ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов, Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ 12/2017

L_2-ТЕОРИЯ ДЛЯ ДВУХФАЗНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЁТОМ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

И. В. Денисова
Институт проблем машиноведения Российской академии наук

В. А. Солонников
Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Посвящается памяти профессора М. Бурната

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена задаче о нестационарном движении двух вязких несжимаемых жидкостей, разделённых свободной границей и содержащихся в ограниченном сосуде. Предполагается, что на жидкости действуют массовые и капиллярные силы. Доказывается устойчивость состояния покоя при малых начальных скоростях, поверхности раздела близкой к сфере и малых убывающих при $t \to \infty$ массовых силах.

Ключевые слова: двухфазные жидкости, задачи со свободными границами, коэрцитивные оценки, пространства Соболева-Слободецкого.

Эта работа была поддержана Народной программой “The People Programme (Marie Curie Actions) of the European Union’s Seventh Framework Programme) FP7/2007-2013/”, номер гранта n^0 319012, и Фондом интернационального сотрудничества Польского министерства науки и высшего образования, номер гранта no. 2853/7. PR/2013/2.

Это исследование было также частично поддержано Фондом российских ведущих научных школ, грант NSh–1771.2014.1.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин, О. М. Фоменко

1 Введение

В работе изучается нестационарное движение двухфазной жидкости в контейнере. Обе фазы предполагаются вязкими, несжимаемыми и несмешивающимися, они разделены неизвестной замкнутой граница раздела, на которой действует поверхностное натяжение. Иными словами, это движение капли в жидкой среде. Оно описывается системой уравнений Навье–Стокса, включающей в себя массовые силы, начальные и граничные условия и, кроме того, начальную конфигурацию капли.

Первые результаты, касающиеся нестационарного движения двух жидкостей со свободной граница раздела, были получены в 90-х годах прошлого столетия . В случае всего пространства теорема существования и единственности для задачи с капилярными силами и без них в L_2–постановке была доказана на конечном временном интервале, длина которого определялась нормами заданных функций [1, 2, 3, 4]. Этот результат был получен путём рассмотрения модельных линейных задач [5, 6]. Гига и Такахаши [7, 8] доказали существование глобального слабого решения для уравнений Стокса и Навье–Стокса, описывающих движение двух несмешивающихся жидкостей без учёта поверхностного натяжения.

В последние годы возрос интерес к изучению задачи о течении двухфазной жидкости с учётом поверхностного натяжения в различных функциональных пространствах. Исследователи ставят новые вопросы в её анализе и указывают на различные аспекты этой задачи. В частности, Х. Абельс [9] оценил хаусдорфову меру границы раздела, оставляя открытым вопрос существования обобщённого решения задачи. Далее, Шибата и Шимизу изучили задачу операторными методами в анизотропных соболевских пространствах $W^{2,1}_{q,p}(\Omega^\pm)$, $2 \leqslant n < q < \infty$, $2 < p < \infty$, $\Omega^\pm \subset \mathbb{R}^n$. Они доказали разрешимость модельной задачи дифракции для системы Стокса [10]. Аналогичных результат для нелинейной задачи с неизвестной границей раздела был получен в [11] при предположении, что начальная граница раздела задана уравненим $x_n = \alpha(x')$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Но наибольшее внимание уделяется проблеме об эволюции двух жидкостей в контейнере, особенно задаче об устойчивости положения покоя (векторное поле скоростей $\boldsymbol{v} = 0$, давление p — это константа для каждой жидкости, граница раздела – это сфера с произвольным центром, не касающаяся стен контейнера). Авторами в [12] и независимо в серии работ Прюсса с соавторами (в частности, в [13, 14], а также в монографии [15]) было показано, что состояние покоя экспоненциально устойчиво в следующем смысле: для произвольных начальных данных, близких к положению равновесия, задача имеет единственное решение, определённое при $t > 0$, которое стремится экспоненциально к положению покоя, отличному в общем случае от начального. Доказательство основано на коэрцитивных оценках решения линеаризованной задачи (т.е. оценках в пространстве максимальной регулярности). Во всех вышеупомянутых работах, задача со свободной границей раздела сводилась к нелинейной системе в двух фиксированных областях через преобразование Ханзавы, но детали доказательства существенно отличались. Нужно отметить, что в [12] задача изучалась в анизотропных пространствах Гёльдера, тогда как в [13], [14] основным пространством было $W_p^{2,1}$, $p > n+3$. Кроме того, существование глобального решения задачи было также получено в соболевском пространстве при $p > n = 3$ в [16].

В [17] глобальная разрешимость задачи была доказана в случае ненулевых массовых сил, экспоненциально убывающих при $t \to \infty$. Упомянем также работы [18, 4], где был рассмотрен случай нулевого поверхностного натяжения.

В настоящей работе задача исследуется в пространствах Соболева–Слободетского $W_2^{2+l,1+l/2}$, $l \in (1/2, 1)$, в трёхмерном случае. Мы сосредоточимся на доказательстве устойчивости положения покоя и построим решение, предполагая, что начальные данные задачи близки к этому состоянию, т.е. поле скоростей и массовые силы малы, а граница раздела близка к сфере S_{R_0} радиуса R_0 такого, что шар, ограниченный этой сферой имеет тот же объём, что и внутренняя жидкость. Поместим центр этого шара в начало координат, которое совпадает с центром тяжести капли в начальный момент, при этом граница раздела определяется как нормальное возмущение сферы $S_{R_0}(0)$. Логично считать неизвестную границу раздела в момент времени $t > 0$ также нормальным возмущением сферы $S_{R_0}(h)$ того же радиуса R_0, но с центром, расположенным в центре тяжести $h(t)$ внутренней области. Поэтому,как и в предыдущих работах [12, 19], мы введём член с вектором $\boldsymbol{h}(t)$ в стандартное преобразование Ханзавы двухфазной области в область с фиксированной границей раздела $S_{R_0}(0)$. По нашему мнению, этот член позволяет нам учитывать эволюцию границы раздела наиболее точным образом. Далее, мы линеаризуем преобразованную задачу. В параграфе 2, мы будем изучать линейную задачу в двух областях, разделённых сферой S_{R_0}, и докажем оценки максимальной регулярности решения задачи сначала на произвольном конечном интервале времени в обычных пространствах, а затем, при некоторых дополнительных предположениях, на бесконечном интервале $t > 0$ в пространствах с экспоненциальным весом $e^{\beta t}$. В параграфе 3, на основе этих оценок и оценок нелинейных членов мы построим решение задачи сначала при $t \in (0, T_0)$ с подходящим $T_0 > 1$, а потом продолжим это решение по t в интервал $(T_0, 2T_0)$ и далее шаг за шагом для любого $t > 0$.

Мы покажем, что скорость и градиент давления убывают экспоненциально до нуля при $t \to \infty$, а Γ_t стремится к сфере радиуса R_0 с центром в $h(\infty)$ близкой к S_{R_0}, но в общем случае отличной от S_{R_0}.

Кроме того, мы допускаем здесь более общее, чем экспоненциальное, убывание функций в правых частях уравнений Навье–Стокса. Доказательство строится так же, как и в [20, 12, 16], но окончательная оценка решения (см. теорему 1.1) немного отличается от той, что была приведена в предыдущих работах. Как и прежде, здесь используется идея построения функции обобщённой энергии [21, 22] для получения экспоненциальной оценки вместо анализа спектра линейной задачи. Стоит заметить, что наша техника построения решения и оценки его может быть обобщена на случай многофазной жидкости и n-мерного пространства при $n > 3$.

Этот материал будет опубликован в статье [23].

Перейдём к математической постановке задачи.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ две вязкие несжимаемые несмещивающиеся жидкости находятся в ограниченном сосуде $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ и разделёны заданной границей раздела Γ_0, которая не касается стен контейнера $\Sigma = \partial\Omega$. При $t > 0$ обозначим через Γ_t переменную границу области Ω_t^+, заполненной жидкостью с плотностью ρ^+ и динамической вязкостью μ^+ и окружённой другой жидкостью с плотностью ρ^- и вязкостью μ^-, занимающей область $\Omega_t^- = \Omega \setminus \overline{\Omega_t^+}$. Нужно найти Γ_t, а также векторное поле скоростей $\boldsymbol{v}(x,t)$ и функцию давления $p(x,t)$, $x \in \Omega_t^- \cup \Omega_t^+$, обеих жидкостей, являющихся решением начально-краевой задачи для уравнений Навье–Стокса

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} - \nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla p = \boldsymbol{f}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0 \ \text{ в } \ \Omega_t^{\pm}, \ \ t > 0,\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{v}(x,0) = \boldsymbol{v}_0(x) \ \text{ в } \ \Omega_0^{\pm},\\
&[\boldsymbol{v}]\big|_{\Gamma_t} \equiv \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t,\\ x\in\Omega_t^+}} \boldsymbol{v}(x) - \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t,\\ x\in\Omega_t^-}} \boldsymbol{v}(x) = 0, \quad \boldsymbol{v}|_{\Sigma} = 0,\\
&[\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{n}]|_{\Gamma_t} = \sigma\Big(H + \frac{2}{R_0}\Big)\boldsymbol{n}, \qquad V_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\mathcal{D}_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\nu^{\pm} = \mu^{\pm}/\rho^{\pm}$ – это ступенчатая функция кинематической вязкости, $\boldsymbol{v}_0$ – начальное распределение скоростей, $\boldsymbol{f}$ – векторное поле массовых сил, заданное в $\Omega\times(0,\infty)$, $\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p) = -p + \mu^{\pm}\mathbb{S}(\boldsymbol{v})$ – тензор напряжений, $\mathbb{S}(\boldsymbol{v}) = (\nabla\boldsymbol{v}) + (\nabla\boldsymbol{v})^T$ – удвоенный тензор скоростей деформации, H – удвоенная средняя кривизна поверхности Γ_t($H < 0$ в точках, где Γ_t выпукла в сторону Ω_t^-), $\sigma > 0$ – коэффициент поверхностного натяжения, $\boldsymbol{n}(x,t)$ – нормаль к Γ_t относительно Ω_t^+, $[\boldsymbol{u}]|_{\Gamma_t}$ – это скачок вектора $\boldsymbol{u}$ при переходе через Γ_t, V_n – скорость эволюции Γ_t в направлении $\boldsymbol{n}$, $R_0 = (3|\Omega_0^+|/4\pi)^{1/3}$, $|\Omega_0^+| = \text{mes}\,\Omega_0^+$. Мы предполагаем, что в $\mathbb{R}^3$ введена декартова система координат $\{x\}$. Точка обозначает декартово скалярное произведение.

Мы подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам от 1 до 3, если они обозначены латинскими буквами. Векторы и векторные пространства мы отмечаем полужирным шрифтом.

Предположим, что поверхность Γ_0 близка к сфере S_{R_0} радиуса R_0, центр которой совпадает с центром тяжести области Ω_0^+. Без ограничения общности допустим, что он находится в начале координат. Тогда поверхность Γ_0 можно считать нормальным возмущением сферы S_{R_0}, т.е.,

$$\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 | x = y + r_0(y)\boldsymbol{N}(y)\}, \quad y \in S_{R_0},$$

где $\boldsymbol{N}(y) = \boldsymbol{y}/|y|$, $y \in S_{R_0}$, а r_0 – малая заданная функция. Подобное представление используется и для неизвестной поверхности Γ_t, $t > 0$:

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^3 | x = y + \boldsymbol{h}(t) + r(y,t)\boldsymbol{N}(y)\},$$

где $r(y,t)$ – неизвестная функция на S_{R_0}. Координаты центра тяжести Ω_t^+ задаются формулой

$$h_i(t) = \frac{1}{|\Omega_t^+|}\int_{\Omega_t^+} x_i\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|\Omega_t^+|}\int_0^t\int_{\Omega_t^+} v_i(x,\tau)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\tau, \quad i = 1,2,3. \tag{1.2}$$

Продолжим $\boldsymbol{N}$ в $\mathbb{R}^3$ по формуле $\boldsymbol{N}^*(y) = \omega(y)\boldsymbol{y}/|y|$, где $\omega(y)$ – это гладкая функция равная 1 при $|y| \geqslant 2R_0/3$ и нулю при $|y| \leqslant R_0/3$. Для r мы введём продолжение $r^*(y,t) = \mathcal{E}r(y,t)\Phi(y)$, где $\Phi(y)$ – гладкая срезающая функция равная 1 вблизи сферы S_{R_0} и нулю вблизи внешней границы Σ. Пусть $\mathcal{E}$ – это фиксированный оператор продолжения с S_{R_0} в $\mathbb{R}^3$. Потребуем, чтобы

$$\begin{aligned}&\frac{\partial r^*}{\partial N}|_{S_{R_0}} = 0,\\ &\|r^*\|_{W_2^{l'+1/2}(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\|r\|_{W_2^{l'}(S_{R_0})}, \quad l' \in (0, 2+l],\end{aligned}$$

и $r^*(y,t) = 0$ при $\big||y| - R_0\big| \geqslant d_0$, в частности, при y близких к Σ. (W_2^m – это пространство Соболева–Слободецкого, определение которого будет дано ниже.) Отсюда следует, что

$$\|\mathcal{D}_t r^*\|_{W_2^{l'+1/2}(\mathbb{R}^3)} \leqslant c\|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{l'}(S_{R_0})}, \quad l' \in (0, 2+l]. \tag{1.3}$$

Введём модифицированное преобразование Ханзавы

$$x = y + r^*(y,t)\boldsymbol{N}^*(y) + \chi(y)\boldsymbol{h}(t) \equiv e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t), \tag{1.4}$$

где $\chi(y)$ – это гладкая срезающая функция, равная единице при $\big||y|-R_0\big| \leqslant d_0/2$ и нулю при $\big||y|-R_0\big| \geqslant d_0$. Если r и $\boldsymbol{h}(t)$ малы, а d_0 выбрано нужным образом, то это преобразование обратимо, оно устанавливает взаимооднозначные соответствия между шаром $B^+ \equiv \{|y| < R_0\}$ и Ω_t^+, между сферой S_{R_0} и Γ_t, а также между $B^- \equiv \Omega \setminus \overline{B^+}$ и Ω_t^-. (Это очевидно при $t=0$, когда $\boldsymbol{h}(0)=0$, это также остаётся справедливым и для малых $\boldsymbol{h}(t)$.)

Обозначим через $\mathbb{L}$ матрицу Якоби преобразования (1.4) и положим $L = \det\mathbb{L}$, $\widehat{\mathbb{L}} = L\mathbb{L}^{-1}$. Ясно, что

$$\mathbb{L}(r,\boldsymbol{h}) = \Big\{\delta_j^i + \frac{\partial\big(r^*(y,t)N_i^*(y)\big)}{\partial y_j} + h_i(t)\frac{\partial\chi(y)}{\partial y_j}\Big\}_{i,j=1}^3.$$

Для точек y, расположенных на сфере S_{R_0} и вблизи нее, имеем $\nabla\chi = 0$ и

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}(r,\boldsymbol{0}) = \Big\{\delta_j^i + \frac{\partial\big(r(y,t)N_i(y)\big)}{\partial y_j}\Big\}_{i,j=1}^3.$$

Преобразование (1.4) переводит (1.1) в систему

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\boldsymbol{u} - \nu^\pm\widetilde{\nabla}^2\boldsymbol{u} - (\mathbb{L}^{-1}(\mathcal{D}_t r^*\boldsymbol{N}^* + \chi\dot{\boldsymbol{h}})\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + (\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho^\pm}\widetilde{\nabla}q = \widehat{\boldsymbol{f}},\\
&\widetilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \quad \text{в } B^\pm,\ t>0,\\
&\boldsymbol{u}(y,0) = \boldsymbol{u}_0(y) \quad \text{в } B^\pm, \quad r(y,0) = r_0(y) \quad \text{на } S_{R_0},\\
&[\boldsymbol{u}]\big|_{S_{R_0}} = 0, \quad [\mu^\pm\Pi\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}]\big|_{S_{R_0}} = 0, \qquad \boldsymbol{u}|_\Sigma = 0,\\
&[-q + \mu^\pm\boldsymbol{n}\cdot\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}]\big|_{S_{R_0}} = \sigma\Big(H\big(e_{r,\boldsymbol{0}}(y,t),t\big) + \frac{2}{R_0}\Big), \qquad \int_\Omega q(y,t)\,\mathrm{d}y = 0,\\
&\mathcal{D}_t r - \Big(\boldsymbol{u} - \frac{1}{|B^+|}\int_{B^+}\boldsymbol{u}L(r,\boldsymbol{0})\,\mathrm{d}y\Big)\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}} = 0 \ \text{ на } S_{R_0},
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $\widetilde{\nabla} = \mathbb{L}^{-T}\nabla = (\mathbb{L}^{-1})^T\nabla$ – это преобразованный градиент ∇_x ("T" означает транспонирование), $\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u}) = \widetilde{\nabla}\boldsymbol{u} + (\widetilde{\nabla}\boldsymbol{u})^T$– это преобразованный удвоенный тензор скоростей деформации, $\widehat{\boldsymbol{f}}(y,t) = \boldsymbol{f}(e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t),t)$, $\quad \boldsymbol{u}_0(y) = \boldsymbol{v}_0(e_{r_0,\boldsymbol{0}}(y))$, $\Pi\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{g})$.

Остановимся на уравнении для неизвестной функции r на S_{R_0}, описывающей границу раздела Γ_t. Оно возникает из условия $V_n = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ на Γ_t ввиду (1.4) и (1.2), так как $V_n \equiv \mathcal{D}_t\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n} = \mathcal{D}_t r(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{n}) + \dot{\boldsymbol{h}}\cdot\boldsymbol{n}$, $\dot{\boldsymbol{h}} \equiv \mathrm{d}\boldsymbol{h}/\,\mathrm{d}t$.

Система (1.5) может быть записана в виде

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\boldsymbol{u} - \nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla q = \boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u},q,r) + \widehat{\boldsymbol{f}}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = l_2(\boldsymbol{u},r) \ \text{ в } \ B^{\pm}, \ t>0,\\
&\boldsymbol{u}(y,0) = \boldsymbol{u}_0(y) \qquad \text{в } \ B^{\pm}, \quad r(y,0) = r_0(y) \qquad \text{на } \ S_{R_0},\\
&[\boldsymbol{u}]\big|_{S_{R_0}} = 0, \quad [\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}} = \boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{u},r), \qquad \boldsymbol{u}|_{\Sigma} = 0,\\
&[-q + \mu^{\pm}\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}} - \sigma\mathcal{B}_0 r = l_4(\boldsymbol{u},r) + \sigma l_5(r), \qquad \int_{\Omega} q(y,t)\,\mathrm{d}y = 0,\\
&\mathcal{D}_t r - \Big(\boldsymbol{u} - \frac{1}{|B^+|}\int_{B^+}\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}y\Big)\cdot\boldsymbol{N} = l_6(\boldsymbol{u},r) \qquad \text{на } \ S_{R_0},
\end{aligned}
$$

где $\qquad \mathcal{B}_0 r = \Delta_{S_{R_0}} r + 2R_0^{-2} r,$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u},q,r) = \nu^{\pm}\big(\widetilde{\nabla}^2 - \nabla^2\big)\boldsymbol{u} + \frac{1}{\rho^{\pm}}(\nabla - \widetilde{\nabla})q + \Big(\mathbb{L}^{-1}\big(\mathcal{D}_t r^*\boldsymbol{N}^* + \chi\dot{\boldsymbol{h}}(t)\big)\cdot\nabla\Big)\boldsymbol{u}\\
&\qquad\qquad - (\mathbb{L}^{-1}\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u},\\
&l_2(\boldsymbol{u},r) = (\mathbb{I} - \widehat{\mathbb{L}}^T)\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},r), \quad \boldsymbol{L}(\boldsymbol{u},r) = (\mathbb{I} - \widehat{\mathbb{L}})\boldsymbol{u},\\
&\boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{u},r) = \big[\mu^{\pm}\Pi_0\big(\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} - \Pi\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\big)\big]\big|_{S_{R_0}},\\
&l_4(\boldsymbol{u},r) = \big[\mu^{\pm}\big(\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{N} - \boldsymbol{n}\cdot\widetilde{\mathbb{S}}(\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}\big)\big]\big|_{S_{R_0}},\\
&l_5(r) = -\int_0^1 (1-s)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\widehat{\mathbb{L}}^T(sr,\boldsymbol{0})\nabla\cdot\boldsymbol{n}_s\,\mathrm{d}s, \quad \boldsymbol{n}_s = \frac{\widehat{\mathbb{L}}^T(sr,\boldsymbol{0})\boldsymbol{N}}{|\widehat{\mathbb{L}}^T(sr,\boldsymbol{0})\boldsymbol{N}|},\\
&l_6(\boldsymbol{u},r) = \Big(\boldsymbol{u} - \frac{1}{|B^+|}\int_{B^+}\boldsymbol{u}(y',t)\,\mathrm{d}y'\Big)\Big(\frac{\widehat{\mathbb{L}}^T(r,\boldsymbol{0})\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N}\cdot\widehat{\mathbb{L}}^T(r,\boldsymbol{0})\boldsymbol{N}} - \boldsymbol{N}\Big)\\
&\qquad\qquad - \frac{1}{|B^+|}\int_{B^+}\big(L(r,\boldsymbol{0}) - 1\big)\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}y\frac{\widehat{\mathbb{L}}^T(r,\boldsymbol{0})\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{N}\cdot\widehat{\mathbb{L}}^T(r,\boldsymbol{0})\boldsymbol{N}},\\
&\Pi_0\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{N}(\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{g}), \qquad \boldsymbol{N}(y)\cdot\widehat{\mathbb{L}}^T(y,t)\boldsymbol{N}(y) = \boldsymbol{y}\cdot\widehat{\mathbb{L}}^T\boldsymbol{y}/|y|^2.
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Векторы $\boldsymbol{n}(x,t)$ и $\boldsymbol{N}(y)$ связаны между собой соотношением

$$
\boldsymbol{n}(x,t)|_{x=e_{r,\boldsymbol{0}}(y,t)} = \frac{\widehat{\mathbb{L}}^T(r,\boldsymbol{0})\boldsymbol{N}(y)}{|\widehat{\mathbb{L}}^T(r,\boldsymbol{0})\boldsymbol{N}(y)|}\Big|_{S_{R_0}}.
$$

Кроме того, $H(e_{r,\boldsymbol{0}},t) + \frac{2}{R_0} = \mathcal{B}_0 r + l_5$, где $\mathcal{B}_0 r$ – это первая вариация $H + 2/R_0$ относительно r, а l_5 – нелинейный остаток; через $\Delta_{S_{R_0}}$ мы обозначили оператор Лапласа–Бельтрами на S_{R_0}, а через $\boldsymbol{n}_s$ – нормаль к поверхности

$$
\Gamma_{t,s} = \{x\in\mathbb{R}^3 | x = y + s\boldsymbol{N}(y)r(y,t), \quad y\in S_{R_0}\}, \quad s\in(0,1).
$$

Замечание 1.1. *Уравнение* $z = y + r(y,t)\boldsymbol{N}(y)$ *определяет поверхность* Γ_t, *сдвинутую на вектор* $-\boldsymbol{h}(t)$.

В задаче (1.5) мы добавили условие нормировки $\int_\Omega q\,\mathrm{d}y = 0$ для q. Оно может быть также выбрано и в другой форме, например так:

$$\int_{B^\pm} \widehat{q}^{\pm}(y,t)\,\mathrm{d}y = 0, \tag{1.7}$$

или так: $\int_\Sigma \widehat{q}(y,t)\,\mathrm{d}S = 0$. Две функции давления, соответствующие различным условиям, отличаются друг от друга на некоторую функцию от времени. Если, скажем, $\int_\Omega q\,\mathrm{d}y = 0$, $\widehat{q}^-$ удовлетворяет (1.7) в области B^-, а $\widetilde{q}$ – на Σ, соответственно, тогда $q(y,t) = \widehat{q}^-(y,t) + \widehat{c}(t) = \widetilde{q}(y,t) + \widetilde{c}(t)$ с

$$\widehat{c}(t) = |B^-|^{-1}\int_{B^-} q(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi, \quad \widetilde{c}(t) = |\Sigma|^{-1}\int_\Sigma q(\xi,t)\,\mathrm{d}\Sigma.$$

Очевидно, что $[q]|_{S_{R_0}} = [\widehat{q}^-]|_{S_{R_0}} = [\widetilde{q}]|_{S_{R_0}}$.

Заметим, что условие $|\Omega_t^+| = 4\pi R_0^3/3$ и тот факт, что центр тяжести Ω_t^+ совпадает с началом координат $y = 0$, выражаются через функцию r, соответственно, следующим образом:

$$\int_{S_{R_0}} \big((R_0+r)^3 - R_0^3\big)\,\mathrm{d}S = 0, \quad \int_{S_{R_0}} y_j\big((R_0+r)^4 - R_0^4\big)\,\mathrm{d}S = 0, \quad j = 1,2,3. \tag{1.8}$$

Введём норму

$$|u|_{G_T}^{(s+l,l/2)} = \|u\|_{W_2^{s+l,0}(G_T)} + \|u\|_{W_2^{l/2}\left(0,T;W_2^s(S_{R_0})\right)}.$$

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 1.1 (Глобальная разрешимость). *Пусть при* $l \in (1/2,1)$ $\Sigma \in W_2^{3/2+l}$, $\boldsymbol{u}_0 \in \boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^\pm)$, *а* $r_0 \in W_2^{2+l}(S_{R_0})$. *Допустим, что выполнены условия согласования, а также условие малости:*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0 = l_2(\boldsymbol{u}_0,r_0),\ [\mu^\pm\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_0)\boldsymbol{N}]|_{S_{R_0}} = \boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{u}_0,r_0),\ [\boldsymbol{u}_0]|_{S_{R_0}} = 0,\ \boldsymbol{u}_0|_\Sigma = 0, \tag{1.9}$$

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^\pm)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} \leqslant \varepsilon. \tag{1.10}$$

Кроме того, предположим, что $\boldsymbol{f}$ *имеет конечные нормы* $\|\mathrm{e}^{bt}\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_\infty)}$, $\sup_{\tau>0}\|\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{f}\|_{Q_{\tau,\tau+T_0}}$, *где* $Q_\infty = \Omega\times(0,\infty)$, $Q_{\tau,\tau+T_0} = \Omega\times(\tau,\tau+T_0)$, $T_0 > 2$ – *некоторое фиксированное число, и*

$$\|e^{bt}\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_\infty)} \leqslant \varepsilon, \quad b > 0, \quad \sup_{\tau>0}\|\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{f}\|_{Q_{\tau,\tau+T_0}} \leqslant \varepsilon, \quad |\boldsymbol{i}| = 1,2. \tag{1.11}$$

Тогда задача (1.5) *имеет единственное решение* $(\boldsymbol{u}, q, r)$ *и оно удовлетворяет неравенству*

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{u}\|_{W_2^{2+l,1+l/2}(\cup D_\infty^\pm)} + \|\mathrm{e}^{at}\nabla q\|_{W_2^{l,l/2}(\cup D_\infty^\pm)} + \|\mathrm{e}^{at} q\|_{W_2^{0,l/2}(\cup D_\infty^\pm)} \\
+ \|\mathrm{e}^{at} r\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_\infty)} + \|\mathrm{e}^{at}\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_\infty)} \\
\leqslant c_1(\varepsilon)\Big\{\|\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_\infty)} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^\pm)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\Big\}
\end{aligned} \quad (1.12)$$

с некоторым $a < b$, $D_\infty^\pm = B^\pm \times (0, \infty)$.

Отметим, что аналогичные результаты в гёльдеровских пространствах были получены с массовыми силами в правых частях [17] и без них [12].

Теорема 1.1 обеспечивает устойчивость решения в том смысле, что векторное поле скоростей мало отличается от нуля, а функция давления – от некоторой ступенчатой функции при условии малости начальных данных и массовых сил. Кроме того, предельной границей раздела является сфера $S_{R_0}(h_\infty)$ радиуса R_0; однако, центр h_∞ этой предельной сферы может быть смещён относительно начала координат – центра тяжести Ω_0^+, как бы ни были малы начальные скорости и массовые силы. Это смещение будет оценено посредством неравенства (3.23) в конце §3. Там также будет приведена оценка снизу начального расстояния между внешней границей и поверхностью раздела жидкостей, достаточная для того, чтобы эти границы никогда не пересеклись в будущем.

Доказательство теоремы 1.1 проводится в несколько этапов. Оно основывается на экспоненциальном энергетическом неравенстве для решения линейной задачи, которое влечёт за собой экспоненциальное убывание глобального решения этой задачи.

2 Линейная задача

Наряду с (1.5), рассмотрим линейную задачу

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\boldsymbol{v} - \nu^\pm\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^\pm}\nabla p = \boldsymbol{f}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = f \ \text{ в } B^\pm, \ t>0, \\
&\boldsymbol{v}(y,0) = \boldsymbol{v}_0(y) \ \text{ в } B^\pm, \qquad r(y,0) = r_0(y) \ \text{ на } S_{R_0}, \\
&[\boldsymbol{v}]|_{S_{R_0}} = 0, \quad [\mu^\pm\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{N}]|_{S_{R_0}} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{v}|_\Sigma = 0, \\
&[\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{N}]|_{S_{R_0}} - \sigma\mathcal{B}_0 r|_{S_{R_0}} = b, \\
&\mathcal{D}_t r - \Big(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N} - \frac{\boldsymbol{N}}{|B^+|}\cdot\int_{B^+}\boldsymbol{v}(y',t)\,\mathrm{d}y'\Big)\Big|_{S_{R_0}} = g, \quad \int_\Omega p(y,t)\,\mathrm{d}y = 0.
\end{aligned} \quad (2.1)$$

Теорема 2.1 (**Локальная разрешимость линейной задачи**). *Пусть* $\Sigma\in W_2^{\frac{3}{2}+l}$, $r_0\in W_2^{2+l}(S_{R_0})$ *с* $l\in(1/2,1)$. *Для произвольных* $\boldsymbol{f}\in \boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D_T^{\pm})$, $f\in W_2^{1+l,0}(\cup D_T^{\pm})$, $f=\nabla\cdot\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}\in \boldsymbol{W}_2^{0,1+\frac{l}{2}}(\cup D_T^{\pm})$, $[F_{\boldsymbol{N}}]|_{S_{R_0}}=0$, $\boldsymbol{v}_0\in W_2^{1+l}(\cup B^{\pm})$, $\boldsymbol{b}\in \boldsymbol{W}_2^{l+\frac{1}{2},\frac{l}{2}+\frac{1}{4}}(G_T)$, $b\in W_2^{l+\frac{1}{2},0}(G_T)\cap W_2^{l/2}\big(0,T;W_2^{1/2}(S_{R_0})\big)$, $g\in W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)$, *где* $D_T^{\pm}=B^{\pm}\times(0,T)$, $G_T=S_{R_0}\times(0,T)$, $T<\infty$, *удовлетворяющих условиям согласования*

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0=f(y,0),\quad [\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{N}]|_{S_{R_0}}=\boldsymbol{b}(y,0),\quad \boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{b}(y,t)=0,\quad t\geqslant 0,\\ &[\boldsymbol{v}_0]|_{S_{R_0}}=0,\quad \boldsymbol{v}_0|_{\Sigma}=0,\end{aligned}\tag{2.2}$$

задача (2.1) *имеет единственное решение* $(\boldsymbol{v},p,r)$: $\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{W}_2^{2+l,1+\frac{l}{2}}(\cup D_T^{\pm})$, $\nabla p\in \boldsymbol{W}_2^{l,\frac{l}{2}}(\cup D_T^{\pm})$, $r(\cdot,t)\in W_2^{2+l}(S_{R_0})$, $\forall t\in(0,T)$, *и*

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(\cup D_T^{\pm})}+\|\nabla p\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D_T^{\pm})}+\|p\|_{W_2^{0,l/2}(\cup D_T^{\pm})}+\|r\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_T)}\\ &\quad+\|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)}\leqslant c(T)\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D_T^{\pm})}+\|f\|_{W_2^{1+l,0}(\cup D_T^{\pm})}\\ &\qquad+\|\boldsymbol{F}\|_{W_2^{0,1+l/2}(\cup D_T^{\pm})}+\|\boldsymbol{b}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)}+|b|_{G_T}^{(1/2+l,l/2)})\\ &\qquad+\|g\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)}+\|\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^{\pm})}+\|r_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\Big\}.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Замечание 2.1. *Из теоремы о следах для* $\rho\in W_2^{1,1}(G_T)$ *следует, что*

$$\|\rho(\cdot,t)\|_{W_2^{1/2}(S_{R_0})}\leqslant c\Big\{\|\rho\|_{W_2^{1,0}(G_T)}+\|\mathcal{D}_t\rho\|_{G_T}\Big\},\ t\in[0,T],$$

откуда вытекает неравенство

$$\|r(\cdot,t)\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\leqslant c\Big\{\|r\|_{W_2^{5/2+l,0}(G_T)}+\|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,0}(G_T)}\Big\}.$$

А это означает, что $\Gamma_t\in W_2^{2+l}$ *при всех* $t\in[0,T]$.

Доказательство. Пусть r_1 – функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned}&r_1(y,0)=r_0(y),\\ &\mathcal{D}_t r_1(y,0)=g(y,0)+\Big(\boldsymbol{v}_0(y)\cdot\boldsymbol{N}(y)-\frac{\boldsymbol{N}(y)}{|B^+|}\cdot\int\limits_{B^+}\boldsymbol{v}_0(y')\,\mathrm{d}y'\Big)\equiv r_0'(y)\end{aligned}$$

и оценкам

$$\begin{aligned}|r_1|_{G_T}^{(\frac{5}{2}+l,\frac{l}{2})}+\|\mathcal{D}_t r_1\|_{W_2^{\frac{3}{2}+l,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}}(G_T)}&\leqslant c\big\{\|r_1\|_{W_2^{\frac{5}{2}+l,\frac{5}{4}+\frac{l}{2}}(G_T)}+\|\mathcal{D}_t r_1\|_{W_2^{\frac{3}{2}+l,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}}(G_T)}\big\}\\ &\leqslant c\big\{\|r_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}+\|r_0'\|_{W_2^{l+1/2}(S_{R_0})}\big\}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Такая r_1 существует согласно предложению 4.1 из [24] и эквивалентной нормировке пространств Соболева–Слободецкого. Тогда мы можем записать

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0 r(y,t) &= \mathcal{B}_0 r_1(y,t) + \int_0^t \mathcal{B}_0\Big(\mathcal{D}_t\big(r(y,\tau) - r_1(y,\tau)\big)\Big)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \mathcal{B}_0 r_1(y,t) + \int_0^t \mathcal{B}_0\Big(g(y,\tau) + \boldsymbol{v}(y,\tau)\cdot\boldsymbol{N}(y) - \mathcal{D}_t r_1(y,\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

так как $\mathcal{B}_0\boldsymbol{N} = 0$ ввиду того, что $\boldsymbol{N}$ – это собственный вектор оператора $\mathcal{B}_0$ с собственным значением 0. Значит, система (2.1) может быть преобразована к виду:

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}_t\boldsymbol{v} - \nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{v} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla p = \boldsymbol{f}, \qquad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = f \ \text{ в } \ B^{\pm}, \ \ t>0, \\ &\quad \boldsymbol{v}(y,0) = \boldsymbol{v}_0(y) \ \text{ в } \ B^{\pm}, \\ &[\boldsymbol{v}]|_{S_{R_0}} = 0, \quad [\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{v}|_{\Sigma} = 0, \\ &[\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{v},p)\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}} - \sigma\boldsymbol{N}\cdot\mathcal{B}_0\int_0^t \boldsymbol{v}|_{S_{R_0}}\,\mathrm{d}\tau = b' + \sigma\int_0^t B'\,\mathrm{d}\tau + \\ &\qquad + 2\sigma\int_0^t \nabla_S\boldsymbol{v} : \nabla_S\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}\tau \ \text{ на } \ S_{R_0}, \qquad \int_{\Omega} p(y,t)\,\mathrm{d}y = 0, \quad t>0,\end{aligned} \tag{2.5}$$

где $b' = b + \sigma\mathcal{B}_0 r_1$, $B' = \mathcal{B}_0(g - \mathcal{D}_t r_1)$, ∇_S – поверхностный градиент на S_{R_0}; $\mathbb{S}:\mathbb{T} \equiv S_{ij}T_{ij}$. Задачи такого типа изучались в работе [5], где были установлены разрешимость задачи (2.5) и оценка её решения

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v}\|_{W_2^{2+l,l+1/2}(\cup D_T^{\pm})} &+ \|\nabla p\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D_T^{\pm})} + \|p\|_{W_2^{0,l/2}(\cup D_T^{\pm})} \leqslant c(T)\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D_T^{\pm})} \\ &+ \|f\|_{W_2^{1+l,0}(\cup D_T^{\pm})} + \|\boldsymbol{F}\|_{\boldsymbol{W}_2^{0,1+l/2}(\cup D_T^{\pm})} + \|\boldsymbol{b}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l+1/2,l/2+1/4}(G_T)} \\ &\qquad + |b'|_{G_T}^{(1/2+l,l/2)} + \|B'\|_{W_2^{l-1/2,l/2-1/4}(G_T)} + \|\boldsymbol{v}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^{\pm})}\Big\}.\end{aligned}$$

Из этого неравенства в комплексе с (2.4) вытекает оценка (2.3). Дополнительный член $2\sigma\int_0^t \nabla_S\boldsymbol{v}(y,t) : \nabla_S\boldsymbol{N}(y)\,\mathrm{d}S$ в последнем граничном условии слабый и мало влияет на конечный результат. $\square$

Рассмотрим задачу (2.1) с $\boldsymbol{f} = 0$, $f = 0$, $\boldsymbol{b} = 0$, $b = 0$, $g = 0$ и с $r_0(y)$, удовлетворяющим условиям ортогональности

$$\int_{S_{R_0}} r_0(y)\,\mathrm{d}S = 0, \quad \int_{S_{R_0}} r_0(y)y_j\,\mathrm{d}S = 0, \quad j = 1,2,3, \tag{2.6}$$

полученным путём линеаризации (1.8). Так как

$$\int_{S_{R_0}} \mathcal{D}_t r(y,t)\,\mathrm{d}S = \int_{S_{R_0}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}S = \int_{B^+} \nabla\cdot\boldsymbol{v}(y,t)\,\mathrm{d}y = 0,$$

$$\int_{S_{R_0}} \mathcal{D}_t r(y,t) y_j\,\mathrm{d}S = \int_{S_{R_0}} y_j\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}\,\mathrm{d}S - \int_{B^+} v_j(y,t)\,\mathrm{d}y = 0,$$

то условия (2.6) выполняются также и для $r(y,t)$, $t>0:$

$$\int_{S_{R_0}} r(y,t)\,\mathrm{d}S = 0, \quad \int_{S_{R_0}} r(y,t)y_j\,\mathrm{d}S = 0, \quad j=1,2,3. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2 (**Глобальная разрешимость линейной однородной задачи**)**.** *Задача* (2.1) *с* $\boldsymbol{f}=0$, $f=0$, $\boldsymbol{b}=0$, $b=0$, $g=0$ *и с* $\boldsymbol{v}_0\in W_2^{1+l}(\cup B^{\pm})$, $r_0\in W_2^{2+l}(S_{R_0})$, $l\in(1/2,1)$, *удовлетворяющими условиям согласования* (2.2), *т.е.*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_0=0, \quad [\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{v}_0)\boldsymbol{N}]|_{S_{R_0}}=0, \quad [\boldsymbol{v}_0]|_{S_{R_0}}=0, \quad \boldsymbol{v}_0|_{\Sigma}=0, \tag{2.8}$$

и условию ортогональности (2.6), *имеет единственное решение* $(\boldsymbol{v},p,r)$*:* $\boldsymbol{v}\in \boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(\cup D_\infty^{\pm})$, $\nabla p\in \boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D_\infty^{\pm})$, $r(\cdot,t)\in W_2^{2+l}(S_{R_0})$ *для* $\forall t\in(0,\infty)$*; и оно подчиняется неравенству*

$$\begin{aligned}\|\mathrm{e}^{\beta t}\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+\frac{l}{2}}(\cup D_\infty^{\pm})} + \|\mathrm{e}^{\beta t}\nabla p\|^2_{\boldsymbol{W}_2^{l,\frac{l}{2}}(\cup D_\infty^{\pm})} + \|\mathrm{e}^{\beta t}p\|^2_{W_2^{0,\frac{l}{2}}(\cup D_\infty^{\pm})} + \|\mathrm{e}^{\beta t}r\|^2_{W_2^{\frac{5}{2}+l,\frac{5}{4}+\frac{l}{2}}(G_\infty)} \\ + \|\mathrm{e}^{\beta t}\mathcal{D}_t r\|^2_{W_2^{\frac{3}{2}+l,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}}(G_\infty)} \leqslant c\big\{\|\boldsymbol{v}_0\|^2_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^{\pm})} + \|r_0\|^2_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\big\}\end{aligned} \tag{2.9}$$

с некоторым $\beta>0$.

Наметим основные этапы доказательства неравенства (2.9). Прежде всего, мы получаем весовые L_2-оценки $\boldsymbol{v}$ и r.

Предложение 2.1 (см. [12])**.** *Любое решение* (2.1), (2.6) *с* $\boldsymbol{f}=0$, $f=0$, $\boldsymbol{b}=0$, $b=0$, $g=0$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|e^{\beta_1 t}\boldsymbol{v}(\cdot,t)\|^2_{\Omega} + \|e^{\beta_1 t}r(\cdot,t)\|^2_{W_2^1(S_{R_0})} \leqslant c\big\{\|\boldsymbol{v}_0\|^2_{\Omega_0} + \|r_0\|^2_{W_2^1(S_{R_0})}\big\}, \tag{2.10}$$

где $\beta_1>0$, c *не зависит от* t.

Доказательство. Неравенство (2.10) доказывается аналогично неравенству (2.8) из [12] и даже проще, так как триада $(\boldsymbol{v},p,r)$ есть решение линейной задачи. Доказательство основано на энергетическом соотношении

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\sqrt{\rho^{\pm}}\boldsymbol{v}\|^2_{\Omega} - \sigma\int_{S_{R_0}} \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}\mathcal{B}_0 r\,\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\|\sqrt{\mu^{\pm}}\mathbb{S}(\boldsymbol{v})\|^2_{\Omega} = 0, \tag{2.11}$$

из которого, ввиду последнего краевого условия в (2.1) и самосопряжённости оператора $\mathcal{B}_0$, вытекает, что

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\|\sqrt{\rho^\pm}\boldsymbol{v}\|_\Omega^2 - \sigma\int_{S_{R_0}} r\mathcal{B}_0 r\,\mathrm{d}S\Big) + \frac{1}{2}\|\sqrt{\mu^\pm}\mathbb{S}(\boldsymbol{v})\|_\Omega^2 = 0.$$

Подобно (2.11) мы можем вывести равенство

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega \rho^\pm \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \rho^\pm\boldsymbol{v}\cdot\mathcal{D}_t\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{\mu^\pm}{2}\mathbb{S}(\boldsymbol{v}):\mathbb{S}(\boldsymbol{W})\,\mathrm{d}x - \sigma\int_{S_{R_0}} r\mathcal{B}_0 r\,\mathrm{d}S = 0, \tag{2.12}$$

где $\boldsymbol{W}$ – вспомогательное векторное поле, удовлетворяющее соотношениям (см. [12])

$$\nabla\cdot\boldsymbol{W}(x,t) = 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{N}|_{S_{R_0}} = r, \quad [\boldsymbol{W}]|_{S_{R_0}} = 0, \quad \boldsymbol{W}|_\Sigma = 0,$$
$$\|\boldsymbol{W}\|_{\boldsymbol{W}_2^1(\Omega)} \leqslant c\|r\|_{W_2^{1/2}(S_{R_0})},$$
$$\|\mathcal{D}_t\boldsymbol{W}\|_\Omega \leqslant c\|\mathcal{D}_t r\|_{S_{R_0}} \leqslant c\big\{\|\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{N}\|_{S_{R_0}} + \|\boldsymbol{v}\|_\Omega\big\}.$$

Домножим (2.12) на малое $\gamma > 0$ и сложим с (2.11). Принимая во внимание тот факт, что форма $-\int_{S_{R_0}} r\mathcal{B}_0 r\,\mathrm{d}S = \int_{S_{R_0}}(|\nabla_S r|^2 - 2R_0^{-2}r^2)\,\mathrm{d}S$ положительно определена, если r удовлетворяет условиям (2.7) [25], а также используя (2.4) и неравенство Корна для $\boldsymbol{v}$, мы показываем, что для так называемой обобщённой энергии [21]

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|\sqrt{\rho^\pm}\boldsymbol{v}\|_\Omega^2 - \sigma\int_{S_{R_0}} r\mathcal{B}_0 r\,\mathrm{d}S + \gamma\int_\Omega \rho^\pm\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{W}\,\mathrm{d}x$$

верна оценка

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t) + 2\beta_1\mathcal{E}(t) \leqslant 0,$$

где $\beta_1 = const > 0$. Поскольку $\mathcal{E}$ оценивается сверху и снизу суммой норм $c(\|\boldsymbol{v}\|_\Omega^2 + \|r\|^2_{W_2^1(S_{R_0})})$, если γ достаточно мало, то по лемме Гронуолла, приходим к (2.10). □

Для получения оценок старших полунорм решения, подобных неравенству (2.10), мы привлекаем локальную по времени оценку решения. Имея в виду последующие рассуждения, мы предполагаем, что $T > 2$.

Предложение 2.2. *Пусть $T > 2$. Решение задачи (2.1), (2.6) с $\boldsymbol{f} = 0$, $f = 0$, $\boldsymbol{b} = 0$, $b = 0$, $g = 0$ подчиняется неравенству*

$$\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+\frac{l}{2}}(\cup D^\pm_{t_0-1,t_0})} + \|\nabla p\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,\frac{l}{2}}(\cup D^\pm_{t_0-1,t_0})} + \|p\|_{W_2^{0,\frac{l}{2}}(\cup D^\pm_{t_0-1,t_0})} + \|r\|_{W_2^{\frac{5}{2}+l,\frac{5}{4}+\frac{l}{2}}(G_{t_0-1,t_0})}$$
$$+ \|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{\frac{3}{2}+l,\frac{3}{4}+\frac{l}{2}}(G_{t_0-1,t_0})} \leqslant c(\|\boldsymbol{v}\|_{Q_{t_0-2,t_0}} + \|r\|_{G_{t_0-2,t_0}}), \tag{2.13}$$

где $2 < t_0 \leqslant T$, $D^{\pm}_{t_1,t_2} = B^{\pm} \times (t_1, t_2)$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1, t_2)$, $G_{t_1,t_2} = S_{R_0} \times (t_1, t_2)$.

Доказательство. Фиксируем $t_0 \in (2, T)$ и умножим (2.13) на срезающую функцию $\zeta_\lambda(t)$, гладкую, монотонную, равную нулю при $t \leqslant t_0 - 2 + \lambda/2$ и единице при $t \geqslant t_0 - 2 + \lambda$, где $\lambda \in (0, 1]$, и такую, что для $\dot\zeta_\lambda(t) \equiv \frac{\mathrm{d}\zeta_\lambda(t)}{\mathrm{d}t}$ и $\ddot\zeta_\lambda(t)$ выполнены неравества

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \big|\dot\zeta_\lambda(t)\big| \leqslant c\lambda^{-1}, \quad \sup_{t\in\mathbb{R}} |\ddot\zeta_\lambda(t)| \leqslant c\lambda^{-2}.$$

Тогда для $\boldsymbol{v}_\lambda = \boldsymbol{v}\zeta_\lambda$, $p_\lambda = p\zeta_\lambda$, $r_\lambda = r\zeta_\lambda$ получаем

$$\begin{gathered}
\mathcal{D}_t \boldsymbol{v}_\lambda - \nu^{\pm}\nabla^2 \boldsymbol{v}_\lambda + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla p_\lambda = \boldsymbol{v}\dot\zeta_\lambda, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v}_\lambda = 0 \ \text{ в } \ B^{\pm}, \ \ t > 0,\\
\boldsymbol{v}_\lambda(y, 0) = 0 \ \text{ в } \ B^{\pm}, \quad r_\lambda(y, 0) = 0 \ \text{ на } \ S_{R_0},\\
[\boldsymbol{v}_\lambda]|_{S_{R_0}} = 0, \quad [\mu^{\pm}\Pi_0 \mathbb{S}(\boldsymbol{v}_\lambda)\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}} = 0, \quad \boldsymbol{v}_\lambda|_\Sigma = 0,\\
[\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{T}(\boldsymbol{v}_\lambda, p_\lambda)\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}} - \sigma\mathcal{B}_0 r_\lambda|_{S_{R_0}} = 0, \quad \int_\Omega p_\lambda(y, t)\,\mathrm{d}y = 0,\\
\mathcal{D}_t r_\lambda - \Big(\boldsymbol{v}_\lambda\cdot\boldsymbol{N} - \frac{\boldsymbol{N}}{|B^+|}\cdot\int_{B^+} \boldsymbol{v}_\lambda(y', t)\,\mathrm{d}y'\Big)\Big|_{S_{R_0}} = r\dot\zeta_\lambda(t).
\end{gathered} \tag{2.14}$$

По теореме 2.1, применённой к системе (2.14), верна оценка (2.3) для $\boldsymbol{v}_\lambda$, p_λ, r_λ, откуда следует, что

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(\cup D^{\pm}_{t_1+\lambda,t_0})} + \|\nabla p\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D^{\pm}_{t_1+\lambda,t_0})} + \|p\|_{W_2^{0,l/2}(\cup D^{\pm}_{t_1+\lambda,t_0})}&\\
+ \|r\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_{t_1+\lambda,t_0})} + \|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_{t_1+\lambda,t_0})}&\\
\leqslant c\lambda^{-2}\Big\{\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D^{\pm}_{t_1+\lambda/2,t_0})} + \|r\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_{t_1+\lambda/2,t_0})}\Big\}&,
\end{aligned} \tag{2.15}$$

где $t_1 = t_0 - 2$.

Далее применим интерполяционные неравенства

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D^{\pm}_{t_1+\lambda/2,t_0})} \leqslant \varkappa^2 \|\boldsymbol{v}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(\cup D^{\pm}_{t_1+\lambda/2,t_0})} + c\varkappa^{-l}\|\boldsymbol{v}\|_{Q_{t_1+\lambda/2,t_0}},\\
&\|r\|_{W_2^{3/2+l,0}(G_{t_1+\lambda/2})} \leqslant \varkappa^2 \|r\|_{W_2^{5/2+l,0}(G_{t_1+\lambda/2,t_0})} + c\varkappa^{-3-2l}\|r\|_{G_{t_1+\lambda/2,t_0}},\\
&\|r\|_{W_2^{0,3/4+l/2}(G_{t_1+\lambda/2})} \leqslant \varkappa^2 \|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{0,3/4+l/2}(G_{t_1+\lambda/2,t_0})} + c\varkappa^{-3/2-l}\|r\|_{G_{t_1+\lambda/2,t_0}},
\end{aligned}$$

которые ведут к оценке

$$\Psi(\lambda) \leqslant c_1\varkappa^2\lambda^{-2}\Psi(\lambda/2) + c_2\varkappa^{-m}\lambda^{-2}K,$$

здесь $\Psi(\lambda)$ обозначает левую часть (2.15), $K=\|\boldsymbol{v}\|_{Q_{t_1,t_0}}+\|r\|_{G_{t_1,t_0}}$, $m=3+2l$. Полагая $\varkappa=\delta\lambda\leqslant 1$, получаем

$$\Psi(\lambda)\leqslant c_1\delta^2\Psi(\lambda/2)+c_2\delta^{-m}\lambda^{-m-2}K,$$

откуда следует, что

$$\Psi(\lambda)\leqslant c_3(\delta)\lambda^{-m-2}(K+2^{-1}K+2^{-2}K+...)\leqslant\frac{c_3\lambda^{-m-2}}{1-1/2}K\leqslant 2c_3\lambda^{-m-2}K,$$

если $c_1\delta^2<1/2$. При $\lambda=1$ это неравенство эквивалентно (2.13). □

Доказательство теоремы 2.2. По теореме 2.1 и предложению 2.2 имеем

$$\begin{aligned}&e^{2\beta(T-j)}\Big\{\|\boldsymbol{v}\|^2_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(\cup D^{\pm}_{T-j-1,T-j})}+\|\nabla p\|^2_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D^{\pm}_{T-j-1,T-j})}+\|p\|^2_{W_2^{0,l/2}(\cup D^{\pm}_{T-j-1,T-j})}\\&\qquad+\|r\|^2_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}\left(G_{T-j-1,T-j}\right)}+\|\mathcal{D}_t r\|^2_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}\left(G_{T-j-1,T-j}\right)}\Big\}\\&\quad\leqslant ce^{2\beta(T-j)}\Big\{\|\boldsymbol{v}\|^2_{Q_{T-j-2,T-j}}+\|r\|^2_{G_{T-j-2,T-j}}\Big\},\quad j=0,1,...,[T]-2.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Суммируя (2.16) от $j=0$ до $j=[T]-2$, выводим неравенство, из которого вытекает, что

$$Y^2_{T-[T]+1,T}(e^{\beta t}\boldsymbol{v},e^{\beta t}p,e^{\beta t}r)\leqslant c\int_{T-[T]}^{T}e^{2\beta t}\Big(\|\boldsymbol{v}(\cdot,t)\|^2_{\Omega}+\|r(\cdot,t)\|^2_{S_{R_0}}\Big)\,\mathrm{d}t,\tag{2.17}$$

где

$$\begin{aligned}Y_{t_1,t_2}(\boldsymbol{u},q,r)=&\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(\cup D^{\pm}_{t_1,t_2})}+\|\nabla q\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D^{\pm}_{t_1,t_2})}+\|q\|_{W_2^{0,l/2}(\cup D^{\pm}_{t_1,t_2})}\\&+\|r\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_{t_1,t_2})}+\|\mathcal{D}_t r\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_{t_1,t_2})}.\end{aligned}\tag{2.18}$$

Складывая оценку

$$Y^2_{0,2}(\boldsymbol{v},p,r)\leqslant c\Big\{\|\boldsymbol{v}_0\|^2_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^{\pm})}+\|r_0\|^2_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\Big\}$$

с (2.17), выбирая $\beta<\beta_1$ и применяя (2.10), мы приходим к неравенству, эквивалентному (2.9). □

3 Нелинейная задача

Начнём с построения решения задачи (1.5) на конечном интервале времени $(0,T_0)$ с T_0, которое фиксируем позднее.

Теорема 3.1 (Локальная разрешимость нелинейной задачи). *Пусть $T_0 < \infty$ и пусть выполнены условия согласования (1.9) теоремы 1.1. Тогда существует число $\varepsilon(T_0) \ll 1$ такое, что при малых данных:*

$$\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^\pm)}+\|r_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}+\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})}+\|\nabla \boldsymbol{f}\|_{Q_{T_0}} \leqslant \varepsilon, \quad \|\nabla \boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} \leqslant \varepsilon, \tag{3.1}$$

задача (1.5) имеет единственное решение $(\boldsymbol{u}, q, r)$ на интервале $(0, T_0)$ и выполнены неравенства

$$Y_{0,T_0}(\boldsymbol{u}, q, r) \leqslant c\Big\{N(\boldsymbol{u}_0, r_0) + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})}\Big\}, \tag{3.2}$$

$$N(\boldsymbol{u}(\cdot, T_0), r(\cdot, T_0)) \leqslant \theta N(\boldsymbol{u}_0, r_0) + c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})}, \tag{3.3}$$

где $\theta < 1$ и

$$N(\boldsymbol{w}, \rho) = \|\boldsymbol{w}\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^\pm)} + \|\rho\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}.$$

Доказательство теоремы 3.1 основано на теореме 2.1 и на следующих оценках нелинейных членов.

Предложение 3.1. *Если*

$$\|r(\cdot, t)\|_{W_2^{3/2+l}(S_{R_0})} + \|\mathcal{D}_t r(\cdot, t)\|_{W_2^{1/2+l}(S_{R_0})} + \|\boldsymbol{u}(\cdot, t)\|_\Omega \leqslant \delta, \quad t \leqslant T, \tag{3.4}$$

где δ – некоторое малое положительное число, тогда нелинейные члены (1.6) и $\widehat{\boldsymbol{f}}(y, t) \equiv \boldsymbol{f}\big(e_{r,h}(y, t), t\big)$ подчиняются неравенствам

$$\begin{aligned} Z(\boldsymbol{u}, q, r) \equiv \|\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}, r)\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D_T^\pm)} + \|l_2(\boldsymbol{u}, r)\|_{W_2^{1+l,0}(\cup D_T^\pm)} + \|\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}, r)\|_{W_2^{0,1+l/2}(Q_T)} \\ + \|\boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{u}, r)\|_{W_2^{1/2+l,1/4+l/2}(G_T)} + \big|l_4(\boldsymbol{u}, r)\big|_{G_T}^{(1/2+l,l/2)} + \big|l_5(r)\big|_{G_T}^{(1/2+l,l/2)} \\ + \|l_6(\boldsymbol{u}, r)\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)} \leqslant cY^2(\boldsymbol{u}, q, r), \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\|\widehat{\boldsymbol{f}}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_T)}\leqslant c\Big\{\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_T)}+\|\nabla \boldsymbol{f}\|_{Q_T} \sup_{t<T}\big(\|\mathcal{D}_t r(\cdot, t)\|_{W_2^{l+1/2}(S_{R_0})}+\|\boldsymbol{u}(\cdot, t)\|_\Omega\big)\Big\}. \tag{3.6}$$

Если $(\boldsymbol{u}, r)$ и $(\boldsymbol{u}', r')$ удовлетворяют (3.4), тогда

$$\begin{aligned} &Z(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}', q - q', r - r') \leqslant c\delta Y(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}', q - q', r - r'), \\ &\|\widehat{\boldsymbol{f}} - \widehat{\boldsymbol{f}}'\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_T)} \leqslant c\delta Y(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}', q - q', r - r'), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\widehat{\boldsymbol{f}}' = \boldsymbol{f}(e_{r',\boldsymbol{h}'}(y, t), t)$, $\boldsymbol{h}' = |B^+|^{-1} \int_0^t \int_{B^+} \boldsymbol{u}'(y, \tau) L'(y, \tau)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}\tau$, L' – якобиан преобразования $e_{r',\boldsymbol{h}'}$.

Доказательство. Неравенство (3.5) устанавливается так же, как аналогичная оценка в [26]. А неравенство

$$\|\widehat{\boldsymbol{f}}\|_{Q_T} = \|\boldsymbol{f}(e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t),t)\|_{Q_T} \leqslant c\|\boldsymbol{f}\|_{Q_T}$$

получается путём перехода к эйлеровым координатам $x = e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t)$ под знаком интеграла и учёта (3.4), откуда следует ограниченность якобиана L. Оценки

$$\int_0^T \mathrm{d}t \int_\Omega \mathrm{d}y \int_\Omega \frac{|\boldsymbol{f}(e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t),t) - \boldsymbol{f}(e_{r,\boldsymbol{h}}(z,t),t)|^2}{|y-z|^{3+2l}}\,\mathrm{d}z \leqslant c\int_0^T \mathrm{d}t \int_\Omega \mathrm{d}x \int_\Omega \frac{|\boldsymbol{f}(x,t) - \boldsymbol{f}(x',t)|^2}{|x-x'|^{3+2l}}\,\mathrm{d}x',$$

$$\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_\Omega \frac{|\boldsymbol{f}(e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t),t) - \boldsymbol{f}(e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t),t-\tau)|^2}{\tau^{1+l}}\,\mathrm{d}y \leqslant c\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_\Omega \frac{|\boldsymbol{f}(x,t) - \boldsymbol{f}(x,t-\tau)|^2}{\tau^{1+l}}\,\mathrm{d}x$$

доказываются таким же путём (при малом δ). Наконец, предполагая, что функция $\boldsymbol{f}$ продолжена вне Ω с сохранением класса, и используя соотношение

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}\big(e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t),t\big) - \boldsymbol{f}\big(e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t-\tau),t\big) = \\ = \int_0^1 \nabla\boldsymbol{f}\Big(e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t) - \lambda\int_0^\tau \big(\boldsymbol{N}^*(y)\mathcal{D}_t r^*(y,t-\tau') + \dot{\boldsymbol{h}}(t)\chi(y)\big)\,\mathrm{d}\tau',t\Big)\,\mathrm{d}\lambda \\ \times \int_0^\tau \Big(\boldsymbol{N}^*(y)\mathcal{D}_t r^*(y,t-\tau') + \dot{\boldsymbol{h}}(t)\chi(y)\Big)\,\mathrm{d}\tau',\end{aligned}$$

получаем, ввиду (1.3), неравенство

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathrm{d}t \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^{1+l}} \int_\Omega \big|\boldsymbol{f}(e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t),t) - \boldsymbol{f}(e_{r,\boldsymbol{h}}(y,t-\tau),t)\big|^2\,\mathrm{d}y \\ \leqslant c\|\nabla\boldsymbol{f}\|^2_{Q_T}\Big(\sup_{Q_T}|\mathcal{D}_t r^*(y,t)| + \sup_{t<T}\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|_\Omega\Big)^2 \\ \leqslant c\|\nabla\boldsymbol{f}\|^2_{Q_T}\Big\{\sup_{t<T}\|\mathcal{D}_t r(\cdot,t)\|^2_{W_2^{l+1/2}(S_{R_0})} + \sup_{t<T}\|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2_\Omega\Big\}.\end{aligned}$$

Неравенство (3.7) доказывается с помощью применения полученных выше оценок к разности $\boldsymbol{f}\big(e_{r,\boldsymbol{h}},t\big) - \boldsymbol{f}\big(e_{r',\boldsymbol{h}'},t\big) = \int_0^1 \nabla\boldsymbol{f}\Big(e_{r',\boldsymbol{h}'} + \lambda\big(\boldsymbol{N}^*(y,t)(r-r') + (\boldsymbol{h}-\boldsymbol{h}')\chi(y)\big),t\Big)\,\mathrm{d}\lambda\big(\boldsymbol{N}^*(y,t)(r-r') + (\boldsymbol{h}-\boldsymbol{h}')\chi(y)\big)$. □

Доказательство теоремы 3.1. Вернёмся к задаче (1.5). Её решение найдём в виде

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}'',\quad q=q'+q'',\quad r=r'+r'',$$

где $(\boldsymbol{u}',q',r')$ и $(\boldsymbol{u}'',q'',r'')$ – решения задач

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\boldsymbol{u}'-\nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{u}'+\frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla q'=0,\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{u}'=0\quad\text{в }\ B^{\pm},\ t>0,\\
&\boldsymbol{u}'(y,0)=\boldsymbol{u}_0'(y)\ \text{ в }\ B^{\pm},\quad r'(y,0)=r_0'(y)\ \text{ на }\ S_{R_0},\\
&[\boldsymbol{u}']|_{S_{R_0}}=0,\quad [\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{u}')\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}}=0,\qquad \boldsymbol{u}'|_{\Sigma}=0,\\
&[-q'+\mu^{\pm}\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u}')\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}}-\sigma\mathcal{B}_0r'=0,\\
&\mathcal{D}_tr'-\Big(\boldsymbol{u}'-\frac{1}{|B^+|}\int_{B^+}\boldsymbol{u}'\,\mathrm{d}y\Big)\cdot\boldsymbol{N}=0\ \text{ на }\ S_{R_0},\quad \int_{\Omega}q'(y,t)\,\mathrm{d}y=0,
\end{aligned}\tag{3.8}$$

и

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\boldsymbol{u}''-\nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{u}''+\frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla q''=\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u},q,r)+\widehat{\boldsymbol{f}}(y,t),\\
&\qquad\quad \nabla\cdot\boldsymbol{u}''=l_2(\boldsymbol{u},r)\ \text{ в }\ B^{\pm},\ t>0,\\
&\boldsymbol{u}''(y,0)=\boldsymbol{u}_0''(y)\ \text{ в }\ B^{\pm},\quad r''(y,0)=r_0''(y)\ \text{ на }\ S_{R_0},\\
&[\boldsymbol{u}'']\big|_{S_{R_0}}=0,\quad [\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{u}'')\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}}=\boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{u},r),\qquad \boldsymbol{u}''|_{\Sigma}=0,\\
&[-q''+\mu^{\pm}\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u}'')\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}}-\sigma\mathcal{B}_0r''=l_4(\boldsymbol{u},r)+\sigma l_5(r),\quad \int_{\Omega}q''(y,t)\,\mathrm{d}y=0,\\
&\mathcal{D}_tr''-\Big(\boldsymbol{u}''-\frac{1}{|B^+|}\int_{B^+}\boldsymbol{u}''\,\mathrm{d}y\Big)\cdot\boldsymbol{N}=l_6(\boldsymbol{u},r)\ \text{ на }\ S_{R_0},
\end{aligned}\tag{3.9}$$

соответственно; здесь нелинейные члены l_i заданы соотношениями (1.6).

Определим начальные данные $(\boldsymbol{u}_0',r_0')$ и $(\boldsymbol{u}_0'',r_0'')$. Пусть пара $(\boldsymbol{u}_0'',r_0'')$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned}
&\int_{S_{R_0}}r_0''(y)\,\mathrm{d}S=\int_{S_{R_0}}\Big(r_0-\frac{\varphi(y,r_0)}{3R_0^2}\Big)\,\mathrm{d}S,\\
&\int_{S_{R_0}}r_0''(y)y_j\,\mathrm{d}S=\int_{S_{R_0}}\Big(r_0y_j-\frac{\psi_j(y,r_0)}{4R_0^3}\Big)\,\mathrm{d}S,\quad j=1,2,3,\\
&[\boldsymbol{u}_0'']|_{S_{R_0}}=0,\quad [\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_0'')\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}}=\boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{u}_0,r_0)\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0''=l_2(\boldsymbol{u}_0,r_0)\ \text{ в }\ B^+\cup B^-,\quad \boldsymbol{u}_0''=0\ \text{ на }\ \Sigma,
\end{aligned}$$

где $\varphi(y,r)=(R_0+r)^3-R_0^3$, $\psi_j(y,r)=y_j((R_0+r)^4-R_0^4)$ (см. (1.8)), и неравенству

$$\|\boldsymbol{u}_0''\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^{\pm})}+\|r_0''\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\leqslant c\varepsilon\big\{\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^{\pm})}+\|r_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\big\}.\tag{3.10}$$

Функция r_0'' может быть задана следующим образом (см. [27]):

$$r_0''(y) = \frac{I\boldsymbol{N}(y)\cdot\boldsymbol{y}}{3|B^+|} + \frac{\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{N}(y)}{|B^+|},$$

здесь

$$I = -\int_{S_{R_0}} \frac{3r_0^2R_0 + r_0^3}{3R_0^2}\,\mathrm{d}S, \quad I_j = -\int_{S_{R_0}} \frac{y_i(6r_0^2R_0^2 + 4r_0^3R_0 + r_0^4)}{4R_0^3}\,\mathrm{d}S, \quad j = 1,2,3.$$

А векторное поле $\boldsymbol{u}_0''$ можно выбрать виде: $\boldsymbol{u}_0'' = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$, где

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}_1(y) = l_2(\boldsymbol{u}_0, r_0) = \nabla\cdot(\mathbb{I}-\widehat{\mathbb{L}})\boldsymbol{u}_0 = (\mathbb{I}-\widehat{\mathbb{L}}^T)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_0, \quad [\boldsymbol{u}_1]|_{S_{R_0}} = 0, \quad \boldsymbol{u}_1|_\Sigma = 0,$$

и $\boldsymbol{u}_2^- = 0$, $\boldsymbol{u}_2^+ = rot\boldsymbol{\Phi}(y)$, где $\boldsymbol{\Phi}|_{S_{R_0}} = \frac{\partial\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{N}}\big|_{S_{R_0}} = 0$,

$$\mu^+\frac{\partial^2\boldsymbol{\Phi}}{\partial\boldsymbol{N}^2}\big|_{S_{R_0}} = \Big(\boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{u}_0, r_0) - [\mu^\pm\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}}\Big)\times\boldsymbol{N}\big|_{S_{R_0}}.$$

Поскольку $[\boldsymbol{u}_0]|_{S_{R_0}} = 0$ и $[\mathbb{L}]|_{S_{R_0}} = 0$, то условие согласования $[\boldsymbol{N}\cdot(\mathbb{I}-\widehat{\mathbb{L}})\boldsymbol{u}_0]|_{S_{R_0}} = 0$ выполнено, и можно показать, что $\boldsymbol{u}_0''$ удовлетворяет (3.10).

Функции $\boldsymbol{u}_0' = \boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_0''$, $r_0' = r_0 - r_0''$ удовлетворяют условиям ортогональности (2.6) и условиям согласования (2.8). Следовательно, по теореме 2.2 задача (3.8) разрешима на бесконечном интервале времени и

$$\begin{aligned}\|e^{\beta t}\boldsymbol{u}'\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(\cup D_T^\pm)} + \|e^{\beta t}\nabla q'\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D_T^\pm)} + \|e^{\beta t}q'\|_{W_2^{0,l/2}(\cup D_T^\pm)}\\ + \|e^{\beta t}r'\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_T)} + \|e^{\beta t}\mathcal{D}_t r'\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_T)}\\ \leqslant c_0\Big\{\|\boldsymbol{u}_0'\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^\pm)} + \|r_0'\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\Big\}, \quad \forall T\leqslant\infty, \quad (3.11)\end{aligned}$$

откуда вытекает, что (см. замечание 2.1)

$$\|\boldsymbol{u}'(\cdot,T)\|^2_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^\pm)} + \|r'(\cdot,T)\|^2_{W_2^{2+l}(S_{R_0})} \leqslant c_1e^{-2\beta T}\Big\{\|\boldsymbol{u}_0'\|^2_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^\pm)} + \|r_0'\|^2_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\Big\}. \quad (3.12)$$

Чтобы доказать (3.3) фиксируем $T = T_0$ такое, что

$$c_1e^{-\beta T_0} \leqslant \frac{\theta}{2} < \frac{1}{2}$$

(можно положить $\theta = e^{-bT_0}$ с $b < \beta$ и потребовать, чтобы T_0 было таким, что $2c_1 < e^{(\beta-b)T_0}$).

Что касается задачи (3.9), то она разрешима в случае достаточно малого $\varepsilon(T_0)$ в (3.1). Действительно, решение можно построить путём последовательных приближений согласно схеме:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\boldsymbol{u}''_{m+1}-\nu^{\pm}\nabla^2\boldsymbol{u}''_{m+1}+\frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla q''_{m+1}=\boldsymbol{l}_1(\boldsymbol{u}_m,q_m,r_m)+\widehat{\boldsymbol{f}}_m(y,t),\\
&\qquad\nabla\cdot\boldsymbol{u}''_{m+1}=l_2(\boldsymbol{u}_m,r_m)\quad \text{в } B^{\pm},\ t>0,\quad \int_{\Omega}q''_{m+1}(y,t)\,\mathrm{d}y=0,\\
&\boldsymbol{u}''_{m+1}(y,0)=\boldsymbol{u}''_0(y)\quad \text{в } B^{\pm},\quad r''_{m+1}(y,0)=r''_0(y)\ \text{ на } S_{R_0},\\
&[\boldsymbol{u}''_{m+1}]\big|_{S_{R_0}}=0,\quad [\mu^{\pm}\Pi_0\mathbb{S}(\boldsymbol{u}''_{m+1})\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}}=\boldsymbol{l}_3(\boldsymbol{u}_m,r_m),\qquad \boldsymbol{u}''_{m+1}|_{\Sigma}=0,\\
&[-q''_{m+1}+\mu^{\pm}\boldsymbol{N}\cdot\mathbb{S}(\boldsymbol{u}''_{m+1})\boldsymbol{N}]\big|_{S_{R_0}}-\sigma\mathcal{B}_0r''_{m+1}=l_4(\boldsymbol{u}_m,r_m)+\sigma l_5(r_m),\\
&\mathcal{D}_tr''_{m+1}-\Big(\boldsymbol{u}''_{m+1}-\frac{1}{|B^+|}\int_{B^+}\boldsymbol{u}''_{m+1}\,\mathrm{d}y\Big)\cdot\boldsymbol{N}=l_6(\boldsymbol{u}_m,r_m)\quad \text{на } S_{R_0},
\end{aligned}\tag{3.13}$$

где $m=1,\ldots$, $\boldsymbol{u}_m=\boldsymbol{u}'+\boldsymbol{u}''_m$, $q_m=q'+q''_m$, $r_m=r'+r''_m$, $\widehat{\boldsymbol{f}}_m=\boldsymbol{f}\big(e_{r_m,\boldsymbol{h}_m}(y,t),t\big)$, $\boldsymbol{h}_m=|B^+|^{-1}\int_0^t\int_{B^+}\boldsymbol{u}_m(y,\tau)L_m(y,\tau)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau$, $L_m=L|_{\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_m}$. При $m=0$ положим $q''_0=0$, а $\boldsymbol{u}''_0(y,t)$ и $r''_0(y,t)$ определим как функции, удовлетворяющие начальным условиям $\boldsymbol{u}''_0(y,0)=\boldsymbol{u}''_0(y)$, $r''_0(y,0)=r''_0(y)$ и $\mathcal{D}_tr''_0(y,0)=0$ $\big(\boldsymbol{u}''_0(y), r''_0(y)$ были построены выше $\big)$ и неравенствам

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{u}''_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(\cup D^{\pm}_{T_0})}+\|r''_0\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_{T_0})}+\|\mathcal{D}_tr''_0\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_{T_0})}\\
&\quad\leqslant c\Big\{\|\boldsymbol{u}''_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^{\pm})}+\|r''_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\Big\}\leqslant c_1\varepsilon\Big\{\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^{\pm})}+\|r_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\Big\},
\end{aligned}\tag{3.14}$$

ввиду обратной теоремы о следах и (3.10).

Если $\boldsymbol{u}''_m, q''_m, r''_m$ известны, тогда $\boldsymbol{u}''_{m+1}, q''_{m+1}, r''_{m+1}$ находятся по теореме 2.1 как решение задачи (3.13). В силу (2.3), (3.5) и (3.14)

$$Y''_{m+1}\equiv Y(\boldsymbol{u}''_{m+1},q''_{m+1},r''_{m+1})\leqslant c(T_0)\Big\{\|\widehat{\boldsymbol{f}}_m\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})}+\varepsilon N_0+Y''^2_m\Big\},\tag{3.15}$$

где $N_0=\|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^{\pm})}+\|r_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}$,

$$\begin{aligned}
Y(\boldsymbol{u},q,r)\equiv&\|\boldsymbol{u}\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(\cup D^{\pm}_{T_0})}+\|\nabla q\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D^{\pm}_{T_0})}+\|q\|_{W_2^{0,l/2}(\cup D^{\pm}_{T_0})}\\
&+\|r\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_{T_0})}+\|\mathcal{D}_tr\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_{T_0})},
\end{aligned}$$

$\widehat{\boldsymbol{f}}_m=\boldsymbol{f}\big(e_{r_m,\boldsymbol{h}_m}(y,t),t\big);\quad e_{r_m,\boldsymbol{h}_m}(y,t)=y+r^*_m(y,t)\boldsymbol{N}^*(y)+\chi(y)\boldsymbol{h}_m(t).$

Положим

$$
\begin{aligned}
Y_m \equiv & Y(\boldsymbol{u}_m, q_m, r_m) \\
Y' \equiv & \|\boldsymbol{u}'\|_{\boldsymbol{W}_2^{2+l,1+l/2}(\cup D^{\pm}_{T_0})} + \|\nabla q'\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(\cup D^{\pm}_{T_0})} + \|q'\|_{W_2^{0,l/2}(\cup D^{\pm}_{T_0})} \\
& + \|r'\|_{W_2^{5/2+l,5/4+l/2}(G_{T_0})} + \|\mathcal{D}_t r'\|_{W_2^{3/2+l,3/4+l/2}(G_{T_0})}, \\
N^{(m)}(T_0) \equiv & \|\boldsymbol{u}_m(\cdot, T_0)\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^{\pm})} + \|r_m(\cdot, T_0)\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}, \quad m \geqslant 1.
\end{aligned}
$$

Покажем по индукции, что (3.15) приводит к оценке норм Y''_m (и Y_m), не зависящей от m.

Предположим, что $\boldsymbol{u}_m, r_m$ удовлетворяют (3.4) с δ таким малым, что ввиду (3.6), (3.11)

$$
\begin{aligned}
\|\widehat{\boldsymbol{f}}_m\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} & \leqslant c_f \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + c'_f \|\nabla \boldsymbol{f}\|_{Q_{T_0}} Y(\boldsymbol{u}_m, 0, r_m) \\
& \leqslant c_f \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + c'_f \|\nabla \boldsymbol{f}\|_{Q_{T_0}} \big(c_0 N_0 + Y''_m\big) \\
& \leqslant c_f \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + c_2 \varepsilon N_0 + c'_f \varepsilon Y''_m.
\end{aligned}
$$

Кроме того, пусть

$$
Y''_m \leqslant 2c(T_0)\Big(c_f \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + c_2 \varepsilon N_0\Big). \tag{3.16}
$$

Тогда, с одной стороны,

$$
Y_m \leqslant Y' + Y''_m \leqslant c N_0 + 2c(T_0)\Big(c_f \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + c_2 \varepsilon N_0\Big) \leqslant c\varepsilon, \tag{3.17}
$$

что может гарантировать малость δ, а с другой стороны, согласно (3.15),

$$
\begin{aligned}
Y''_{m+1} \leqslant & c(T_0)\Big(c_f \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + c_2 \varepsilon N_0\Big)\Big\{1 + 2c'_f \varepsilon c(T_0) + \varepsilon / c_2 \\
& + 4c^2(T_0)\big(c_f \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + c_2 \varepsilon N_0\big)\Big\} \leqslant 2c(T_0)\big\{c_f \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + c_2 \varepsilon N_0\big\},
\end{aligned}
$$

если только

$$
2c'_f \varepsilon c(T_0) + \varepsilon / c_2 + 4c^2(T_0)\big(c_f \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} + c_2 \varepsilon N_0\big) \leqslant 1.
$$

Ввиду (3.14) неравенство (3.16) верно при $m = 0$, значит, оно удовлетворяется при всех m. Кроме того, из (3.17) и (3.12) следует, что

$$
N^{(m)}(T_0) \leqslant c\Big(\mathrm{e}^{-\beta T_0} + c'(T_0)\varepsilon\Big) N_0 + c''(T_0) \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})} \leqslant \theta N_0 + c'' \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0})}, \tag{3.18}
$$

если
$$c\Big(\mathrm{e}^{-\beta T_0} + c'(T_0)\varepsilon\Big)N_0 \leqslant \theta.$$

Сходимость последовательности $(\boldsymbol{u}''_m, q''_m, r''_m)$ к решению (3.9) следует из неравенств (2.3) и (3.7).

Полагая $m \to \infty$ в (3.17), (3.18), приходим к (3.2), (3.3). □

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.1. Будем продолжать решение задачи (1.5) во временной интервал $t > 0$ по шагам: сначала в интервал $(T_0, 2T_0)$, затем в $(2T_0, 3T_0)$ и т.д. Предположим, что решение уже найдено при $t < kT_0$. Тогда его можно определить при $t \in (kT_0, (k+1)T_0)$ как решение задачи (1.5) с начальными условиями $\boldsymbol{u}(y, kT_0) = \boldsymbol{u}(y, kT_0 - 0) \equiv \boldsymbol{u}_k(y)$, $r(y, kT_0) = r(y, kT_0 - 0) \equiv r_k(y)$. Перепишем преобразование (1.4) при $t > kT_0$ следующим образом:

$$x = y + \boldsymbol{h}(kT_0)\chi(y) + \boldsymbol{k}(t,k)\chi(y) + \boldsymbol{N}^*(y)r^*(y,t), \tag{3.19}$$

где $\boldsymbol{h}(kT_0)$ уже найдено, а $\boldsymbol{k}(t,k) = \boldsymbol{h}(t) - \boldsymbol{h}(kT_0)$. Элементы матрицы Якоби этого преобразования задаются формулой

$$\mathbb{L}_{ij} = \Big\{\delta_{ij} + \big(h_i(kT_0) + k_i(t,k)\big)\frac{\partial\chi(y)}{\partial y_j} + \frac{\partial N_i^* r^*(y)}{\partial y_j}\Big\}_{i,j=1}^{3}.$$

Предложение 3.1 в этом случае может быть переформулировано так.

Предложение 3.2. *Пусть* $k \in \mathbb{N}$. *Если неравенство* (3.4) *верно при* $t > kT_0$ *и* $|\boldsymbol{h}(kT_0)| \leqslant \delta$, *тогда*

$$Z_k(\boldsymbol{u}, q, r) \leqslant c\Big\{\delta Y_k(\boldsymbol{u}, q, r) + Y_k^2(\boldsymbol{u}, q, r)\Big\},$$

где Z_k *и* Y_k *– это нормы* (3.5) *и* (2.18), *соответственно, вычисленные при* $t \in (kT_0, (k+1)T_0)$. *Кроме того,* $\hat{\boldsymbol{f}}$ *удовлетворяет неравенствам* (3.6) *и* (3.7) *на этом интервале.*

Рассмотрим случай $k = 1$. Из (3.2) и (3.3) следует, что

$$N_1 \equiv N(\boldsymbol{u}_1, r_1) \leqslant C\varepsilon,$$

значит, заменяя ε на $C^{-1}\varepsilon$, мы видим, что эта задача разрешима на интервале $(T_0, 2T_0)$ и выполнены оценки

$$Y_1(\boldsymbol{u}, q, r) \leqslant c\Big\{N_1 + \|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_{T_0,2T_0})}\Big\},$$

$$N_2 \leqslant \theta N_1 + c\|\boldsymbol{f}\|_{\boldsymbol{W}_2^{l,l/2}(Q_T)} \leqslant C\varepsilon,$$

где
$$N_k = N(\boldsymbol{u}_k, r_k).$$
Константы в этих оценках могут не совпадать с константами в (3.2), (3.3) из-за присутствия дополнительного члена с $\boldsymbol{h}(T_0)$ в (3.19), но, как будет показано ниже, разница является величиной порядка δ.

Если решение найдено при $t < kT_0$ и доказаны неравенства
$$\begin{aligned} &N_j^2 \leqslant \theta^2 N_{j-1}^2 + c\|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{(j-1)T_0,jT_0})}, \\ &Y_j^2 \leqslant c\Big\{N_{j-1}^2 + \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{(j-1)T_0,jT_0})}\Big\}, \quad j = 1, ..., k-1, \end{aligned} \tag{3.20}$$
тогда
$$N_j^2 \leqslant ... \leqslant \theta^{2j} N_0^2 + c\sum_{i=0}^{j-1} \theta^{2(j-1-i)} \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{iT_0,(i+1)T_0})} \leqslant c\theta^{2(j-1)}\varepsilon^2 \tag{3.21}$$
с константами c, не зависящими от j (здесь было использовано неравенство для $\boldsymbol{f}$ из (1.11)). Поскольку $\theta^j \to 0$ при $j \to \infty$, правая часть (3.21) меньше, чем ε^2 при $j \geqslant j_0$, и, значит, замена ε на $C^{-1}\varepsilon$ будет сделана только конечное число раз.

Оценка $\boldsymbol{h}(jT_0)$ устанавливается на каждом шаге. Пусть $\theta_1 > \theta$ ($\theta_1 = \mathrm{e}^{-aT_0}$, $a < b$). Вернёмся к (3.20) и просуммируем эти неравенства, умноженные на θ_1^{-2j}. В результате будем иметь
$$\sum_{j=0}^{k} \theta_1^{-2j} N_j^2 \leqslant N_0^2 + \frac{\theta^2}{\theta_1^2}\sum_{j=1}^{k} \theta_1^{-2j+2} N_{j-1}^2 + c\sum_{j=1}^{k} \theta_1^{-2j} \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{(j-1)T_0,jT_0})}$$
и
$$\sum_{j=0}^{k} \theta_1^{-2j} N_j^2 \leqslant \frac{\theta_1^2}{\theta^2 - \theta_1^2} N_0^2 + \frac{c\theta_1^2}{\theta^2 - \theta_1^2}\sum_{j=1}^{k} \theta_1^{-2j} \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{(j-1)T_0,jT_0})}.$$
Тогда по теореме вложения
$$\begin{aligned} |\boldsymbol{h}(kT_0)| &= \frac{3}{4\pi R_0^3}\Big|\int_0^{kT_0}\int_{\Omega_t^+} \boldsymbol{v}(\cdot,t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\Big| \leqslant c\sqrt{T_0}\Big(\sum_{j=0}^{k-1} \theta_1^{-2j}\int_{jT_0}^{(j+1)T_0} \|\boldsymbol{u}(\cdot,t)\|^2_{W_2^{l+1}(B^+)}\,\mathrm{d}t\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant c\Big(N_0^2 + \sum_{j=0}^{k-1} \theta_1^{-2j} \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{jT_0,(j+1)T_0})}\Big)^{\frac{1}{2}} \leqslant c\varepsilon \end{aligned} \tag{3.22}$$

с константами c, не зависящими от k. Наконец, переходя к пределу по $k \to \infty$ в

$$\sum_{j=0}^{k} \theta_1^{-2j} Y_j^2(\boldsymbol{u}, q, r) \leqslant c\Big\{N_0^2 + \sum_{j=0}^{k} \theta_1^{-2j} \|\boldsymbol{f}\|^2_{W_2^{l,l/2}(Q_{jT_0,(j+1)T_0})}\Big\},$$

получаем неравенство эквивалентное (1.12). Кроме того, переход к пределу в (3.22) позволяет нам оценить предельное положение центра тяжести внутренней капли $h(\infty)$:

$$|h(\infty)| \leqslant c_2\Big\{\|\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_\infty)} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^\pm)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\Big\} \leqslant 2c_2\varepsilon. \quad (3.23)$$

Из теорем вложения следует, что

$$\max_{G_\infty} |r| \leqslant c_1\Big\{\|\mathrm{e}^{at}\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_\infty)} + \|\boldsymbol{u}_0\|_{\boldsymbol{W}_2^{1+l}(\cup B^\pm)} + \|r_0\|_{W_2^{2+l}(S_{R_0})}\Big\}.$$

Ясно, что если $2(c_1 + c_2)\varepsilon$ меньше, чем начальное расстояние между поверхностями Γ_t и Σ, то пересечение этих поверхностей невозможно ни при каком $t > 0$. $\square$

Покажем, что можно построить решение задачи (1.5) при менее ограничительных предположениях на $\boldsymbol{f}$.

Введём нормы

$$\begin{aligned} &|||\boldsymbol{u}, q, r||| = \sum_{j=0}^{\infty} Y_j(\boldsymbol{u}, q, r), \quad |||\boldsymbol{f}||| = \sum_{j=0}^{\infty} \|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{jT_0,(j+1)T_0})}, \\ &|||\boldsymbol{f}|||_\eta = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^{-1} \|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{jT_0,(j+1)T_0})}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где $\eta = \{\eta_j\}_0^\infty \in (0,1)$, и $\eta_j \to 0$ при $j \to \infty$.

Теорема 3.2. *Пусть* $\boldsymbol{u}_0 \in W_2^{l+1}(\cup B^\pm)$, $r_0 \in W_2^{l+2}(S_{R_0})$, *и пусть* $\boldsymbol{f}$ *имеет конечные нормы* (3.24). *Предположим, что выполнены условия согласования* (1.9), *условия малости* (1.10), *а также неравенства*

$$\sup_{\tau>0} \|\mathcal{D}_x^{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{f}\|_{Q_{\tau,\tau+T_0}} \leqslant \varepsilon, \quad |\boldsymbol{i}| = 1, 2, \quad |||\boldsymbol{f}||| + |||\boldsymbol{f}|||_\eta \leqslant \varepsilon.$$

Тогда существует решение (1.5), *определённое при* $t > 0$ *и удовлетворяющее оценке*

$$|||\boldsymbol{u}, q, r||| \leqslant c\Big\{\|\boldsymbol{u}_0\|_{W_2^{l+1}(\cup B^\pm)} + \|r_0\|_{W_2^{l+2}(S_{R_0})} + |||\boldsymbol{f}|||\Big\}. \quad (3.25)$$

Доказательство. Будем следовать доказательству теоремы 1.1, изложенному выше. Из неравенств

$$N_j \leqslant \theta N_{j-1} + c\|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{(j-1)T_0,jT_0})}, \quad Y_j \leqslant c(N_{j-1} + c\|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{jT_0,(j+1)T_0})})$$

эквивалентных (3.20), следует, что

$$N_j \leqslant \theta^j N_0 + c\sum_{i=0}^{j-1} \theta^{j-1-i}\|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{iT_0,(i+1)T_0})} \leqslant \theta^j N_0 + c\varkappa_j|||\boldsymbol{f}|||_\eta,$$

где $\varkappa_j = \max_{i\leqslant(j-1)}\theta^{j-1-i}\eta_i \leqslant \max(\theta^{[(j-1)/2]}, \eta_{[(j-1)/2]}) \to 0$ as $j \to \infty$. Значит, решение задачи (1.5) продолжимо на всю полуось $t > 0$ (если $h(kT_0)$ мало); более того, верны оценки

$$\sum_{j=1}^k N_j \leqslant \frac{1}{1-\theta}\Big\{N_0 + c\sum_{i=0}^k \|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{iT_0,(i+1)T_0})}\Big\}$$

and

$$\sum_{j=0}^k Y_j(\boldsymbol{u}, q, r) \leqslant c\Big\{N_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \|\boldsymbol{f}\|_{W_2^{l,l/2}(Q_{iT_0,(i+1)T_0})}\Big\}.$$

Используя это неравенство, мы можем оценить $h(kT_0)$: $|h(kT_0)| \leqslant c\varepsilon$. Полагая $k \to \infty$, приходим к (3.25). □

Заключение

Подведём итог нашим исследованиям. Сформулируем результаты, приведённые в работе, для задачи о движении двух несжимаемых жидкостей с неизвестной границей раздела в L_2-постановке.

Итак, мы доказали существование глобального (по времени) решения задачи с положительным коэффициентом поверхностного натяжения на границе раздела жидкостей в замкнутом сосуде при достачно малых начальных скоростях, малых, убывающих на бесконечности, массовых силах и близкой к сфере начальной поверхности раздела, не касающейся стенок сосуда. Полученные L_2-оценки этого решения гарантируют его устойчивость с течением времени. Таким образом, было доказано, что положение покоя для двух несмешивающихся жидкостей в контейнере является устойчивым, т. е. скорость жидкостей затухает со временем, давление стремится к ступенчатой функции в двух областях, а граница раздела сред – к сфере с центром в центре тяжести внутренней жидкости, при этом этот центр смещается в общем случае относительно начального положения, как бы ни были малы начальные данные задачи.

Список литературы

[1] Денисова И. В., Исследование задачи о движении капли в жидкой среде, Препринт ЛОМИ, P-9-89, ЛОМИ, Л., 1989.

[2] Денисова И. В., *Движение капли в потоке жидкости*, Динамика сплошной среды. Новосибирск, СО АН СССР,1989, **93/94**, 32–37.

[3] Denisova I. V., *Problem of the motion of two viscous incompressible fluids separated by a closed free interface*, Acta Appl. Math. **37** (1994), 31–40.

[4] Denisova I. V., *Global L_2-solvability of a problem governing two-phase fluid motion without surface tension*, Port. Math. **71**(1) (2014), 1–24.

[5] Денисова И. В., *Априорные оценки решения линейной нестационарной задачи, связанной с движением капли в жидкой среде*, Тр. МИАН СССР **188** (1990), 3–21.

[6] Денисова И. В., Солонников В. А., *Разрешимость линеаризованной задачи о движении капли в потоке жидкости*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **171** (1989), 53-65.

[7] Giga Yo. and Takahashi Sh., *On global weak solutions of the nonstationary two-phase Stokes flow* , SIAM J. Math. Anal. **25** (1994), 876–893.

[8] Takahashi Sh.,*On global weak solutions of the nonstationary two-phase Navier–Stokes flow*, Adv. Math. Sci. Appl. **5** (1995), 321–342.

[9] Abels H., *On general solutions of two-phase flows for viscous incompressible fluids*, Interfaces Free Bound., **9**(1) (2007), 31–65.

[10] Shibata Yo., Shimizu S., *Maximal L_p–L_q regularity for the two-phase Stokes equations. Model problems*, J. Differential Equations **251** (2011), 373–419.

[11] Shimizu S., *Local solvability of free boundary problems for the two-phase Navier–Stokes equations with surface tension in the whole space*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. **80** (2011), 647–686.

[12] Денисова И. В., Солонников В. А., *Глобальная разрешимость задачи о движении двух несжимаемых капиллярных жидкостей в контейнере*, Зап. научн. семин. ПОМИ **397** (2011), 20–52.

[13] Prüss J., Simonett G., *On the two-phase Navier-Stokes equations with surface tension*, Interfaces Free Bound., **12**(3) (2010), 311–345.

[14] Köhne M., Prüss Ja., Wilke, M., *Qualitative behaviour of solutions for the two-phase Navier- Stokes equations with surface tension*, Math. Ann. **356**(2) (2013), 737–792.

[15] Prüss J., Simonett G., Moving interfaces and quasilinear parabolic evolution equations, v. 105 of Monographs in Mathematics, Birkhäuser, 2016.

[16] Solonnikov V. A., *L_p-theory of the problem of motion of two incompressible capillary fluids in a container*, Probl. Mat. Anal. **75** (2014), 93–152.

[17] Denisova I. V., *Global classical solvability of an interface problem on the motion of two fluids*, RIMS Kokyuroku Series, Kyoto University, **1875** (2014), 84–108.

[18] Денисова И. В., *Глобальная разрешимость задачи о движении двух жидкостей без учёта сил поверхностного натяжения*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **348**, 2007, 19–39.

[19] Denisova I. V., Solonnikov V. A., *Classical well-posedness of free boundary problems in viscous incompressible fluid mechanics*, Handbook of Mathematical Analysis in Mechanics of Viscous Fluids I, Springer , 2017 (DOI 10.1007/978-3-319-10151-4_27-2).

[20] Solonnikov V. A., *Lectures on evolution free boundary problems: classical solutions,* Lectures Notes in Maths **1812** (2003), 123–175.

[21] Padula M., On the exponential stability of the rest state of a viscous compressible fluid, J. Math. Fluid Mech. **1** (1999), 62–77.

[22] Солонников В. А., Оценка обобщённой энергии в задаче со свободной границей для вязкой несжимаемой жидкости, *Зап. научн. семин. ЛОМИ* **282** (2001), 216–243.

[23] Denisova I. V., Solonnikov V. A., L_2-theory for two incompressible fluids separated by a free interface, Topol. Methods Nonlinear Anal. (to appear).

[24] Солонников В. А., *On the linear problem arising in the study of a free boundary problem for the Navier–Stokes equations*, Алгебра и анализ **22**(6) (2010), 235–269.

[25] Солонников В. А., *О неустановившемся движении конечной массы жидкости, ограниченной свободной поверхностью*, Зап. научн. семин. ЛОМИ **152** (1986), 137–157.

[26] Padula M., Solonnikov V. A., *On the local solvability of free boundary problem for the Navier-Stokes equations*, Проблемы мат. анализа **50** (2010), 87–112.

[27] Solonnikov V. A., *On problem of stability of equilibrium figures of uniformly rotating viscous incompressible liquid*, in: Bardos, C., Fursikov, A., (eds.) Instability in models connected with fluid flows. II, Int. Math. Ser., **7** (2008), Springer, New York,189–254.