)^{-1}-((\eta^0)^{-1}+\Sigma^\varepsilon)\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_3\varepsilon,\\
&\|\nu^\varepsilon\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}(\mathcal{L}_\varepsilon+I)^{-1}-\underline{\nu}\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}(\mathcal{L}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянная C_3 зависит лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Выделим частные случаи. Учитывая предложение 1.3 и замечание 1.4, из теорем 1.8 и 1.10 выводим следующий результат.

Предложение 1.11. 1) *Пусть $\eta^0=\overline{\eta}$, т. е. столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})$ соленоидальны. Тогда при $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\|(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}_\varepsilon+I)^{-1}-(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}(\mathcal{L}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_3\varepsilon.$$

2) *Пусть $\eta^0=\underline{\eta}$, т. е. столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})^{-1}$ потенциальны. Пусть, кроме того, $\nu(\mathbf{x})=\mathrm{Const}$. Тогда корректор (1.33) обращается в нуль и при $\varepsilon>0$ выполнена оценка*

$$\|(\mathcal{L}_\varepsilon+I)^{-1}-(\mathcal{L}^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)\to H^1(\mathbb{R}^3)}\leqslant C_2\varepsilon.$$

2 Модельный оператор второго порядка в ограниченной области

2.1 Определение оператора L_ε

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Через $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ обозначим единичный вектор внешней нормали к $\partial\mathcal{O}$ в точке $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}$. Проекцию на нормаль трехмерной вектор-функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на границе области обозначаем через $\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle$, а касательную составляющую через $\mathbf{u}_\tau(\mathbf{x}) := \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}_n(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})$.

Пусть коэффициенты μ_0, η, ν удовлетворяют условиям пункта 1.3. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] &:= \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi} \rangle \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{O}} \left(\langle (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \operatorname{rot}(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}), \operatorname{rot}(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}) \rangle + \nu^\varepsilon(\mathbf{x}) |\operatorname{div}(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})|^2 \right) d\mathbf{x}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

заданную на области определения

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} l_\varepsilon = \{ \boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) :\ & \operatorname{rot}(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}) \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \\ & \operatorname{div}(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}) \in L_2(\mathcal{O}),\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Априорно условия из (2.2) на вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ (в том числе и краевое условие) понимаются в обобщенном смысле; см. [BS1, BS2], а также определение 5.1 ниже. За счет условия гладкости границы ($\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$) множество (2.2) совпадает с

$$\operatorname{Dom} l_\varepsilon = \left\{ \boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) :\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0 \right\}.$$

А тогда уже краевое условие может быть понято в смысле теоремы о следах. В наших предположениях форма (2.1) коэрцитивна. Справедливы двусторонние оценки

$$\mathfrak{c}_1 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] + \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in \operatorname{Dom} l_\varepsilon. \tag{2.3}$$

Постоянная $\mathfrak{c}_1$ зависит от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$, а $\mathfrak{c}_2$ зависит от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Указанные свойства были установлены в [BS1, теорема 2.3] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^2$ и в [F, теорема 2.6] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^{3/2+\delta}$, $\delta > 0$.

Таким образом, форма (2.1) замкнута и неотрицательна. Порожденный ею самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ мы обозначаем через L_ε. Формально L_ε задается дифференциальным выражением

$$L_\varepsilon = \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2}\nabla\nu^\varepsilon(\mathbf{x})\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}$$

при краевых условиях $(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ и $\big((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi})\big)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0$. Второе условие является „естественным“ и не отражается в области определения квадратичной формы l_ε.

Замечание 2.1. *В* [Su4] *при изучении общих операторов вида $b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$ с условием Неймана на границе накладывалось условие максимальности ранга символа $b(\boldsymbol{\xi})$ при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n$. Оно гарантировало коэрцитивность квадратичной формы оператора на классе $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В нашем случае это условие не выполнено, хотя при $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ ранг матрицы $b(\boldsymbol{\xi})$ максимален*; *см.* (1.6). *Подчеркнем, что для формы l_ε коэрцитивность имеет место при учете краевого условия $(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$.*

Наша цель — найти аппроксимацию при малом ε обобщенного решения задачи

$$\begin{aligned}
&\mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x}))\\
&- \mu_0^{1/2}\nabla\nu^\varepsilon(\mathbf{x})\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x})) + \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathcal{O};\\
&(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \big((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)\big)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Решение понимается в слабом смысле: $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, $(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$, и выполнено тождество

$$l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\zeta}] + (\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon,\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{F},\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{2.5}$$

Тогда $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = (L_\varepsilon + I)^{-1}\mathbf{F}$. Тем самым, нас интересует поведение резольвенты $(L_\varepsilon + I)^{-1}$ при малом ε.

2.2 Эффективный оператор L^0

Пусть матрица η^0 определена согласно (1.16), (1.17). Напомним, что $\underline{\nu}$ — это среднее гармоническое коэффициента $\nu(\mathbf{x})$. Пусть g^0 — матрица (1.26). Эффективный оператор L^0 — это самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, порожденный квадратичной формой

$$
\begin{aligned}
&l^0[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] := \int\limits_{\mathcal{O}} \langle g^0 b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}\rangle \, d\mathbf{x} \\
&= \int\limits_{\mathcal{O}} \Big(\langle (\eta^0)^{-1} \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}), \mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi})\rangle + \underline{\nu} |\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})|^2 \Big)\, d\mathbf{x}, \\
&\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0.
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

С учетом (1.28) форма (2.6) подчинена оценкам

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{c}_1 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant l^0[\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}] + \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \\
\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

с теми же константами, что и в (2.3).

За счет гладкости границы справедливо *свойство повышения гладкости*: оператор L^0 задается дифференциальным выражением

$$
L^0 = \mu_0^{-1/2} \mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1} \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} - \mu_0^{1/2} \nabla \underline{\nu} \mathrm{div}\, \mu_0^{1/2}
$$

на области определения

$$
\mathrm{Dom}\, L^0 = \{\boldsymbol{\varphi} \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \big((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi})\big)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}.
$$

При этом

$$
\|(L^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}, \tag{2.8}
$$

где постоянная $\widehat{c}$ зависит от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\nu\|_{L_\infty}$, $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$.

Замечание 2.2. *При условии $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ (и достаточно гладких коэффициентах) подобное свойство повышения гладкости решений задачи Дирихле либо Неймана для сильно эллиптических уравнений второго порядка можно найти, например, в книге* [McL, глава 4]. *Доказательство основано на методе разностных отношений и существенно опирается на условие коэрцитивности квадратичной формы. В нашем случае коэффициенты оператора L^0 постоянны и выполнено условие коэрцитивности* (2.7)*, хотя граничные условия имеют смешанный тип. Нетрудно тем же методом установить свойство повышения гладкости и для оператора L^0.*

Пусть $\boldsymbol{\varphi}_0$ — решение „усредненной“ задачи

$$\begin{aligned}&\mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{x}))\\&-\mu_0^{1/2}\nabla\underline{\nu}\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{x}))+\boldsymbol{\varphi}_0(\mathbf{x})=\mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathcal{O};\\&(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}}=0,\quad\big((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)\big)_\tau|_{\partial\mathcal{O}}=0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Иными словами, функция $\boldsymbol{\varphi}_0\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ удовлетворяет краевому условию $(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}}=0$ и тождеству

$$l^0[\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\zeta}]+(\boldsymbol{\varphi}_0,\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}=(\mathbf{F},\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})},\quad\boldsymbol{\zeta}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),\quad(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}}=0.\tag{2.10}$$

Тогда $\boldsymbol{\varphi}_0=(L^0+I)^{-1}\mathbf{F}$. Оценка (2.8) означает, что $\boldsymbol{\varphi}_0\in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ и

$$\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}\leqslant\widehat{c}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{2.11}$$

2.3 Оценки в окрестности границы

Положим

$$(\partial\mathcal{O})_\varepsilon:=\Big\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\mathrm{dist}\,\{\mathbf{x};\partial\mathcal{O}\}<\varepsilon\Big\},\quad\varepsilon>0.$$

Выберем числа $\varepsilon_0,\varepsilon_1\in(0,1]$, подчиненные следующему условию.

Условие 2.3. *Число $\varepsilon_0\in(0,1]$ таково, что полоску $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0}$ можно покрыть конечным числом открытых множеств, допускающих диффеоморфизмы класса $C^{0,1}$, распрямляющие границу $\partial\mathcal{O}$. Пусть $\varepsilon_1:=\varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$, где $2r_1=\mathrm{diam}\,\Omega$.*

Ясно, что ε_1 зависит лишь от области $\mathcal{O}$ и параметров решетки Γ. Заметим, что условие 2.3 гарантируется лишь липшицевостью границы. Мы наложили более сильное ограничение $\partial\mathcal{O}\in C^{1,1}$, чтобы обеспечить оценку (2.8).

Следующие утверждения были проверены в [PSu, § 5]; лемма 2.5 аналогична лемме 2.6 из [ZhPas1].

Лемма 2.4. *Предположим, что выполнено условие 2.3. Пусть $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Положим $B_\varepsilon:=\mathcal{O}\cap(\partial\mathcal{O})_\varepsilon$.*
1) *Для любой функции $u\in H^1(\mathcal{O})$ выполнено*

$$\int_{B_\varepsilon}|u|^2\,d\mathbf{x}\leqslant\beta\varepsilon\|u\|_{H^1(\mathcal{O})}\|u\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2) *Для любой функции $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$ выполнено*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|u|^2\,d\mathbf{x}\leqslant\beta\varepsilon\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}.$$

Постоянная β зависит только от области $\mathcal{O}$.

Лемма 2.5. *Предположим, что выполнено условие* 2.3. *Пусть* $h(\mathbf{x})$ — Γ-*периодическая функция в* $\mathbb{R}^3$, *причем* $h \in L_2(\Omega)$. *Пусть* S_ε — *оператор* (1.1). *Обозначим* $\beta_* := \beta(1 + r_1)$, *где* $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^k)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |h^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|h\|^2_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}.$$

3 Результаты для модельного уравнения второго порядка в ограниченной области

3.1 Аппроксимация резольвенты оператора L_ε

Сформулируем наши основные результаты об аппроксимации решения задачи (2.4). Для удобства дальнейших ссылок назовем следующий набор параметров „данными задачи“:

$$\begin{aligned} &|\mu_0|, \ |\mu_0^{-1}|, \ \|\eta\|_{L_\infty}, \ \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}, \ \|\nu\|_{L_\infty}, \ \|\nu^{-1}\|_{L_\infty}; \\ &\text{параметры решетки } \Gamma; \text{ область } \mathcal{O}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Теорема 3.1. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ — *решение задачи* (2.4) *и* $\boldsymbol{\varphi}_0$ — *решение усредненной задачи* (2.9) *при* $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$. *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 2.3. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.2}$$

В операторных терминах,

$$\|(L_\varepsilon + I)^{-1} - (L^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 \varepsilon.$$

Постоянная $\mathcal{C}_1$ *зависит лишь от данных задачи* (3.1).

Для аппроксимации решения в классе $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ нужно ввести корректор. Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O} : H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3) \to H^s(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3), \quad s = 0, 1, 2.$$

Такой оператор существует для любой ограниченной области с липшицевой границей (см., например, [St]). Обозначим

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^s(\mathcal{O}) \to H^s(\mathbb{R}^3)} =: C^{(s)}_\mathcal{O}, \quad s = 0, 1, 2. \tag{3.3}$$

Постоянные $C_{\mathcal{O}}^{(s)}$ зависят только от области $\mathcal{O}$. Далее, через $[\Lambda^\varepsilon]$ обозначим оператор умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, а через $R_{\mathcal{O}}$ — оператор сужения функций в $\mathbb{R}^3$ на область $\mathcal{O}$. Пусть S_ε — оператор сглаживания по Стеклову; см. (1.1). Введем корректор

$$K_\varepsilon := R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(L^0+I)^{-1}.$$

Оператор $b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(L^0+I)^{-1}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ в $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$. Как уже отмечалось, оператор $[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен из $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^4)$ в $H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Следовательно, корректор K_ε непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Используя (1.5) и (1.24), запишем корректор в виде

$$K_\varepsilon = R_{\mathcal{O}}\left(\mu_0^{-1/2}\Psi^\varepsilon S_\varepsilon \mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2} + \mu_0^{1/2}(\nabla\rho)^\varepsilon S_\varepsilon \mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\right)P_{\mathcal{O}}(L^0+I)^{-1}. \tag{3.4}$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi}_0$ — решение задачи (2.9). Положим $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 := P_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\varphi}_0$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon(\mathbf{x}) &:= \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon\mu_0^{-1/2}\Psi^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0)(\mathbf{x})\\
&\quad + \varepsilon\mu_0^{1/2}(\nabla\rho)^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0)(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\\
\boldsymbol{\psi}_\varepsilon &:= \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Тогда

$$\boldsymbol{\psi}_\varepsilon = \boldsymbol{\varphi}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 = (L^0+I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K_\varepsilon\mathbf{F}. \tag{3.6}$$

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Пусть функция* $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$ *определена в* (3.5). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.7}$$

В операторных терминах,

$$\|(L_\varepsilon+I)^{-1} - (L^0+I)^{-1} - \varepsilon K_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2\varepsilon^{1/2}.$$

Постоянная $\mathcal{C}_2$ *зависит лишь от данных задачи* (3.1).

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Положим* $\mathbf{u}_\varepsilon := (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$, $\mathbf{u}_0 := (\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0$. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \Sigma^\varepsilon\mathrm{rot}\,(\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_3\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\\
\|\nu^\varepsilon\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon) - \underline{\nu}\mathrm{div}\,(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_3\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Постоянная $\mathcal{C}_3$ *зависит лишь от данных задачи* (3.1).

Выделим специальные случаи. В силу предложения 1.3 и замечания 1.4 из теорем 3.2 и 3.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.4. 1) *Пусть* $\eta^0 = \overline{\eta}$, *т. е. столбцы матрицы* $\eta(\mathbf{x})$ *соленоидальны. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2) *Пусть* $\eta^0 = \underline{\eta}$, *т. е. столбцы матрицы* $\eta(\mathbf{x})^{-1}$ *потенциальны. Пусть, кроме того,* $\nu(\mathbf{x}) = \mathrm{Const}$. *Тогда корректор* (3.4) *обращается в нуль и при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

3.2 Первый этап доказательства. Ассоциированная задача в $\mathbb{R}^3$

Очевидно, $\|(L^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 1$, а потому $\|\boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$. В силу (2.11), (3.3) справедливы оценки

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(0)} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.9}$$

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{c} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.10}$$

Положим

$$\widetilde{\mathbf{F}} := \mathcal{L}^0 \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0. \tag{3.11}$$

Тогда $\widetilde{\mathbf{F}} \in L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и $\widetilde{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{F}$. В силу (1.29), (3.9) и (3.10)

$$\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant c_2 \|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^3)} + \|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_4 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.12}$$

где $\mathcal{C}_4 = c_2 \widehat{c} C_{\mathcal{O}}^{(2)} + C_{\mathcal{O}}^{(0)}$. Отметим также неравенство, непосредственно вытекающее из (3.11) и (3.12):

$$\mathfrak{l}^0[\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0, \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0] \leqslant \|\widetilde{\mathbf{F}}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_4^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.13}$$

Пусть $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ — обобщенное решение уравнения в $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{L}_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon + \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{F}},$$

т. е., $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon = (\mathcal{L}_\varepsilon + I)^{-1} \widetilde{\mathbf{F}}$. Применим теоремы 1.7, 1.8 и 1.10. Учитывая также (3.12), приходим к оценкам

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_1 \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_1 \mathcal{C}_4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.14}$$

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2 \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_2 \mathcal{C}_4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.15}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3 \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant C_3 \mathcal{C}_4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.16}$$

3.3 Второй этап доказательства. Введение поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$

Введем „поправку“ $\mathbf{s}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ как функцию, удовлетворяющую следующим тождеству и краевому условию:

$$\begin{aligned}
&(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{s}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\mathbf{s}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\
&= (\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\mathbf{F}, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\boldsymbol{\varphi}_0, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \\
&\forall \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \\
&(\mu_0^{1/2}\mathbf{s}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon(\mu_0^{1/2}\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Покажем, что учет поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$, называемой „поправкой типа пограничного слоя“, позволяет получить приближение решения $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ по H^1-норме с погрешностью точного порядка $O(\varepsilon)$.

Теорема 3.5. *При $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon + \mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.18}$$

Постоянная $\mathcal{C}_5$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Доказательство. Обозначим $\mathbf{V}_\varepsilon := \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon + \mathbf{s}_\varepsilon$. Тогда с учетом (2.5), (3.6), (3.17) и краевых условий $(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$, $(\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ выполнено $\mathbf{V}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, $(\mu_0^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$,

$$\begin{aligned}
&l_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}] + (\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0 - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\boldsymbol{\varphi}_0 - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}, \\
&\forall \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Первое слагаемое справа запишем в виде

$$(\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В силу (1.8), (3.15) и (3.16) оно оценивается через

$$\begin{aligned}
&\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ \left(\mathfrak{l}_\varepsilon[\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon, \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon]\right)^{1/2}(l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}])^{1/2} \leqslant \mathcal{C}_5'\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\,(l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}])^{1/2}.
\end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_5' = \mathcal{C}_4\left(\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}C_3 + \sqrt{c_2}C_2\right)$. Второе слагаемое в правой части (3.19) запишем в виде $(\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 - \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_\varepsilon - \widetilde{\boldsymbol{\psi}}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}$. Оно не превосходит величины $\mathcal{C}_5''\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ ввиду (3.14) и (3.15); здесь $\mathcal{C}_5'' = \mathcal{C}_4(C_1 + C_2)$.

В итоге получаем, что правая часть тождества (3.19) не превосходит $\check{\mathcal{C}}_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \left(l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}] + \|\boldsymbol{\zeta}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \right)^{1/2}$, где $\check{\mathcal{C}}_5^2 = (\mathcal{C}_5')^2 + (\mathcal{C}_5'')^2$.

Подставляя $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ в (3.19) и используя полученную оценку, приходим к неравенству

$$\left(l_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon] + \|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \right)^{1/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с нижней оценкой (2.3) это влечет искомое неравенство (3.18) с постоянной $\mathcal{C}_5 = \check{\mathcal{C}}_5 \mathfrak{c}_1^{-1/2}$. $\square$

Выводы. 1) Из (3.18) следует, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{3.20}$$

Поэтому для доказательства теоремы 3.2 нужно надлежащим образом оценить норму $\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}$.

2) Из (3.6) и (3.18) видно, что

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \varepsilon \|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.21}$$

В силу предложения 1.2 и оценок (1.12), (3.13) имеем

$$\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda \mathcal{C}_4 \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.22}$$

Вместе с (3.21) это влечет

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_6 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.23}$$

где $\mathcal{C}_6 = \mathcal{C}_5 + \mathfrak{C}_\Lambda \mathcal{C}_4 \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$. Следовательно, для доказательства теоремы 3.1 надо оценить норму $\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$ надлежащим образом.

4 Оценки поправки. Доказательство теорем 3.1–3.3

Сначала мы оценим H^1-норму поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ и докажем теорему 3.2, а также теорему 3.3. Затем, используя уже доказанную теорему 3.2 и соображения двойственности, оценим L_2-норму поправки $\mathbf{s}_\varepsilon$ и докажем теорему 3.1.

4.1 Оценка поправки в $H^1(\mathcal{O})$. Доказательство теоремы 3.2

Перепишем тождество (3.17), учитывая (2.10):

$$\begin{aligned} &(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{s}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\mathbf{s}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= ((\widetilde{g}^\varepsilon - g^0) b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_0, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} =: \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}], \\ &\forall \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2} \boldsymbol{\zeta})_n |_{\partial \mathcal{O}} = 0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Согласно (1.5), (1.25) и (1.26) имеем

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = (\Sigma^\varepsilon \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0, \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.2}$$

Лемма 4.1. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *справедлива оценка*

$$|\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}_7 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} (l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}])^{1/2}, \quad \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2} \boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{4.3}$$

Постоянная $\mathcal{C}_7$ *зависит лишь от данных задачи* (3.1).

Доказательство. Напомним, что $\Sigma(\mathbf{x})$ — это матрица со столбами $\nabla\Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$. Следовательно, матрица $\Sigma^\varepsilon(\mathbf{x})$ имеет столбцы $(\nabla\Phi_j)^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon \nabla \Phi_j^\varepsilon(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$. Обозначим координаты вектор-функции $\mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0$ через $[\mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j$, $j = 1, 2, 3$. Тогда

$$\Sigma^\varepsilon \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0 = \varepsilon \sum_{j=1}^{3} (\nabla \Phi_j^\varepsilon) [\mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j$$

$$= \varepsilon \sum_{j=1}^{3} \left(\nabla \left(\Phi_j^\varepsilon [\mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j \right) - \Phi_j^\varepsilon \nabla [\mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j \right).$$

Вместе с (4.2) это влечет

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] = \mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] + \mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\zeta}], \tag{4.4}$$

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] := \varepsilon \sum_{j=1}^{3} \left(\nabla \left(\Phi_j^\varepsilon [\mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j \right), \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta} \right)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.5}$$

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\zeta}] := -\varepsilon \sum_{j=1}^{3} (\Phi_j^\varepsilon \nabla [\mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j, \mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.6}$$

В силу (2.11) и ограниченности функций Φ_j (см. замечание 1.5) член (4.6) допускает оценку

$$|\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}_7' \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} (l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}])^{1/2}, \tag{4.7}$$

где постоянная $\mathcal{C}_7'$ зависит только от данных задачи (3.1). Мы учли очевидное неравенство

$$\|\mathrm{rot}\, \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\eta\|_{L_\infty}^{1/2} (l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}])^{1/2}. \tag{4.8}$$

Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Фиксируем срезку $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^3$ такую, что

$$\begin{gathered} \theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3); \quad \mathrm{supp}\, \theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon; \quad 0 \leqslant \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1; \\ \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}; \quad \varepsilon|\nabla\theta_\varepsilon| \leqslant \kappa = \mathrm{Const}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Положим
$$\mathbf{f}_{j,\varepsilon} := \varepsilon \nabla \left(\theta_\varepsilon \Phi_j^\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j \right), \quad j = 1, 2, 3, \tag{4.10}$$
и представим член (4.5) в виде
$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}] = \sum_{j=1}^{3} (\mathbf{f}_{j,\varepsilon}, \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.11}$$
Мы учли тождество
$$\left(\nabla \left((1 - \theta_\varepsilon) \Phi_j^\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j \right), \operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\zeta} \right)_{L_2(\mathcal{O})} = 0,$$
которое проверяется интегрированием по частям с учетом соотношения $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ (при проверке достаточно считать $\boldsymbol{\zeta} \in H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$).

Остается оценить член (4.11). С учетом (4.9), (4.10) и замечания 1.5 имеем
$$\begin{aligned} &\|\mathbf{f}_{j,\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \kappa \|\Phi_j\|_{L_\infty} \|[\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j\|_{L_2(B_\varepsilon)} \\ &+ \|\theta_\varepsilon (\nabla \Phi_j)^\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j\|_{L_2(\mathcal{O})} + \varepsilon \|\Phi_j\|_{L_\infty} \|\nabla [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{4.12}$$
Первое слагаемое в (4.12) оценивается через $C\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ благодаря лемме 2.4 и оценке (2.11). Третье слагаемое в (4.12) не превосходит $C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ в силу (2.11). Для оценки второго слагаемого в (4.12) применим предложение 1.6 и (4.9):
$$\begin{aligned} &\|\theta_\varepsilon (\nabla \Phi_j)^\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \boldsymbol{\varphi}_0]_j\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\theta_\varepsilon (\nabla \Phi_j)^\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0]_j\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \sqrt{\beta_1} \|[\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0]_j\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} + \sqrt{\beta_2} \varepsilon \|\Phi_j\|_{L_\infty} \|\nabla \left(\theta_\varepsilon [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0]_j \right) \|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \left(\sqrt{\beta_1} + \sqrt{\beta_2} \|\Phi_j\|_{L_\infty} \kappa \right) \|[\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0]_j\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} \\ &+ \sqrt{\beta_2} \varepsilon \|\Phi_j\|_{L_\infty} \|\nabla [\operatorname{rot} \mu_0^{-1/2} \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0]_j\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$
Первый член справа не превосходит $C\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ в силу леммы 2.4 и оценки (3.10). Второе слагаемое оценивается через $C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ за счет (3.10). В итоге мы приходим к оценке
$$\sum_{j=1}^{3} \|\mathbf{f}_{j,\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_7'' \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.13}$$
где постоянная $\mathcal{C}_7''$ зависит только от данных задачи (3.1). Следовательно, с учетом (4.8) член (4.11) допускает оценку
$$|\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \mathcal{C}_7'' \|\eta\|_{L_\infty}^{1/2} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} (l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}])^{1/2}. \tag{4.14}$$
Теперь из (4.4), (4.7) и (4.14) вытекает искомое неравенство (4.3). $\square$

В $\mathbb{R}^3$ введем функцию

$$\boldsymbol{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}) := \varepsilon\theta_\varepsilon(\mathbf{x})\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})\left(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\right)(\mathbf{x}). \tag{4.15}$$

Лемма 4.2. *Пусть функция $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ определена в* (4.15). *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_8\left(\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\right), \tag{4.16}$$

где постоянная $\mathcal{C}_8$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Доказательство. В силу (3.17), (4.1) и (4.9) функция $\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ удовлетворяет краевому условию $(\mu_0^{1/2}(\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon))_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ и тождеству

$$\begin{gathered} l_\varepsilon[\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}] + (\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] - \mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}], \\ \boldsymbol{\zeta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \quad (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\zeta})_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \end{gathered} \tag{4.17}$$

где

$$\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}] := (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})} + (\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.18}$$

С учетом (1.8) имеем

$$|\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}]| \leqslant \sqrt{c_2}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}(l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\zeta}])^{1/2} + \|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}\|\boldsymbol{\zeta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.19}$$

Подставляя $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ в (4.17) и используя (4.3) и (4.19), приходим к неравенству

$$l_\varepsilon[\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon] + \|\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathcal{C}_7^2\varepsilon\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + 2c_2\|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^3)}.$$

С учетом нижней оценки (2.3) отсюда получаем

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathcal{C}}_8\left(\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}\right),$$

где постоянная $\check{\mathcal{C}}_8$ зависит лишь от данных задачи (3.1). Это влечет (4.16). $\square$

Лемма 4.3. *Пусть число ε_1 подчинено условию 2.3. Пусть функция $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ определена в* (4.15). *При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнены оценки*

$$\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_9\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.20}$$

$$\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_{10}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.21}$$

где постоянные $\mathcal{C}_9$ и $\mathcal{C}_{10}$ зависят лишь от данных задачи (3.1).

Доказательство. Оценка (4.20) вытекает из (3.22) и (4.9).

Рассмотрим производные

$$D_j\boldsymbol{\phi}_\varepsilon = \varepsilon(D_j\theta_\varepsilon)\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \theta_\varepsilon(D_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \varepsilon\theta_\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon D_j b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0. \quad (4.22)$$

Норма первого слагаемого справа оценивается с помощью (4.9) и леммы 2.5:

$$\varepsilon\|(D_j\theta_\varepsilon)\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \kappa\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)}$$
$$\leqslant \kappa\mathfrak{C}_\Lambda\sqrt{\beta_*}\varepsilon^{1/2}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}'_{10}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\mathcal{C}'_{10} = \kappa\mathfrak{C}_\Lambda\sqrt{\beta_*\alpha_1}\widehat{c}C^{(2)}_{\mathcal{O}}$. Мы учли (1.7), (1.12) и (3.10). Аналогично, из леммы 2.5, (1.7), (1.12) и (3.10) вытекает оценка нормы второго слагаемого в (4.22):

$$\|\theta_\varepsilon(D_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}''_{10}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\mathcal{C}''_{10} = \mathfrak{C}_\Lambda\sqrt{\beta_*\alpha_1}\widehat{c}C^{(2)}_{\mathcal{O}}$. Норма третьего слагаемого в (4.22) оценивается на основании предложения 1.2, (1.7), (1.12) и (3.10):

$$\varepsilon\|\theta_\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon D_j b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}'''_{10}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\mathcal{C}'''_{10} = \mathfrak{C}_\Lambda\sqrt{\alpha_1}\widehat{c}C^{(2)}_{\mathcal{O}}$. В итоге приходим к оценке

$$\|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \check{\mathcal{C}}_{10}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где постоянная $\check{\mathcal{C}}_{10}$ зависит лишь от данных задачи (3.1). Вместе с (4.20) это влечет (4.21). $\square$

Из лемм 4.2 и 4.3 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 4.4. *При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнена оценка*

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{11}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (4.23)$$

где постоянная $\mathcal{C}_{11}$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Завершение доказательства теоремы 3.2. Из (3.20) и (4.23) вытекает искомая оценка (3.7) с постоянной $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_{11}$. $\square$

4.2 Доказательство теоремы 3.3

Из (3.7) следует оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{12}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.24}$$

где постоянная $\mathcal{C}_{12}$ зависит лишь от данных задачи (3.1). Согласно (3.6) имеем

$$\begin{aligned} g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}_\varepsilon &= g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0 + \varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0) \\ &= g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \varepsilon\sum_{j=1}^3 g^\varepsilon b_j \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon D_j b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 \\ &= \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 + \varepsilon\sum_{j=1}^3 g^\varepsilon b_j \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon D_j b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0. \end{aligned}$$

Норма третьего слагаемого справа оценивается через $C\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ в силу предложения 1.2, (1.12) и (3.10). Второе слагаемое справа можно записать в виде

$$g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 = -i\begin{pmatrix} \left(\Sigma^\varepsilon + (\eta^0)^{-1} - (\eta^\varepsilon)^{-1}\right)(S_\varepsilon - I)\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 \\ (\underline{\nu} - \nu^\varepsilon)(S_\varepsilon - I)\operatorname{div}\mu_0^{1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 \end{pmatrix}.$$

Аналогично доказательству леммы 1.9, используя предложение 1.1 и предложение 1.6, нетрудно проверить оценку

$$\|g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}'_{12}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где постоянная $\mathcal{C}'_{12}$ зависит лишь от данных задачи (3.1). В итоге получаем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathcal{C}}_{12}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.25}$$

где постоянная $\check{\mathcal{C}}_{12}$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Из (4.24) и (4.25) вытекает требуемая оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (\mathcal{C}_{12} + \check{\mathcal{C}}_{12})\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

равносильная паре неравенств (3.8). $\square$

4.3 Оценка поправки в $L_2(\mathcal{O})$. Завершение доказательства теоремы 3.1

Лемма 4.5. *При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{13}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.26}$$

где постоянная $\mathcal{C}_{13}$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Доказательство. Пусть $\mathbf{G} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. Положим $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon := (L_\varepsilon + I)^{-1}\mathbf{G}$. Подставим в тождество (4.17) функцию $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon$. Тогда левая часть тождества запишется в виде $(\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \mathbf{G})_{L_2(\mathcal{O})}$. Следовательно,

$$(\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \mathbf{G})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon] - \mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon]. \tag{4.27}$$

В силу (4.4), (4.7), (4.18), (4.20) и (4.27) с учетом очевидной оценки

$$l_\varepsilon[\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon, \boldsymbol{\zeta}_\varepsilon] + \|\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\mathbf{G}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}$$

имеем

$$\begin{aligned} |(\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \mathbf{G})_{L_2(\mathcal{O})}| &\leqslant (\mathcal{C}_7' + \mathcal{C}_9)\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ |\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon]| + |(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}|. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Поскольку функции $\mathbf{f}_{j,\varepsilon}$ и $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ сосредоточены в ε-окрестности границы $\partial\mathcal{O}$ (см. (4.9), (4.10) и (4.15)), из (4.11), (4.13) и (4.21) получаем

$$|\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon]| + |(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}| \leqslant \mathcal{C}_{13}'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon\|_{L_2(B_\varepsilon)}, \tag{4.29}$$

где постоянная $\mathcal{C}_{13}'$ зависит лишь от данных задачи (3.1).

Применим уже доказанную теорему 3.2. Аппроксимируем функцию $\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon$ через $\boldsymbol{\zeta}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0$, где $\boldsymbol{\zeta}_0 = (L^0 + I)^{-1}\mathbf{G}$ и $\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0 = P_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\zeta}_0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon\|_{L_2(B_\varepsilon)} &\leqslant \|\mathbf{D}(\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon - \boldsymbol{\zeta}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}_0\|_{L_2(B_\varepsilon)} \\ &+ \varepsilon\|\mathbf{D}(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0)\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Первое слагаемое справа оценивается через $\mathcal{C}_2\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ в силу теоремы 3.2. Второе слагаемое оценивается через $\sqrt{\beta}\widehat{c}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ благодаря лемме 2.4 и оценке (2.8). Оценим третье слагаемое:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\|\mathbf{D}(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0)\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} \leqslant \|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} + \varepsilon\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon \mathbf{D} b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \sqrt{\beta_*}\mathfrak{C}_\Lambda \varepsilon^{1/2}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^3)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^3)} + \mathfrak{C}_\Lambda\varepsilon\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Мы использовали здесь лемму 2.5, предложение 1.2 и оценку (1.12). Учитывая также аналог оценки (3.10) для $\widetilde{\boldsymbol{\zeta}}_0$, убеждаемся, что третье слагаемое в (4.30) не превосходит $\mathcal{C}_{13}''\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})}$, где $\mathcal{C}_{13}''$ зависит лишь от данных задачи (3.1). В итоге приходим к неравенству

$$\|\mathbf{D}\boldsymbol{\zeta}_\varepsilon\|_{L_2(B_\varepsilon)} \leqslant (\mathcal{C}_2 + \sqrt{\beta}\widehat{c} + \mathcal{C}_{13}'')\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{4.31}$$

Соотношения (4.28), (4.29) и (4.31) влекут

$$|(\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \mathbf{G})_{L_2(\mathcal{O})}| \leqslant \check{\mathcal{C}}_{13}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{G}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall \mathbf{G} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3),$$

где постоянная $\check{\mathcal{C}}_{13}$ зависит лишь от данных задачи (3.1). Следовательно,

$$\|\mathbf{s}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathcal{C}}_{13}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с оценкой (4.20) это влечет (4.26). $\square$

Завершение доказательства теоремы 3.1. Из (3.23) и (4.26) вытекает искомая оценка (3.2) с постоянной $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_{13}$. $\square$

5 Стационарная система Максвелла

5.1 Функциональные классы

Как и прежде, предполагаем, что $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Напомним следующие определения; см. [BS1, BS2].

Определение 5.1. *Пусть* $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. *Если* $\operatorname{div}\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O})$*, то равенство* $\mathbf{u}_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ *по определению означает, что*

$$(\mathbf{u}, \nabla\omega)_{L_2(\mathcal{O})} = -(\operatorname{div}\mathbf{u}, \omega)_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall \omega \in H^1(\mathcal{O}).$$

Определение 5.2. *Пусть* $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$. *Если* $\operatorname{rot}\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$*, то равенство* $\mathbf{u}_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ *по определению означает, что*

$$(\mathbf{u}, \operatorname{rot}\mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})} = (\operatorname{rot}\mathbf{u}, \mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall \mathbf{z} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3): \ \operatorname{rot}\mathbf{z} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3).$$

Пусть матрица μ_0 и матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ удовлетворяют условиям пункта 1.3. Помимо обычного пространства $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ нам понадобятся весовые пространства L_2 вектор-функций: пространство $L_2(\mathcal{O};(\eta^\varepsilon)^{-1}) = L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;(\eta^\varepsilon)^{-1})$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{L_2(\mathcal{O};(\eta^\varepsilon)^{-1})} = \int_{\mathcal{O}} \langle (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x})\rangle \, d\mathbf{x}$$

и аналогичное пространство $L_2(\mathcal{O};\mu_0^{-1}) = L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;\mu_0^{-1})$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2)_{L_2(\mathcal{O};\mu_0^{-1})} = \int_{\mathcal{O}} \langle \mu_0^{-1}\mathbf{f}_1(\mathbf{x}), \mathbf{f}_2(\mathbf{x})\rangle \, d\mathbf{x}.$$

Введем два подпространства соленоидальных вектор-функций в L_2:

$$J(\mathcal{O}) := \big\{\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) : \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{u}, \nabla\omega\rangle \, d\mathbf{x} = 0, \ \forall \omega \in H^1_0(\mathcal{O})\big\}, \tag{5.1}$$

$$J_0(\mathcal{O}) := \big\{\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3) : \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{u}, \nabla\omega\rangle \, d\mathbf{x} = 0, \ \forall \omega \in H^1(\mathcal{O})\big\}. \tag{5.2}$$

Подпространство (5.1) состоит из всех функций $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$, для которых $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в смысле распределений. Подпространство (5.2) образуют функции $\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ такие, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ и $\mathbf{u}_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0$ (в смысле определения 5.1).

5.2 Постановка задачи

Мы изучаем электромагнитный резонатор, заполняющий область $\mathcal{O}$. Считаем, что магнитная проницаемость задается постоянной матрицей μ_0, а диэлектрическая проницаемость — матрицей $\eta^\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Напряженности электрического и магнитного полей обозначаются через $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$ и $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x})$ соответственно. Векторы электрической и магнитной индукций связаны с полями $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$ соотношениями $\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \eta^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mathbf{z}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mu_0\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x})$.

Оператор M_ε, записанный в терминах индукций, действует в пространстве $J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O})$, рассматриваемом как подпространство в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;(\eta^\varepsilon)^{-1}) \oplus L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3;\mu_0^{-1})$, и задается выражением

$$M_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & i\operatorname{rot}\mu_0^{-1} \\ -i\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1} & 0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

на области определения

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom} M_\varepsilon = &\{(\mathbf{w},\mathbf{z}) \in J(\mathcal{O}) \oplus J_0(\mathcal{O}) : \ \operatorname{rot}(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \\ &\operatorname{rot}\mu_0^{-1}\mathbf{z} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3), \ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w})_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Здесь краевое условие для $\mathbf{w}$ понимается в смысле определения 5.2.

Оператор M_ε самосопряжен; см. [BS1, BS2]. Точка $\lambda = i$ является регулярной точкой оператора M_ε. *Наша цель* — изучить поведение резольвенты $(M_\varepsilon - iI)^{-1}$. Иными словами, нас интересует поведение решений $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ уравнения

$$(M_\varepsilon - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_\varepsilon \\ \mathbf{z}_\varepsilon\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q} \\ \mathbf{r}\end{pmatrix}, \quad \mathbf{q} \in J(\mathcal{O}), \ \mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O}), \tag{5.5}$$

а также поведение полей $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$. В подробной записи система Максвелла (5.5) имеет вид

$$\begin{cases} i\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon - i\mathbf{w}_\varepsilon = \mathbf{q}, \\ -i\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon - i\mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{r}, \\ \operatorname{div}\mathbf{w}_\varepsilon = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{z}_\varepsilon = 0, \\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

Пусть η^0 — эффективная матрица, определенная в (1.16), (1.17). Пусть M^0 — эффективный оператор Максвелла с коэффициентами η^0 и μ_0 (определенный аналогично (5.3) и (5.4)). Рассмотрим усредненное уравнение

$$(M^0 - iI)\begin{pmatrix}\mathbf{w}_0\\ \mathbf{z}_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{q}\\ \mathbf{r}\end{pmatrix}, \tag{5.7}$$

и определим поля $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{v}_0 = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_0$. В подробной записи (5.7) имеет вид

$$\begin{cases} i\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_0 - i\mathbf{w}_0 = \mathbf{q}, \\ -i\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0 - i\mathbf{z}_0 = \mathbf{r}, \\ \operatorname{div}\mathbf{w}_0 = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{z}_0 = 0, \\ ((\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Классические результаты (см. [BeLPap, BaPa, Sa, ZhKO]) показывают, что при $\varepsilon \to 0$ *имеет место слабая сходимость в* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$ *полей* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ *к соответствующим усредненным полям* $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{w}_0$, $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{z}_0$.

5.3 Случай $\mathbf{q} = 0$. Редукция задачи к модельному уравнению второго порядка

При $\mathbf{q} = 0$ система (5.6) принимает вид

$$\begin{cases} \mathbf{w}_\varepsilon = \mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon, \\ \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon + \mathbf{z}_\varepsilon = i\mathbf{r}, \\ \operatorname{div}\mathbf{w}_\varepsilon = 0,\ \operatorname{div}\mathbf{z}_\varepsilon = 0, \\ ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Из (5.9) следует, что $\mathbf{z}_\varepsilon$ является решением задачи

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon + \mathbf{z}_\varepsilon = i\mathbf{r}, \quad \operatorname{div}\mathbf{z}_\varepsilon = 0, \\ (\mathbf{z}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases}$$

Тогда функция $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon := \mu_0^{-1/2}\mathbf{z}_\varepsilon$ является решением задачи

$$\begin{cases} \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}, \quad \operatorname{div}\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = 0, \\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{5.10}$$

Очевидно, решение задачи (5.10) одновременно является и решением задачи

$$\begin{cases} \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \mu_0^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon + \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}, \\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^\varepsilon)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{5.11}$$

(Отметим, что уравнение $\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = 0$ окажется выполненным автоматически за счет условия $\mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$.) Задача (5.11) совпадает с (2.4) при $\nu = 1$ и $\mathbf{F} = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}$.

Пусть L_ε — оператор, введенный в пункте 2.1, с коэффициентами μ_0, η^ε и $\nu = 1$. Мы убедились, что решение $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ задачи (5.10) можно записать в виде $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = i(L_\varepsilon + I)^{-1}(\mu_0^{-1/2}\mathbf{r})$.

Аналогичным образом, при $\mathbf{q} = 0$ эффективная система (5.8) запишется в виде

$$\begin{cases} \mathbf{w}_0 = \mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_0, \\ \mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0 + \mathbf{z}_0 = i\mathbf{r}, \\ \mathrm{div}\,\mathbf{w}_0 = 0,\ \mathrm{div}\,\mathbf{z}_0 = 0, \\ ((\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0,\ (\mathbf{z}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{5.12}$$

Тогда $\mathbf{z}_0$ является решением задачи

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_0 + \mathbf{z}_0 = i\mathbf{r}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{z}_0 = 0, \\ (\mathbf{z}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1}\mathbf{z}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases}$$

Следовательно, функция $\boldsymbol{\varphi}_0 := \mu_0^{-1/2}\mathbf{z}_0$ является решением задачи

$$\begin{cases} \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}, \quad \mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 = 0, \\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{5.13}$$

Ясно, что решение задачи (5.13) одновременно является и решением задачи

$$\begin{cases} \mu_0^{-1/2}\mathrm{rot}\,(\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 - \mu_0^{1/2}\nabla\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 + \boldsymbol{\varphi}_0 = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}, \\ (\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad ((\eta^0)^{-1}\mathrm{rot}\,\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0)_\tau|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{cases} \tag{5.14}$$

(Уравнение $\mathrm{div}\,\mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0 = 0$ выполнено автоматически за счет условия $\mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^3)$.) Задача (5.14) совпадает с (2.9) при $\underline{\nu} = 1$ и $\mathbf{F} = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}$.

Пусть L^0 — эффективный оператор, определенный в пункте 2.2, с коэффициентами μ_0, η^0 и $\underline{\nu} = 1$. Тогда решение $\boldsymbol{\varphi}_0$ задачи (5.13) запишется в виде $\boldsymbol{\varphi}_0 = i(L^0 + I)^{-1}(\mu_0^{-1/2}\mathbf{r})$.

5.4 Результаты для системы Максвелла

Применяя теорему 3.1 и используя соотношения $\mathbf{z}_\varepsilon = \mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$, $\mathbf{v}_\varepsilon = \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_0 = \mu_0^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_0$, $\mathbf{v}_0 = \mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0$, $\mathbf{F} = i\mu_0^{-1/2}\mathbf{r}$, при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ получаем оценки

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant |\mu_0|^{1/2}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1|\mu_0|^{1/2}|\mu_0^{-1}|^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.15}$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant |\mu_0^{-1}|^{1/2}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1|\mu_0^{-1}|\varepsilon\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.16}$$

Применим теперь теорему 3.2. Поскольку при $\nu = 1$ решение уравнения (1.23) равно нулю: $\rho(\mathbf{x}) = 0$, то функция (3.6) принимает вид

$$\boldsymbol{\psi}_\varepsilon = \boldsymbol{\varphi}_0 + \varepsilon\mu_0^{-1/2}\Psi^\varepsilon S_\varepsilon \operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0.$$

Обозначим $\widetilde{\mathbf{w}}_0 = \operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0$. Ясно, что $\widetilde{\mathbf{w}}_0$ является продолжением функции $\mathbf{w}_0 = \operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0$. Из (3.7) следует, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0 - \varepsilon\Psi^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{w}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2|\mu_0|^{1/2}|\mu_0^{-1}|^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.17}$$

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon\mu_0^{-1}\Psi^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{w}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2|\mu_0^{-1}|\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.18}$$

Далее, в силу первого уравнения в (5.9) имеем: $\mathbf{w}_\varepsilon = \operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$, а тогда $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$. Аналогично, $\mathbf{w}_0 = \operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0$ и $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\operatorname{rot}\mu_0^{-1/2}\boldsymbol{\varphi}_0$. Применяя теорему 3.3, убеждаемся, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \Sigma^\varepsilon\mathbf{w}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3|\mu_0^{-1}|^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.19}$$

Вспоминая, что $\Sigma(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\nabla\Phi_j$, $j = 1,2,3$, где $\Phi_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи (1.31), представим эту матрицу в виде $\Sigma(\mathbf{x}) = \Xi(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1}$, где $\Xi(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\nabla Y_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$, а $Y_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div}\eta(\mathbf{x})(\nabla Y_j(\mathbf{x}) + \widetilde{\mathbf{e}}_j) = 0, \qquad \int_\Omega Y_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{5.20}$$

Учитывая, что $(\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0 = \mathbf{u}_0$, перепишем (5.19) в виде

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \Xi^\varepsilon\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3|\mu_0^{-1}|^{1/2}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.21}$$

С учетом соотношений $\mathbf{w}_\varepsilon = \eta^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_0 = \eta^0\mathbf{u}_0$ из (5.21) выводим

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}_0 - \Upsilon^\varepsilon\mathbf{w}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3|\mu_0^{-1}|^{1/2}\|\eta\|_{L_\infty}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.22}$$

где $\Upsilon(\mathbf{x}) = \widetilde{\eta}(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1} - \mathbf{1}$, $\widetilde{\eta}(\mathbf{x}) := \eta(\mathbf{x})(\Xi(\mathbf{x}) + \mathbf{1})$.

Соотношения (5.15)–(5.18), (5.21) и (5.22) влекут следующий итоговый результат об усреднении решений системы Максвелла в случае $\mathbf{q} = 0$.

Теорема 5.3. *Предположим, что $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Предположим, что μ_0 — положительная матрица с вещественными элементами, а $\eta(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция с вещественными элементами такая, что $\eta(\mathbf{x}) > 0$ и $\eta, \eta^{-1} \in L_\infty$. Пусть $(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)$ — решение системы (5.9) при $\mathbf{r} \in J_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon = (\eta^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_\varepsilon$. Пусть $(\mathbf{w}_0, \mathbf{z}_0)$ — решение усредненной системы (5.12), в которой эффективная матрица η^0 определена согласно (1.16) и (1.17). Пусть $\mathbf{u}_0 = (\eta^0)^{-1}\mathbf{w}_0$ и $\mathbf{v}_0 = \mu_0^{-1}\mathbf{z}_0$. Предположим, что число ε_1 подчинено условию 2.3. Тогда справедливо следующее.*
1) При $\varepsilon \to 0$ поля $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ сходятся к $\mathbf{v}_0$, $\mathbf{z}_0$ соответственно по норме в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$. Более того, при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнены оценки

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_1 \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_2 \varepsilon \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2) Пусть S_ε — сглаживающий оператор по Стеклову, определенный в (1.1). Пусть $\Psi(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\operatorname{rot} \mathbf{p}_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$, где $\mathbf{p}_j$ — Γ-периодическое решение задачи (1.22). Пусть $\widetilde{\mathbf{w}}_0(\mathbf{x})$ — построенное выше продолжение функции $\mathbf{w}_0(\mathbf{x})$ на $\mathbb{R}^3$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ для полей $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ справедливы аппроксимации по норме в пространстве $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ с оценками погрешностей:

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0 - \varepsilon \mu_0^{-1} \Psi^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_3 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.23}$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0 - \varepsilon \Psi^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_4 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.24}$$

3) Пусть $\Xi(\mathbf{x})$ — матрица со столбцами $\nabla Y_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, 3$, где Y_j — Γ-периодическое решение задачи (5.20). Пусть $\widetilde{\eta}(\mathbf{x}) := \eta(\mathbf{x})(\Xi(\mathbf{x}) + \mathbf{1})$, $\Upsilon(\mathbf{x}) := \widetilde{\eta}(\mathbf{x})(\eta^0)^{-1} - \mathbf{1}$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ для полей $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$ справедливы аппроксимации по норме в пространстве $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^3)$ с оценками погрешностей:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \Xi^\varepsilon \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_5 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.25}$$
$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \mathbf{w}_0 - \Upsilon^\varepsilon \mathbf{w}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_6 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.26}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_3$, $\mathfrak{C}_4$, $\mathfrak{C}_5$, $\mathfrak{C}_6$ зависят лишь от $|\mu_0|$, $|\mu_0^{-1}|$, $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Замечание 5.4. 1) *Мы видим, что симметрии в результатах для магнитных полей $\mathbf{v}_\varepsilon$, $\mathbf{z}_\varepsilon$ и электрических полей $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{w}_\varepsilon$ нет. Магнитные поля сходятся по норме в L_2, причем погрешность имеет точный порядок $O(\varepsilon)$, и допускают аппроксимации по норме в H^1 с погрешностями порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$.*

Электрические поля удается лишь аппроксимировать по норме в L_2 с погрешностями порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Это объясняется отсутствием симметрии в самой постановке задачи: мы предположили, что $\mathbf{q} = 0$ в правой части системы (5.5). По этой причине поле $\mathbf{z}_\varepsilon$ оказалось решением вспомогательного уравнения второго порядка, а поле $\mathbf{w}_\varepsilon$ выразилось через производные этого решения.

2) *Отметим, что средние значения периодических матриц-функций $\Xi(\mathbf{x})$ и $\Upsilon(\mathbf{x})$ равны нулю, а потому в силу свойства среднего значения слабый L_2-предел поправок $\Xi^\varepsilon \mathbf{u}_0$ и $\Upsilon^\varepsilon \mathbf{w}_0$ равен нулю. Тогда из* (5.25), (5.26) *вытекает, что поля $\mathbf{u}_\varepsilon$ и $\mathbf{w}_\varepsilon$ слабо сходятся в L_2 к $\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{w}_0$ соответственно, что согласуется с классическими результатами. Поправки $\Xi^\varepsilon \mathbf{u}_0$ и $\Upsilon^\varepsilon \mathbf{w}_0$ можно интерпретировать как корректоры нулевого порядка.*

3) *Аналогичным образом, слабый H^1-предел поправок $\varepsilon \mu_0^{-1} \Psi^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_0$ и $\varepsilon \Psi^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_0$ из* (5.23), (5.24) *равен нулю. Следовательно, поля $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{z}_\varepsilon$ слабо сходятся в H^1 к $\mathbf{v}_0$ и $\mathbf{z}_0$ соответственно.*

Выделим теперь специальные случаи. С помощью предложения 1.3 и замечания 1.4 из теоремы 5.3 выводим следующее утверждение.

Предложение 5.5. 1) *Пусть $\eta^0 = \overline{\eta}$, т. е. столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})$ соленоидальны. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_5 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2) *Пусть $\eta^0 = \underline{\eta}$, т. е. столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})^{-1}$ потенциальны. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнены оценки*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_3 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{z}_\varepsilon - \mathbf{z}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_4 \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLPap] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BS1] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *L_2-теория оператора Максвелла в произвольных областях*, Успехи матем. наук **42** (1987), вып. 6, 61–76.

[BS2] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Самосопряженный оператор Максвелла в произвольных областях*, Алгебра и анализ **1** (1989), вып. 1, 96–110.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла в случае постоянной магнитной проницаемости*, Функц. анализ и его прил. **41** (2007), вып. 2, 3–23.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[Zh] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[ZhPas2] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН **71 (429)** (2016), вып. 3, 27–122.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in* L^2 *for elliptic homogenization problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[LaUr] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

[McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.

[Sa] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

[St] Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[Su1] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла*, Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 5, 162–244.

[Su2] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла с учетом корректора*, Алгебра и анализ **19** (2007), вып. 3, 183–235.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems*: *L_2-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463-476.

[Su4] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453-3493.

[Su5] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), вып. 4, 87–166.

[F] Филонов Н. Д., *Главные особенности магнитной составляющей поля в резонаторах с границей заданного класса гладкости*, Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 2, 241–255.