ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ 11/2017

АБСОЛЮТ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ГРУПП: I. КОММУТАТИВНЫЕ (ПОЛУ)ГРУППЫ

А. М. Вершик[1,2,3], А. В. Малютин[1,2]

[1]Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия

[2]Санкт-Петербургский государственный университет,
Математико-механический факультет,
Университетский пр., д. 28, 198504,
Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия

[3]Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Б. Каретный пер., д. 19, 127051, Москва, Россия

avershik@gmail.com, malyutin@pdmi.ras.ru

АННОТАЦИЯ

В работе полностью описывается абсолют коммутативных конечно порожденных групп и полугрупп. Абсолют (прежнее название — граница-выход) есть обобщение понятия границы случайного блуждания на группе, а именно, абсолют группы (полугруппы) есть множество эргодических центральных мер на компакте всех бесконечных траекторий простого случайного блуждания на группе. Центральной мерой (относительно некоторой конечной системы образующих группы или полугруппы) называется марковская мера на пространстве траекторий, у которой копереходные распределения вероятностей во всех точках есть равномерное распределение на образующих (т. е. мера с максимальной энтропией). Главный результат, далеко обобщающий классическую теорему де Финетти, состоит в следующем: абсолют коммутативной полугруппы совпадает с совокупностью тех центральных мер, которые отвечают марковским цепям с независимыми одинаково распределенными приращениями, а топологически является (в основном случае) замкнутым диском конечной размерности.

Ключевые слова: случайное блуждание, группа, полугруппа, абсолют, граница-выход, граница Пуассона–Фюрстенберга, граница Мартина, эргодическая центральная мера.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 17-01-00433).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение

Задача описания множества всех борелевских мер, удовлетворяющих тому или иному условию инвариантности, является распространенной и традиционной для нескольких областей математики (теория вероятностей, теория динамических систем, теория графов, теория представлений и др.). Наиболее общая постановка предполагает наличие некоторого отношения эквивалентности в борелевском пространстве (например, задано траекторное разбиение для действия группы) и 2-коцикла на этом отношении, а задача состоит в описании всех вероятностных мер, для которых данный коцикл есть коцикл Радона–Никодима.

Если классы эквивалентности счетны, само отношение гиперконечно (т. е. является монотонным пределом конечных отношений эквивалентности), а коцикл равен тождественной единице, то задача сводится к описанию так называемых центральных мер (см. далее) на пространстве бесконечных путей градуированного графа (диаграммы Браттели). Понятие центральности в определенном смысле совпадает с понятием инвариантности, а именно: если ввести преобразование путей, называемое адическим сдвигом, то центральность означает инвариантность относительно этого сдвига. Отсюда, например, следует, что множество центральных мер образует симплекс Шоке.

Совокупность всех эргодических центральных мер для данного отношения эквивалентности, снабженная слабой топологией пространства всех борелевских мер, называется абсолютом (см. более подробно о постановке и истории вопроса [V14a, B14b]).

Специальный случай этой задачи, рассматриваемый здесь — нахождение *абсолюта* для случайных блужданий на группах, полугруппах и для динамических графов. В этой работе мы развиваем подход и даем решение указанного вопроса для важного частного случая — для случайных блужданий на счетных коммутативных группах и полугруппах, — он обладает существенными особенностями по сравнению с общим случаем, ниже приводятся нужные подробности.

Заметим, что определение абсолюта по своему характеру напоминает определение границ в теории потенциала или теории случайных блужданий (граница Пуассона–Фюрстенберга (ПФ), граница Мартина и др.; см., например, [KV83]). И действительно, абсолют есть обобщение, или, правильней сказать, детализация границы ПФ; более точно, он нетривиален и тогда, когда граница ПФ тривиальна, т. е. состоит из одной точки, и поэтому абсолют доставляет важную дополнительную информацию о случайном блуждании на группах.

Фундамент теории абсолюта заложен в работах [V14a, B14b, B15]. В работе [BM15] получено описание абсолюта для случая свободных групп и однородных деревьев. Настоящая работа охватывает противоположный класс групп, — класс коммутативных групп и полугрупп. В готовящейся работе мы разберем следующий случай — абсолют нильпотентных групп и, в частности, групп Гейзенберга — этот случай представляется гораздо более сложным и интересным.

Остановимся подробнее на вопросе о том, что понимается под описанием абсолюта. Абсолют определяется как совокупность мер. У мер на компакте бесконечных путей имеется прямое описание — через значения на конечных путях (т. е. значения на цилиндрах, отвечающих конечным путям). Для центральных мер имеется более компактное представление — функциями на множестве вершин динамического графа. Абсолюту при таком подходе отвечают классы пропорциональных минимальных неотрицательных гармонических функций на динамическом графе. Еще одна форма описания абсолюта — через переходные вероятности марковских цепей — возникает здесь в результате того, что отвечающий центральной мере случайный процесс является марковским. Именно это описание представляется наиболее подходящим для рассматриваемых нами конструкций.

Ключевым результатом настоящей работы является теорема 3.1 о том, что в коммутативной полугруппе (относительно любой конечной системы образующих) множество эргодических центральных мер (т. е. абсолют) совпадает с совокупностью тех центральных мер, которым отвечают марковские цепи с независимыми одинаково распределенными (н.о.р.) приращениями. Переходные вероятности цепи с н.о.р. приращениями одинаковы во всех вершинах графа, — они зависят лишь от образующих, маркирующих ребра.

Теорема 3.1, с одной стороны, обобщает теорему де Финетти, с другой — соотносится с известными результатами о гармонических функциях на коммутативных группах (см. [ChD60, DSW60], а также [Wo00, стр. 311–312] и приведенные там ссылки). Теорема де Финетти следует из теоремы 3.1 при рассмотрении случая свободной полугруппы. Гармонические функции связаны с абсолютом следующим образом: в случае группы имеется естественная биекция между главной частью абсолюта (определение дано в §2) и пространством классов пропорциональных минимальных положительных собственных функций оператора Лапласа.[1] (Подробнее мы остановимся на этом в другом месте.)

Статья имеет следующую структуру. В параграфе 2 даны базовые определения. Теорема 3.1 доказывается в §3. Здесь же приводится теорема 3.2 с уравнениями для описания абсолюта. Теоремы 3.1 и 3.2 позволяют получить описание абсолюта коммутативной полугруппы по набору определяющих соотношений. Абсолют описывается в виде множества решений системы уравнений в евклидовом пространстве. В том же параграфе приводится ряд примеров такого описания. В §4 из теорем 3.1 и 3.2 выводятся теоремы

[1] Здесь и далее для полугруппы с фиксированной конечной системой образующих S под оператором Лапласа (лапласианом) понимается оператор на пространстве функций на полугруппе, переводящий функцию f в функцию L_f, определяемую правилом

$$L_f(g) := \frac{1}{|S|} \sum_{s\in S} f(gs).$$

о топологической структуре абсолюта коммутативных групп и полугрупп. Абсолют в этом случае компактен, а для групп и полугрупп с сокращением является замкнутым диском конечной размерности. Основная техническая трудность доказательства этих теорем заключается в описании вырожденной части абсолюта. Разрешающее эту трудность техническое утверждение вынесено в отдельный параграф 5. В §6 обсуждается связь абсолюта коммутативной полугруппы с мультипликативными полугрупповыми характерами.

Авторы благодарны В. Каймановичу и С. Подкорытову за ценные замечания и обсуждения.

2 Необходимые определения

Дадим сначала еще раз определение абсолюта для графа, не привлекая терминологию групп. Под *графом* будем понимать локально конечный ориентированный граф с отмеченной вершиной. Петли и кратные ребра допускаются. *Путем* в графе называют (конечную или бесконечную) последовательность чередующихся вершин и ребер вида

$$v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n,$$

в которой e_k — ребро с начальной вершиной v_{k-1} и конечной вершиной v_k (и вершины, и ребра пути могут повторяться). Мы рассматриваем графы, в которых имеются бесконечные пути с началом в отмеченной точке.

Пусть Γ — граф указанного вида. Обозначим через $\mathscr{P}_\Gamma$ множество всех выходящих из отмеченной точки бесконечных путей в Γ. Это множество компактно в слабой топологии. Рассматриваются борелевские вероятностные меры на этом пространстве. Если задана такая мера, мерой конечного пути R (с началом в отмеченной точке) будем называть меру цилиндра всех бесконечных путей, начинающихся с R. Мера ν на $\mathscr{P}_\Gamma$ называется *центральной*, если она обладает следующим свойством: для каждой вершины v графа Γ и каждого натурального n мера ν принимает одинаковые значения на всех путях длины n, ведущих из отмеченной вершины в вершину v. Центральные меры образуют выпуклый компакт, являющийся симплексом (см. [B15]) в компакте всех мер на $\mathscr{P}_\Gamma$. Центральная мера называется *эргодической* (или *регулярной*), если она является экстремальной точкой в этом симплексе.

Абсолютом графа мы называем множество всех эргодических центральных мер на компакте бесконечных путей с началом в отмеченной точке. Абсолютом конечно порожденной полугруппы с фиксированной конечной системой образующих называется абсолют соответствующего графа Кэли. В этом определении возникает тонкость, касающаяся полугрупп без сокращения. Напомним, что полугруппа называется *полугруппой с сокращением*, если в ней не имеется такой тройки элементов a, b и c, что $a \neq b$, но $ac = bc$ и/или $ca = cb$. Выбор отмеченной вершины в случае графов Кэли групп и полугрупп с сокращением не влияет на абсолют, в случае же полугрупп без сокращения будем подразумевать, что в полугруппе имеется (или добавлена) единица, и именно она выбрана в качестве отмеченной вершины. Абсолют полугруппы G с системой образующих S обозначается через $\mathscr{A}_S(G)$.

Меру ν на компакте путей будем называть *невырожденной*, если вероятность каждого конечного пути — ненулевая. *Главной частью* абсолюта мы называем его подмножество, сформированное невырожденными мерами. Множество вырожденных эргодических центральных мер будем называть *вырожденной частью* абсолюта.

Графом ветвления называется граф, в котором для каждой вершины v множество путей, ведущих из отмеченной вершины в v, непусто (в таком случае говорят, что v *достижима* из отмеченной вершины), и все эти пути имеют одинаковую длину. На множестве вершин графа ветвления имеется естественная градуировка по расстоянию от отмеченной вершины. Графы такого частного вида оказываются в теории абсолюта и наиболее общими в следующем смысле. Графу Γ с отмеченной вершиной v_0 каноническим образом сопоставляется *динамический граф* $\mathrm{D}_{v_0}(\Gamma)$, — граф ветвления, конструируемый следующим образом: n-й этаж графа $\mathrm{D}_{v_0}(\Gamma)$ является копией множества тех вершин графа Γ, в которые из отмеченной вершины v_0 ведут пути длины n. Из вершины v_1 в вершину v_2 в графе $\mathrm{D}_{v_0}(\Gamma)$ выходит в точности k ребер если и только если v_2 располагается на этаже, на единицу большем, чем этаж вершины v_1, а из вершины u_1 графа Γ, отвечающей вершине v_1, в вершину u_2 в Γ, отвечающей вершине v_2, выходит ровно k ребер. Любой граф ветвления изоморфен своему динамическому графу. Пространства путей с началом в отмеченной вершине у графа и его динамического графа совпадают. Абсолют графа совпадает с абсолютом его динамического графа.

Конструкция графа ветвления имеет аналог на уровне групп и полугрупп. *Моноидом ветвления* называется моноид (полугруппа с единицей), граф Кэли которого (относительно некоторой системы образующих) является графом ветвления. Полугруппа называется *полугруппой ветвления*, если она является моноидом ветвления или получена из моноида ветвления удалением единицы. Следующее свойство является для полугрупп ветвления определяющим: у полугруппы ветвления относительно некоторой системы образующих S для каждого элемента полугруппы все слова над алфавитом S, представляющие этот элемент, имеют одну и ту же длину (иными «словами», соотношения в этом случае приравнивают лишь слова равной длины). В полугруппе ветвления имеется канонический набор образующих, состоящий в точности из всех неприводимых элементов полугруппы. Системы образующих, построенные на этом каноническом наборе (система образующих может содержать повторяющиеся элементы, т. е. включать элементы полугруппы с некоторой кратностью) будем называть *допустимыми*. Граф Кэли моноида ветвления является графом ветвления лишь при допустимой системе образующих. Полугруппе G с фиксированной системой образующих S каноническим образом сопоставляется моноид ветвления $\mathrm{D}_S(G)$, определяемый следующим образом: в качестве системы образующих для $\mathrm{D}_S(G)$ берется копия системы S, а в качестве набора соотношений — подмножество полного набора соотношений пары (G, S), состоящее из тех соотношений, которые отождествляют слова равной длины.

3 Абсолют коммутативных групп и полугрупп

Как нетрудно убедиться, отвечающий центральной мере случайный процесс — на произвольном графе вышеописанного типа — является марковским. Для марковских цепей на графе Кэли полугруппы возникает понятие независимых одинаково распределенных приращений: цепью *с независимыми одинаково распределенными приращениями* называется цепь, переходные вероятности которой на всех ребрах, промаркированных одной и той же образующей, одинаковы.[2] Для коммутативных полугрупп выполняется следующая ключевая теорема, далеко обобщающая теорему де Финетти.

3.1. Теорема. *Для любой коммутативной полугруппы и произвольной конечной системы образующих множество эргодических центральных мер* (*т. е. абсолют*) *совпадает с множеством тех центральных мер, которым отвечают марковские цепи с независимыми одинаково распределенными приращениями.*

Тем самым, абсолют находится в биективном соответствии с совокупностью всех тех мер на множестве образующих, которые определяют марковскую цепь с указанным свойстом центральности. Явное условие, выделяющее такие меры на образующих, дано в теореме 3.2.

Доказательство. Меры, которым отвечают марковские цепи с независимыми одинаково распределенными приращениями, для краткости будем называть *мерами с н.о.р. приращениями.* Пусть P — конечный путь (с началом в отмеченной вершине) в графе Кэли заданной полугруппы (относительно заданной системы образующих). Левый сдвиг в полугруппе задает гомеоморфизм между подкомпактом $\mathscr{P}_P$ бесконечных путей, начинающихся с P, и компактом всех бесконечных путей (с началом в отмеченной вершине), а также изоморфизм ϕ_* между пространствами мер на этих компактах.[3] Если ν — эргодическая центральная мера и $\nu(\mathscr{P}_P) > 0$, обозначим через ν_P соответствующую условную меру на $\mathscr{P}_P$. Тогда мера $\phi_*(\nu_P)$ также центральна (поскольку из $a = b$ следует $ca = cb$). Как нетрудно видеть,

[2] В готовящейся работе [В17] введено более общее понятие *трансфера*, — преобразования на пространстве путей графа, смысл которого состоит в сдвиге приращений. Понятие марковской цепи с независимыми одинаково распределенными приращениями перефразируется как понятие бернуллиевского трансфера.

[3] Примеры полугрупп без сокращения интересны, но отчасти находятся вне интересующего нас контекста. В частности, граф Кэли такой полугруппы неоднороден: на одном участке графа пара ребер с маркировкой s_1 и s_2 может иметь совпадающие начальные и совпадающие конечные вершины, а на другом участке — совпадающие начальные, но несовпадающие конечные. В разрезе настоящего доказательства стоит отметить, что в случае полугруппы без сокращения хвостовые фильтрации на подкомпакте $\mathscr{P}_P$ и на компакте всех путей не обязательно изоморфны.

в силу коммутативности полугруппы мы получаем, что центральная мера ν мажорирует (конечную центральную) меру $\nu(\mathscr{P}_P) \cdot \phi_*(\nu_P)$. Отсюда в силу эргодичности следует, что $\nu = \phi_*(\nu_P)$. Это доказывает, что ν является мерой с н.о.р. приращениями. С другой стороны, если все эргодические центральные меры имеют н.о.р. приращения, то и каждая центральная мера с н.о.р. приращениями — эргодична, поскольку несовпадающие меры с н.о.р. приращениями взаимно сингулярны (вопрос сводится к взаимной сингулярности несовпадающих бернуллиевых мер). □

3.1 Явное вычисление абсолюта

Теорема 3.1 дает рецепт описания абсолюта, и далее мы занимаемся его непосредственным нахождением.

Для произвольной полугруппы G с фиксированной конечной системой образующих S множество $\mathscr{I}_S(G)$ мер с н.о.р. приращениями естественным образом отождествляется с симплексом Δ_S вероятностных распределений на S: распределению μ на S отвечает мера в $\mathscr{I}_S(G)$, у которой вероятность приращения на $s \in S$ равна $\mu(s)$. Распределение на S, у которого соответствующая мера в $\mathscr{I}_S(G)$ центральна, назовем *предцентральным*. По теореме 3.1, в случае коммутативной полугруппы абсолют совпадает с пересечением $(S-1)$-мерного (вообще говоря, невыпуклого в пространстве мер на компакте путей) симплекса $\mathscr{I}_S(G) \cong \Delta_S$ с бесконечномерным симплексом $\Sigma_S(G)$ центральных мер:

$$\mathscr{A}_S(G) = \Sigma_S(G) \cap \mathscr{I}_S(G).$$

Тем самым, теорема 3.1 сводит задачу описания абсолюта $\mathscr{A}_S(G)$ коммутативной полугруппы к задаче описания множества $\sigma_S(G)$ предцентральных распределений в Δ_S. Условие (пред)центральности распадается в набор необходимых условий (пред)центральности для пар конечных путей одинаковой длины, ведущих в одну и ту же вершину графа Кэли. Непосредственно из определения условия центральности вытекает следующее предложение.

3.2. Теорема. *Вероятностное распределение $\mu = \{\mu(s); s \in S\}$ на конечной системе образующих S коммутативной полугруппы G предцентрально если и только если для каждой пары векторов $(m_s)_{s\in S}$ и $(n_s)_{s\in S}$ из $\mathbb{N}_0^S$ при условии*

$$\sum_{s\in S} m_s = \sum_{s\in S} n_s \quad \text{в } \mathbb{N}_0 \qquad \text{и} \qquad \sum_{s\in S} m_s \cdot s = \sum_{s\in S} n_s \cdot s \quad \text{в } G \tag{1}$$

выполняется равенство

$$\prod_{s\in S} (\mu(s))^{m_s} = \prod_{s\in S} (\mu(s))^{n_s}. \tag{2}$$

Иными словами, представляющее абсолют $\mathscr{A}_S(G)$ множество предцентральных распределений $\sigma_S(G)$ совпадает с множеством тех распределений на S, которые являются решениями уравнений (2) *для всех коэффициентов, удовлетворяющих условию* (1).

Теорема 3.2 позволяет получить описание абсолюта коммутативной полугруппы по набору определяющих соотношений. Условия 2 называются *уравнениями центральности* и представляют основной интерес для изучения топологии абсолюта. При описании абсолюта в контексте теоремы 3.2 удобно учитывать следующие соображения:

1. Пары векторов, удовлетворяющие условию (1) для заданных G и S, формируют полугруппу (обозначим ее через $\mathcal{R}^c_S(G)$, — эта полугруппа описывает соотношения в моноиде ветвления $\mathrm{D}_S(G)$). Для проверки предцентральности достаточно проверить выполнение условия (2) для произвольного множества образующих полугруппы $\mathcal{R}^c_S(G)$.

2. Пары векторов из $\mathbb{N}_0^S$, состоящие из двух одинаковых[4] векторов, образуют подполугруппу в $\mathcal{R}^c_S(G)$ (обозначим эту подполугруппу через R_0). Уравнения (2), отвечающие элементам из R_0, тривиальны, т. е. являются тождествами, так что для проверки предцентральности достаточно взять произвольное множество векторов из $\mathcal{R}^c_S(G)$, дающее порождающее множество при объединении с R_0. Иными словами, для описания абсолюта достаточно выбрать систему уравнений (2) для того или иного набора некоммутативных соотношений, являющегося определяющим для моноида ветвления $\mathrm{D}_S(G)$ по модулю коммутативных соотношений.

Примеры. 1. Абсолют коммутативной полугруппы, свободно порожденной набором образующих S, представлен симплексом Δ_S, поскольку вектора $(m_s)_{s\in S}$ и $(n_s)_{s\in S}$ из $\mathbb{N}_0^S$ удовлетворяют условию (1) лишь если совпадают, а при совпадении векторов $(m_s)_{s\in S}$ и $(n_s)_{s\in S}$ уравнение (2) превращается в тождество. На уровне моноида ветвления тот же факт проявляется как отсутствие некоммутативных соотношений.

2. Пусть $G = \mathbb{Z}$, $S = \{+1, -1\}$. Как и в примере 1, здесь вектора $(m_s)_{s\in S}$ и $(n_s)_{s\in S}$ удовлетворяют условию (1) лишь если совпадают, так что абсолют $\mathscr{A}_{\{+1,-1\}}(\mathbb{Z})$ гомеоморфен одномерному симплексу. На уровне моноидов ветвления объяснение состоит в том, что моноид ветвления для $(\mathbb{Z}, \{+1, -1\})$ есть свободный моноид с двумя образующими.

3. Пусть $G = \mathbb{Z}^2$, $S = \{(+1, 0), (-1, 0), (0, +1), (0, -1)\}$. Полугруппа $\mathcal{R}^c_S(G)$ порождена подполугруппой R_0 и парой $((1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$. Этой паре отвечает уравнение вида $x_1x_2 = x_3x_4$ в $\mathbb{R}^4$. Абсолют представлен пересечением множества решений этого уравнения с симплексом

$$\left\{x \in \mathbb{R}^4 : \sum x_i = 1, x_i \geqslant 0\right\}.$$

Это пересечение гомеоморфно замкнутому диску размерности 2 (см. теорему 4.1).

[4] Один и тот же вектор в $\mathbb{N}_0^S$ может представлять разные пути одинаковой длины, ведущие в одну и ту же точку.

4. Пусть $G = \mathbb{Z}^d$, а S — стандартная симметричная система образующих. Это — обобщение предыдущего примера. Система уравнений в данном случае следующая:

$$x_1x_2 = x_3x_4 = \cdots = x_{2d-1}x_{2d}.$$

5. При $G = \mathbb{Z}$ и $S = \{0, +6, -1\}$ возникает уравнение центральности вида $x_1^7 = x_2x_3^6$.

6. Пусть G — коммутативная полугруппа с тремя образующими a, b, c и дополнительным некоммутативным соотношением $a + b = a + c$. Тогда G является полугруппой ветвления, так что множество $\sigma_S(G)$ определяется отвечающим соотношению $a + b = a + c$ уравнением $\mu(a)\mu(b) = \mu(a)\mu(c)$. Абсолют гомеоморфен тройнику T.

7. Если G — коммутативная полугруппа с образующими a, b, c и дополнительным некоммутативными соотношениями $a + b = 2c$ и $a + c = 2b$, то абсолют несвязен — он состоит из двух точек.

3.3. Предложение. *Абсолют фактор-группы коммутативной полугруппы по конечной подгруппе совпадает с абсолютом группы.*

Доказательство. Пусть дан полугрупповой эпиморфизм $G_1 \to G_2$ и рассматривается наследуемая из G_1 в G_2 система образующих S. Если пара векторов $(m_s)_{s\in S}$ и $(n_s)_{s\in S}$ из $\mathbb{N}_0^S$ удовлетворяет условию (1) для G_1, то она удовлетворяет условию (1) и для G_2, поскольку рассматривается гомоморфизм. Обратно, если эпиморфизм $G_1 \to G_2$ является факторизацией по конечной подгруппе, а пара $(m_s)_{s\in S}$ и $(n_s)_{s\in S}$ удовлетворяет условию (1) для G_2, то для некоторого натурального k пара $(k \cdot m_s)_{s\in S}$, $(k \cdot n_s)_{s\in S}$ удовлетворяет условию (1) для G_1. Отсюда в силу теоремы 3.2 следует, что множества предцентральных распределений $\sigma_S(G_1)$ и $\sigma_S(G_2)$ описываются эквивалентными системами уравнений, откуда по теореме 3.1 вытекает требуемое. $\square$

Комментарии. 1. Используемая в доказательстве теоремы 3.1 идея сдвига встречается в вероятностной литературе 60-х годов в связи с гармоническими функциями; см. [DSW60, теорема 5], [Mo67, лемма 1], а также [Wo00, лемма 25.2].

2. Уже для нильпотентных групп утверждение теоремы 3.1 не имеет места для произвольной эргодической центральной меры.

4 Топология абсолюта коммутативных (полу)групп

Множество всех центральных мер, как мы уже писали, является симплексом, и абсолют является его границей Шоке. Содержательный вопрос: какова топология, индуцируемая на абсолюте слабой топологией мер на компакте путей. В настоящем параграфе изучается топология абсолюта коммутативных (полу)групп. Из теорем 3.1 и 3.2 выводятся (доказательство приведено ниже) следующие теоремы о топологической структуре абсолюта коммутативных групп и полугрупп. Наиболее важное утверждение состоит в следующем: в случае групп и полугрупп с сокращением главная часть абсолюта есть внутренность диска, а вырожденная — его граница.

4.1. Теорема (о топологии абсолюта коммутативных групп). *Абсолют конечно порожденной коммутативной группы относительно любой конечной системы полугрупповых образующих гомеоморфен замкнутому диску размерности ранга группы. Главной части абсолюта отвечает внутренность диска.*

Теорема 4.1 обобщается на полугруппы с сокращением.

4.2. Теорема (о топологии абсолюта коммутативных полугрупп с сокращением). *Абсолют конечно порожденной коммутативной полугруппы G с сокращением (относительно любой конечной системы образующих S) гомеоморфен замкнутому диску, размерность которого либо совпадает с рангом группы частных*[5] *полугруппы G, либо на единицу меньше этого ранга, если G есть полугруппа ветвления, а S — допустимая система образующих. Главной части абсолюта отвечает внутренность диска.*

В случае коммутативной полугруппы без сокращения абсолют может иметь более сложную структуру (см. пример 4 выше). Однако компактность абсолюта и вид его главной части сохраняются.

4.3. Теорема (о топологии абсолюта коммутативных полугрупп без сокращения). *Абсолют произвольной конечно порожденной коммутативной полугруппы (относительно любой конечной системы образующих) компактен*[6]*, а его главная часть гомеоморфна открытому диску, размерность которого определяется правилом из теоремы* 4.2.

Доказательство теорем 4.1–4.3. Пусть G — коммутативная полугруппа с конечной системой образующих S. Теоремы 3.1 и 3.2 сводят задачу описания абсолюта $\mathscr{A}_S(G)$ к вопросу описания множества $\sigma_S(G)$ решений системы уравнений вида (2) в симплексе Δ_S вероятностных распределений на S.

Доказательство компактности абсолюта. Для произвольной пары векторов $(m_s)_{s\in S}$ и $(n_s)_{s\in S}$ из $\mathbb{N}_0^S$ подмножество решений уравнения (2) в Δ_S компактно, поскольку Δ_S компактно, а выражения в левой и правой частях равенства (2) непрерывны на Δ_S как функции от μ. Следовательно, множество $\sigma_S(G)$ (а значит, и абсолют $\mathscr{A}_S(G)$) компактно, будучи пересечением компактных подмножеств.

Уравнения центральности. Если для векторов $(m_s)_{s\in S}$ и $(n_s)_{s\in S}$ из $\mathbb{N}_0^S$ выполняется условие $\sum_{s\in S} m_s \cdot s = \sum_{s\in S} n_s \cdot s$ в G, вектор $(m_s - n_s)_{s\in S}$ из $\mathbb{Z}^S$ будем называть *приведенным вектором соотношения* для (G, S). Если вдобавок выполнено равенство $\sum_{s\in S} m_s = \sum_{s\in S} n_s$, приведенный вектор

[5] *Группой частных* полугруппы G называется группа с теми же порождающими, что и у G, соотношения в которой — только следствия соотношений в G.

[6] В литературе симплекс с замкнутой границей Шоке называется *бауэровским*.

соотношения $(m_s - n_s)_{s\in S}$ будем называть *центральным*, уравнение (2) — *уравнением центральности*, а уравнение (в переменных $\mu(s)$)

$$\prod_{s\in S}(\mu(s))^{m_s-\min\{m_s,n_s\}} = \prod_{s\in S}(\mu(s))^{n_s-\min\{m_s,n_s\}} \tag{3}$$

назовем *приведенным уравнением центральности.*[7] Обозначим через $\bar\sigma_S(G)$ множество тех распределений из Δ_S, которые являются решениями для всех приведенных уравнений центральности пары (G,S). Тогда:

(i) *Множество* $\bar\sigma_S(G)$ *содержится в* $\sigma_S(G)$, поскольку $\sigma_S(G)$ совпадает с множеством лежащих в Δ_S решений уравнений центральности, а каждое уравнение центральности (2) получается из соответствующего приведенного (3) умножением частей последнего на $\prod_{s\in S}(\mu(s))^{\min\{m_s,n_s\}}$.

(ii) *Если G — полугруппа с сокращением, то* $\bar\sigma_S(G) = \sigma_S(G)$, поскольку в полугруппе с сокращением каждое приведенное уравнение центральности является, очевидно, уравнением центральности, так что $\sigma_S(G)$ содержится в $\bar\sigma_S(G)$ (а $\bar\sigma_S(G)$ содержится в $\sigma_S(G)$ в силу утв. (i)).

(iii) *Пересечение* $\sigma_S(G)\cap \operatorname{int}(\Delta_S)$ *совпадает с пересечением множеств* $\bar\sigma_S(G)$ *и* $\operatorname{int}(\Delta_S)$ *и в случае полугруппы с сокращением, и в общем случае*, поскольку в $\operatorname{int}(\Delta_S)$ выполняется условие $\mu(s) > 0$ при всех $s \in S$, и уравнение центральности имеет в $\operatorname{int}(\Delta_S)$ то же множество решений, что и отвечающее ему приведенное уравнение центральности.

Теперь заметим, что множество $\bar{\mathcal{R}}_S(G)$ приведенных векторов соотношений для (G,S) является, очевидно, подгруппой в $\mathbb{Z}^S$, а подмножество $\bar{\mathcal{R}}^c_S(G)$ всех центральных векторов соотношений — либо совпадает с $\bar{\mathcal{R}}_S(G)$, либо является ее подгруппой коранга 1.[8]

Отсюда следует, что множества $\bar{\mathcal{R}}^c_S(G)$ и $\bar\sigma_S(G)$ подпадают под условия предложения 5.1 (в обозначениях этого предложения, $\bar\sigma_S(G) = \Lambda_{\bar{\mathcal{R}}^c_S(G)}$), из которого вытекает, что множество $\bar\sigma_S(G)$ гомеоморфно замкнутому диску размерности $|S|-1-\operatorname{rank}(\bar{\mathcal{R}}^c_S(G))$ (здесь и далее rank обозначает ранг коммутативной группы), причем внутренность диска $\bar\sigma_S(G)$ лежит в $\operatorname{int}(\Delta_S)$, а край — в крае $\partial\Delta_S$.

Для завершения доказательства теорем 4.1–4.3 остается заметить, что при биекции $\mathscr{A}_S(G) \cong \sigma_S(G)$ главная часть абсолюта представлена пересечением $\sigma_S(G)\cap\operatorname{int}(\Delta_S)$, ранг группы частных полугруппы G равен $|S| - \operatorname{rank}(\bar{\mathcal{R}}_S(G))$, а ранг группы $\bar{\mathcal{R}}_S(G)$ совпадает с рангом группы $\bar{\mathcal{R}}^c_S(G)$ если и только если (эти группы совпадают, так что) (G,S) есть полугруппа ветвления с допустимой системой образующих. □

[7] В общем случае полугруппы без сокращения приведенное уравнение центральности не обязательно является уравнением центральности.

[8] Если группа частных полугруппы не имеет кручения, то подгруппы $\bar{\mathcal{R}}_S(G)$ и $\bar{\mathcal{R}}^c_S(G)$ являются линейными подпространствами в $\mathbb{Z}^S$.

5 Предложение о линейных пространствах

Пусть S — конечное множество, Δ_S — симплекс вероятностных распределений на S, $\mathbb{R}^S$ — пространство вещественных функций на S, $V_0 \subset \mathbb{R}^S$ — подмножество функций с нулевой суммой значений. Отождествим Δ_S с подмножеством неотрицательных функций с единичной суммой значений в $\mathbb{R}^S$. Для вектора $\kappa = (k_s)_{s\in S}$ из V_0 обозначим через λ_κ подмножество в Δ_S, состоящее из всех распределений μ, удовлетворяющих условию

$$\prod_{s\in S\colon\ k_s>0} (\mu(s))^{k_s} = \prod_{r\in S\colon\ k_r<0} (\mu(r))^{|k_r|}. \tag{4}$$

Для подмножества[9] K в V_0 положим

$$\Lambda_K := \bigcap_{\kappa\in K} \lambda_\kappa.$$

Через V_K будем обозначать линейную оболочку к K, через $\dim(V)$ — размерность подпространства. Условимся также обозначать через $\operatorname{int}(M)$ и ∂M внутренности и границы многомерных многогранников (безотносительно к объемлющему пространству).

Цель настоящего раздела — доказательство следующего предложения.

5.1. Предложение. *Если подмножество K гиперплоскости V_0 является линейным подпространством или подгруппой из векторов с целыми координатами, то множество Λ_K гомеоморфно замкнутому диску размерности $|S| - 1 - \dim(V_K)$, причем внутренность диска Λ_K лежит в $\operatorname{int}(\Delta_S)$, а край — в крае $\partial\Delta_S$.*

Разобьем доказательство предложения 5.1 на серию утверждений.

5.2. Утверждение. *Для любого подмножества K в V_0 пересечение множества Λ_K с внутренностью $\operatorname{int}(\Delta_S)$ симплекса Δ_S гомеоморфно открытому диску размерности $|S| - 1 - \dim(V_K)$.*

Доказательство. Заметим, что отображения

$$\exp\colon V_0 \to \operatorname{int}(\Delta_S) \qquad \text{и} \qquad \ln\colon \operatorname{int}(\Delta_S) \to V_0,$$

определенные правилами

$$\exp((v_s)_{s\in S}) = \left(\frac{e^{v_s}}{\sum_{s\in S} e^{v_s}}\right)_{s\in S} \qquad \text{и}$$

[9] Если данные определения распространить на подмножества K, не лежащие в V_0, то часть нижеследующих утверждений остается в силе. Однако здесь мы не рассматриваем обобщения, — нас в первую очередь интересуют симплекс Δ_S и V_0 как ассоциированное с аффинной оболочкой симплекса Δ_S векторное пространство, а во вспомогательное пространство $\mathbb{R}^S$ симплекс Δ_S и V_0 вложены лишь для удобства формулировок.

$$\ln((p_s)_{s\in S}) = \left(\ln p_s - \sum_{s\in S} \ln p_s\right)_{s\in S},$$

являются взаимно обратными диффеоморфизмами между V_0 и $\mathrm{int}(\Delta_S)$. Логарифмируя части уравнения (4), мы видим, что *отображения* $\exp$ *и* $\ln$ *дают диффеоморфизм между множеством* $\Lambda_K \cap \mathrm{int}(\Delta_S)$ *и ортогональным дополнением к* V_K *в* V_0. Остается заметить, что указанное дополнение имеет размерность

$$\dim(V_0) - \dim(V_K) = |S| - 1 - \dim(V_K). \quad \square$$

5.3. Утверждение. *Для любого подмножества K в V_0 множество Λ_K компактно.*

Доказательство. Для каждого вектора $\kappa = (k_s)_{s\in S}$ множество λ_κ компактно, поскольку Δ_S компактно, а выражения в левой и правой частях равенства (4) непрерывны на Δ_S как функции от μ. Следовательно, Λ_K компактно, будучи пересечением компактных множеств. $\square$

5.4. Утверждение. *Если векторы κ и κ' в V_0 коллинеарны, то $\lambda_\kappa = \lambda_{\kappa'}$.*

Доказательство. Следует из определения λ_κ при κ и κ' из V_0. $\square$

5.5. Утверждение. *Если K — подгруппа в V_0, включающая только векторы с целыми координатами, то $\Lambda_K = \Lambda_{V_K}$.*

Доказательство. Отметим, во-первых, что если K — группа из векторов с целыми координатами, то в V_K каждый вектор с рациональными координатами пропорционален некоторому вектору из K. Отсюда в силу утв. 5.4 следует, что всякое распределение μ из Λ_K входит и в λ_κ, если κ — вектор в V_K с рациональными координатами.

Во-вторых, очевидно, что при любом фиксированном распределении $\mu \in \Delta_S$ обе части равенства (4), рассматриваемые как функции вектора $(k_s)_{s\in S}$, непрерывны на каждой компоненте связности каждой из страт вида

$$\mathbb{R}^S_m := \{(k_s)_{s\in S} \in \mathbb{R}^S : \mathrm{card}\{s \in S : k_s = 0\} = m\}.$$

Наконец, в-третьих, для любого $m \in \mathbb{N}_0$ векторы с рациональными координатами всюду плотны в страте $V_K \cap \mathbb{R}^S_m$ (последнее следует из того факта, что пересечение двух линейных подпространств, порожденных векторами с целыми координатами, также порождено векторами с целыми координатами; это утверждение становится очевидным, если рассматривать пересечение как ортогональное дополнение к сумме ортогональных дополнений исходных подпространств и заметить, что переход к ортогональному дополнению и сумма сохраняют свойство быть порожденным векторами с целыми координатами). $\square$

5.6. Утверждение. *Если аффинная прямая L в $\mathbb{R}^S$ пересекает симплекс Δ_S по отрезку I с концами в точках a и b, то множество λ_{a-b} пересекает L в единственной точке, и эта точка лежит во внутренности отрезка I.*

Доказательство. Условие (4) для вектора $\kappa = a - b$ принимает вид

$$\prod_{s \in S:\ a_s - b_s > 0} (\mu(s))^{a_s - b_s} = \prod_{r \in S:\ b_r - a_r > 0} (\mu(r))^{b_r - a_r}. \tag{5}$$

При движении точки μ по отрезку I от a к b функция $F_L(\mu)$, определяемая формулой в левой части условия (5), убывает, а функция $F_R(\mu)$, определяемая формулой в правой части, — возрастает. Поскольку I высекается из Δ_S прямой, найдется $q \in S$ с $a_q = 0$ и $b_q > 0$, а также $r \in S$ с $a_r > 0$ и $b_r = 0$, так что $F_L(b) = 0$ и $F_R(a) = 0$. Из этого прямо следует требуемое. □

5.7. Утверждение. *Если K — линейное подпространство в V_0, то факторизация $\rho\colon \mathbb{R}^S \to \mathbb{R}^S/K$ дает гомеоморфизм между множеством Λ_K и выпуклым многогранником $\rho(\Delta_S)$, причем пересечение $\Lambda_K \cap \partial\Delta_S$ гомеоморфно краю $\partial(\rho(\Delta_S))$.*

Разделим доказательство утверждения 5.7 на части.

5.8. Утверждение. *В условиях утв.* 5.7 *сужение ρ на Λ_K инъективно.*

Доказательство. Строя доказательство от противного, допустим, что в Λ_K найдутся несовпадающие точки x и y с $\rho(x) = \rho(y)$. Тогда вектор $x - y$ лежит в K, так что $\{x, y\} \subset \Lambda_K \subset \lambda_{x-y}$, а это противоречит утв. 5.6, если в качестве L рассмотреть проходящую через точки x и y аффинную прямую (см. также утв. 5.4). □

5.9. Утверждение. *В условиях утв.* 5.7 *отображение ρ отправляет множество $\Lambda_K \cap \partial\Delta_S$ в край $\partial(\rho(\Delta_S))$ многогранника $\rho(\Delta_S)$.*

Доказательство. Строя доказательство от противного, допустим, что в $\Lambda_K \cap \partial\Delta_S$ найдется точка b с $\rho(b)$ в $\mathrm{int}(\rho(\Delta_S))$. Заметим, что внутренность многогранника $\rho(\Delta_S)$ накрывается внутренностью многогранника Δ_S (и, более того, $\rho(\mathrm{int}(\Delta_S)) = \mathrm{int}(\rho(\Delta_S))$). Следовательно, в $\mathrm{int}(\Delta_S)$ найдется точка y с $\rho(y) = \rho(b)$. Тогда вектор $b - y$ лежит в K. В силу утв. 5.6 точка b не лежит в λ_{b-y}, поскольку является концом отрезка высекаемого из Δ_S прямой, проходящей через точки b и y (см. также утв. 5.4). Это противоречит предположению о том, что b лежит в Λ_K. □

5.10. Утверждение. *В условиях утв.* 5.7 *образ $Q := \rho(\Lambda_K \cap \mathrm{int}(\Delta_S))$ совпадает с внутренностью $\mathrm{int}(\rho(\Delta_S))$ многогранника $\rho(\Delta_S)$.*

Доказательство. Мы доказали, что сужение факторизации ρ на Λ_K инъективно (утв. 5.8), а множество $\Lambda_K \cap \mathrm{int}(\Delta_S)$ гомеоморфно открытому диску размерности $|S| - 1 - \dim(K)$ (см. утв. 5.2), что совпадает с размерностью многогранника $\rho(\Delta_S)$. Как известно, *образ непрерывного вложения евклидова пространства в себя открыт* (теорема Брауэра об инвариантности области). Отсюда вытекает, что множество Q содержится в $\mathrm{int}(\rho(\Delta_S))$ и открыто в $\rho(\Delta_S)$. Следовательно, если бы Q не покрывало области $\mathrm{int}(\rho(\Delta_S))$, в последней нашлась бы точка x, не входящая в Q, но входящая в его замыкание. Поскольку Λ_K компактно, это означало бы, что в $\Lambda_K \cap \partial\Delta_S$ найдется точка b с $\rho(b) = x$. Однако это противоречит утверждению 5.9. $\square$

Завершение доказательства утверждения 5.7. Поскольку Λ_K компактно (см. утв. 5.3), из утв. 5.10 следует, что $\rho(\Lambda_K) = \rho(\Delta_S)$. Поскольку сужение ρ на Λ_K инъективно (см. утв. 5.8), отсюда вытекает, что ρ дает биекцию между Λ_K и $\rho(\Delta_S)$. Остается заметить, что непрерывная биекция метрического компакта является, как нетрудно проверить, гомеоморфизмом. Таким образом, ρ дает гомеоморфизм между Λ_K и $\rho(\Delta_S)$, а с учетом утв. 5.10, гомеоморфизм и между сферами $\Lambda_K \cap \partial\Delta_S$ и $\partial(\rho(\Delta_S))$. $\square$

Завершение доказательства предложения 5.1. Утв. 5.5 сводит ситуацию к случаю линейного подпространства. В этом случае гомеоморфность следует из утв. 5.7, а уточняющее утверждение о размерности — из утв. 5.2. $\square$

Замечание. Если подмножество K пространства V_0 состоит из векторов с целыми координатами, но не является подгруппой, множество Λ_K не обязательно гомеоморфно диску. Например, для $S = \{1, 2, 3\}$

$$\Lambda_{\{(1,1,-2),(1,-2,1)\}} = \{(1/3, 1/3, 1/3), (1, 0, 0)\}.$$

6 Характеры

Теория абсолюта коммутативных групп и полугрупп имеет любопытную переформулировку в терминах характеров полугрупп. *Характером* здесь мы называем гомоморфизм в мультипликативную группу неотрицательных вещественных чисел. Общую теорию характеров см. [CP61, Ле70, Ле71].

Пусть G — произвольная коммутативная полугруппа с конечной системой образующих S, $\mathrm{D}_S(G)$ — моноид ветвления для пары (G, S). Каждой центральной мере ν пары (G, S) отвечает функционал f_ν на моноиде $\mathrm{D}_S(G)$, ставящий в соответствие элементу меру ведущего в этот элемент пути. Ясно, что при таком соответствии функции, отвечающие центральным мерам с н.о.р. приращениями, — это в точности те характеры моноида $\mathrm{D}_S(G)$, у которых сумма значений на образующих из S единична (будем называть такие характеры *нормированными* или *вероятностными*). В этих терминах теорема 3.1 принимает следующий вид:

6.1. Следствие. *В абелевой полугруппе G относительно любой конечной системы образующих S множество эргодических центральных мер (т. е. абсолют) вышеописанным соответствием $\nu \mapsto f_\nu$ биективно переводится в множество нормированных $\mathbb{R}_{0+}$-характеров на моноиде ветвления $\mathrm{D}_S(G)$.*

Доказательство. Если ν — эргодична, то функционал f_ν является нормированным $\mathbb{R}_{0+}$-характером в силу независимости и одинакового распределения приращений (теорема 3.1). Обратно: если функционал f на $\mathrm{D}_S(G)$ является нормированным $\mathbb{R}_{0+}$-характером, то сужение f на S дает предцентральное распределение, так что $f = f_\nu$ для соответствующей этому распределению эргодической центральной меры ν. $\square$

Характер называется *тривиальным*, если он принимает нулевое значение на всех отличных от единицы элементах полугруппы. Как нетрудно видеть, множество нетривиальных $\mathbb{R}_{0+}$-характеров расслаивается над множеством нормированных $\mathbb{R}_{0+}$-характеров со слоем $(0, +\infty)$. Таким образом, рассматриваемая нами задача описания абсолюта коммутативных полугрупп практически эквивалентна задаче описания множества $\mathbb{R}_{0+}$-характеров коммутативных моноидов ветвления. Соответственно, утверждения об абсолюте коммутативных полугрупп конвертируются в утверждения о характерах полугрупп ветвления. Например, теорема 4.2 дает следующее.

6.2. Следствие. *У коммутативной полугруппы ветвления с сокращением пространство нетривиальных $\mathbb{R}_{0+}$-характеров в слабой топологии гомеоморфно прямому произведению замкнутого диска определенной размерности на открытый интервал.*

В случае коммутативных и нильпотентных групп имеется соответствие между $\mathbb{R}_{+}$-характерами группы и главной частью абсолюта. Это соответствие известно и изучалось с точки зрения собственных функций лапласиана. Оно обсуждается подробнее в готовящейся работе об абсолюте группы Гейзенберга.

Список литературы

[B14b] А. М. Вершик, *Задача о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов*, Функц. анализ и его прил., **48**:4 (2014), 26–46.

[B15] А. М. Вершик, *Оснащенные градуированные графы, проективные пределы симплексов и их границы*, Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXIV, Зап. научн. сем. ПОМИ, **432**, ПОМИ, СПб., 2015, 83–104.

[B17] А. М. Вершик, *Марковские процессы в асимптотической комбинаторике и их трансфер-преобразования*, статья, готовящаяся к публикации.

[BH06] А. М. Вершик, П. П. Никитин, *Следы на бесконечных алгебрах Брауэра*, Функц. анализ и его прил., **40**:3 (2006), 3–11.

[ВМ15] А. М. Вершик, А. В. Малютин, *Фазовый переход в задаче о границе-выход для случайных блужданий на группах*, Функц. анализ и его прил. **49**:2 (2015), 7–20.

[Ле70] М. М. Лесохин, *Характеры коммутативных полугрупп, I*, Изв. вузов. Матем. **8** (1970), 67–74.

[Ле71] М. М. Лесохин, *Характеры коммутативных полугрупп, II*, Изв. вузов. Матем. **2** (1971), 71–77.

[Мо67] С. А. Молчанов, *О границе Мартина прямого произведения марковских цепей*, Теория вероятн. и ее примен. **12**:2 (1967), 353–358.

[ChD60] G. Choquet and J. Deny, *Sur l'équation de convolution* $\mu = \mu * \sigma$, C.R. Acad. Sci. Paris **250** (1960), 799–801.

[CP61] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, vol. I, Math. Surveys of the American Math. Soc. 7, Providence, R. I., 1961.

[DSW60] J. L. Doob, J. L. Snell, and R. E. Williamson, *Application of boundary theory to sums of independent random variables*, Contributions to Probability and Statistics, Stanford Univ. Press, Stanford, California, 1960, pp. 182–197.

[KV83] V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik, *Random walks on discrete groups, boundary and entropy*, Ann. Probab. **11** (1983), no. 3, 457–490.

[V14a] A. M. Vershik, *Intrinsic metric on graded graphs, standardness, and invariant measures*, Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XXIII, Зап. научн. сем. ПОМИ, **421**, ПОМИ, СПб., 2014, 58–67.

[Wo00] W. Woess, *Random Walks on Infinite Graphs and Groups*, Cambridge Tracts in Math. 138, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2000.