ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ 3/2018

Резольвенты самосопряженных расширений оператора Лапласа на поперечном подпространстве

Т. А. Болохов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
timur@pdmi.ras.ru

Февраль, 2018

АННОТАЦИЯ

Оператор Лапласа на пространстве поперечных векторных функций трех переменных, исчезающих в начале координат вместе с производными, является симметрическим оператором с индексами дефекта (3,3). С помощью теории Крейна строится выражение для ядра резольвенты самосопряженных расширений этого оператора в виде суммы функции Грина оператора Лапласа на пространстве всех векторных функций и некоторой добавки конечного ранга.

Ключевые слова: оператор Лапласа, поперечное подпространство, самосопряженные расширения операторов, формула Крейна для ядра резольвенты

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

Введение

В работе [2] показано, что трехмерные поперечные векторные функции трех переменных в сферической системе отсчета могут быть представлены (параметризованы) с помощью двух наборов радиальных функций $\{u_{lm}(r)\}$, $\{\phi_{lm}(r)\}$, $1 \le l$, $|m| \le l$ в следующем виде:

$$\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{1\le l,|m|\le l} \big(\hat{l}\frac{u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big) + \sum_{1\le l,|m|\le l} \frac{\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}, \tag{1}$$

где

$$\vec{x} = \vec{x}(r,\Omega), \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \Omega \in \mathbb{S}^2, \quad \hat{l} = \sqrt{l(l+1)},$$

а $\vec{\Upsilon}(\Omega)$ и $\vec{\Psi}(\Omega)$ — это векторные сферические гармоники [8]

$$\vec{\Upsilon}_{lm}(\Omega) = \frac{\vec{x}}{r}Y_{lm}(\Omega), \quad 0 \le l, \quad |m| \le l, \tag{2}$$

$$\vec{\Psi}_{lm}(\Omega) = (l(l+1))^{-1/2} r\vec{\partial}Y_{lm}(\Omega), \quad 1 \le l, \quad |m| \le l, \tag{3}$$

$$\vec{\Phi}_{lm}(\Omega) = (l(l+1))^{-1/2}(\vec{x}\times\vec{\partial})Y_{lm}(\Omega), \quad 1 \le l, \quad |m| \le l. \tag{4}$$

Действие оператора Лапласа $\Delta = -\partial_k^2$ на такие функции сводится к действию на параметры u_{lm}, ϕ_{lm} радиальных операторов

$$T_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2},$$

так что

$$\Delta\vec{f}(\vec{x}) = \sum_{1\le l,|m|\le l} \big(\hat{l}\frac{T_l u_{lm}}{r^2}\vec{\Upsilon}_{lm} + \frac{T_l u'_{lm}}{r}\vec{\Psi}_{lm}\big) + \sum_{1\le l,|m|\le l} \frac{T_l\phi_{lm}}{r}\vec{\Phi}_{lm}.$$

В работе [3] показывается, что операторы T_l, действуя на множестве гладких функций, быстро убывающих в окрестности начала координат

$$\mathring{\mathcal{W}}_l = \{u(r):\ u \in \mathcal{H}_l,\ T_l u \in \mathcal{H}_l,\ u''(0) = 0\}, \quad l \ge 1, \tag{5}$$

в индуцированном из пространства $\mathbb{R}^3$ скалярном произведении $\langle\cdot,\cdot\rangle_l$ для параметров u_{lm} при $l = 1$ являются симметрическими операторами с индексами дефекта $(1,1)$. При этом дефектные векторы (то есть решения уравнений $(T_1^* \mp i\rho^2)c_\pm = 0$) имеют следующий вид

$$c_\pm(r) = D_1\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\} + r^{-1} = D_1\big(\exp\{e^{\mp\frac{3\pi i}{4}}\chi r\} - 1\big), \tag{6}$$

где D_1 — это дифференциальная операция

$$D_1 = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}.$$

Действие самосопряженных расширений T_1^κ операторов T_1 на функции u из некоторой области определения $\mathcal{W}_1^\kappa$ выглядит довольно просто

$$T_1^\kappa u = -\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r^2}u - \frac{2}{r}u'(0), \tag{7}$$

однако, перенос этого действия в пространство $\mathbb{R}^3$ представляет из себя сложное выражение, которое трудно использовать в приложениях.

В данной работе с помощью теории Крейна строится выражение для ядра резольвенты самосопряженного расширения общего вида, описанного выше симметрического оператора на поперечном пространстве.

1. Аналитические векторы

Дефектные векторы (6) позволяют построить по три (соответственно количеству возможных значений проекции $m = -1, 0, 1$ орбитального момента на третью координатную ось для полного момента $l = 1$) вектора в поперечном подпространстве $P^{\perp}$

$$\vec{B}^m_{\pm}(\vec{x}(r,\Omega)) = \vec{\partial} \times \frac{c_{\pm}(r)}{\sqrt{2}r}(\vec{x} \times \vec{\partial})Y_{1m}(\Omega) = \vec{\partial} \times (\vec{x} \times \vec{\partial})\frac{c_{\pm}(r)}{\sqrt{2}r}Y_{1m}(\Omega) = \\ = \sqrt{2}\frac{c_{\pm}(r)}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m}(\Omega) + \frac{c'_{\pm}(r)}{r}\vec{\Psi}_{1m}(\Omega), \quad \vec{B}^m_{\pm} \in P^{\perp}.$$

Пусть $\mathcal{H}^{\perp}$ — это линейное пространство функций вида (1), с коэффициентами u_{lm} лежащими в $\mathring{\mathcal{W}}_l$. Определим симметрический оператор $\Delta^{\perp}$ как сужение операции Δ на $\mathcal{H}^{\perp}$. Из симметричности оператора T_l на $\mathring{\mathcal{W}}_l$ следует, что оператор $\Delta^{\perp}$ симметричнен, а из принадлежности функций $c_{\pm}(r)$ дефектным подпространствам T_1, следует, что векторы $\vec{B}^m_{\pm}$ лежат в дефектных подпространствах операторов $\Delta^{\perp}$, то есть удовлетворяют уравнениям

$$(\vec{B}^m_{\pm}, (\Delta \pm i\chi^2)\vec{h}^{\perp}) = 0, \quad \vec{h}^{\perp} \in \mathcal{H}^{\perp}. \tag{8}$$

Самосопряженные расширения симметрического оператора $\Delta^{\perp}$ общего вида определяются с помощью преобразования Кэли [1, стр. 186] посредством некоторой унитарной матрицы, переводящей элементы $\vec{B}^m_{-}$ одного дефектного подпространства в элементы $\vec{B}^m_{+}$ другого. Теория Крейна [5], [6] позволяет построить выражение для ядра резольвенты произвольного самосопряженного расширения через ядро резольвенты в фиксированной точке области регулярности. С помощью преобразования Фурье можно вычислить выражение для ядра резольвенты $\mathring{R}_w$ самосопряженного оператора Лапласа $\Delta^{\perp}_0$, заданного на множестве регулярных два раза дифференцируемых функций [7, стр. 73]

$$\mathring{R}^{jj'}_w(\vec{x},\vec{y}) = \frac{e^{i\sqrt{w}|\vec{x}-\vec{y}|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|}\delta_{jj'}, \quad \left[(\Delta_0 - w)\mathring{R}_w\right]^{jj'}(\vec{x},\vec{y}) = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{jj'}, \tag{9}$$

здесь разрез у корня из спектрального параметра w выбирается вдоль положительной полуоси

$$\sqrt{\overline{w}} = -\overline{\sqrt{w}}, \quad 0 < \arg w < 2\pi. \tag{10}$$

Резольвента (9) определена на пространстве векторных функций произвольного вида, однако, можно показать, что она, также как и оператор $\Delta^{\perp}_0$, оставляет подпространства $P^{\parallel}$ и $P^{\perp}$ инвариантными. Тем самым, выражение (9) может быть использовано и для построения резольвент операторов, действующих, в том числе и на подпространствах $P^{\|}$ и $P^{\perp}$. Теория Крейна опирается на понятие аналитического вектора. В интерпретации [4, стр. 371] это вектор $\vec{B}_w^m$, который в регулярных точках рассматриваемых самосопряженных расширений аналитически зависит от спектрального параметра w и удовлетворяет уравнению

$$\vec{B}_w^m = \vec{B}_{w_0}^m + (w - w_0)\mathring{R}_w \vec{B}_{w_0}^m. \tag{11}$$

Здесь под понятием *вектор* подразумевается элемент линейного пространства – области определения оператора $(\Delta^{\perp})^*$, сопряженного к симметрическому оператору $\Delta^{\perp}$, в то время как символ вектора у $\vec{B}_w^m$ относится к структуре этого пространства, а индекс m нумерует возможные аналитические векторы. Необходимым условием построения резольвенты с помощью аналитических векторов $\vec{B}_w^m$ является принадлежность этих векторов, взятых в точках $\pm i\chi^2$, дефектным подпространствам симметрического оператора $\Delta^{\perp}$

$$(\Delta^{\perp} \pm i\chi^2)^* \vec{B}_{\pm i\chi^2}^m = 0.$$

Для построения аналитических векторов рассмотрим функцию

$$c_w(r) = D_1\big(e^{i\sqrt{w}r} - 1\big) = r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\big(e^{i\sqrt{w}r} - 1\big)$$

с разрезом по спектральному параметру w, определенному формулой (10), и перенесем ее с помощью разложения (1) в трехмерное пространство. Определим поперечный вектор $\vec{B}_w^m$ следующим образом

$$\vec{B}_w^m(\vec{x}(r,\Omega)) = \sqrt{2}\frac{c_w(r)}{r^2}\vec{\Upsilon}_{1m}(\Omega) + \frac{c'_w(r)}{r}\vec{\Psi}_{1m}(\Omega). \tag{12}$$

Непосредственные вычисления с подстановкой выражений для векторных сферических гармоник [8] дают для этого вектора следующее выражение

$$[B_w^m(\vec{x})]^j = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\Big(\frac{x_m x_j}{r}\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\frac{e^{i\sqrt{w}r} - 1}{r} - \frac{\delta_{jm}}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\frac{e^{i\sqrt{w}r} - 1}{r}\Big)_{r=|x|}. \tag{13}$$

Вычисление, аналогичное вычислению в [3] для дефектных векторов $c_{\pm}(r)$, показывает, что для любого элемента $u \in \mathring{\mathcal{W}}_1$ выполнено равенство

$$\langle c_w, (T_1 - w)u\rangle_1 = 0,$$

а значит функция $c_w(r)$ удовлетворяет уравнению

$$(T_1 - w)^* c_w(r) = (T_1 - w)^* D_1\big(e^{i\sqrt{w}r} - 1\big) = 0.$$

Как следствие, вектор $\vec{B}_w^m$ удовлетворяет уравнению

$$(\Delta^{\perp} - w)^* \vec{B}_w^m = 0,$$

из которого, совместно с аналитичностью и поведением на бесконечности $\vec{B}^m_w$ по параметру w, следует, что функция $\vec{B}^m_w$ является решением уравнения (11).

Далее вычислим скалярное произведение аналитических векторов $\vec{B}^m_w$ для разных значений спектрального параметра: воспользуемся определением (12), снимем интеграл по переменной Ω, проинтегрируем по частям и при помощи формулы

$$D_l^* D_l = -r^{-l}\frac{d}{dr}r^{2l}\frac{d}{dr}r^{-l} = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l-1)}{r^2} = T_{l-1}$$

получим

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{B}^m_w(\vec{x})}\vec{B}^m_{\tilde{w}}(\vec{x})\,d^3x &= \int_0^\infty \Big(2\frac{\bar{c}_w(r)c_{\tilde{w}}(r)}{r^2} + \bar{c}'_w(r)c'_{\tilde{w}}(r)\Big)\,dr = \\
&= \int_0^\infty D_1^*\bar{c}_w(r)D_1^*c_{\tilde{w}}(r)\,dr = \\
&= \int_0^\infty D_1^*D_1(e^{i\sqrt{\bar{w}}r}-1)D_1^*D_1(e^{i\sqrt{\tilde{w}}r}-1)\,dr = \qquad (14)\\
&= \int_0^\infty \frac{d^2}{dr^2}(e^{i\sqrt{\bar{w}}r}-1)\frac{d^2}{dr^2}(e^{i\sqrt{\tilde{w}}r}-1)\,dr = \bar{w}\tilde{w}\int_0^\infty e^{i\sqrt{\bar{w}}r}e^{i\sqrt{\tilde{w}}r}\,dr = \\
&= \frac{i\bar{w}\tilde{w}}{\sqrt{\bar{w}}+\sqrt{\tilde{w}}}. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Вследствие ортогональности векторных сферических гармоник [8], аналитические векторы $\vec{B}^m_w$ ортогональны при отличающихся значениях индекса m, то есть

$$\int_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{B}^m_w(\vec{x})}\vec{B}^{\tilde{m}}_{\tilde{w}}(\vec{x})\,d^3x = \delta_{m\tilde{m}}\frac{i\bar{w}\tilde{w}}{\sqrt{\bar{w}}+\sqrt{\tilde{w}}}. \qquad (16)$$

Из преобразования (15) и положительности мнимой части корня (10) при $0 < \arg w < 2\pi$ также можно вычислить выражение для нормы этих векторов

$$\|\vec{B}^m_w\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \overline{\vec{B}^m_w(\vec{x})}\vec{B}^m_w(\vec{x})\,d^3x = \frac{i\bar{w}w}{\sqrt{w}-\overline{\sqrt{w}}} = \frac{|w|^2}{2\mathrm{Im}\sqrt{w}}, \quad 0 < \arg w < 2\pi. \qquad (17)$$

Отсюда, в свою очередь, следует, что нормы векторов $\vec{B}^m_{+i\chi^2}$ и $\vec{B}^m_{-i\chi^2}$, лежащих в разных дефектных подпространствах симметрического оператора $\Delta^\perp$ совпадают.

2. Построение резольвенты

Самосопряженное расширение общего вида $\Delta^\perp_u$ симметрического оператора $\Delta^\perp$ может быть задано с помощью унитарного отображения U^α, переводящего элементы $\vec{B}^m_-$ одного дефектного подпространства в элементы $\vec{B}^m_+$ другого.

$$U^\alpha : \, u^n_m \vec{B}^m_{-i\chi^2} \to \alpha_n u^n_{m'} \vec{B}^{m'}_{+i\chi^2}, \quad u^{n'}_m \bar{u}^n_m = \delta_{n'n}, \quad |\alpha_n| = 1,$$

(здесь суммирование производится по индексам m и m', но не по n). То есть действие U^α определено таким образом, что векторы u^n_m по индексу m являются собственными для отображения U^α из базиса $\{\vec{B}^m_{-i\chi^2}\}$ в базис $\{\vec{B}^{m'}_{+i\chi^2}\}$, и при этом U^α может быть записано в следующем виде

$$U^\alpha = \frac{U^\alpha_{mm'}}{\|\vec{B}_{i\chi^2}\|^2} \vec{B}^m_{i\chi^2} \big(\vec{B}^{m'}_{-i\chi^2}, \cdot\big)_{\mathbb{R}^3}, \quad U^\alpha_{mm'} = \sum_{n=1}^{3} \alpha_n u^n_m \bar{u}^n_{m'}. \tag{18}$$

Можно заметить, что введенное в (9) ядро резольвенты $\mathring{R}_w(\vec{x}, \vec{y})$, соответствует самосопряженному расширению $\Delta_0^\perp$, определяемому единичной матрицей, то есть отображению $\vec{B}^m_{-i\chi^2}$ в $\vec{B}^m_{+i\chi^2}$. Из определения преобразования Кэли [1, стр. 186] и формулы (17) следует, что разность резольвент рассматриваемых самосопряженных расширений, взятых в точке $i\chi^2$, определяется выражением

$$R_{i\chi^2} - \mathring{R}_{i\chi^2} = \frac{U^\alpha_{mm'} - \delta_{mm'}}{2i\chi^2 \|\vec{B}_{i\chi^2}\|^2} \vec{B}^m_{i\chi^2} \big(\vec{B}^{m'}_{-i\chi^2}, \cdot\big)_{\mathbb{R}^3} =$$

$$= \sum_n u^n_m \bar{u}^n_{m'} \frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{2} i\chi^5} \vec{B}^m_{i\chi^2} \big(\vec{B}^{m'}_{-i\chi^2}, \cdot\big)_{\mathbb{R}^3}. \tag{19}$$

Теория Крейна [4, стр. 374] утверждает, что разность резольвент самосопряженных расширений симметрического оператора в произвольной точке w может быть записана через аналитические векторы $\vec{B}^m_w$ в следующем виде

$$R_w - \mathring{R}_w = \beta_{mm'}(w) \vec{B}^m_w \big(\vec{B}^{m'}_{\bar{w}}, \cdot\big)_{\mathbb{R}^3}, \tag{20}$$

где $\beta_{mm'}(w)$ — это матричная функция, удовлетворяющая уравнению

$$\beta^{-1}_{mm'}(w) = \beta^{-1}_{mm'}(i\chi^2) - (w - i\chi^2)\big(\vec{B}^m_{\bar{w}}, \vec{B}^{m'}_{i\chi^2}\big)_{\mathbb{R}^3}. \tag{21}$$

Формула (19) дает нам выражение для функции $\beta_{mm'}(w)$ в точке $i\chi^2$

$$\beta_{mm'}(i\chi^2) = \sum_n u^n_m \bar{u}^n_{m'} \frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{2} i\chi^5},$$

из которого, решая уравнение (21), можно вычислить значение $\beta_{mm'}(w)$ в произвольной точке

$$\beta_{mm'}(w) = \sum_n \frac{u^n_m \bar{u}^n_{m'}}{i\chi^2} \frac{\alpha_n - 1}{\sqrt{2}\chi^3 + iw(\alpha_n - 1)(\sqrt{w} + \sqrt{i\chi^2})}. \tag{22}$$

Переходя к конкретным функциям в координатах в формуле (20) получаем следующее выражение для разности ядер резольвент

$$R^{jj'}_w(\vec{x}, \vec{y}) - \mathring{R}^{jj'}_w(\vec{x}, \vec{y}) = \beta_{mm'}(w) [B^m_w(\vec{x})]^j [B^{m'}_w(\vec{y})]^{j'}, \tag{23}$$

где явный вид векторов $[B_w^m(\vec{x})]^j$ приведен в (13). Данное выражение является аналитической функцией спектрального параметра w в области $0 < \arg w < 2\pi$, за исключением некоторого количества полюсов, определяемых знаменателями матричной функции $\beta_{mm'}(w)$. Эти полюса определяют собственные значения дискретного спектра оператора $\Delta_u^\perp$, а соответствующие вычеты резольвенты — проекторы на собственные подпространства.

3. Заключение

Мы построили выражение (23) с подстановкой (22) для ядра резольвенты самосопряженного расширения симметрического оператора Лапласа на поперечном подпространстве в сферических координатах. Самосопряженное расширение может иметь произвольный вид и задается с помощью преобразования Кэли отображением (18).

Список литературы

[1] Рихтмайер Р. Д. *Принципы современной математической физики*, т. 1, М.: Мир, 1982, 486 с.

[2] Болохов Т. А., “Расширения квадратичной формы векторного поперечного оператора Лапласа”, Записки научых семинаров ПОМИ том 433, 2015, стр. 78.

[3] Болохов Т. А., “Свойства радиальной части оператора Лапласа при l=1 в специальном скалярном произведении”, Записки научых семинаров ПОМИ том 434, 2015, стр. 32.

[4] Ахиезер Н. И., Глазман И. М. *Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве*, М.: Наука, Физматлит, 1966, 544 с.

[5] Крейн М.Г. “Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения I и II”, Математический сборник том 20(63), 1947, 431–495; Математический сборник том 21(64), 1947, 365–404;

[6] Хатсон В., Пим Дж. С. Приложения функционального анализа и теория операторов. Пер. с англ. М.: Мир, 1983, 432 с.

[7] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. 2. Гармонический анализ и самосопряженность. М.: Мир, 1978, 395 с.

[8] Barrera R. G., Estevez G. A., Giraldo, J., “Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics”, European Journal of Physics, Vol 6, Issue 4, 1985, 287–294.