

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ДВУМЕРНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЧЕНИЙ ОБЩЕГО ВИДА

Н. А. КАРАЗЕЕВА

Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия
nataliakarazeeva@gmail.com

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается начально-краевая задача для аппроксимаций системы интегро-дифференциальных уравнений, обобщающих уравнения движения вязкоупругих жидкостей. Доказано существование решения такой начально-краевой задачи и стремление его к решению начально-краевой задачи для невозмущенной системы при стремлении параметра ε к нулю. Приведены различные примеры неньютоновских жидкостей, описываемые данной моделью.

Ключевые слова: вязкоупругие жидкости, интегро-дифференциальные уравнения

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин, О. М. Фоменко

1 Введение

В работе рассматриваются ϵ -аппроксимации двумерных систем уравнений движения сплошной среды

$$v_t + (v \cdot \nabla)v - \operatorname{div} \sigma + \operatorname{grad} p = f \quad (1)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (2)$$

где σ - девиатор тензора напряжений. Рассматриваются реологические уравнения вида

$$\sigma = 2\nu D + \mathbf{K}D, \quad (3)$$

где D - тензор скоростей деформации, \mathbf{K} - нелинейный оператор, на который накладываются условия, описываемые ниже (непрерывность, положительная определенность). К таким системам относятся системы уравнений, описывающих движение неньютоновских жидкостей (в частности, линейных вязкоупругих жидкостей типа Олдройта, жидкостей Яуманна-Спрингса, жидкостей 3 порядка).

В численных задачах иногда бывает трудно удовлетворить условию несжимаемости $\operatorname{div} v = 0$, поэтому целесообразно исследовать аппроксимации этого уравнения. Мы рассмотрим аппроксимацию вида

$$\operatorname{div} v^\epsilon + \epsilon p^\epsilon = 0 \quad (4)$$

Такие аппроксимации изучались Ладыженской и Серегиним для уравнений Навье-Стокса [2]. Системы уравнений линейных вязкоупругих жидкостей типа Олдройта и ϵ -аппроксимации для них исследовались в работах Осколкова [3, 4, 5]. Что касается невозмущенной системы (1) с оператором σ , удовлетворяющим реологическому соотношению (3), то соответствующая начально-краевая задача с условием прилипания рассмотрена в работе автора [6]. А именно в этой работе исследовалась система уравнений

$$v_t + (v \cdot \nabla)v - \operatorname{div} \mathbf{K}D - \nu \Delta v + \operatorname{grad} p = f \quad (5)$$

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (6)$$

Система изучалась в цилиндре Q_T , $Q_T = \Omega \times [0, T]$, где область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ограничена и имеет гладкую границу $\partial\Omega$ класса C^1 . D -тензор скоростей деформации $D = \frac{1}{2}(\nabla v + (\nabla v)^T)$. Здесь $\mathbf{K} : L_2(Q_T) \rightarrow L_2(Q_T)$ - матричный оператор, удовлетворяющий следующим условиям :

1. Для \mathbf{K} выполнено условие Липшица

$$\|\mathbf{K}(D_1 - D_2)\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|D_1 - D_2\|_{2,\Omega}, \quad (7)$$

2. \mathbf{K} неотрицательно определен, то есть

$$\int_0^t \int_{\Omega} (\mathbf{K}D : D) \geq 0, \quad \forall t \leq T, \quad (8)$$

3. Оператор \mathbf{K} таков, что оператор $\frac{\partial}{\partial t} \circ \mathbf{K}$ определен и ограничен в $L_2(Q_T)$, то есть

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K}D) \right\|_{2, Q_T} \leq C_2 \|D\|_{2, Q_T}. \quad (9)$$

4. Значения функции $\mathbf{K}D$ равны 0 на основании цилиндра Q_T для любого D

$$\mathbf{K}D(0) = 0. \quad (10)$$

Для таких систем уравнений рассматривалась начально-краевая задача

$$v(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad (11)$$

$$v(x, t)|_{t=0} = v_0(x). \quad (12)$$

В работе [6] доказана теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи (5), (6), (11), (12), а именно доказана следующая теорема

Теорема 1. *Предположим, что правая часть системы (5) $f, f_t \in L_{2,1}(Q_T)$, начальное значение $v_0 \in W_2^2(\Omega) \cap J^0(\Omega)$. Тогда начально-краевая задача (5), (6), (11), (12) имеет единственное решение $v \in L_{\infty}(0, T, J^0(\Omega))$, такое что $v_t \in L_{\infty}(0, T, J^0(\Omega))$, а функции $v_x, v_{xt} \in L_2(Q_T)$.*

Здесь подразумевается обобщенное решение задачи, то есть такая функция v , которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^T (v_t, \varphi)_{\Omega} + \int_0^T (v \cdot \nabla v, \varphi)_{\Omega} + \nu \int_0^T (v_x, \varphi_x)_{\Omega} + \\ \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{K}D : (D_{\varphi})) = \int_0^T (f, \varphi)_{\Omega} \end{aligned} \quad (13)$$

для любой двумерной вектор-функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q_T) \cap J^0(Q_T)$. Через D_{φ} обозначен тензор скоростей деформации функции φ . Под пространством $\overset{\circ}{J}(\Omega)$ понимается замыкание в L_2 пространства $J(\Omega)$, которое в свою очередь определяется так

$$J(\Omega) = \{v \in \overset{\circ}{C}^{\infty} \mid \operatorname{div} v = 0\}. \quad (14)$$

А $\overset{\circ}{J}(Q_T)$ -пространство функций, принадлежащих при почти всех t пространству $\overset{\circ}{J}(\Omega)$.

Будем использовать для обозначения норм в пространствах $L_p(\Omega)$, $L_p(Q_T)$ символы $\|v\|_{p,\Omega}$ и $\|v\|_{p,Q_T}$ соответственно. Кроме того используем следующие обозначения. Под символом $L_{2,1}(Q_T)$ мы будем понимать пространство функций v с конечной нормой

$$\|v\|_{2,1} = \int_0^T \left(\int_{\Omega} |v(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt. \quad (15)$$

А символ $L_{2,\infty}(Q_T)$ будем использовать для обозначения пространства функций v с конечной нормой

$$\|v\|_{2,\infty} = \text{ess sup}_{t \in [0,T]} \left(\int_{\Omega} |v(x,t)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему уравнений

$$v_t^\epsilon + (v^\epsilon \cdot \nabla) v^\epsilon - \nu \Delta v^\epsilon + \frac{1}{2} v^\epsilon \text{div } v^\epsilon - \text{div } \mathbf{K} D^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \nabla \text{div } v^\epsilon = f. \quad (17)$$

Будем называть эту систему ϵ -аппроксимацией системы (5) (6). (Член $\frac{1}{2} v^\epsilon \text{div } v^\epsilon$ введен для удобства. В дальнейшем мы покажем, что при $\epsilon \rightarrow 0$ этот член также стремится к 0.) Здесь v^ϵ - вектор скорости. Система рассматривается в цилиндре $Q_T, Q_T = \Omega \times [0, T]$, где область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ ограничена и имеет гладкую границу $\partial\Omega$ класса C^1 . На боковой поверхности цилиндра предполагается выполненным условие прилипания

$$v^\epsilon(x, t)|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad (18)$$

а также предполагается выполненным начальное условие

$$v^\epsilon(x, t)|_{t=0} = v_0^\epsilon(x), x \in \Omega. \quad (19)$$

На оператор $\mathbf{K} : L_2(Q_T) \rightarrow L_2(Q_T)$ накладываются условия (7)-(10). Назовем обобщенным решением системы (17)-(19) функцию v^ϵ , которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \int_0^T (v_t^\epsilon, \varphi)_\Omega + \int_0^T (v^\epsilon \cdot \nabla v^\epsilon, \varphi)_\Omega + \nu \int_0^T (v_x^\epsilon, \varphi_x)_\Omega + \\ + \frac{1}{2} \int_0^T (v^\epsilon \text{div } v^\epsilon, \varphi)_\Omega + \int_0^T \int_{\Omega} (\mathbf{K} D^\epsilon : D_\varphi) + \\ + \frac{1}{\epsilon} \int_0^T (\text{div } v^\epsilon, \text{div } \varphi)_\Omega = \int_0^T (f, \varphi)_\Omega \end{aligned} \quad (20)$$

для любой функции $\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^1(Q_T)$.

3 Примеры неньютоновских жидкостей

В этом разделе мы приведем примеры неньютоновских жидкостей, которые вкладываются в данную модель. Это обобщенные вязкоупругие жидкости типа Яуманна-Спрингса, то есть жидкости, которым соответствует реологическое соотношение

$$\sigma = 2\mu D + \int_0^t K(t - \tau) D(x, \tau) d\tau \quad (21)$$

Здесь предполагается, что функция K из пространства $W_2^1([0, T] \times [0, T])$ такая, что преобразование Фурье функции K функция $L = \mathcal{F}(K)$ неотрицательна. Также предполагается, что функция K принимает конечное значение $K(0)$. Проверим, что оператор \mathbf{K} , определенный

$$\mathbf{K}D = \int_0^t K(t - \tau) D(x, \tau) d\tau \quad (22)$$

удовлетворяет свойствам (7-10). В случае, когда преобразование Фурье функции K неотрицательно, соответствующая квадратичная форма неотрицательно определена (выполнено свойство (8)). Этот факт следует из леммы

Лемма 1. Пусть преобразование Фурье функции K неотрицательно. Тогда для любой функции $u(\tau) \in L_2([0, t])$ квадратичная форма также неотрицательна

$$I = \int_0^t \int_0^\theta K(\theta - \tau) u(\theta) u(\tau) d\tau d\theta \geq 0. \quad (23)$$

Для доказательства нужно продолжить функцию K четным образом на отрицательную полуось. Тогда ввиду четности функции K интеграл по "верхнему треугольнику" равен интегралу по "нижнему".

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^\theta K(\theta - \tau) u(\theta) u(\tau) d\tau d\theta &= \int_0^t \int_\tau^t K(\theta - \tau) u(\theta) u(\tau) d\theta d\tau = \\ &= \int_0^t \int_\theta^t K(\tau - \theta) u(\tau) u(\theta) d\tau d\theta = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t K(\theta - \tau) u(\theta) u(\tau) d\theta d\tau. \end{aligned} \quad (24)$$

Продолжим функцию u нулем на все пространство \mathbf{R} . Тогда исследуемая квадратичная форма I преобразуется к виду

$$\begin{aligned} 2I &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta - \tau) u(\theta) u(\tau) d\theta d\tau = (\tilde{\mathbf{K}}u, u) = (\mathcal{F}(\tilde{\mathbf{K}}u), \overline{\mathcal{F}u}) = \\ &= (\mathcal{F}(K) \mathcal{F}(u), \overline{\mathcal{F}u}) \end{aligned} \quad (25)$$

где оператор $\tilde{\mathbf{K}}$ есть оператор свертки $K * u$

$$\tilde{\mathbf{K}}u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\theta - \tau)u(\theta) d\theta \quad (26)$$

В результате мы получили, что $2I = \mathcal{F}(K)\|\mathcal{F}(u)\|^2 \geq 0$.
Лемма доказана.

Непрерывность оператора \mathbf{K} вытекает из того факта, что оператор типа Вольтерра можно представить как интегральный оператор с треугольным ядром, и он будет непрерывен, как оператор типа Гильберта-Шмидта.

Проверим свойство (9).

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{K}D) \right\|_{2, Q_T} &= \left\| \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t K(t - \tau)D(x, \tau) d\tau \right\|_{2, Q_T} \leq \\ &\leq \|K(0)D(x, t)\|_{2, Q_T} + \|\mathbf{K}'D\|_{2, Q_T}, \end{aligned} \quad (27)$$

где \mathbf{K}' - интегральный оператор типа Вольтерра с ядром $\frac{\partial}{\partial t}K$:

$$(\mathbf{K}'D)(x, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} K(t - \tau)D(x, \tau) d\tau \quad (28)$$

Оператор \mathbf{K}' тоже непрерывен в пространстве $L_2(Q_T)$. Тогда мы имеем

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{K}D) \right\|_{2, Q_T} \leq K(0)\|v_x\|_{2, Q_T} + C_{K'}\|v_x\|_{2, Q_T}, \quad (29)$$

где $C_{K'}$ - норма оператора \mathbf{K}' в пространстве $L_2(Q_T)$.

Частным случаем линейных вязкоупругих жидкостей являются жидкости типа Джеффри-Олдройта [3]. Для них ядро оператора \mathbf{K} выражается в виде суммы экспонент

$$K(t) = \sum_{s=0}^m \beta_s e^{-\alpha_s t}, \quad \alpha_s, \beta_s \geq 0. \quad (30)$$

(Можно также рассматривать $m = \infty$).

Если продолжить такое ядро четным образом на отрицательную полуось, то преобразование Фурье для такой функции будет неотрицательным. Действительно

$$\mathcal{F}(K) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_{s=1}^m \frac{2\beta_s \alpha_s}{\xi^2 + \alpha_s^2} \geq 0. \quad (31)$$

Еще одним примером, иллюстрирующим представленную модель, являются матричные операторы $\mathbf{K} = \{\mathbf{K}_{ij}\}_{i,j=1,2}$, компоненты которых \mathbf{K}_{ij} образуют симметричную матрицу и удовлетворяют соотношениям (7) - (10).

Кроме того, в качестве примеров, укладывающихся в данную модель, можно привести нелинейные вязкоупругие жидкости, в частности, жидкости, для которых реологическое уравнение имеет вид

$$(\mathbf{K}D)(x, t) = \int_0^t K(t - \tau) h(|D(x, \tau)|) D(x, \tau) d\tau, \quad (32)$$

где h - некоторая непрерывная ограниченная функция [11]. Такой оператор является нелинейным оператором Гаммерштейна. Требование положительной определенности (свойство (8)) накладывается дополнительно. Оно имеет физический смысл, поскольку квадратичная форма $(\operatorname{div} \sigma, v)_\Omega$ соответствует диссипации энергии.

Для таких жидкостей можно применять полученные результаты.

4 Априорные оценки

Получим некоторые априорные оценки решений начально-краевой задачи (17)-(19). Для этого умножим уравнение (17) на v^ϵ и проинтегрируем по области Ω . В результате получим тождество

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \nu \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \int_\Omega (\mathbf{K}D^\epsilon : D^\epsilon)_{2,\Omega} + \\ \frac{1}{\epsilon} \|\operatorname{div} v^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 = (f, v^\epsilon)_{2,\Omega}. \end{aligned} \quad (33)$$

Проинтегрируем уравнение (33) по времени t в пределах $[0, t]$ и придем к неравенству

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v^\epsilon(t)\|_{2,\Omega}^2 + \nu \int_0^t \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \int_\Omega ((\mathbf{K}D^\epsilon) : D^\epsilon) + \\ + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \|\operatorname{div} v^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{2} \|v^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2 + \\ + \int_0^t |(f, v^\epsilon)_{2,\Omega}| \leq \frac{1}{2} \|v^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \|v^\epsilon\|_{2,\Omega} \cdot \|f\|_{2,\Omega} \leq \\ \frac{1}{2} \|v^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2 + \|v^\epsilon\|_{2,\infty} \cdot \|f\|_{2,1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Откинув три последние положительные слагаемые в левой части (34) и перейдя к \sup по t , мы получим квадратное неравенство для $\|v^\epsilon\|_{2,\infty}$

$$\|v^\epsilon\|_{2,\infty}^2 \leq \|v^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2\|v^\epsilon\|_{2,\infty} \cdot \|f\|_{2,1}, \quad (35)$$

откуда мы получаем оценку для $\|v^\epsilon\|_{2,\infty}$

$$\|v^\epsilon\|_{2,\infty} \leq \|f\|_{2,1} + \sqrt{\|f\|_{2,1}^2 + \|v^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2} = C_3 \quad (36)$$

Теперь, вернувшись к неравенству (34), подставив в его правую часть оценку (36) и переходя к супремуму по t , мы получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|v^\epsilon(t)\|_{2,\Omega}^2 + \nu \int_0^t \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t \int_\Omega ((\mathbf{K}D^\epsilon) : D^\epsilon) + \\
& + \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \|\operatorname{div} v^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{1}{2} \|v^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2 + \\
& + \|f\|_{2,1} \cdot (\|f\|_{2,1} + \sqrt{\|f\|_{2,1}^2 + \|v^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2}) = C_4 \quad (37)
\end{aligned}$$

Продифференцируем обе части уравнения (17) по t , умножим скалярно на v_t и проинтегрируем по области Ω . В результате у нас получится следующее интегральное тождество

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \nu \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\operatorname{div} v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \\
& + \left(\frac{d}{dt} M^\epsilon(v^\epsilon), v_t^\epsilon \right)_\Omega + \int_\Omega \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{K}D^\epsilon) : D_t^\epsilon \right] = (f_t, v_t^\epsilon)_\Omega, \quad (38)
\end{aligned}$$

где через $M^\epsilon(v^\epsilon)$ мы обозначим

$$M^\epsilon(v^\epsilon) = (v^\epsilon \cdot \nabla) v^\epsilon + \frac{1}{2} v^\epsilon \operatorname{div} v^\epsilon \quad (39)$$

Оценим по модулю четвертый и пятый члены левой части (38). Для этого сначала преобразуем четвертый член

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega \frac{d}{dt} M^\epsilon(v^\epsilon) \cdot v_t^\epsilon = \int_\Omega \frac{d}{dt} (v^{k,\epsilon} v_{x_k}^\epsilon) \cdot v_t^\epsilon + \\
& + \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{d}{dt} (v^\epsilon \operatorname{div} v^\epsilon) \cdot v_t^\epsilon = \int_\Omega (v_t^{k,\epsilon} v_{x_k}^\epsilon \cdot v_t^\epsilon + v^{k,\epsilon} v_{x_k t}^\epsilon v_t^\epsilon + \\
& + \frac{1}{2} v_t^\epsilon \operatorname{div} v^\epsilon v_t^\epsilon + \frac{1}{2} v^\epsilon \operatorname{div} v_t^\epsilon v_t^\epsilon) = \\
& = (v_t^{k,\epsilon} v_{x_k}^\epsilon, v_t^\epsilon)_\Omega + \frac{1}{2} (v^\epsilon \operatorname{div} v_t^\epsilon, v_t^\epsilon)_\Omega. \quad (40)
\end{aligned}$$

Здесь v^i - компоненты вектора v , $i = 1, 2$.

В итоге получаем

$$\begin{aligned}
I = \left| \left(\frac{d}{dt} M(v^\epsilon), v_t^\epsilon \right)_\Omega \right| & \leq |(v_t^{k,\epsilon} v_{x_k}^\epsilon, v_t^\epsilon)_\Omega| + \\
& + \frac{1}{2} |(v^\epsilon \operatorname{div} v_t^\epsilon, v_t^\epsilon)_{2,\Omega}| \leq \|v_t^\epsilon\|_{4,\Omega}^2 \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega} + \\
& + \|v^\epsilon\|_{4,\Omega} \|\operatorname{div} v_t^\epsilon\|_{2,\Omega} \|v_t^\epsilon\|_{4,\Omega}. \quad (41)
\end{aligned}$$

Используем далее для оценки $\|v^\epsilon\|_{4,\Omega}$ и $\|v_t^\epsilon\|_{4,\Omega}$ неравенство (см. Ладыженская О.А. [1])

$$\|u\|_{4,\Omega}^4 \leq 4\|u\|_{2,\Omega}^2 \|u_x\|_{2,\Omega}^2. \quad (42)$$

Здесь и далее используется обозначение $\|v_x\|_{2,\Omega}^2 = \sum_{i=1}^2 \|v_{x_i}\|_{2,\Omega}^2$.

Подставляя полученные выражения в (41), мы приходим к оценке

$$I \leq C_5 \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega} \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega} \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega} + C_6 \|v^\epsilon\|_{2,\Omega}^{\frac{1}{2}} \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^{\frac{1}{2}} \|\operatorname{div} v_t^\epsilon\|_{2,\Omega} \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^{\frac{1}{2}} \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^{\frac{1}{2}}. \quad (43)$$

Применяя к (43) неравенство Юнга, мы получаем следующую оценку

$$I \leq \delta_1 \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + C_{\delta_1} \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \delta_2 \|\operatorname{div} v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + C_{\delta_2} \|v^\epsilon\|_{2,\Omega} \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega} \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega} \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}, \quad (44)$$

где $\delta_i (i = 1, 2)$ - достаточно маленькие величины, которые будут выбраны позднее, а C_{δ_i} - константы, зависящие от δ_i , ($i = 1, 2$).

Далее мы имеем

$$I \leq \delta_1 \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + C_{\delta_1} \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \delta_2 \|\operatorname{div} v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \delta_3 \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + C_{\delta_3} \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2. \quad (45)$$

Здесь уже C_{δ_3} зависит от C_{δ_2} , δ_3 и от нормы $\|v^\epsilon\|_{2,\Omega}$, которая ограничена в силу (36).

Переходим теперь к оценке следующего члена левой части (38).

$$II = \left| \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K} D^\epsilon) : D_t^\epsilon \right] \right| \leq \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K} D^\epsilon) \right\|_{2,\Omega} \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}. \quad (46)$$

Действуя аналогичным образом и еще раз используя неравенство Юнга, мы можем оценить член II следующим образом

$$II \leq \kappa_1 \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + C_{\kappa_1} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K} D^\epsilon) \right\|_{2,\Omega}^2, \quad (47)$$

где $C_{\kappa_1} = \frac{1}{4} \kappa_1^{-1}$. Далее для правой части (38) мы имеем

$$|(f_t, v_t^\epsilon)_{2,\Omega}| \leq \|f_t\|_{2,\Omega} \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega} \leq \frac{1}{2} \|f_t\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|f_t\|_{2,\Omega} \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2. \quad (48)$$

Собирая вместе оценки (45), (47) и (48) и подставляя их в интегральное тождество (38), мы приходим к неравенству

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \nu \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{\epsilon} \|\operatorname{div} v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \leq \\
& \leq \delta_1 \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + C_{\delta_1} \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \delta_2 \|\operatorname{div} v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \delta_3 \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \\
& + C_{\delta_3} \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \kappa_1 \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + C_{\kappa_1} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K} D^\epsilon) \right\|_{2,\Omega}^2 + \\
& + \frac{1}{2} \|f_t\|_{2,\Omega} + \frac{1}{2} \|f_t\|_{2,\Omega} \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2. \quad (49)
\end{aligned}$$

Выбирая $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \kappa_1$ достаточно малыми, (например, $\delta_1 = \delta_3 = \kappa_1 = \frac{\nu}{4}$, $\delta_2 \leq \frac{1}{2\epsilon}$), мы получаем

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\nu}{4} \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{4\epsilon} \|\operatorname{div} v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \leq \\
& \leq \|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \left[\|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 (C_{\delta_1} + C_{\delta_3}) + \frac{1}{2} \|f_t\|_{2,\Omega} \right] + \left[\frac{1}{2} \|f_t\|_{2,\Omega} + C_{\kappa_1} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K} D^\epsilon) \right\|_{2,\Omega}^2 \right]. \quad (50)
\end{aligned}$$

Можно считать $\epsilon \leq 1$, тогда в качестве δ_2 можно взять $\frac{1}{2}$. Тогда $C_{\delta_2}, C_{\delta_3}$ и другие константы правых частей не зависят от ϵ .

Вследствие леммы Гронуолла

$$\begin{aligned}
\|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 & \leq \exp \left(\int_0^t [\|f_t\|_{2,\Omega} + 2(C_{\delta_1} + C_{\delta_3}) \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2] d\tau \right) \cdot \\
& \cdot \left[\|v_t^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2 + \int_0^t (\|f_t\|_{2,\Omega} + 2C_{\kappa_1} \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K} D^\epsilon) \right\|_{2,\Omega}^2) d\tau \right]. \quad (51)
\end{aligned}$$

Поскольку $\int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{K} D^\epsilon) \right\|_{2,\Omega}^2 \leq C_2^2 \int_0^t \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2$, а благодаря оценке (37) $\int_0^t \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 \leq \frac{C_4}{\nu}$, мы получаем следующую оценку для $\|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2$

$$\begin{aligned}
\|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 & \leq \exp \left[\left(\int_0^t \|f_t\|_{2,\Omega} \right) + 2(C_{\delta_1} + C_{\delta_3}) \frac{C_4}{\nu} \right] \cdot \\
& \cdot \left[\|v_t^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2 + \left(\int_0^t \|f_t\|_{2,\Omega} \right) + 2C_{\kappa_1} C_2^2 C_3^2 \right] = C_7. \quad (52)
\end{aligned}$$

Кроме того, заменив норму $\|v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}^2$ на $\|v_t^\epsilon\|_{2,\infty}^2$ в правой части (50) и проинтегрировав (50) по t от 0 до t , мы можем оценить норму $\|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}$ и норму $\|\operatorname{div} v_t^\epsilon\|_{2,\Omega}$, причем оценки норм $\|v_t^\epsilon\|_{2,\infty}$ и $\|v_{xt}^\epsilon\|_{2,\Omega}$ не зависят от ϵ . Действительно,

$$\begin{aligned}
& \|v_t^\epsilon(t)\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\nu}{2} \|v_{xt}^\epsilon\|_{2,Q_T}^2 + \frac{1}{2\epsilon} \|\operatorname{div} v_t^\epsilon\|_{2,Q_T}^2 \leq \\
& \leq \|v_t^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2\|v_t^\epsilon\|_{2,\infty}^2 \cdot \left[2(C_{\delta_1} + C_{\delta_3}) \left(\int_0^t \|v_x^\epsilon\|_{2,\Omega}^2 d\tau \right) + \|f_t\|_{2,1} \right] + \\
& \quad + \|f_t\|_{2,1} + 2C_{\kappa_1} \left(\int_0^t \left\| \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{K} D^\epsilon \right\|_{2,\Omega}^2 d\tau \right) \leq \\
& \leq \|v_t^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2C_7 [2(C_{\delta_1} + C_{\delta_3}) \|v_x^\epsilon\|_{2,Q_T}^2 + \|f_t\|_{2,1}] + \\
& \quad + \|f_t\|_{2,1} + 2C_{\kappa_1} C_2^2 \frac{C_4}{\nu} \leq \\
& \leq \|v_t^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}^2 + 2C_7 \left[2(C_{\delta_1} + C_{\delta_3}) \frac{C_4}{\nu} + \|f_t\|_{2,1} \right] + \\
& \quad + \|f_t\|_{2,1} + 2C_{\kappa_1} C_2^2 \frac{C_4}{\nu} = C_8. \quad (53)
\end{aligned}$$

Оценку $\|v_t^\epsilon(0)\|_{2,\Omega}$ можно получить из уравнения (17). Действительно,

$$v_t^\epsilon(0) = f(0) + \frac{1}{\epsilon} \operatorname{grad} \operatorname{div} v_0 - \frac{1}{2} v_0^\epsilon \operatorname{div} v_0^\epsilon + \nu \Delta v_0^\epsilon - (v_0^\epsilon \cdot \nabla) v_0^\epsilon + (\operatorname{div} \mathbf{K} D^\epsilon)(0). \quad (54)$$

В силу свойства (10) оператора \mathbf{K} правая часть при фиксированном ϵ равна константе \hat{C} .

Итак, мы знаем оценку нормы $\|v_{xt}\|_{2,Q_T}$. Следовательно, норма $\|v_x\|_{2,\infty}$ также конечна. Кроме того мы оценили норму $\|\operatorname{div} v_t\|_{2,Q_T}$.

5 Теоремы существования

Полученные оценки позволяют утверждать, что верна следующая теорема существования решения для возмущенной начально-краевой задачи (17), (18), (19).

Теорема 2. Пусть Ω - ограниченная область \mathbf{R}^2 с гладкой границей $\partial\Omega \in C^1$. Предположим, что правая часть системы (17) $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $f_t \in L_{2,1}(Q_T)$, а начальные данные $v_0^\epsilon \in W_2^2(\Omega)$. Тогда начально-краевая задача (17), (18), (19) имеет единственное решение $v^\epsilon \in L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$, для которого $\operatorname{div} v^\epsilon \in L_2(Q_T)$, $\operatorname{div} v_t^\epsilon \in L_2(Q_T)$. Это решение удовлетворяет тождеству (13) для любой функции $\varphi \in W_2^{1,0}(\Omega)$ и кроме того выполнены неравенства (36), (37), (52), (53), (причем нормы $\|v^\epsilon\|_{2,\infty}$, $\|v_x^\epsilon\|_{2,Q_T}$, $\|v_t^\epsilon\|_{2,\infty}$ и $\|v_{xt}^\epsilon\|_{2,Q_T}$ ограничены константами, не зависящими от ϵ в случае, если начальные данные v_0^ϵ ограничены константой, не зависящей от ϵ).

Доказательство проводится методом Галеркина.

Построим функции $v^{\epsilon(n)}$, приближающие функцию v^ϵ - искомое решение начально-краевой задачи. Пусть $a^k(x)$ - фундаментальная система функций в пространстве $W_2^2(\Omega)$, ортонормированная в $L_2(\Omega)$. Мы пока что в этой теореме считаем ϵ фиксированным. Разложим v_0^ϵ по фундаментальной системе a^k и рассмотрим частичные суммы

$$v_0^{\epsilon(n)}(x) = \sum_{i=1}^n C_{in}^0 a^i(x) \quad (55)$$

Эти функции $v_0^{\epsilon(n)}$ сходятся к v_0^ϵ в $L_2(\Omega)$.

В качестве приближений нашего решения возьмем функции

$$v^{\epsilon(n)}(x, t) = \sum_{l=1}^n C_{ln}(t) a^l(x) \quad (56)$$

Функции C_{ln} должны будут удовлетворять начальным условиям

$$C_{ln}(t)|_{t=0} = C_{ln}^0, \quad l = 1, \dots, n \quad (57)$$

А функции $v^{\epsilon(n)}$ будем искать исходя из интегрального тождества

$$\begin{aligned} (v_t^{\epsilon(n)}, a^l)_\Omega + \nu(v_x^{\epsilon(n)}, a_x^l)_\Omega - (v_k^{\epsilon(n)} v_{x_k}^{\epsilon(n)}, a^l)_\Omega - \\ - \frac{1}{2}(v^{\epsilon(n)} \operatorname{div} v^{\epsilon(n)}, a^l)_\Omega + \int_\Omega (\mathbf{K} D^{\epsilon(n)} : D_{a^l}) + \\ + \frac{1}{\epsilon}(\operatorname{div} v^{\epsilon(n)}, \operatorname{div} a^l)_\Omega = (f, a^l)_\Omega \end{aligned} \quad (58)$$

(Здесь через $D^{\epsilon(n)}$ обозначен тензор скоростей деформации, соответствующий функции $v^{\epsilon(n)}$, а тензор D_{a^l} соответствует функции a^l).

Подставив выражение (56) в интегральное тождество, получим

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} C_{kn}(t) a^k(x), a^l(x) \right)_\Omega + \nu \left(\sum_{k=1}^n C_{kn} a_x^k(x), a_x^l(x) \right)_\Omega - \\ - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n C_{kn}(t) a^k(x) \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^n C_{in} a^i \right), a^l \right)_\Omega + \left(\mathbf{K} \left(\sum_{k=1}^n C_{kn}(t) a_x^k(x) \right), a_x^l(x) \right)_\Omega + \\ + \frac{1}{\epsilon} \left(\operatorname{div} \left(\sum_{k=1}^n C_{kn} a^k(x) \right), \operatorname{div} a^l(x) \right)_\Omega + \\ + \left(\left(\sum_{i=1}^n C_{in}(t) a_k^i(x) \right) \left(\sum_{i=1}^n C_{in} a_{x_k}^i \right), a^l \right)_\Omega = (f, a^l)_\Omega. \end{aligned} \quad (59)$$

Систему (59) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} C_{ln}(t) + \nu \sum_{k=1}^n C_{kn} a^{kl} - \frac{1}{2} \sum_{k,i=1}^n C_{kn} C_{in} \hat{a}^{kil} + \\
& + \left(\mathbf{K} \left(\sum_{k=1}^n C_{kn}(t) a_x^k(x) \right), a_x^l(x) \right)_{\Omega} + \\
& + \frac{1}{\epsilon} \sum_{k,i=1}^n C_{kn} C_{in} \hat{a}^{ki} - \sum_{i,k=1}^n C_{in} C_{kn} a^{ikl} = (f, a^l)_{\Omega}. \quad (60)
\end{aligned}$$

Здесь $a^{kl}, \hat{a}^{ki}, a^{ijl}, \hat{a}^{kil}$ - числа, равные соответственно

$$a^{kl} = (a_x^k, a_x^l)_{\Omega}, \quad (61)$$

$$\hat{a}^{ki} = (\operatorname{div} a^k, \operatorname{div} a^i)_{\Omega}, \quad (62)$$

$$a^{ijl} = \left(\sum_{k=1,2} a_k^i(x) a_{x_k}^j(x), a^l \right)_{\Omega}, \quad (63)$$

$$\hat{a}^{kil} = (a^k \operatorname{div} a^i, a^l)_{\Omega}. \quad (64)$$

Система свелась к задаче Коши вида

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{C} \quad (65)$$

$$\mathbf{C}(0) = \{C_{in}(0)\}, \quad (66)$$

где $\mathbf{C}(t)$ - треугольная матрица $\{C_{ij}(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$, зависящая от одной переменной t . Оператор \mathbf{A} удовлетворяет условию Липшица в норме $\max_{t \in [0, \Theta]} \|u\| = \|u\|_{\infty}$. Покажем это. Разобьем его на два слагаемых $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(1)} + \mathbf{A}^{(2)}$, $\mathbf{A}^{(2)}$ соответствует слагаемому, содержащему оператор \mathbf{K} , а $\mathbf{A}^{(1)}$ содержит все остальные слагаемые. Тогда $\mathbf{A}^{(2)}$ можно оценить следующим образом

$$\begin{aligned}
& \left| \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{C}^{(1)}) - \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{C}^{(2)}) \right| = \\
& = \left| \left(\mathbf{K} \left[\sum_{k=1}^n C_{kn}^{(1)}(t) a_x^k(x) \right], a_x^l \right)_{\Omega} - \left(\mathbf{K} \left[\sum_{k=1}^n C_{kn}^{(2)}(t) a_x^k(x) \right], a_x^l \right)_{\Omega} \right| \leq \\
& \leq \left\| \mathbf{K} \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{C}_{kn}^{(1)}(t) a_x^k(x) \right] - \mathbf{K} \left[\sum_{k=1}^n \mathbf{C}_{kn}^{(2)}(t) a_x^k(x) \right] \right\|_{2, \Omega} \|a_x^l\|_{2, \Omega} \leq \\
& \leq C_1 \left\| \sum_{k=1}^n (C_{kn}^{(1)}(t) - C_{kn}^{(2)}(t)) a_x^k(x) \right\|_{2, \Omega} \|a_x^l\|_{2, \Omega} \leq \\
& \leq \left| \sum_{k=1}^n (C_{kn}^{(1)}(t) - C_{kn}^{(2)}(t)) \right| \|a_x^k\|_{2, \Omega} \|a_x^l\|_{2, \Omega} \quad (67)
\end{aligned}$$

Здесь мы учли свойство (7) оператора \mathbf{K} . Что касается оператора $\mathbf{A}^{(1)}$, то он представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию по переменным C_{ij} и, следовательно, удовлетворяет локально условию Липшица. Пусть L - константа Липшица для \mathbf{A} . Тогда мы можем построить локальные по времени решения (как это сделано в монографии Красносельского и других [7]). Проинтегрировав по t уравнение (65), мы получим уравнение со сжимающим оператором $\mathbf{C} = \int_0^\tau \mathbf{A}\mathbf{C}$. А значит, к нему применим метод последовательных приближений. Нетрудно видеть, что оператор, стоящий справа в последней формуле, действительно сжимающий при подходящем τ .

$$\left| \int_0^\tau (\mathbf{A}\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{A}\mathbf{C}^{(2)}) \right| \leq \tau \max_{t \in [0, \tau]} |\mathbf{A}\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{A}\mathbf{C}^{(2)}| \leq L\tau \max_{t \in [0, \tau]} |\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(2)}|. \quad (68)$$

Выбрав $\tau = \tau_0$ так, что $L\tau_0 < 1$, мы получим решение задачи Коши для системы (65) на отрезке $[0, \tau_0]$. Далее, рассмотрев задачу Коши с начальным условием $\mathbf{C}(\tau) = \mathbf{C}(\tau_0)$ и решив ее, мы получим решение на отрезке $[0, 2\tau_0]$ и так далее.

Глобальное решение существует, потому что мы можем оценить решения C_{ln} системы (60), $l = 1, \dots, n$. Действительно, умножим каждое уравнение (59) на $C_{ln}(t)$ и просуммируем по $l = 1, \dots, n$. Тогда, заменив обратно $v^{\epsilon(n)} = \sum_{l=1}^n C_{ln}(t)a^l(x)$, получим, что $v^{\epsilon(n)}$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} v^{\epsilon(n)}, v^{\epsilon(n)} \right)_\Omega + \nu \|v_x^{\epsilon(n)}\|_{2,\Omega}^2 - (v_k^{\epsilon(n)} v_{x_k}^{\epsilon(n)}, v^{\epsilon(n)})_\Omega - \\ & - \frac{1}{2} (v^{\epsilon(n)} \operatorname{div} v^{\epsilon(n)}, v^{\epsilon(n)})_\Omega + \int_\Omega (\mathbf{K} D^{\epsilon(n)} : D^{\epsilon(n)}) + \\ & + \frac{1}{\epsilon} \|\operatorname{div} v^{\epsilon(n)}\|_{2,\Omega}^2 = (f, v^{\epsilon(n)})_\Omega. \end{aligned} \quad (69)$$

Из этого соотношения следует, что аппроксимации Галеркина $v^{\epsilon(n)}$ удовлетворяют равенству (33), а отсюда, в свою очередь, следует, что норма $\|v^{\epsilon(n)}\|_{2,\Omega}$ оценивается константой C_3 . Следовательно, получается, что $\max_{t \in [0, T]} |C_{ln}(t)| \leq C_3$.

Мы имеем множество приближенных решений $\{v^{\epsilon(n)}\}_{n=1}^\infty$. Продифференцировав уравнение (58) по t , умножив скалярно на $\frac{d}{dt} C_{ln}(t)$ и просуммировав по $l = 1, \dots, n$, мы получим, что функции $v^{\epsilon(n)}$ удовлетворяют интегральному равенству (38), из чего вытекают оценки (52), (53) для этой системы функций.

При помощи набора функций $v^{\epsilon(n)}$ можно для любого $\epsilon < 1$ построить v^ϵ - решение начально-краевой задачи (17) - (19).

Действительно, из оценок (36), (37), (52), (53) следует, что при $T < \infty$ функции $v^{\epsilon(n)}$, $v_x^{\epsilon(n)}$, $v_t^{\epsilon(n)}$, $v_{xt}^{\epsilon(n)}$ и $\frac{1}{\epsilon} \operatorname{div} v^{\epsilon(n)}$ принадлежат пространству $L_2(Q_T)$. Поскольку ограниченное множество в гильбертовом

пространстве слабо компактно, из последовательности $v^{\epsilon(n)}$ можно выделить подпоследовательность $v^{\epsilon(n_s)}$, слабо сходящуюся в $L_2(Q_T)$ к функции v^ϵ . Будем по-прежнему обозначать эту последовательность $v^{\epsilon(n)}$. Из последовательности $v_x^{\epsilon(n)}$ можно выделить подпоследовательность $v_x^{\epsilon(n_s)}$, слабо сходящуюся к функции, которая, в силу единственности производной, равна v_x^ϵ . Обозначим эту последовательность тоже $v_x^{\epsilon(n)}$. Проводя такую же процедуру, мы можем получить последовательность $v^{\epsilon(n)}$ такую, что $v^{\epsilon(n)}, v_x^{\epsilon(n)}, v_t^{\epsilon(n)}, v_{xt}^{\epsilon(n)}$ сходятся слабо к $v^\epsilon, v_x^\epsilon, v_t^\epsilon, v_{xt}^\epsilon$ соответственно. Кроме того, поскольку пространство $W_2^{1,1}(Q_T)$ вкладывается компактно в $L_2(Q_T)$, то получается, что $v^{\epsilon(n)}$ сильно сходятся в $L_2(Q_T)$. Аналогично можно заключить, что $v^{\epsilon(n)}$ сильно сходятся в $L_2(\Omega)$ при любом t . Покажем, что v^ϵ - решение начально-краевой задачи (5), (6), (11), (12). Соотношения (11) и (12) очевидны. Интегральное тождество (13) получим следующим образом. Каждая функция $v^{\epsilon(n)}$ удовлетворяет тождеству (20) для любой функции $\varphi \in W_2^1(Q_T)$, в частности и для $\varphi \in W_2^1(Q_T) \cap J^0(Q_T)$. Для таких функций φ последний член в левой части (20) обратится в 0. Из слабой сходимости v, v_x, v_t следует сходимость всех линейных членов (13) к соответствующим членам (20) :

$$\begin{aligned} \int_0^T (v_t^{\epsilon(n)}, \varphi)_\Omega &\rightarrow \int_0^T (v_t^\epsilon, \varphi)_\Omega, \quad n \rightarrow \infty, \\ \int_0^T (v_x^{\epsilon(n)}, \varphi_x)_\Omega &\rightarrow \int_0^T (v_x^\epsilon, \varphi_x)_\Omega, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (70)$$

Сходимость нелинейных членов получается следующим образом

Поскольку множество $\{D^{\epsilon(n)}\}$, $n \in \mathbf{N}$, ограничено в пространстве $L_2(Q_T)$, то в силу непрерывности оператора \mathbf{K} множество $\{\mathbf{K}D^{\epsilon(n)}\}$ также ограничено. Из него выбираем слабо сходящуюся подпоследовательность (считаем, что сама последовательность $\{\mathbf{K}D^{\epsilon(n)}\}$ слабо сходится в $L_2(Q_T)$). Тогда

$$\int_0^T \int_\Omega (\mathbf{K}D^{\epsilon(n)} : D\varphi) \rightarrow \int_0^T \int_\Omega (\mathbf{K}D^\epsilon : D\varphi), \quad n \rightarrow \infty. \quad (71)$$

Далее, поскольку $v^{\epsilon(n)}$ и $\operatorname{div} v^{\epsilon(n)}$ ограничены, то и множество попарных произведений $\{v^{\epsilon(n)} \operatorname{div} v^{\epsilon(n)}\}$, $n \in \mathbf{N}$ ограничено в $L_2(Q_T)$. Из него можно выбрать слабо сходящуюся последовательность (считаем опять, что сама последовательность слабо сходится в $L_2(Q_T)$). В результате получаем

$$\int_0^T (v^{\epsilon(n)} \operatorname{div} v^{\epsilon(n)}, \varphi)_\Omega \rightarrow \int_0^T (v^\epsilon \operatorname{div} v^\epsilon, \varphi)_\Omega, \quad n \rightarrow \infty \quad (72)$$

Далее с оставшимся членом $v_k^{\epsilon(n)} v_{x_k}^{\epsilon(n)}$ поступаем аналогично.

Теорема о разрешимости возмущенной начально-краевой задачи доказана.

Итак, мы имеем набор функций v^ϵ для любого $\epsilon < 1$. Покажем, что при $\epsilon \rightarrow 0$ эти функции стремятся к решению v невозмущенной начально-краевой задачи (5), (6), (11), (12). Действительно, ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно. Функции $v^\epsilon, v_x^\epsilon, v_t^\epsilon, v_{xt}^\epsilon$ уже оценены. Следовательно мы можем из обобщенной последовательности v^ϵ выделить подпоследовательность v^{ϵ_n} такую, что $v^{\epsilon_n}, v_x^{\epsilon_n}, v_t^{\epsilon_n}, v_{xt}^{\epsilon_n}$ сходятся слабо в $L_2(Q_T)$. Поскольку $W_2^{1,1}(Q_T)$ вкладывается компактно в $L_2(Q_T)$ и в $L_2(\Omega)$, то v^{ϵ_n} сходятся сильно в $L_2(Q_T)$ и в $L_2(\Omega)$. Будем далее считать, что сама последовательность v^ϵ сходится. Равенство (6) следует из оценки

$$\frac{1}{\epsilon} \|\operatorname{div} v^\epsilon\|_{2,\Omega} \leq C \quad (73)$$

при переходе к пределу по $\epsilon \rightarrow 0$. Соотношения (11) и (12) очевидны. Интегральное тождество (13) получим следующим образом. Каждая функция v^ϵ удовлетворяет тождеству (20) для любой функции $\varphi \in W_2^{1,0}(Q_T)$, в частности и для $\varphi \in W_2^{1,0}(Q_T) \cap J^0(Q_T)$. Для таких функций φ последний член в левой части (20) обратится в 0. Из слабой сходимости v, v_x, v_t следует сходимость всех линейных членов (13) к соответствующим членам (20) :

$$\begin{aligned} \int_0^T (v_t^\epsilon, \varphi)_{2,\Omega} &\rightarrow \int_0^T (v_t, \varphi)_{2,\Omega}, & \epsilon \rightarrow 0, \\ \int_0^T (v_x^\epsilon, \varphi_x)_{2,\Omega} &\rightarrow \int_0^T (v_x, \varphi_x)_{2,\Omega}, & \epsilon \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (74)$$

Далее можно провести рассуждение, аналогичное доказательству предыдущей теоремы. Мы переходим к пределу по $\epsilon \rightarrow 0$ и показываем, что можно перейти к пределу в интегральном тождестве.

В результате мы можем утверждать, что верна следующая теорема о сходимости решений возмущенной задачи

Теорема 3. Пусть Ω - ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega \in C^1$. Предположим, что правая часть системы (17) $f \in L_{2,1}(Q_T)$, $f_t \in L_{2,1}(Q_T)$, а начальные данные $v_0^\epsilon \in W_2^2(\Omega)$. Тогда начально-краевая задача (17), (18), (19) имеет единственное решение $v^\epsilon \in W_2^{1,1}(Q_T) \cap L_\infty(0, T; W_2^1(\Omega))$. Это решение v^ϵ при $\epsilon \rightarrow 0$ стремится в $L_{2,\infty}(Q_T)$ к решению v невозмущенной начально-краевой задачи (5), (6), (11), (12).

Автор благодарит Нину Николаевну Уральцеву за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

- [1] О.А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М. 1970.

- [2] О.А. Ладыженская, Г.А. Серегин. Об одном способе приближенного решения начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса. Зап. Науч. Семина. ПОМИ, т. 197 (1992), 87-119.
- [3] А.П. Осколков. Периодические по времени решения гладких сходящихся диссипативных ϵ - аппроксимаций для модифицированных уравнений Навье-Стокса, Зап. Науч. Семина. ПОМИ, т.213 (1994), 116-130.
- [4] A.A. Kotsiolis, A.P. Oskolkov. The initial boundary-value problem with a free surface condition for the ϵ - approximations of the Navier-Stokes equations and some their regularizations. Зап. Науч. Семина. ПОМИ, т.205 (1993), 38-70.
- [5] А.П. Осколков. Гладкие сходящиеся ϵ -аппроксимации первой начально-краевой задачи для модифицированных уравнений Навье-Стокса и их аттракторы, Зап. Науч. Семина. ПОМИ, т.221(1994), 98-127.
- [6] N.A. Karazeeva. Solvability of initial boundary value problems for equations describing motions of linear viscoelastic fluids. Journal of Appl. Math., V.2005, No.1, 59-80.
- [7] М.А. Красносельский, Г.М. Вайникко, П.П. Забрейко, Я.Б. Рунтцкий, В.Я. Стеценко, Приближенное решение операторных уравнений, М., Наука, 1969.
- [8] М.А. Красносельский. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
- [9] И. М. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., Мир, 1973.
- [10] Р.Г. Куликова, Н.А. Труфанов. Применение итерационного метода к решению задачи деформирования однонаправленного материала с нелинейно-вязкоупругим связующим. Выч. механика сплошных сред, т.4, N 2 (2011), 61-71.
- [11] А.А. Ильюшин, Е.Е. Победра. Основы математической теории термовязкоупругости. М., Наука, 1970.
- [12] Э. Санчес-Паленсия. Неоднородные среды и теория колебаний. М., Мир, 1984. (перев. с англ. Lecture Notes in Physics 127, 1980.)
- [13] Н.Д. Копачевский. Интегродифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве. Симферополь, 2012.
- [14] Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи. М., Наука, 1989.