ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 6/2017

УСРЕДНЕНИЕ ПЕРВОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ОПЕРАТОРНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ

Ю. М. Мешкова[1,2], Т. А. Суслина[2]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
14 линия ВО, д. 29Б
Санкт-Петербург, 199178, Россия

[2]Санкт-Петербургский государственный университет,
Физический факультет,
Ульяновская ул., д. 3, Петродворец,
Санкт-Петербург, 198504, Россия

e-mail: y.meshkova@spbu.ru, t.suslina@spbu.ru

20 июля 2017 г.

АННОТАЦИЯ

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный матричный эллиптический дифференциальный оператор $B_{D,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, второго порядка при условии Дирихле на границе. Старшая часть оператора задана в факторизованной форме. Оператор включает члены первого и нулевого порядков. Оператор $B_{D,\varepsilon}$ положительно определен; его коэффициенты периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Изучается поведение при $\varepsilon \to 0$ операторной экспоненты $e^{-B_{D,\varepsilon}t}$, $t > 0$. Получены аппроксимации для $e^{-B_{D,\varepsilon}t}$ по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в класс Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Результаты применяются к усреднению решений первой начально-краевой задачи для параболических систем.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, параболические системы, усреднение, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 16-01-00087). Работа первого автора поддержана программой социальных инвестиций „Родные города“ ПАО „Газпром нефть“, фондом Дмитрия Зимина „Династия“ и стипендией имени В. А. Рохлина.

Содержание

Введение

Работа относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов (ДО). Укажем книги по теории усреднения [BaPa, BeLPap, ZhKO, Sa].

0.1 Постановка задачи

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка и Ω — элементарная ячейка решетки Γ. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ будем пользоваться обозначениями $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, и $\overline{\psi} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ мы изучаем самосопряженный матричный сильно эллиптический ДО второго порядка $B_{D,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, при условии Дирихле на границе. Старшая часть оператора $B_{D,\varepsilon}$ задается в факторизованной форме $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, где $b(\mathbf{D})$ — матричный однородный ДО первого порядка, $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, ограниченная и положительно определенная. (Точные условия на $b(\mathbf{D})$ и $g(\mathbf{x})$ приведены ниже в п. 1.3.) Оператор $B_{D,\varepsilon}$ задан дифференциальным выражением

$$B_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \bigl(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* \bigr) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \quad (0.1)$$

при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Здесь $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,d$, и $Q(\mathbf{x})$ — Γ-периодические матрицы-функции, вообще говоря, неограниченные; Γ-периодическая матрица-функция $Q_0(\mathbf{x})$ такова, что $Q_0(\mathbf{x}) > 0$ и $Q_0, Q_0^{-1} \in L_\infty$. Постоянная λ выбрана так, чтобы оператор $B_{D,\varepsilon}$ был положительно определен. (Точные условия на коэффициенты см. ниже в п. 1.4.) Строгое определение оператора $B_{D,\varepsilon}$ дается через соответствующую квадратичную форму, заданную на классе Соболева $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Коэффициенты оператора (0.1) быстро осциллируют при малом ε. Нас интересует поведение в пределе малого периода решения первой начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \partial_t \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = -B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O},\ t > 0; \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O},\ t > 0; \quad Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases} \quad (0.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

0.2 Основные результаты

Оказывается, что при $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ сходится в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0(\cdot,t)$ эффективной задачи с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \overline{Q_0} \partial_t \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) = -B^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O},\ t > 0; \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O},\ t > 0; \quad \overline{Q_0} \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases} \quad (0.3)$$

Здесь B^0 — дифференциальное выражение для эффективного оператора B_D^0. Наш первый основной результат — оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-ct}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t\geqslant 0, \qquad (0.4)$$

справедливая при достаточно малом ε. При фиксированном значении времени $t>0$ эта оценка имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Также для решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ при достаточно малом ε найдена аппроксимация по энергетической норме. Это — наш второй основной результат:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-1})e^{-ct}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t>0. \qquad (0.5)$$

Здесь $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)=\mathbf{u}_0(\cdot,t)+\varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$ — первое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$, оператор $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)$ — корректор. Он содержит быстро осциллирующие множители и потому зависит от ε. При этом $\|\varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2\to H^1}=O(1)$. При фиксированном t оценка (0.5) имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$ из-за влияния пограничного слоя. О наличии погранслоя свидетельствует тот факт, что в строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'\subset\mathcal{O}$ порядок H^1-оценки можно усилить до $O(\varepsilon)$:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant C\varepsilon(t^{-1/2}\delta^{-1}+t^{-1})e^{-ct}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t>0.$$

Здесь $\delta=\operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$.

В общем случае корректор содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем условия, при которых можно использовать более простой корректор без сглаживающего оператора. Помимо оценки (0.5) мы получаем аппроксимацию потока $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ по L_2-норме.

Постоянные в оценках (0.4) и (0.5) контролируются явно через исходные данные и не зависят от $\boldsymbol{\varphi}$. Поэтому неравенства (0.4) и (0.5) допускают запись в операторных терминах — в виде оценок в равномерной операторной топологии. Выпишем эти результаты в более простом случае, когда $Q_0(\mathbf{x})=\mathbf{1}_n$:

$$\|e^{-B_{D,\varepsilon}t}-e^{-B_D^0t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-ct}, \quad t\geqslant 0,$$
$$\|e^{-B_{D,\varepsilon}t}-e^{-B_D^0t}-\varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-1})e^{-ct}, \quad t>0.$$

Результаты такого типа называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения.

0.3 Операторные оценки погрешности. Обзор

В настоящее время получение операторных оценок погрешности — активно развивающаяся область теории усреднения. Интерес к этой тематике возник в связи с работами М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1, BSu2], в которых изучался оператор A_ε вида $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. С помощью *спектрального подхода* была установлена оценка

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.6}$$

Здесь $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор, g^0 — постоянная эффективная матрица. Аппроксимация оператора $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по $(L_2 \to H^1)$-норме получена в [BSu4]:

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.7}$$

Впоследствии оценки (0.6) и (0.7) были перенесены Т. А. Суслиной [Su4] на более общий оператор B_ε вида (0.1), действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и включающий младшие члены. Отметим также работу Д. И. Борисова [Bo], где было найдено выражение для эффективного оператора B^0 и получены аппроксимации резольвенты с оценками погрешности вида (0.6), (0.7). При этом предполагалось, что коэффициенты оператора зависят не только от быстрой, но и от медленной переменной. Однако в [Bo] коэффициенты оператора B_ε предполагались достаточно гладкими.

К параболическим системам спектральный метод применялся в работах Т. А. Суслиной [Su1, Su2], где был найден старший член аппроксимации, и [Su3], где установлена оценка при учете корректора:

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A^0 t}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad t \geqslant 0, \tag{0.8}$$

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(t^{-1/2} + t^{-1}), \quad t \geqslant \varepsilon^2. \tag{0.9}$$

В этих оценках нет экспоненциального убывания по времени, поскольку операторы A_ε и A^0 имеют краем спектра точку нуль. Экспонента от оператора B_ε вида (0.1) изучалась в работе Ю. М. Мешковой [M], где установлены аналоги неравенств (0.8) и (0.9).

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в теории усреднения был предложен В. В. Жиковым [Zh2]. В работах [Zh2, ZhPas1] были получены оценки вида (0.6), (0.7) для операторов акустики и теории упругости. Метод, названный авторами *„модифицированным методом первого приближения“* или *„методом сдвига“*, основан на анализе первого приближения к решению и введении в задачу дополнительного параметра. Помимо задач в $\mathbb{R}^d$ в работах [Zh2, ZhPas1] изучались задачи усреднения в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на границе. К параболическим уравнениям метод сдвига применялся в работе [ZhPas2], где установлены аналоги оценок (0.8) и (0.9).

Дальнейшие результаты В. В. Жикова, С. Е. Пастуховой и их учеников отражены в недавнем обзоре [ZhPas3].

Операторные оценки погрешности при усреднении задач Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения второго порядка (без младших членов) в ограниченной области изучались многими авторами. Первыми, по-видимому, были Ш. Москоу и М. Вогелиус [MoV], установившие оценку, допускающую запись в операторных терминах:

$$\|A_{D,\varepsilon}^{-1} - (A_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.10}$$

(См. [MoV, следствие 2.2].) Здесь оператор $A_{D,\varepsilon}$ в $L_2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, задан выражением $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$, а матрица-функция $g(\mathbf{x})$ предполагается C^∞-гладкой. Задачи в ограниченной области в случае произвольной размерности изучались в работах [Zh2] и [ZhPas1]. Гладкость коэффициентов не предполагалась. Для операторов акустики и упругости при условии Дирихле либо Неймана на границе была получена $(L_2 \to H^1)$-аппроксимация при учете корректора с оценкой погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. Ухудшение порядка по сравнению с аналогичным результатом в $\mathbb{R}^d$ объясняется влиянием границы области. В качестве грубого следствия была установлена аппроксимация вида (0.10) с оценкой погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. (В случае задачи Дирихле для оператора акустики $(L_2 \to L_2)$-оценка была улучшена в [ZhPas1], но ее порядок все равно не был точным.) Близкие результаты для оператора, заданного выражением $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на $\partial\mathcal{O}$, были установлены в работах Ж. Гризо [Gr1, Gr2] с помощью „unfolding"-метода. В [Gr2] для того же оператора впервые была получена точная по порядку оценка (0.10). Для эллиптических систем сходные результаты независимо получены в [KeLiS] и [PSu, Su5]. Дальнейшие продвижения и подробный обзор можно найти в работах [Su6, Su7].

Для матричного оператора вида (0.1) при условии Дирихле задача усреднения изучалась К. Ху [Xu1, Xu3]. Случаю краевого условия Неймана посвящена работа [Xu2]. Однако в работах К. Ху на оператор наложено весьма жесткое условие равномерной эллиптичности. Аппроксимации обобщенной резольвенты оператора (0.1) с двухпараметрическими оценками погрешности установлены в недавней работе авторов [MSu3] (см. также краткое сообщение [MSu4]). Мы остановимся на этих результатах подробнее, поскольку они являются для нас опорными. При $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, и достаточно малом ε выполнено

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \qquad (0.11)$$

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad \leqslant C(\phi)\big(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \varepsilon\big).\end{aligned} \qquad (0.12)$$

Величины $C(\phi)$ контролируются явно в терминах данных задачи и угла $\phi = \arg\zeta$. Оценки (0.11), (0.12) равномерны по ϕ в любой области вида $\{\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C} : |\zeta| \geqslant 1, \phi_0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi - \phi_0\}$ при сколь угодно малом $\phi_0 > 0$. Также в [MSu3] установлены аналоги оценок (0.11), (0.12), справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра ζ.

Перейдем к обсуждению параболических задач в ограниченной области. В двумерном случае некоторые оценки операторного типа для эллиптических и параболических уравнений получены в [ChKonLe]. Однако в [ChKonLe] матрица g предполагалась C^∞-гладкой, а начальные данные в параболическом уравнении принадлежали $H^2(\mathcal{O})$. В случае произвольной размерности и без предположения гладкости коэфициентов аппроксимация экспоненты от оператора вида $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ (при условиях Дирихле или Неймана) найдена в работе авторов [MSu1]:

$$\|e^{-A_{D,\varepsilon}t} - e^{-A_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-ct}, \quad t \geqslant 0,$$
$$\|e^{-A_{D,\varepsilon}t} - e^{-A_D^0 t} - \mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-ct}, \quad t \geqslant \varepsilon^2.$$

Метод работы [MSu1] основан на использовании тождества

$$e^{-A_{D,\varepsilon}t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\, d\zeta,$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, обходящий спектр оператора $A_{D,\varepsilon}$ в положительном направлении. Это тождество позволяет вывести аппроксимации операторной экспоненты $e^{-A_{D,\varepsilon}t}$ из соответствующих аппроксимаций резольвенты $(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ с двухпараметрическими (относительно ε и ζ) оценками погрешности. Требуемые аппроксимации резольвенты получены в [Su7].

Оператор с коэффициентами, периодическими по пространственным переменным и по времени, рассматривался Ж. Генгом и Ж. Шеном [GeS]. В [GeS] установлены операторные оценки погрешности для параболического уравнения вида $\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}, \varepsilon^{-2}t)\nabla \mathbf{u}_\varepsilon$ в ограниченной области класса $C^{1,1}$. На случай липшицевой границы результаты Ж. Генга и Ж. Шена обобщены К. Ху и Ш. Жоу [XuZ].

0.4 Метод исследования

Мы развиваем метод работы [MSu1]. В основе лежит следующее представление для решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ первой начально-краевой задачи (0.2):

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\varphi}\,d\zeta,$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}$ — подходящий контур в комплексной плоскости. Для решения эффективной задачи (0.3) справедливо аналогичное тождество. Следовательно,

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left((B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\right)\boldsymbol{\varphi}\,d\zeta. \tag{0.13}$$

Опираясь на результаты работы [MSu3] (оценку (0.11)), мы получаем аппроксимацию резольвенты при $\zeta \in \gamma$ и используем представление (0.13). Это приводит к (0.4). Подчеркнем, что для нас важен характер зависимости правой части в (0.11) от ζ при больших значениях $|\zeta|$. Аппроксимация при учете корректора получается на том же пути.

0.5 Структура работы

Работа состоит из пяти параграфов и приложения (§6–8). В §1 описан класс операторов $B_{D,\varepsilon}$, введен эффективный оператор B_D^0 и сформулированы результаты об аппроксимации оператора $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, нужные в дальнейшем. В §2 получены основные результаты работы. В §3 эти результаты применяются к усреднению решений первой начально-краевой задачи для неоднородного параболического уравнения. §4, 5 посвящены примерам применения общих результатов. В §4 рассмотрен скалярный эллиптический оператор с сингулярным потенциалом порядка $O(\varepsilon^{-1})$, а в §5 — оператор с сильно сингулярным потенциалом порядка $O(\varepsilon^{-2})$. В приложение (§6–8) вынесено доказательство утверждений, связанных с устранением сглаживающего оператора в корректоре в случае дополнительной гладкости границы (§7) и в случае строго внутренней подобласти (§8). Необходимые для этого свойства осциллирующих множителей в корректоре установлены в §6.

0.6 Обозначения

Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{H}$ и $\|\cdot\|_\mathfrak{H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$;

символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Используем обозначение $\mathbb{N}$ для множества натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+$ для множества неотрицательных целых чисел и $\mathbb{R}_+$ для положительной полуоси $[0,\infty)$.

Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{1}_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — $(m\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Если $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{Z}_+^d$ — мультииндекс, то $|\alpha|$ — его длина: $|\alpha|=\sum_{j=1}^d\alpha_j$. Для $z\in\mathbb{C}$ через z^* обозначается комплексно сопряженное число. (Мы используем такое нестандартное обозначение, так как верхняя черта означает среднее значение периодической функции по ячейке периодов.) Используем обозначения $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $iD_j=\partial_j=\partial/\partial x_j$, $j=1,\dots,d$, $\mathbf{D}=-i\nabla=(D_1,\dots,D_d)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n=1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но, если это не ведет к недоразумениям, мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций. Символ $L_p((0,T);\mathfrak{H})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, означает L_p-пространство $\mathfrak{H}$-значных функций на интервале $(0,T)$.

Различные оценочные постоянные обозначаются символами c, C, C, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками).

Основные результаты настоящей работы кратко анонсированы в [MSu4].

1 Результаты усреднения задачи Дирихле для эллиптических систем

1.1 Решетки в $\mathbb{R}^d$

Пусть $\Gamma\subset\mathbb{R}^d$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d\in\mathbb{R}^d$:

$$\Gamma=\Big\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d:\mathbf{a}=\sum_{j=1}^d\nu_j\mathbf{a}_j,\nu_j\in\mathbb{Z}\Big\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} \tau_j \mathbf{a}_j, -\frac{1}{2} < \tau_j < \frac{1}{2} \Big\}.$$

Через $|\Omega|$ обозначим меру Лебега ячейки Ω: $|\Omega| = \operatorname{mes} \Omega$. Положим $2r_1 := \operatorname{diam} \Omega$.

Через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Если $\Phi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, положим $\Phi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \Phi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$; $\overline{\Phi} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \Phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, $\underline{\Phi} := \big(|\Omega|^{-1} \int_\Omega \Phi(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x} \big)^{-1}$. Здесь при определении $\overline{\Phi}$ предполагается, что $\Phi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, а при определении $\underline{\Phi}$ считается, что матрица Φ квадратная и неособая, причем $\Phi^{-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Через $[\Phi^\varepsilon]$ обозначается оператор умножения на матрицу-функцию $\Phi^\varepsilon(\mathbf{x})$.

1.2 Сглаживание по Стеклову

Рассмотрим оператор сглаживания по Стеклову $S_\varepsilon^{(k)}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ (где $k \in \mathbb{N}$) по правилу

$$(S_\varepsilon^{(k)} \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k). \tag{1.1}$$

Зависимость $S_\varepsilon^{(k)}$ от k мы будем опускать в обозначениях, и писать просто S_ε. Очевидно, $S_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^\sigma(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leqslant \sigma$. Отметим неравенство

$$\| S_\varepsilon \|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d) \to H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1, \quad \sigma \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Нам потребуются следующие свойства оператора S_ε (см. [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] или [PSu, предложения 3.1 и 3.2]).

Предложение 1.1. *Для любой функции $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$ выполнена оценка*

$$\| S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \| \mathbf{D} \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $2r_1 = \operatorname{diam} \Omega$.

Предложение 1.2. *Пусть Φ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$ такая, что $\Phi \in L_2(\Omega)$. Тогда оператор $[\Phi^\varepsilon] S_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и справедлива оценка*

$$\| [\Phi^\varepsilon] S_\varepsilon \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \| \Phi \|_{L_2(\Omega)}.$$

1.3 Оператор $A_{D,\varepsilon}$

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $A_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Здесь $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая эрмитова $(m \times m)$-матрица-функция (вообще говоря, с комплексными элементами). Считаем, что $g(\mathbf{x}) > 0$ и $g, g^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Дифференциальный оператор $b(\mathbf{D})$ имеет вид $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$, где b_j, $j = 1, \dots, d$, — постоянные матрицы размера $m \times n$ (вообще говоря, с комплексными элементами). Считаем, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j \xi_j$ оператора $b(\mathbf{D})$ имеет максимальный ранг:

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Это условие равносильно существованию таких постоянных α_0 и α_1, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}; \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{1.3}$$

Отметим сразу оценки, вытекающие из (1.3):

$$|b_j| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad j = 1, \dots, d. \tag{1.4}$$

Точное определение оператора $A_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{a}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{1.5}$$

Продолжая функцию $\mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нулем на $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$ и учитывая (1.3), находим

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{a}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{1.6}$$

1.4 Младшие члены. Оператор $B_{D,\varepsilon}$

Мы изучаем самосопряженный оператор $B_{D,\varepsilon}$, старшая часть которого совпадает с A_ε. Чтобы определить младшие члены оператора, введем Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции (вообще говоря, с комплексными элементами) a_j, $j = 1, \dots, d$, такие, что

$$a_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geqslant 2, \quad j = 1, \dots, d. \tag{1.7}$$

Далее, пусть Q и Q_0 — такие Γ-периодические эрмитовы $(n\times n)$-матрицы-функции (с комплексными элементами), что

$$
\begin{aligned}
&Q \in L_s(\Omega), \quad s=1 \text{ при } d=1, \quad s>d/2 \text{ при } d\geqslant 2; \\
&Q_0(\mathbf{x})>0; \quad Q_0, Q_0^{-1}\in L_\infty(\mathbb{R}^d).
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

Для удобства дальнейших ссылок назовем „исходными данными" следующие величины

$$
\begin{aligned}
&d,\ m,\ n,\ \rho,\ s;\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty},\ \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)},\ j=1,\dots,d; \\
&\|Q\|_{L_s(\Omega)};\ \|Q_0\|_{L_\infty},\ \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty};\ \text{параметры решетки } \Gamma;\ \text{область } \mathcal{O}.
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

В $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $B_{D,\varepsilon}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, формально заданный дифференциальным выражением

$$
B_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x})D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \tag{1.10}
$$

при условии Дирихле на границе. Здесь постоянная λ выбрана так (см. (1.16) ниже), чтобы оператор $B_{D,\varepsilon}$ был положительно определен. Точное определение оператора $B_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon D_j\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\
+ (Q^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + \lambda(Q_0^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Проверим замкнутость формы $\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}$. Применяя неравенство Гёльдера и теорему вложения Соболева, можно показать (см. [Su4, (5.11)–(5.14)]), что для любого $\nu>0$ найдутся такие постоянные $C_j(\nu)>0$, что

$$
\|a_j^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_j(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),
$$

$j=1,\dots,d$. Делая замену переменной $\mathbf{y}:=\varepsilon^{-1}\mathbf{x}$ и обозначая $\mathbf{u}(\mathbf{x})=:\mathbf{v}(\mathbf{y})$, отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
\|(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})^*\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} = \varepsilon^d \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{y})^*\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y} \\
&\leqslant \varepsilon^d\nu \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y} + \varepsilon^d C_j(\nu)\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y} \\
&\leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_j(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0<\varepsilon\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

Тогда с учетом (1.3) для любого $\nu > 0$ найдется такая постоянная $C(\nu) > 0$, что

$$\sum_{j=1}^{d} \|(a_j^\varepsilon)^* \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu \|(g^\varepsilon)^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{1.12}$$

Если ν фиксировано, то $C(\nu)$ зависит лишь от d, ρ, α_0, от норм $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, и от параметров решетки Γ.

В силу (1.3) для $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_1^2 \|(g^\varepsilon)^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.13}$$

где $c_1 := \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$. Отсюда и из (1.12) вытекает, что

$$2\left|\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{d}(D_j\mathbf{u}, (a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant \frac{1}{4}\|(g^\varepsilon)^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{1.14}$$

где $c_2 := 8c_1^2 C(\nu_0)$ при $\nu_0 := 2^{-6}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$.

Далее, в силу условия (1.8) на Q для любого $\nu > 0$ найдется постоянная $C_Q(\nu) > 0$ такая, что

$$|(Q^\varepsilon \mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| \leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_Q(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{1.15}$$

При фиксированном ν величина $C_Q(\nu)$ контролируется через d, s, $\|Q\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решетки Γ.

Фиксируем постоянную λ в (1.10) как в [MSu2, п. 2.8]:

$$\lambda := (C_Q(\nu_*) + c_2)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \quad \text{при } \nu_* := 2^{-1}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{1.16}$$

Вернемся к форме (1.11). Продолжим функцию $\mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нулем в $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$. Теперь из (1.5), (1.13), (1.14) и (1.15) при $\nu = \nu_*$ получаем оценку снизу для формы (1.11):

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{1}{4}\mathfrak{a}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n); \tag{1.17}$$

$$c_* := \frac{1}{4}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{1.18}$$

Далее, в силу (1.6), (1.14) и (1.15) при $\nu = 1$ выполнено

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant C_* \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n),$$

где $C_* := \max\{\frac{5}{4}\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} + 1; C_Q(1) + \lambda \|Q_0\|_{L_\infty} + c_2\}$. Таким образом, форма $\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}$ замкнута. Отвечающий ей самосопряженный в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оператор обозначим через $B_{D,\varepsilon}$.

С помощью неравенства Фридрихса из (1.17) получаем

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_* (\operatorname{diam}\mathcal{O})^{-2} \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{1.19}$$

Поэтому оператор $B_{D,\varepsilon}$ положительно определен. Отметим оценку, вытекающую из (1.17) и (1.19):

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_3 \|B^{1/2}_{D,\varepsilon}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n); \tag{1.20}$$

$$c_3 := c_*^{-1/2} \left(1 + (\operatorname{diam}\mathcal{O})^2\right)^{1/2}. \tag{1.21}$$

Также нам потребуется вспомогательный оператор $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$. Факторизуем матрицу $Q_0(\mathbf{x})$: найдется Γ-периодическая матрица-функция $f(\mathbf{x})$ такая, что $f,\ f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ и

$$Q_0(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})^*)^{-1} f(\mathbf{x})^{-1}. \tag{1.22}$$

(Например, можно выбрать $f(\mathbf{x}) = Q_0(\mathbf{x})^{-1/2}$.) Пусть $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, порожденный квадратичной формой

$$\widetilde{\mathfrak{b}}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[f^\varepsilon\mathbf{u}, f^\varepsilon\mathbf{u}] \tag{1.23}$$

на области определения

$$\operatorname{Dom}\widetilde{\mathfrak{b}}_{D,\varepsilon} := \{\mathbf{u} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) : f^\varepsilon\mathbf{u} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\}.$$

Иными словами, $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} = (f^\varepsilon)^* B_{D,\varepsilon} f^\varepsilon$. Через $\widetilde{B}_\varepsilon$ будем обозначать дифференциальное выражение $(f^\varepsilon)^* B_\varepsilon f^\varepsilon$. Отметим равенство

$$(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} = f^\varepsilon (\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} (f^\varepsilon)^*. \tag{1.24}$$

1.5 Эффективная матрица и ее свойства

Эффективный оператор для $A_{D,\varepsilon}$ задается дифференциальным выражением $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Здесь g^0 — постоянная *эффективная* матрица размера $m \times m$. Матрица g^0 выражается через решение вспомогательной задачи на ячейке. Пусть Γ-периодическая $(n \times m)$-матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ — (слабое) решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.25}$$

Тогда эффективная матрица задана выражением

$$g^0 := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.26}$$

где

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \tag{1.27}$$

Можно показать, что матрица g^0 положительно определена.

Согласно [BSu3, (6.28) и п. 7.3] для решения задачи (1.25) имеет место неравенство

$$\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)} \leqslant M. \tag{1.28}$$

Здесь постоянная M зависит только от m, α_0, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметров решетки Γ.

Отметим оценки для эффективной матрицы, известные в теории усреднения как вилка Фойгта–Рейсса (см., например, [BSu2, гл. 3, теорема 1.5]).

Предложение 1.3. *Пусть g^0 — эффективная матрица* (1.26). *Тогда*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{1.29}$$

В случае, когда $m = n$, справедливо тождество $g^0 = \underline{g}$.

Из (1.29) вытекают неравенства

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.30}$$

Выделим случаи, когда в (1.29) реализуется верхняя или нижняя грань, см. [BSu2, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7].

Предложение 1.4. *Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.31}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$.

Предложение 1.5. *Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.32}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

1.6 Эффективный оператор

Чтобы описать усреднение младших членов оператора $B_{D,\varepsilon}$, рассмотрим Γ-периодическую $(n \times n)$-матрицу-функцию $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$, являющуюся решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_{\Omega} \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.33}$$

(Уравнение понимается в слабом смысле.) Согласно [Su4, (7.51) и (7.52)] справедлива оценка

$$\|\widetilde{\Lambda}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \widetilde{M} \tag{1.34}$$

с постоянной $\widetilde{M}$, зависящей только от n, ρ, α_0, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, и параметров решетки Γ.

Определим постоянные матрицы V и W равенствами

$$V := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}, \tag{1.35}$$

$$W := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{1.36}$$

В пространстве $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}
\mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = {} & (g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j} D_j \mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\
& - 2\mathrm{Re}\,(V\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} - (W\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + (\overline{Q}\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\
& + \lambda(\overline{Q_0}\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).
\end{aligned}$$

Следующие оценки установлены в [MSu3, (2.22) и (2.23)]:

$$c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant c_4 \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n), \tag{1.37}$$

$$\mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geqslant c_* (\mathrm{diam}\, \mathcal{O})^{-2} \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{1.38}$$

Здесь постоянная c_4 зависит только от исходных данных (1.9). Отвечающий форме $\mathfrak{b}_D^0$ самосопряженный в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ оператор обозначим через B_D^0. Из (1.37) и (1.38) вытекает, что

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_3 \|(B_D^0)^{1/2} \mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n), \tag{1.39}$$

где c_3 — постоянная (1.21).

В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ оператор B_D^0 задается дифференциальным выражением

$$B^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) D_j - W + \overline{Q} + \lambda \overline{Q_0} \quad (1.40)$$

на области определения $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При этом

$$\|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}. \quad (1.41)$$

Здесь постоянная $\widehat{c}$ зависит лишь от исходных данных (1.9). Для оправдания этого факта сошлемся на теоремы о повышении гладкости для сильно эллиптических систем (см. [McL, глава 4]).

Замечание 1.6. *Вместо условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ можно было бы наложить неявное требование: ограниченная область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с липшицевой границей такова, что справедлива оценка* (1.41)*. Для такой области результаты работы остаются в силе. В случае скалярных эллиптических операторов широкие достаточные условия на $\partial\mathcal{O}$, обеспечивающие справедливость оценки* (1.41)*, можно найти в* [KoE] *и* [MaSh, гл. 7] (*в частности, достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O} \in C^\alpha$, $\alpha > 3/2$*).

Обозначим

$$f_0 := \left(\overline{Q_0}\right)^{-1/2}. \quad (1.42)$$

Отметим, что согласно (1.22)

$$|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty} = \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad |f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty} = \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}. \quad (1.43)$$

В ходе дальнейшего изложения нам потребуется оператор $\widetilde{B}_D^0 := f_0 B_D^0 f_0$, отвечающий квадратичной форме

$$\widetilde{\mathfrak{b}}_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \mathfrak{b}_D^0[f_0\mathbf{u}, f_0\mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \quad (1.44)$$

Отметим равенство $(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = f_0(\widetilde{B}_D^0 - \zeta I)^{-1} f_0$.

1.7 Аппроксимация обобщенной резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$

Сформулируем результаты работы [MSu3], в которой изучалось поведение обобщенной резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$. Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $|\zeta| \geqslant 1$. Старший член аппроксимации обобщенной резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ найден в [MSu3, теорема 2.5]; аппроксимация этой резольвенты по $(L_2 \to H^1)$-норме при учете корректора получена в [MSu3, теорема 2.6]; подходящая для наших целей аппроксимация оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ (отвечающего „потоку“) установлена в [MSu3, предложение 10.7].

Выберем числа ε_0, $\varepsilon_1 \in (0,1]$ согласно следующему условию.

Условие 1.7. *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область. Положим* $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon := \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}; \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\right\}$*. Пусть существует такое число* $\varepsilon_0 \in (0,1]$*, что полоску* $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0}$ *можно покрыть конечным набором окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса* $C^{0,1}$*, распрямляющие границу* $\partial\mathcal{O}$*. Обозначим* $\varepsilon_1 := \varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$*, где* $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$*.*

Очевидно, величина ε_1 зависит только от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ.

Отметим, что условие 1.7 было бы обеспечено только липшицевостью $\partial\mathcal{O}$; более сильное ограничение $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ мы наложили, чтобы гарантировать оценку (1.41).

Теорема 1.8 ([MSu3]). *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область с границей класса* $C^{1,1}$*. Пусть выполнены условия п.* 1.3–1.6*. Пусть* $\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$*,* $|\zeta| \geqslant 1$*. Положим*

$$c(\phi) := \begin{cases} |\sin\phi|^{-1}, & \phi \in (0,\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ 1, & \phi \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases}$$

Пусть число ε_1 *подчинено условию* 1.7*. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_1 c(\phi)^5 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}.$$

Здесь постоянная C_1 *зависит только от исходных данных* (1.9)*.*

Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O} : H^\sigma(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \to H^\sigma(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad \sigma \geqslant 0. \tag{1.45}$$

Такой „универсальный” оператор продолжения существует для любой ограниченной области с липшицевой границей (см. [R]). При этом

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^\sigma(\mathcal{O}) \to H^\sigma(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_\mathcal{O}^{(\sigma)}, \quad \sigma \geqslant 0, \tag{1.46}$$

где постоянная $C_\mathcal{O}^{(\sigma)}$ зависит лишь от σ и от области $\mathcal{O}$. Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Положим

$$K_D(\varepsilon; \zeta) := R_\mathcal{O}\big([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big) S_\varepsilon P_\mathcal{O} (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.47}$$

Корректор (1.47) ограничен как оператор, действующий из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Это нетрудно установить с помощью предложения 1.2 и включений Λ, $\widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Отметим, что $\|\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} = O(1)$ при малом ε и фиксированном ζ.

Теорема 1.9 ([MSu3]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.8. *Пусть* $K_D(\varepsilon;\zeta)$ *— оператор* (1.47). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant C_2 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_3 c(\phi)^4\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.48}$$

Пусть $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица-функция* (1.27). *Положим*

$$G_D(\varepsilon;\zeta) := \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon P_{\mathcal{O}} (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.49}$$

Тогда для оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, *отвечающего „потоку“, при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_2 c(\phi)^{5/2}\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}. \tag{1.50}$$

Постоянные C_2, C_3 *и* $\widetilde{C}_2$ *зависят только от исходных данных* (1.9).

Кроме результатов при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, в [MSu3, теорема 9.2] установлены оценки, справедливые при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\circ,\infty)$, где $c_\circ$ — общая нижняя грань операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ и $\widetilde{B}_D^0$. Мы возьмем в качестве общей нижней грани число

$$c_\flat := 4^{-1}\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|Q_0\|^{-1}_{L_\infty} (\operatorname{diam}\mathcal{O})^{-2}, \tag{1.51}$$

опираясь на соотношения (1.18), (1.19), (1.22), (1.23), (1.38), (1.43) и (1.44).

Теорема 1.10 ([MSu3]). *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область с границей класса* $C^{1,1}$. *Пусть выполнены условия п.* 1.3–1.6. *Пусть* $K_D(\varepsilon;\zeta)$ *— корректор* (1.47) *и* $G_D(\varepsilon;\zeta)$ *— оператор* (1.49). *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, *где* $c_\flat$ *— постоянная* (1.51). *Положим* $\psi := \arg(\zeta - c_\flat)$, $0 < \psi < 2\pi$. *Введем обозначение*

$$\varrho_\flat(\zeta) := \begin{cases} c(\psi)^2|\zeta - c_\flat|^{-2}, & |\zeta - c_\flat| < 1, \\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_\flat| \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.52}$$

Пусть число ε_1 подчинено условию 1.7*. При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеем*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4 \varepsilon \varrho_\flat(\zeta), \tag{1.53}$$

$$\begin{split}\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ \leqslant C_5\big(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big),\end{split} \tag{1.54}$$

$$\begin{split}\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ \leqslant \widetilde{C}_5\big(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big).\end{split} \tag{1.55}$$

Постоянные C_4, C_5 и $\widetilde{C}_5$ зависят только от исходных данных (1.9).

Замечание 1.11. 1) *Выражение $c(\psi)^2|\zeta - c_\flat|^{-2}$ в* (1.52) *— это величина, обратная к квадрату расстояния от ζ до $[c_\flat, \infty)$.* 2) *Число* (1.51) *в теореме* 1.10 *можно было бы заменить на любую общую нижнюю грань операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ и $\widetilde{B}_D^0$. Пусть $\varkappa > 0$ — произвольное достаточно малое число. Согласно* (1.53) *(при $\zeta = 0$) для операторов $B_{D,\varepsilon}$ и B_D^0 имеет место резольвентная сходимость, поэтому при достаточно малом ε можно принять $c_\circ = \lambda_1^0\|Q_0\|_{L_\infty}^{-1} - \varkappa$, где λ_1^0 — первое собственное значение оператора B_D^0. При таком выборе $c_\circ$ постоянные в оценках станут зависеть от $\varkappa$.* 3) *Оценки* (1.53)–(1.55) *имеет смысл применять для ограниченных значений $|\zeta|$ и малых $\varepsilon\varrho_\flat(\zeta)$. В этом случае величина $\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)$ контролируется через $C\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}$. При большом $|\zeta|$ и ϕ, отделенном от точек 0 и 2π, выгоднее использовать теоремы* 1.8 *и* 1.9.

1.8 Устранение сглаживающего оператора в корректоре

Оказывается, сглаживающий оператор в корректоре может быть устранен, если наложить на матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ дополнительные условия.

Условие 1.12. *Предположим, что Γ-периодическое решение $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи* (1.25) *ограничено, т. е. $\Lambda \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.*

Случаи, когда условие 1.12 выполнено автоматически, выделены в [BSu4, лемма 8.7].

Предложение 1.13 ([BSu4]). *Условие* 1.12 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений*:
1°) $d \leqslant 2$;
2°) *размерность $d \geqslant 1$ произвольна, а дифференциальное выражение A_ε имеет вид $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами*;
3°) *размерность d произвольна, и $g^0 = \underline{g}$, т. е. справедливы соотношения* (1.32).

Для того, чтобы устранить S_ε в члене корректора, содержащем $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$, достаточно наложить следующее условие.

Условие 1.14. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *задачи* (1.33) *таково, что*

$$\widetilde{\Lambda} \in L_p(\Omega), \quad p = 2 \text{ при } d = 1, \quad p > 2 \text{ при } d = 2, \quad p = d \text{ при } d \geqslant 3.$$

Следующий результат установлен в [Su4, предложение 8.11].

Предложение 1.15 ([Su4]). *Условие* 1.14 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений*:
1°) $d \leqslant 4$;
2°) *размерность* d *произвольна, а дифференциальное выражение* A_ε *имеет вид* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ — *симметричная матрица с вещественными элементами.*

Замечание 1.16. *Если* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ — *симметричная матрица с вещественными элементами, то из* [LaU, глава III, теорема 13.1] *следует, что* $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in L_\infty$, *причем норма* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *не превосходит величины, зависящей от* d, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* Ω, *а норма* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_\infty}$ *оценивается в терминах* d, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, *и* Ω. *В этом случае выполнены условия* 1.12 *и* 1.14.

В [MSu3, теорема 7.6] получен следующий результат.

Теорема 1.17 ([MSu3]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.9. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 1.12, *а для матрицы-функции* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *справедливо условие* 1.14. *Положим*

$$K_D^0(\varepsilon;\zeta) := (\varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}, \tag{1.56}$$

$$G_D^0(\varepsilon;\zeta) := \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.57}$$

Тогда при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеют место аппроксимации*

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant C_2 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + C_6 c(\phi)^4 \varepsilon, \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \widetilde{C}_2 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_6 c(\phi)^4 \varepsilon.
\end{aligned}$$

Здесь постоянные C_2, $\widetilde{C}_2$ — *те же, что и в* (1.48), (1.50). *Постоянные* C_6 *и* $\widetilde{C}_6$ *зависят лишь от исходных данных* (1.9), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Аппроксимации, справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра, найдены в [MSu3, теорема 9.8].

Теорема 1.18 ([MSu3]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.10 *и пусть справедливы условия* 1.12 *и* 1.14. *Пусть* $K_D^0(\varepsilon;\zeta)$ *— корректор* (1.56). *Пусть оператор* $G_D^0(\varepsilon;\zeta)$ *определен в* (1.57). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *имеют место аппроксимации*

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant C_7\big(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big),\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-G_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant \widetilde{C}_7\big(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big).
\end{aligned}$$

Здесь постоянные C_7 *и* $\widetilde{C}_7$ *зависят от исходных данных* (1.9), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

В соответствии с [MSu3, замечания 7.9 и 9.9] справедливо следующее наблюдение.

Замечание 1.19. *Если выполнено только условие* 1.12 (*соответственно, условие* 1.14), *то сглаживающий оператор* S_ε *может быть устранен в члене корректора, содержащем* Λ^ε (*соответственно,* $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$).

1.9 Случай, когда корректор обращается в нуль

Предположим, что $g^0=\overline{g}$, т. е. выполнены соотношения (1.31). Тогда Γ-периодическое решение задачи (1.25) равно нулю: $\Lambda(\mathbf{x})=0$. Предположим дополнительно, что

$$\sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^*=0. \tag{1.58}$$

Тогда Γ-периодическое решение задачи (1.33) также обращается в нуль: $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})=0$. В [MSu3, предложения 7.10 и 9.12] установлено, что в этом случае имеет место $(L_2\to H^1)$-оценка точного порядка $O(\varepsilon)$.

Предложение 1.20 ([MSu3]). *Предположим, что справедливы соотношения* (1.31) *и* (1.58).

1°. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.8. *Тогда при* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant1$, *и* $0<\varepsilon\leqslant1$ *имеем*

$$\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant C_8c(\phi)^4\varepsilon. \tag{1.59}$$

2°. *В условиях теоремы* 1.10 *при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнено*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant (C_9 + C_{10}|1+\zeta|^{1/2})\varepsilon \varrho_\flat(\zeta). \tag{1.60}$$

Постоянные C_8, C_9 *и* C_{10} *зависят только от исходных данных* (1.9).

1.10 Оценки в строго внутренней подобласти

В строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ области $\mathcal{O}$ можно улучшить H^1-оценки погрешности. В теоремах 8.1 и 9.14 из [MSu3] получен следующий результат.

Теорема 1.21 ([MSu3]). *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$. *Введем обозначение*

$$\delta := \min\left\{1; \operatorname{dist}\left\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\right\}\right\}. \tag{1.61}$$

1°. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.9. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant c(\phi)^6 \varepsilon (C'_{11}|\zeta|^{-1/2}\delta^{-1} + C''_{11}), \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant c(\phi)^6 \varepsilon \big(\widetilde{C}'_{11}|\zeta|^{-1/2}\delta^{-1} + \widetilde{C}''_{11}\big).
\end{aligned}$$

Постоянные C'_{11}, C''_{11}, $\widetilde{C}'_{11}$ *и* $\widetilde{C}''_{11}$ *зависят только от исходных данных* (1.9).
2°. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.10. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant \varepsilon \big(C'_{12}\delta^{-1}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + C''_{12}|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big),
\end{aligned} \tag{1.62}$$

$$\begin{aligned}
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant \varepsilon \big(\widetilde{C}'_{12}\delta^{-1}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \widetilde{C}''_{12}|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)\big).
\end{aligned} \tag{1.63}$$

Постоянные C'_{12}, C''_{12} *и* $\widetilde{C}'_{12}$, $\widetilde{C}''_{12}$ *зависят только от исходных данных* (1.9).

В случае, когда на матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ наложены дополнительные условия, этот результат верен при использовании более простого корректора. Аппроксимации при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, найдены в [MSu3, теорема 8.2].

Теорема 1.22 ([MSu3]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.21(1°). *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 1.12. *Пусть матрица-функция* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 1.14. *Пусть* $K_D^0(\varepsilon;\zeta)$ *и* $G_D^0(\varepsilon;\zeta)$ — *операторы* (1.56) *и* (1.57). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *выполнены неравенства*

$$
\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant c(\phi)^6 \varepsilon (C'_{11} |\zeta|^{-1/2} \delta^{-1} + C_{13}), \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant c(\phi)^6 \varepsilon (\widetilde{C}'_{11} |\zeta|^{-1/2} \delta^{-1} + \widetilde{C}_{13}).
\end{aligned}
$$

Постоянные C'_{11} *и* $\widetilde{C}'_{11}$ — *те же, что и в теореме* 1.21. *Постоянные* C_{13} *и* $\widetilde{C}_{13}$ *зависят от исходных данных* (1.9), *от* p *и норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Аппроксимации, справедливые в более широкой области изменения параметра ζ, получены в [MSu3, теорема 9.15].

Теорема 1.23 ([MSu3]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.21(2°). *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *подчинены условиям* 1.12 *и* 1.14 *соответственно. Пусть* $K_D^0(\varepsilon;\zeta)$ — *корректор* (1.56), *и пусть* $G_D^0(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (1.57). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеют место аппроксимации*

$$
\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant \varepsilon \big(C'_{12} \delta^{-1} \varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + C_{14} |1+\zeta|^{1/2} \varrho_\flat(\zeta) \big), \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant \varepsilon \big(\widetilde{C}'_{12} \delta^{-1} \varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \widetilde{C}_{14} |1+\zeta|^{1/2} \varrho_\flat(\zeta) \big).
\end{aligned}
$$

Здесь постоянные C'_{12} *и* $\widetilde{C}'_{12}$ — *те же, что и в* (1.62), (1.63). *Постоянные* C_{14} *и* $\widetilde{C}_{14}$ *зависят от исходных данных* (1.9), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

2 Постановка задачи. Основные результаты

2.1 Постановка задачи

Изучается поведение решения первой начально-краевой задачи

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t) & = -B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad t>0; \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t>0; \\ Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) & = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. (Решение понимается в слабом смысле.) Найдем связь $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ и $\boldsymbol{\varphi}$. Согласно (1.22) функция $\mathbf{s}_\varepsilon(\mathbf{x},t) := (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{s}_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t) = -\widetilde{B}_\varepsilon \mathbf{s}_\varepsilon(\mathbf{x},t) \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad t>0; \\ \mathbf{s}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad t>0; \\ \mathbf{s}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}. \end{cases}$$

Тогда $\mathbf{s}_\varepsilon(\cdot,t) = e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = f^\varepsilon\mathbf{s}_\varepsilon(\cdot,t) = f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}$.

Наша цель — изучить поведение в пределе малого периода обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ первой начально-краевой задачи (2.1). Иными словами, нас интересуют аппроксимации окаймленной операторной экспоненты $f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*$ при малом ε.

Соответствующая эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}(\mathbf{x},t) & = -B^0\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad t>0; \\ \mathbf{u}_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t>0; \\ \overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) & = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}. \end{cases} \tag{2.2}$$

С учетом (1.42) решение эффективной задачи дается формулой

$$\mathbf{u}_0(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\boldsymbol{\varphi}(\cdot). \tag{2.3}$$

2.2 Свойства операторной экспоненты

Установим следующее простое утверждение об оценках операторных экспонент $e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}$ и $e^{-\widetilde{B}_D^0 t}$ в различных нормах.

Лемма 2.1. *При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant e^{-c_\flat t}, \quad t \geqslant 0, \tag{2.4}$$

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_3 t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0, \tag{2.5}$$

$$\|e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant e^{-c_\flat t}, \quad t \geqslant 0, \tag{2.6}$$

$$\|f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_3 t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0, \tag{2.7}$$

$$\|f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{c} t^{-1} e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0. \tag{2.8}$$

Здесь c_3 и $c_\flat$ — постоянные (1.21) *и* (1.51)*. Постоянная $\widetilde{c}$ зависит только от исходных данных* (1.9)*.*

Доказательство. Поскольку число $c_\flat$, определенное в (1.51), является общей нижней гранью операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ и $\widetilde{B}_D^0$, оценки (2.4) и (2.6) очевидны.

В силу (1.20) и (1.23) выполнено

$$\begin{aligned} \|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} &\leqslant c_3 \|B_{D,\varepsilon}^{1/2} f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &= c_3 \|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2} e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Поскольку $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} \geqslant c_\flat I$, то

$$\begin{aligned} \|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2} e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \sup_{x \geqslant c_\flat} x^{1/2} e^{-xt} \\ &\leqslant e^{-c_\flat t/2} \sup_{x \geqslant c_\flat} x^{1/2} e^{-xt/2} \leqslant t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Отсюда и из (2.9) вытекает неравенство (2.5). Точно так же из (1.39) и (1.44) следует оценка (2.7).

В силу (1.41), (1.43) и равенства $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$ имеем

$$\begin{aligned} \|f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} &\leqslant \widehat{c} \|B_D^0 f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \widehat{c} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \|\widetilde{B}_D^0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \|f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} &\leqslant \widehat{c} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \sup_{x \geqslant c_\flat} x e^{-xt} \\ &\leqslant \widehat{c} \|f^{-1}\|_{L_\infty} e^{-c_\flat t/2} \sup_{x \geqslant c_\flat} x e^{-xt/2} \leqslant \widehat{c} \|f^{-1}\|_{L_\infty} t^{-1} e^{-c_\flat t/2}. \end{aligned}$$

Тем самым установлена оценка (2.8) с постоянной $\widetilde{c} = \widehat{c}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$. $\square$

2.3 Аппроксимация решения в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$

Теорема 2.2. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Пусть выполнены условия п. 1.3–1.6. Пусть $B_{D,\varepsilon}$ — оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, отвечающий квадратичной форме (1.11). Пусть B_D^0 — оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, заданный выражением (1.40) на области определения $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Положим $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} = (f^\varepsilon)^* B_{D,\varepsilon} f^\varepsilon$ и $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$, где матрица-функция f определена согласно (1.22), а матрица f_0 — согласно (1.42). Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (2.1), и пусть $\mathbf{u}_0$ — решение соответствующей эффективной задачи (2.2). Число ε_1 выберем из условия 1.7. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{15}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_\flat t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t \geqslant 0.$$

В операторных терминах,

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{15}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t \geqslant 0. \tag{2.11}$$

Здесь $c_\flat$ — постоянная (1.51). Постоянная C_{15} зависит только от исходных данных (1.9).

Доказательство. Доказательство опирается на результаты теорем 1.8, 1.10 и представление экспонент от операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$, $\widetilde{B}_D^0$ через интегралы по контуру от соответствующих резольвент.

Справедливо тождество (см., например, [Ка, гл. IX, §1.6])

$$e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\, d\zeta, \quad t > 0. \tag{2.12}$$

Здесь γ — контур в комплексной плоскости, обходящий спектр оператора $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ в положительном направлении. Для экспоненты от оператора $\widetilde{B}_D^0$ справедливо аналогичное представление. Так как постоянная (1.51) — общая нижняя грань операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ и $\widetilde{B}_D^0$, в качестве контура интегрирования удобно выбрать

$$\gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0,\, \operatorname{Re}\zeta = \operatorname{Im}\zeta + c_\flat/2\} \\ \cup \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta \leqslant 0,\, \operatorname{Re}\zeta = -\operatorname{Im}\zeta + c_\flat/2\}.$$

Умножая (2.12) на f^ε слева и на $(f^\varepsilon)^*$ справа и учитывая тождество (1.24), получаем представление

$$f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^* = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\, d\zeta, \quad t > 0.$$

Аналогично,

$$f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\,d\zeta, \quad t>0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 \\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left((B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\right)\,d\zeta. \end{aligned} \tag{2.13}$$

На основании теорем 1.8 и 1.10 оценим разность обобщенных резольвент при $\zeta\in\gamma$ равномерно по $\arg\zeta$. Напомним обозначение $\psi = \arg(\zeta - c_\flat)$. Заметим, что при $\zeta\in\gamma$ и $\psi=\pi/2$ либо $\psi = 3\pi/2$ выполнено $|\zeta| = \sqrt{5}c_\flat/2$. Мы воспользуемся теоремой 1.10 при тех $\zeta\in\gamma$, для которых $|\zeta|\leqslant\check{c}$, где

$$\check{c} := \max\{1;\sqrt{5}c_\flat/2\}. \tag{2.14}$$

На контуре γ очевидно выполнено $\psi\in(\pi/4, 7\pi/4)$ и

$$\rho_\flat(\zeta)\leqslant 2\max\{1; 8c_\flat^{-2}\} =: \mathfrak{C}, \quad \zeta\in\gamma. \tag{2.15}$$

Поэтому из (1.53) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4\mathfrak{C}\varepsilon \\ &\leqslant C'_{15}|\zeta|^{-1/2}\varepsilon, \quad \zeta\in\gamma, \quad |\zeta|\leqslant\check{c}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1; \quad C'_{15} := C_4\mathfrak{C}\check{c}^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

При прочих $\zeta\in\gamma$ справедливо неравенство

$$|\sin\phi|\geqslant 5^{-1/2}, \quad \zeta\in\gamma, \quad |\zeta|>\check{c}, \tag{2.17}$$

и по теореме 1.8

$$\begin{aligned} \|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant C''_{15}|\zeta|^{-1/2}\varepsilon, \\ \zeta\in\gamma, \quad |\zeta|>\check{c}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1&, \end{aligned} \tag{2.18}$$

где $C''_{15} := 5^{5/2}C_1$. В итоге, объединяя (2.16) и (2.18), при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ имеем

$$\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{C}_{15}|\zeta|^{-1/2}\varepsilon, \quad \zeta\in\gamma, \tag{2.19}$$

где $\widehat{C}_{15} := \max\{C'_{15}; C''_{15}\}$.

Из (2.13) и (2.19) вытекает оценка

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\pi^{-1}\widehat{C}_{15}\varepsilon t^{-1/2}\Gamma(1/2)e^{-c_\flat t/2}.$$

С учетом равенства $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$ находим

$$\begin{aligned} &\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\pi^{-1/2}\widehat{C}_{15}\varepsilon t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2} \\ &\quad\leqslant \check{C}_{15}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}, \quad t \geqslant \varepsilon^2, \end{aligned} \tag{2.20}$$

где $\check{C}_{15} := 2\sqrt{2}\pi^{-1/2}\widehat{C}_{15}$. При $t \leqslant \varepsilon^2$ воспользуемся грубой оценкой

$$\begin{aligned} &\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\|f\|^2_{L_\infty}e^{-c_\flat t} \\ &\quad\leqslant 2\sqrt{2}\|f\|^2_{L_\infty}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}, \quad t \leqslant \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Из (2.20) и (2.21) вытекает искомое неравенство (2.11) с постоянной $C_{15} := \max\{\check{C}_{15}; 2\sqrt{2}\|f\|^2_{L_\infty}\}$. □

2.4 Аппроксимация решения в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$

Введем *корректор*

$$\mathcal{K}_D(t;\varepsilon) := R_{\mathcal{O}}\left([\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\right)P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0. \tag{2.22}$$

При $t > 0$ оператор (2.22) непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Действительно, согласно (2.8) при $t > 0$ оператор $f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор $b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, а оператор $P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0$ заведомо непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Остается учесть непрерывность операторов $[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m) \to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, вытекающую из предложения 1.2 и включений $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$.

Обозначим $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) := P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$. Через $\mathbf{v}_\varepsilon$ обозначим первое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (2.1):

$$\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon := \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0, \quad \mathbf{v}_\varepsilon := \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}. \tag{2.23}$$

Т. е. $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодические решения задач* (1.25) *и* (1.33) *соответственно. Пусть* S_ε *— оператор сглаживания по Стеклову* (1.1) *и*

$P_{\mathcal{O}}$ — *оператор продолжения* (1.45). *Положим* $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) = P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$. *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (2.23). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $t>0$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{16}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\leqslant C_{16}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2},\end{aligned} \tag{2.24}$$

где $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)$ — *корректор* (2.22). *Пусть матрица-функция* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *определена в* (1.27). *Для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $t>0$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{16}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{16}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}. \tag{2.25}$$

Здесь

$$\mathcal{G}_D(t;\varepsilon) := \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}f_0 + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon P_{\mathcal{O}} f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}f_0.$$

Постоянные C_{16} *и* $\widetilde{C}_{16}$ *зависят только от исходных данных* (1.9).

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.2, будем пользоваться представлением окаймленных операторных экспонент через интегралы по контуру от соответствующих обобщенных резольвент. Имеем

$$\begin{aligned}&f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left((B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\right)d\zeta.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Здесь $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — оператор (1.47).

Рассуждая аналогично (2.16)–(2.19), на основании теорем 1.9 и 1.10 получаем оценку

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \widehat{C}_{16}\left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}+\varepsilon\right),\quad \zeta\in\gamma,\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\end{aligned} \tag{2.27}$$

с постоянной $\widehat{C}_{16} := \max\{C'_{16}; C''_{16}\}$, где $C'_{16} := (1+\check{c})^{1/2} C_5 \mathfrak{C}$ и $C''_{16} := \max\{5C_2; 25C_3\}$. Из (2.26) и (2.27) вытекает искомая оценка (2.24) с постоянной $C_{16} := 2\pi^{-1}\Gamma(3/4)\widehat{C}_{16}$.

Неравенство (2.25) выводится аналогичным образом из тождества

$$
\begin{aligned}
&g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_D(t;\varepsilon) \\
&= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\big(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_D(\varepsilon;\zeta)\big)\, d\zeta
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

и оценок (1.50) и (1.55). При этом

$$
\widetilde{C}_{16} := 2\pi^{-1}\Gamma(3/4)\max\left\{5^{5/4}\widetilde{C}_2; 2\check{c}^{1/4}(1+\check{c})^{1/2}\widetilde{C}_5\mathfrak{C}\right\}.
$$

$\square$

На основании замечания 1.11(2) делаем следующее наблюдение.

Замечание 2.4. *Пусть λ_1^0 — первое собственное значение оператора B_D^0, и пусть $\kappa > 0$ — произвольное малое число. Из-за резольвентной сходимости при достаточно малом $\varepsilon_\circ$ число $\lambda_1^0 \|Q_0\|_{L_\infty}^{-1} - \kappa/2$ — нижняя грань операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ при всех $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_\circ$. Поэтому можно сдвинуть контур интегрирования так, чтобы он пересекал вещественную ось в точке $\mathfrak{c} := \lambda_1^0\|Q_0\|_{L_\infty}^{-1} - \kappa$ вместо $c_\flat/2$. На этом пути получаются оценки (2.11), (2.24) и (2.25) с заменой $e^{-c_\flat t/2}$ на $e^{-\mathfrak{c}t}$ в правых частях. При этом постоянные в оценках станут зависеть от κ.*

2.5 Оценки при малом времени

Отметим, что при $0 < t < \varepsilon^2$ нет смысла применять оценки (2.24) и (2.25), поскольку выгоднее использовать следующее простое утверждение (впрочем, справедливое при всех $t > 0$).

Предложение 2.5. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Тогда при $t > 0$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$
\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{17} t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \tag{2.29}
$$

$$
\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}(f^\varepsilon)^*\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{17} t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \tag{2.30}
$$

$$
\|g^0 b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{17} t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \tag{2.31}
$$

где постоянные $C_{17} := 2c_3\|f\|_{L_\infty}$ и $\widetilde{C}_{17} := \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}$ зависят только от исходных данных (1.9).

Доказательство. Неравенство (2.29) следует из (1.43), (2.5) и (2.7).

Далее, в силу (1.23) имеем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^*\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \|\widetilde{B}^{1/2}_{D,\varepsilon} e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда и из (2.10) вытекает оценка (2.30). С учетом (1.43) и (1.44) оценка (2.31) проверяется аналогично. □

2.6 Устранение сглаживателя S_ε в корректоре

Сглаживающий оператор в соответствующих членах корректора удается устранить, если наложить на матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ условия 1.12 и 1.14. Следующий результат проверяется аналогично теореме 2.3 на основании теорем 1.17 и 1.18.

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3. *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *подчинены условиям* 1.12 *и* 1.14 *соответственно. Положим*

$$\mathcal{K}^0_D(t;\varepsilon) := (\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon) f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0, \tag{2.32}$$

$$\mathcal{G}^0_D(t;\varepsilon) := \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 + g^\varepsilon \big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0. \tag{2.33}$$

Тогда при $t > 0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}^0_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\
&\leqslant C_{18} \left(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}\right) e^{-c_\flat t/2}, \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}^0_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \widetilde{C}_{18} \left(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}\right) e^{-c_\flat t/2}.
\end{aligned}$$

Постоянные C_{18} *и* $\widetilde{C}_{18}$ *зависят от исходных данных* (1.9), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

На основании замечания 1.19 делаем следующее наблюдение.

Замечание 2.7. *Если выполнено только условие* 1.12 (*соответственно, условие* 1.14), *то сглаживающий оператор* S_ε *может быть устранен в члене корректора, содержащем* Λ^ε (*соответственно,* $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$).

2.7 Случай гладкой границы

Устранить сглаживатель S_ε в корректоре возможно также за счет усиления гладкости границы. В этом пункте мы рассмотрим случай $d \geqslant 3$, поскольку при $d \leqslant 2$ применима теорема 2.6 (см. предложения 1.13 и 1.15).

Лемма 2.8. *Пусть $k \geqslant 2$ — целое число. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\mathcal{O}$ класса $C^{k-1,1}$. Тогда при $t > 0$ оператор $e^{-\widetilde{B}_D^0 t}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $0 \leqslant q \leqslant k$, и выполнена оценка*

$$\|e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^q(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_q t^{-q/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0. \tag{2.34}$$

Постоянная $\widehat{\mathrm{C}}_q$ зависит только от q и исходных данных (1.9).

Доказательство. Достаточно проверить оценку (2.34) при целых $q \in [0,k]$; тогда результат при нецелых q получится по интерполяции. При $q = 0,1,2$ оценка (2.34) уже доказана (см. лемму 2.1).

Итак, пусть q — целое, $2 \leqslant q \leqslant k$. Воспользуемся теоремами о регулярности решений сильно эллиптических систем (см., например, [McL, гл. 4]), в силу которых оператор $(\widetilde{B}_D^0)^{-1}$ непрерывно переводит $H^\sigma(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^{\sigma+2}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ при условии $\partial\mathcal{O} \in C^{\sigma+1,1}$, где $\sigma \in \mathbb{Z}_+$. Учтем также, что оператор $(\widetilde{B}_D^0)^{-1/2}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Из сказанного следует, что в условиях леммы при целом $q \in [2,k]$ оператор $(\widetilde{B}_D^0)^{-q/2}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При этом

$$\|(\widetilde{B}_D^0)^{-q/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^q(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathrm{C}}_q, \tag{2.35}$$

где постоянная $\check{\mathrm{C}}_q$ зависит от q и от исходных данных (1.9). Из (2.35) следует оценка

$$\begin{aligned}\|e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^q(\mathcal{O})} &\leqslant \check{\mathrm{C}}_q \|(\widetilde{B}_D^0)^{q/2} e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathrm{C}}_q \sup_{x \geqslant c_\flat} x^{q/2} e^{-xt} \\ &\leqslant \check{\mathrm{C}}_q t^{-q/2} e^{-c_\flat t/2} \sup_{x\geqslant 0} x^{q/2} e^{-x/2} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_q t^{-q/2} e^{-c_\flat t/2}; \quad \widehat{\mathrm{C}}_q := \check{\mathrm{C}}_q (q/e)^{q/2}.\end{aligned}$$

□

Используя лемму 2.8 и свойства матриц-функций $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$, а также оператора S_ε, можно оценить разность корректоров (2.22) и (2.32).

Лемма 2.9. *Пусть $d \geqslant 3$. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{d/2,1}$, если d — четное, и класса $C^{(d+1)/2,1}$, если d —*

нечетное. Пусть $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)$ — *оператор* (2.22) *и* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (2.32). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $t > 0$ *выполнена оценка*

$$\|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon) - \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_d(t^{-1} + t^{-d/4-1/2})e^{-c_\flat t/2}. \qquad (2.36)$$

Постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_d$ *зависит лишь от исходных данных* (1.9)

Из леммы 2.9 и теоремы 2.3 выводится следующий результат.

Теорема 2.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2, *причем* $d \geqslant 3$. *Пусть область* $\mathcal{O}$ *удовлетворяет условиям леммы* 2.9. *Пусть* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ — *корректор* (2.32). *Пусть* $\mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (2.33). *Тогда при* $t > 0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \mathcal{C}_d(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})e^{-c_\flat t/2},\end{aligned} \qquad (2.37)$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_d(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})e^{-c_\flat t/2}.\end{aligned} \qquad (2.38)$$

Постоянные $\mathcal{C}_d$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_d$ *зависят только от исходных данных* (1.9).

Доказательства леммы 2.9 и теоремы 2.10 вынесены в приложение (см. §7), чтобы не загромождать основное изложение. Ясно, что теорему 2.10 удобно применять, если t отделено от нуля. При малых значениях t порядок множителя $(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})$ растет с ростом размерности. Это „плата“ за устранение сглаживателя.

Замечание 2.11. *Вместо условия гладкости* $\partial\mathcal{O}$ *из леммы* 2.9 *можно было бы наложить неявное требование*: *ограниченная область* $\mathcal{O}$ *с липшицевой границей такова, что выполнена оценка* (2.34) *при* $q = d/2 + 1$. *В такой области остаются справедливыми утверждения леммы* 2.9 *и теоремы* 2.10.

2.8 Случай нулевого корректора

Предположим дополнительно, что $g^0 = \overline{g}$, т. е. выполнены соотношения (1.31). Пусть справедливо условие (1.58). Тогда Γ-периодические решения задач (1.25) и (1.33) равны нулю: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$. На основании предложения 1.20 устанавливаем следующий результат.

Предложение 2.12. *Пусть справедливы соотношения* (1.31) *и* (1.58). *Тогда в условиях теоремы* 2.2 *при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{19}\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0, \quad (2.39)$$

где постоянная C_{19} *зависит только от исходных данных* (1.9).

Доказательство. Мы опираемся на тождество (2.13). При $|\zeta| \leqslant \check{c}$, где $\check{c}$ — постоянная (2.14), используем (1.60) и (2.15), при $|\zeta| > \check{c}$ — (1.59) и (2.17). В результате убеждаемся, что при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполнено

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{C}_{19}\varepsilon, \quad \zeta \in \gamma;\\
&\widehat{C}_{19} := \max\bigl\{\bigl(C_9 + C_{10}(1+\check{c})^{1/2}\bigr)\mathfrak{C}; 25 C_8\bigr\}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (2.13) вытекает (2.39) с постоянной $C_{19} := 2\pi^{-1}\widehat{C}_{19}$. $\square$

2.9 Специальный случай

Предположим теперь, что $g^0 = \underline{g}$, т. е. справедливы представления (1.32). Тогда в силу предложения 1.13(3°) выполнено условие 1.12. При этом согласно [BSu3, замечание 3.5] матрица-функция (1.27) постоянна и совпадает с g^0, т. е. $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Таким образом, $\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 = g^0 b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0$.

Предположим дополнительно, что справедливо равенство (1.58). Тогда $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$ и из теоремы 2.3 с помощью предложения 1.1 можно вывести следующий результат.

Предложение 2.13. *Пусть имеют место соотношения* (1.32) *и* (1.58). *Тогда в условиях теоремы* 2.2 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *верна оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - g^0 b(\mathbf{D}) f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}'_{16}\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} e^{-c_\flat t/2}. \quad (2.40)$$

Постоянная $\widetilde{C}'_{16}$ *зависит только от исходных данных* (1.9).

Доказательство. Из теоремы 2.3 следует, что

$$\begin{aligned}
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - g^0 S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\quad \leqslant \widetilde{C}_{16}\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} e^{-c_\flat t/2}.
\end{aligned} \quad (2.41)$$

С одной стороны, в силу предложения 1.1 с учетом (1.3), (1.30), (1.43), (1.46) и (2.8) имеем

$$\begin{aligned} &\|g^0(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})P_\mathcal{O} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} r_1 \alpha_1^{1/2} \|P_\mathcal{O} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} r_1 \alpha_1^{1/2} C^{(2)}_\mathcal{O} \widetilde{c} t^{-1} e^{-c_\flat t/2}. \end{aligned} \tag{2.42}$$

С другой стороны, из (1.2), (1.3), (1.30), (1.43), (1.46) и (2.7) следует, что

$$\begin{aligned} &\|g^0(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})P_\mathcal{O} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant 2\|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \|P_\mathcal{O} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant 2\|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} C^{(1)}_\mathcal{O} c_3 t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Из (2.42) и (2.43) вытекает неравенство

$$\|g^0(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})P_\mathcal{O} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \check{C}_{16} \varepsilon^{1/2} t^{-3/4} e^{-c_\flat t/2},$$

где $\check{C}_{16} := \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \bigl(2 r_1 C^{(1)}_\mathcal{O} C^{(2)}_\mathcal{O} \widetilde{c} c_3\bigr)^{1/2}$. Отсюда и из (2.41) следует оценка (2.40) с постоянной $\widetilde{C}'_{16} := \widetilde{C}_{16} + \check{C}_{16}$. $\square$

2.10 Оценки в строго внутренней подобласти

Пользуясь теоремой 1.21, улучшим оценки погрешности в строго внутренней подобласти.

Теорема 2.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3. *Пусть* $\mathcal{O}'$ *— строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$ *и* δ *определено в* (1.61). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned} &\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \\ &\quad \leqslant \varepsilon (C_{20} t^{-1/2} \delta^{-1} + C_{21} t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}, \\ &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \\ &\quad \leqslant \varepsilon (\widetilde{C}_{20} t^{-1/2} \delta^{-1} + \widetilde{C}_{21} t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Постоянные C_{20}, C_{21}, $\widetilde{C}_{20}$ *и* $\widetilde{C}_{21}$ *зависят только от исходных данных* (1.9).

Доказательство. Доказательство основано на применении теоремы 1.21 и тождеств (2.26), (2.28). Кроме этого требуются оценки (2.15) и (2.17). Опустим детали. $\square$

Следующий результат проверяется аналогично на основании теорем 1.22 и 1.23.

Теорема 2.15. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.14. *Предположим, что матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *подчинены условиям* 1.12 *и* 1.14 *соответственно. Пусть* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ *— корректор* (2.32) *и* $\mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon)$ *— оператор* (2.33). *Тогда при* $t > 0$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$
\begin{aligned}
&\| f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon) \|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\
&\leqslant \varepsilon (C_{20} t^{-1/2} \delta^{-1} + C_{22} t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}, \\
&\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon) \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \\
&\leqslant \varepsilon (\widetilde{C}_{20} t^{-1/2} \delta^{-1} + \widetilde{C}_{22} t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}.
\end{aligned}
$$

Постоянные C_{20} *и* $\widetilde{C}_{20}$ *— те же, что в теореме* 2.14. *Постоянные* C_{22} *и* $\widetilde{C}_{22}$ *зависят от исходных данных* (1.9), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Отметим, что устранить сглаживатель S_ε в корректоре в оценках из теоремы 2.14 возможно и без наложения дополнительных условий на матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$. При этом более высокая гладкость границы не требуется. Рассмотрим случай $d \geqslant 3$ (иначе в силу предложений 1.13 и 1.15 применима теорема 2.15). Мы знаем, что при $t > 0$ оператор $e^{-\widetilde{B}_D^0 t}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и выполнена оценка (2.8). Кроме того, справедливо свойство „повышения гладкости“ внутри области: при $t > 0$ оператор $e^{-\widetilde{B}_D^0 t}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^\sigma(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)$ при любом целом $\sigma \geqslant 3$. При этом имеют место неравенства

$$
\begin{aligned}
\| e^{-\widetilde{B}_D^0 t} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^\sigma(\mathcal{O}')} \leqslant \mathrm{C}'_\sigma t^{-1/2} (\delta^{-2} + t^{-1})^{(\sigma-1)/2} e^{-c_\flat t/2}, \\
t > 0, \quad \sigma \in \mathbb{N}, \quad \sigma \geqslant 3.
\end{aligned}
\tag{2.45}
$$

Постоянная C'_σ зависит от σ и исходных данных (1.9). Для скалярных параболических уравнений свойство „повышения гладкости“ внутри области установлено в [LaSoU, глава 3, §12]. Аналогичным образом его можно проверить и для оператора $\widetilde{B}_D^0$. Квалифицированные оценки (2.45) несложно вывести, используя тот факт, что производные $\mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}_0$ (где $\mathbf{u}_0$ — функция (2.3) при $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$) являются решениями параболического уравнения $\overline{Q_0} \partial_t \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}_0 = -B^0 \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}_0$. Это уравнение следует домножить на $\chi^2 \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}_0$ и проинтегрировать по цилиндру $\mathcal{O} \times (0,t)$. Здесь χ — гладкая срезка, равная нулю вблизи боковой поверхности и дна цилиндра. Стандартный анализ соответствующего интегрального тождества вместе с уже известными неравенствами из леммы 2.1 и приводит к оценкам (2.45).

Используя свойства матриц-функций $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$, а также оператора S_ε, из (2.45) можно вывести следующее утверждение.

Лемма 2.16. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.14, *причем* $d \geqslant 3$. *Пусть* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (2.32). *Обозначим*

$$h_d(\delta;t) := t^{-1} + t^{-1/2}(\delta^{-2} + t^{-1})^{d/4}. \tag{2.46}$$

Пусть $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant (4r_1)^{-1}\delta$ *и* $t > 0$ *имеем*

$$\|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon) - \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \mathrm{C}_d'' h_d(\delta;t)e^{-c_\flat t/2}. \tag{2.47}$$

Постоянная C_d'' *зависит только от исходных данных* (1.9).

Из леммы 2.16 и теоремы 2.14 выводится следующий результат.

Теорема 2.17. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.14, *причем* $d \geqslant 3$. *Пусть* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ — *корректор* (2.32) *и* $\mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (2.33). *Пусть* $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \min\{\varepsilon_1; (4r_1)^{-1}\delta\}$ *и* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon \mathrm{C}_d h_d(\delta;t)e^{-c_\flat t/2}, \tag{2.48}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - \mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon \widetilde{\mathrm{C}}_d h_d(\delta;t)e^{-c_\flat t/2}. \tag{2.49}$$

Здесь $h_d(\delta;t)$ — *величина* (2.46), *постоянные* C_d *и* $\widetilde{\mathrm{C}}_d$ *зависят только от исходных данных* (1.9).

Доказательства леммы 2.16 и теоремы 2.17 вынесены в приложение (см. §8), чтобы не загромождать основное изложение. Ясно, что теорему 2.17 удобно применять, если t отделено от нуля. При малых значениях t порядок множителя $h_d(\delta;t)$ растет с ростом размерности. Это „плата" за устранение сглаживателя.

3 Усреднение первой начально-краевой задачи для неоднородного уравнения

3.1 Старший член аппроксимации

В этом параграфе мы изучаем поведение решения первой начально-краевой задачи для неоднородного параболического уравнения:

$$\begin{cases} Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t) & = -B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad t>0; \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t>0; \\ Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) & = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Здесь $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T) := L_r((0,T); L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n))$, $0 < T \leqslant \infty$, при некотором $1 \leqslant r \leqslant \infty$. Тогда

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^t f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})}(f^\varepsilon)^*\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}. \tag{3.2}$$

Соответствующая эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}(\mathbf{x},t) &= -B^0\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad t>0; \\ \mathbf{u}_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} &= 0, \quad t>0; \\ \overline{Q_0}\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) &= \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Решение этой задачи дается формулой

$$\mathbf{u}_0(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0\boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^t f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D(t-\widetilde{t})} f_0\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}. \tag{3.4}$$

Вычитая (3.4) из (3.2), на основании теоремы 2.2 (см. (2.11)) заключаем, что при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ и $t>0$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{15}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{15}\varepsilon\mathcal{L}(\varepsilon;t;\mathbf{F}),$$

где

$$\mathcal{L}(\varepsilon;t;\mathbf{F}) := \int_0^t e^{-c_\flat(t-\widetilde{t})/2}(\varepsilon^2+t-\widetilde{t})^{-1/2}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2(\mathcal{O})}\,d\widetilde{t}.$$

Оценивая член $\mathcal{L}(\varepsilon;t;\mathbf{F})$, при $1<r\leqslant\infty$ получаем следующий результат. Его доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы 5.1 из [MSu1].

Теорема 3.1. *Пусть $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Пусть выполнены условия п. 1.3–1.6. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (3.1), и пусть $\mathbf{u}_0$ — решение эффективной задачи (3.3) при $\boldsymbol{\varphi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}\in\mathfrak{H}_r(T)$, $0<T\leqslant\infty$, при некотором $1<r\leqslant\infty$. Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ и $0<t<T$ выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{15}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r\theta(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(T)}.$$

Здесь величина $\theta(\varepsilon,r)$ определена равенством

$$\theta(\varepsilon,r) = \begin{cases} \varepsilon^{2-2/r}, & 1<r<2, \\ \varepsilon(|\ln\varepsilon|+1)^{1/2}, & r=2, \\ \varepsilon, & 2<r\leqslant\infty. \end{cases} \tag{3.5}$$

Постоянная c_r зависит только от r и данных задачи (1.9).

Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 5.2 из [MSu1], из теоремы 2.2 можно вывести аппроксимацию решения задачи (3.1) в пространстве $\mathfrak{H}_r(T)$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (3.1) *и* (3.3) *соответственно, причем* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $1 \leqslant r < \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеем*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{H}_r(T)} \leqslant c_{r'}\theta(\varepsilon, r')\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{23}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(T)}.$$

Здесь $\theta(\varepsilon,\cdot)$ *— величина* (3.5), $r^{-1} + (r')^{-1} = 1$. *Постоянная* C_{23} *зависит только от исходных данных* (1.9), *постоянная* $c_{r'}$ *зависит от тех же величин и от* r.

Замечание 3.3. *При* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_\infty(T)$ *из теоремы* 3.1 *можно вывести оценку*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{H}_\infty(T)} \leqslant c_\infty\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_\infty(T)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

3.2 Аппроксимация решения в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$

Получим теперь аппроксимацию решения задачи (3.1) по $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$-норме с помощью теоремы 2.3. Трудности возникают при рассмотрении интегрального члена в (3.2), так как оценка (2.24) „портится“ при малом t. *Считая, что* $t \geqslant \varepsilon^2$, разобьем промежуток интегрирования в (3.2) на две части: $(0, t-\varepsilon^2)$ и $(t-\varepsilon^2, t)$. На интервале $(0, t-\varepsilon^2)$ будем применять (2.24), а на $(t-\varepsilon^2, t)$ — (2.29).

Обозначим

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot, t) := f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D \varepsilon^2} f_0^{-1}\mathbf{u}_0(\cdot, t-\varepsilon^2), \tag{3.6}$$

где $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (3.3). В силу (3.4)

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t) = f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 \boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^{t-\varepsilon^2} f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D (t-\widetilde{t})} f_0 \mathbf{F}(\cdot, \widetilde{t})\, d\widetilde{t}.$$

Доказательство следующего утверждения полностью аналогично доказательству теоремы 5.4 из [MSu1].

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (3.1) *и* (3.3) *соответственно, причем* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_r(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $2 < r \leqslant \infty$. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)$ *— функция* (3.6). *Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодические матричные решения задач* (1.25) *и* (1.33) *соответственно. Пусть* $P_\mathcal{O}$ *— линейный непрерывный* *оператор продолжения* (1.45)*, и пусть* S_ε *— оператор сглаживания по Стеклову* (1.1)*. Положим* $\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t) := P_{\mathcal{O}}\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)$ *и обозначим*

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t) := \mathbf{u}_0(\cdot,t) + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t).$$

Пусть $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$*, и пусть* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица-функция* (1.27)*. Положим*

$$\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,t) := \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t) + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t).$$

Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2\leqslant t<T$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant 2C_{16}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \check{c}_r\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{16}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{c}_r\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(T)}.$$

Здесь

$$\omega(\varepsilon,r) := \begin{cases} \varepsilon^{1-2/r}, & 2<r<4,\\ \varepsilon^{1/2}(|\ln\varepsilon|+1)^{3/4}, & r=4,\\ \varepsilon^{1/2}, & 4<r\leqslant\infty. \end{cases} \tag{3.7}$$

Постоянные $\check{c}_r$ *и* $\widetilde{c}_r$ *зависят только от исходных данных* (1.9) *и* r.

Так как правая часть в оценке (2.25) при $t\to 0$ растет медленнее, чем правая часть в оценке (2.24), при $r>4$ поток $\mathbf{p}_\varepsilon$ удается аппроксимировать через

$$\mathbf{h}_\varepsilon(\cdot,t) := \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t). \tag{3.8}$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0$ и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (3.3).

Предложение 3.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1*. Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (3.1) *и* (3.3) *соответственно, причем* $\boldsymbol{\varphi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}\in\mathfrak{H}_r(T)$*,* $0<T\leqslant\infty$*, при некотором* $4<r\leqslant\infty$*. Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ *и пусть* $\mathbf{h}_\varepsilon(\cdot,t)$ *— функция* (3.8)*. Тогда при* $0<t<T$ *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{h}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{16}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{24}^{(r)}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}. \tag{3.9}$$

Постоянная $C_{24}^{(r)}$ *зависит только от исходных данных* (1.9) *и от* r.

Доказательство. Для доказательства оценки (3.9) воспользуемся неравенством (2.25) и тождествами (3.2), (3.4). Если $r=\infty$, отсюда получаем

(3.9) при $C_{24}^{(\infty)} := (2/c_\flat)^{1/4}\Gamma(1/4)\widetilde{C}_{16}$. Если $4 < r < \infty$, воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{h}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \widetilde{C}_{16}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + \widetilde{C}_{16}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}\mathfrak{I}_r(\varepsilon,t)^{1/r'}, \quad r^{-1} + (r')^{-1} = 1.\end{aligned}$$

Здесь

$$\mathfrak{I}_r(\varepsilon,t) := \int_0^t \tau^{-3r'/4}e^{-c_\flat r'\tau/2}\,d\tau \leqslant (c_\flat r'/2)^{3r'/4-1}\Gamma(1-3r'/4).$$

В итоге приходим к неравенству (3.9) с постоянной $C_{24}^{(r)} := (c_\flat r'/2)^{3/4-1/r'}\Gamma(1-3r'/4)^{1/r'}\widetilde{C}_{16}$. $\square$

Из предложения 2.5 и теоремы 2.6 можно вывести следующий результат.

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4. *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *удовлетворяют условиям* 1.12 *и* 1.14 *соответственно. Обозначим*

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot,t) := \mathbf{u}_0(\cdot,t) + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t), \tag{3.10}$$

$$\check{\mathbf{q}}_\varepsilon(\cdot,t) := \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t) + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t). \tag{3.11}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant 2C_{18}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r'\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \check{\mathbf{q}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\widetilde{C}_{18}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r''\omega(\varepsilon,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.$$

Постоянные c_r' *и* c_r'' *зависят только от исходных данных* (1.9), *от* r, p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

В случае дополнительной гладкости границы можно было бы применить теорему 2.10. Однако из-за сильного роста правой части в оценках (2.37), (2.38) при малом t содержательный результат получается только в трехмерном случае и только при $r > 4$.

Предложение 3.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4, *причем* $d = 3$ *и* $r > 4$. *Предположим, что* $\partial\mathcal{O} \in C^{2,1}$. *Пусть* $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ *и* $\check{\mathbf{q}}_\varepsilon$ — *функции* (3.10) *и* (3.11). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_3(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-5/4})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + \widetilde{c}_r'\varepsilon^{1/2-2/r}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}, \\ \|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \check{\mathbf{q}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_3(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-5/4})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + \widetilde{c}_r''\varepsilon^{1/2-2/r}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.\end{aligned}$$

Постоянные $\widetilde{c}_r'$ и $\widetilde{c}_r''$ зависят только от исходных данных (1.9) *и от r.*

3.3 Аппроксимация решения в строго внутренней подобласти

Из теоремы 2.14 и предложения 2.5 можно вывести следующий результат.

Теорема 3.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.4. *Пусть $\mathcal{O}'$ — строго внутренняя подобласть области $\mathcal{O}$. Пусть δ определено в* (1.61). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ выполнено*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')} &\leqslant \varepsilon(C_{20}t^{-1/2}\delta^{-1} + C_{21}t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + k_r\vartheta(\varepsilon,\delta,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}, \\
\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{q}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')} &\leqslant \varepsilon(\widetilde{C}_{20}t^{-1/2}\delta^{-1} + \widetilde{C}_{21}t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + \widetilde{k}_r\vartheta(\varepsilon,\delta,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.
\end{aligned}$$

Здесь величина $\vartheta(\varepsilon,\delta,r)$ определена равенством

$$\vartheta(\varepsilon,\delta,r) := \begin{cases} \varepsilon\delta^{-1} + \varepsilon^{1-2/r}, & 2 < r < \infty, \\ \varepsilon\delta^{-1} + \varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1), & r = \infty. \end{cases}$$

Постоянные k_r и $\widetilde{k}_r$ зависят только от исходных данных (1.9) *и от r.*

Наконец, если выполнены условия 1.12 и 1.14, на основании теоремы 2.15 можно установить следующий результат.

Теорема 3.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.8. *Предположим, что матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ подчинены условиям* 1.12 *и* 1.14 *соответственно. Пусть функции $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ и $\check{\mathbf{q}}_\varepsilon$ определены согласно* (3.10) *и* (3.11). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ имеем*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')} &\leqslant \varepsilon(C_{20}t^{-1/2}\delta^{-1} + C_{22}t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + \check{k}_r\vartheta(\varepsilon,\delta,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}, \\
\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \check{\mathbf{q}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')} &\leqslant \varepsilon(\widetilde{C}_{20}t^{-1/2}\delta^{-1} + \widetilde{C}_{22}t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + \widehat{k}_r\vartheta(\varepsilon,\delta,r)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.
\end{aligned}$$

Постоянные $\check{k}_r$ и $\widehat{k}_r$ зависят только от исходных данных (1.9), *от r, p и от норм $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.*

Примеры

Для эллиптических систем во всем пространстве $\mathbb{R}^d$ рассматриваемые примеры изучались в [Su4, MSu2]. Для эллиптических систем в ограниченной области эти примеры разобраны в [MSu3].

4 Скалярный эллиптический оператор с сингулярным потенциалом

4.1 Описание оператора

Рассмотрим случай, когда $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, а $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция *с вещественными элементами*, причем $g, g^{-1} \in L_\infty$ и $g(\mathbf{x}) > 0$. Тогда очевидно (см. (1.3)) $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ и $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$.

Далее, пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$, — Γ-периодические вещественные функции, причем

$$A_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad j = 1, \dots, d. \tag{4.1}$$

Пусть $v(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ — вещественные Γ-периодические функции такие, что

$$v, \mathcal{V} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2; \quad \int_\Omega v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{4.2}$$

В $L_2(\mathcal{O})$ рассмотрим оператор $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathfrak{B}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) \tag{4.3}$$

при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Точное определение оператора $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[u,u] = \int_\mathcal{O} \left(\langle g^\varepsilon (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) u \rangle + (\varepsilon^{-1} v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon)|u|^2 \right) d\mathbf{x},$$
$$u \in H_0^1(\mathcal{O}).$$

Легко видеть (см. [Su4, п. 13.1]), что выражение (4.3) можно переписать следующим образом:

$$\mathfrak{B}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{4.4}$$

Здесь вещественная функция $Q(\mathbf{x})$ определена равенством

$$Q(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \langle g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\rangle. \tag{4.5}$$

Комплексные функции $a_j(\mathbf{x})$ заданы выражениями

$$a_j(\mathbf{x}) = -\eta_j(\mathbf{x}) + i\xi_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, d, \tag{4.6}$$

где $\eta_j(\mathbf{x})$ — компоненты вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})$, а функции $\xi_j(\mathbf{x})$ определены через Γ-периодическое решение $\Phi(\mathbf{x})$ задачи $\Delta\Phi(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$, $\int_\Omega \Phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0$, соотношением $\xi_j(\mathbf{x}) = -\partial_j\Phi(\mathbf{x})$. При этом выполнено

$$v(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{d} \partial_j \xi_j(\mathbf{x}). \tag{4.7}$$

Можно проверить, что функции (4.6) удовлетворяют условию (1.7) с подходящим показателем ρ', зависящим от ρ и s, причем нормы $\|a_j\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$ контролируются через $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}$, $\|v\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решетки Γ. (См. [Su4, п. 13.1].) Функция (4.5) удовлетворяет условию (1.8) с подходящим показателем $s' = \min\{s; \rho/2\}$.

Пусть $Q_0(\mathbf{x})$ — положительно определенная и ограниченная Γ-периодическая функция. Следуя (1.10), введем положительно определенный оператор $\mathcal{B}_{D,\varepsilon} := \mathfrak{B}_{D,\varepsilon} + \lambda Q_0^\varepsilon$. Здесь постоянная λ выбрана из условия (1.16) для оператора $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$, коэффициенты g, a_j, $j = 1, \dots, d$, Q и Q_0 которого определены выше. Оператор $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ задается выражением

$$\mathcal{B}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{4.8}$$

Нас интересует поведение экспоненты от оператора $\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} := f^\varepsilon \mathcal{B}_{D,\varepsilon} f^\varepsilon$, где $f(\mathbf{x}) := Q_0(\mathbf{x})^{-1/2}$.

Для скалярного эллиптического оператора (4.8) исходные данные (1.9) сводятся к набору:

$$\begin{aligned} &d, \rho, s; \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|v\|_{L_s(\Omega)}, \|\mathcal{V}\|_{L_s(\Omega)}, \\ &\|Q_0\|_{L_\infty}, \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}; \text{ параметры решетки } \Gamma; \text{ область } \mathcal{O}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.2 Эффективный оператор

Выпишем эффективный оператор. В нашем случае Γ-периодическое решение задачи (1.25) является матрицей-строкой:

$$\Lambda(\mathbf{x}) = i\Psi(\mathbf{x}), \quad \Psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_d(\mathbf{x})),$$

где $\psi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla \psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_\Omega \psi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, d$, — стандартные орты в $\mathbb{R}^d$. Ясно, что функции $\psi_j(\mathbf{x})$ вещественнозначные, а элементы матрицы-строки $\Lambda(\mathbf{x})$ чисто мнимые. В силу (1.27) столбцами $(d \times d)$-матрицы-функции $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ служат вектор-функции $g(\mathbf{x})(\nabla \psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, d$. Эффективная матрица определена в соответствии с (1.26): $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Ясно, что $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и g^0 имеют вещественные элементы.

Согласно (4.6) и (4.7) периодическое решение задачи (1.33) представляется в виде $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + i\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$, где вещественные Γ-периодические функции $\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$ являются решениями задач

$$- \operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0;$$
$$- \operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) + \operatorname{div} g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Матрица-столбец V (см. (1.35)) имеет вид $V = V_1 + iV_2$, где V_1, V_2 — столбцы с вещественными элементами, определяемые равенствами

$$V_1 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\nabla\Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$
$$V_2 = -|\Omega|^{-1} \int_\Omega (\nabla\Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Согласно (1.36) постоянная W запишется в виде

$$W = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \Big(\langle g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}), \nabla\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\rangle + \langle g(\mathbf{x})\nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}), \nabla\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\rangle \Big)\, d\mathbf{x}.$$

Эффективный оператор для $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ действует по правилу

$$\mathcal{B}_D^0 u = -\operatorname{div} g^0 \nabla u + 2i\langle \nabla u, V_1 + \overline{\boldsymbol{\eta}}\rangle + (-W + \overline{Q} + \lambda\overline{Q_0})u, \quad u \in H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}).$$

Соответствующее дифференциальное выражение допускает запись в виде

$$\mathcal{B}^0 = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) + \mathcal{V}^0 + \lambda\overline{Q_0}, \tag{4.10}$$

где

$$\mathbf{A}^0 = (g^0)^{-1}(V_1 + \overline{g\mathbf{A}}), \quad \mathcal{V}^0 = \overline{\mathcal{V}} + \overline{\langle g\mathbf{A}, \mathbf{A}\rangle} - \langle g^0\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^0\rangle - W.$$

Пусть $f_0 := (\overline{Q_0})^{-1/2}$. Обозначим $\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 := f_0 \mathcal{B}_D^0 f_0$.

4.3 Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты

Согласно замечанию 1.16 в рассматриваемом случае справедливы условия 1.12 и 1.14, причем нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_\infty}$ оцениваются в терминах исходных данных (4.9). Поэтому можно использовать корректор, не содержащий сглаживающего оператора:

$$\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon) := \Big([\Lambda^\varepsilon]\mathbf{D} + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\Big) f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0 = \Big([\Psi^\varepsilon]\nabla + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\Big) f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0. \quad (4.11)$$

Оператор (2.33) запишется в виде $\mathcal{G}_D^0(t;\varepsilon) = -i\mathfrak{G}_D^0(t;\varepsilon)$, где

$$\mathfrak{G}_D^0(t;\varepsilon) = \widetilde{g}^\varepsilon \nabla f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0 + g^\varepsilon (\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0. \quad (4.12)$$

Следующий результат вытекает из теорем 2.2 и 2.6.

Предложение 4.1. *Пусть выполнены предположения п.* 4.1 *и* 4.2. *Пусть операторы* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ *и* $\mathfrak{G}_D^0(t;\varepsilon)$ *определены равенствами* (4.11) *и* (4.12) *соответственно. Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 1.7. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} t} f^\varepsilon - f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{15}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t \geqslant 0;\\
&\|f^\varepsilon e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} t} f^\varepsilon - f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 t} f_0 - \varepsilon\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\quad \leqslant C_{18}(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0;\\
&\|g^\varepsilon \nabla f^\varepsilon e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} t} f^\varepsilon - \mathfrak{G}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\quad \leqslant \widetilde{C}_{18}(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0.
\end{aligned}$$

Постоянные C_{15}, C_{18} *и* $\widetilde{C}_{18}$ *зависят только от исходных данных* (4.9).

4.4 Усреднение первой начально-краевой задачи для параболического уравнения с сингулярным потенциалом

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для неоднородного параболического уравнения с сингулярным потенциалом:

$$\begin{cases}
Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},t) & = -(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) u_\varepsilon(\mathbf{x},t)\\
& \quad - \big(\varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\big) u_\varepsilon(\mathbf{x},t) + F(\mathbf{x},t),\\
& \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t > 0;\\
u_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t > 0;\\
Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) u_\varepsilon(\mathbf{x},0) & = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}.
\end{cases}$$

Здесь $\varphi \in L_2(\mathcal{O})$ и $F \in \mathfrak{H}_r(T) := L_r((0,T); L_2(\mathcal{O}))$, $0 < T \leqslant \infty$, при некотором $1 \leqslant r \leqslant \infty$.

Согласно (4.10) эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \overline{Q_0}\frac{\partial u_0}{\partial t}(\mathbf{x},t) & = -(\mathbf{D}-\mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D}-\mathbf{A}^0) u_0(\mathbf{x},t) - \left(\mathcal{V}^0 + \lambda \overline{Q_0}\right) u_0(\mathbf{x},t) \\ & +F(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t>0; \\ u_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t>0; \\ \overline{Q_0} u_0(\mathbf{x},0) & = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{cases}$$

Применяя теоремы 3.1 и 3.6, получаем следующий результат.

Предложение 4.2. *Пусть число ε_1 подчинено условию* 1.7. *Пусть выполнены условия п.* 4.4, *причем $1 < r \leqslant \infty$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $0 < t < T$ справедлива оценка*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{15}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_\flat t/2} \|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r \theta(\varepsilon,r)\|F\|_{\mathfrak{H}_r(T)}.$$

Здесь $\theta(\varepsilon,r)$ — величина (3.5).

Считая $t \geqslant \varepsilon^2$, положим $w_\varepsilon(\cdot,t) := f_0 e^{-\widetilde{\mathcal{B}}^0_D \varepsilon^2} f_0^{-1} u_0(\cdot, t-\varepsilon^2)$. Обозначим $\check{v}_\varepsilon(\cdot,t) := u_0(\cdot,t) + \varepsilon \Psi^\varepsilon \nabla w_\varepsilon(\cdot,t) + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon w_\varepsilon(\cdot,t)$ и $\check{q}_\varepsilon(\cdot,t) := \widetilde{g}^\varepsilon \nabla w_\varepsilon(\cdot,t) + g^\varepsilon \big(\nabla\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon w_\varepsilon(\cdot,t)$. Предположим дополнительно, что $2 < r \leqslant \infty$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ выполнено

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - \check{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant 2C_{18}\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r' \omega(\varepsilon,r)\|F\|_{\mathfrak{H}_r(t)},$$
$$\|g^\varepsilon \nabla u_\varepsilon(\cdot,t) - \check{q}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\widetilde{C}_{18}\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_r'' \omega(\varepsilon,r)\|F\|_{\mathfrak{H}_r(t)}.$$

Здесь $\omega(\varepsilon,r)$ — величина (3.7).

Постоянные C_{15}, C_{18} и $\widetilde{C}_{18}$ зависят только от исходных данных (4.9). *Постоянные c_r, c_r' и c_r'' зависят от тех же величин и от r.*

5 Скалярный оператор с сильно сингулярным потенциалом порядка ε^{-2}

Усреднение первой начально-краевой задачи для параболического уравнения с сильно сингулярным потенциалом изучалось в [AlCPiSiVa]. Там же можно найти некоторые мотивировки (см. [AlCPiSiVa, §1]). Однако результаты [AlCPiSiVa] не могут быть сформулированы в равномерной операторной топологии.

5.1 Описание оператора

Пусть $\check{g}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$ с вещественными элементами, причем $\check{g}, \check{g}^{-1} \in L_\infty$ и $\check{g}(\mathbf{x}) > 0$; а $\check{v}(\mathbf{x})$ — вещественная Γ-периодическая функция такая, что

$$\check{v} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2.$$

Через $\check{\mathcal{A}}$ обозначим оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, отвечающий квадратичной форме

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\langle \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} u, \mathbf{D} u \rangle + \check{v}(\mathbf{x}) |u|^2 \right) \, d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

За счет добавления постоянной к потенциалу $\check{v}(\mathbf{x})$ будем считать, что оператор $\check{\mathcal{A}}$ имеет точку нуль краем спектра. При этом условии оператор $\check{\mathcal{A}}$ допускает факторизацию с помощью собственной функции оператора $\mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} + \check{v}(\mathbf{x})$ на ячейке Ω (с периодическими граничными условиями), отвечающей нулевому собственному значению (см. [BSu2, гл. 6, п. 1.1]). По-видимому, впервые подобный прием факторизации в задачах усреднения был использован в [Zh1, K].

В $L_2(\mathcal{O})$ рассмотрим оператор $\check{\mathcal{A}}_D$, заданный выражением $\mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} + \check{v}(\mathbf{x})$ при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Строгое определение оператора $\check{\mathcal{A}}_D$ дается через квадратичную форму

$$\check{\mathfrak{a}}_D[u, u] = \int_{\mathcal{O}} \left(\langle \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} u, \mathbf{D} u \rangle + \check{v}(\mathbf{x}) |u|^2 \right) \, d\mathbf{x}, \quad u \in H^1_0(\mathcal{O}). \tag{5.1}$$

Оператор $\check{\mathcal{A}}_D$ наследует факторизацию оператора $\check{\mathcal{A}}$. Чтобы ее описать, рассмотрим уравнение

$$\mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} \omega(\mathbf{x}) + \check{v}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) = 0. \tag{5.2}$$

Это уравнение имеет Γ-периодическое решение $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, определенное с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, чтобы $\omega(\mathbf{x}) > 0$ и

$$\int_\Omega \omega^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |\Omega|. \tag{5.3}$$

Более того, решение положительно определено и ограничено: $0 < \omega_0 \leqslant \omega(\mathbf{x}) \leqslant \omega_1 < \infty$. Нормы $\|\omega\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ контролируются через $\|\check{g}\|_{L_\infty}$, $\|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\|\check{v}\|_{L_s(\Omega)}$. Отметим, что ω и ω^{-1} являются мультипликаторами в $H^1_0(\mathcal{O})$.

Подстановка $u = \omega z$ с учетом (5.2) преобразует форму (5.1) к виду

$$\check{\mathfrak{a}}_D[u,u] = \int_{\mathcal{O}} \omega(\mathbf{x})^2 \langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}z, \mathbf{D}z\rangle \, d\mathbf{x}, \quad u = \omega z, \quad z \in H_0^1(\mathcal{O}).$$

Поэтому дифференциальное выражение для оператора $\check{\mathcal{A}}_D$ допускает факторизацию

$$\check{\mathcal{A}} = \omega^{-1}\mathbf{D}^* g \mathbf{D}\omega^{-1}, \quad g = \omega^2 \check{g}. \tag{5.4}$$

Рассмотрим теперь оператор $\check{\mathcal{A}}_{D,\varepsilon}$ с быстро осциллирующими коэффициентами, действующий в $L_2(\mathcal{O})$ и заданный выражением

$$\check{\mathcal{A}}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D}(\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad g = \omega^2 \check{g}, \tag{5.5}$$

при условии Дирихле на границе. В исходных терминах выражение (5.5) запишется так:

$$\check{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* \check{g}^\varepsilon \mathbf{D} + \varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon. \tag{5.6}$$

Далее, пусть $\mathbf{A} = \operatorname{col}\{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$ — Г-периодические вещественные функции, удовлетворяющие условию (4.1). Пусть $\widehat{v}(\mathbf{x})$ и $\check{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ — Г-периодические вещественные функции, причем

$$\widehat{v}, \check{\mathcal{V}} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2; \int_\Omega \widehat{v}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{5.7}$$

В $L_2(\mathcal{O})$ рассмотрим оператор $\widetilde{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\widetilde{\mathfrak{B}}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)^* \check{g}^\varepsilon (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon + \check{\mathcal{V}}^\varepsilon$$

при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Строгое определение дается через квадратичную форму.

Положим

$$v(\mathbf{x}) := \widehat{v}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) := \check{\mathcal{V}}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}). \tag{5.8}$$

С учетом (5.5), (5.6) справедливо тождество $\widetilde{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}(\omega^\varepsilon)^{-1}$, где оператор $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ задан выражением (4.3) при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$; при этом g определено в (5.4), а v и $\mathcal{V}$ — в (5.8). В силу (5.7) и свойств функции ω коэффициенты v и $\mathcal{V}$ удовлетворяют условиям (4.2). Тогда оператор $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ можно представить в виде (4.4), где a_j, $j = 1, \dots, d$, и Q построены по g, $\mathbf{A}$, v и $\mathcal{V}$ согласно (4.5), (4.6).

Постоянную λ выберем из условия (1.16) для оператора с теми же коэффициентами g, a_j, $j = 1, \dots, d$, и Q, что и у $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$, и коэффициентом

$Q_0(\mathbf{x}) := \omega^2(\mathbf{x})$. Тогда оператор $\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} := \widetilde{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon} + \lambda I$ связан с оператором $\mathcal{B}_{D,\varepsilon} := \mathfrak{B}_{D,\varepsilon} + \lambda Q_0^\varepsilon$ соотношением $\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathcal{B}_{D,\varepsilon}(\omega^\varepsilon)^{-1}$.

Под „исходными данными“ будем понимать набор

$$
\begin{aligned}
&d, \rho, s; \|\check{g}\|_{L_\infty}, \|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|\check{v}\|_{L_s(\Omega)}, \|\widehat{v}\|_{L_s(\Omega)}, \|\check{\mathcal{V}}\|_{L_s(\Omega)};\\
&\text{параметры решетки } \Gamma; \text{ область } \mathcal{O}.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

5.2 Усреднение первой начально-краевой задачи для параболического уравнения с сильно сингулярным потенциалом

К оператору $\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon}$, описанному в п. 5.1, применимо предложение 4.1, причем $f(\mathbf{x}) = \omega(\mathbf{x})^{-1}$ и в силу (5.3) выполнено $f_0 = 1$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 = \mathcal{B}_D^0$. Коэффициенты g^0, $\mathbf{A}^0$ и $\mathcal{V}^0$ эффективного оператора строятся по g, $\mathbf{A}$, v и $\mathcal{V}$ (см. (5.5) и (5.8)), как описано в п. 4.2. Применим результаты к усреднению решения первой начально-краевой задачи

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x}, t) & = -(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \check{g}^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))u_\varepsilon(\mathbf{x}, t)\\
& \quad - \left(\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \check{\mathcal{V}}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda I\right) u_\varepsilon(\mathbf{x}, t),\\
& \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t > 0;\\
u_\varepsilon(\cdot, t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t > 0;\\
u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) & = \omega^\varepsilon(\mathbf{x})^{-1}\varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}.
\end{cases}
$$

Здесь $\varphi \in L_2(\mathcal{O})$. (Для простоты мы рассматриваем однородное уравнение.) Тогда $u_\varepsilon(\cdot, t) = e^{-\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon}t}(\omega^\varepsilon)^{-1}\varphi$.

Пусть u_0 — решение усредненной задачи

$$
\begin{cases}
\frac{\partial u_0}{\partial t}(\mathbf{x}, t) & = -(\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0(\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)u_0(\mathbf{x}, t) - \left(\mathcal{V}^0 + \lambda\right) u_0(\mathbf{x}, t),\\
& \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t > 0;\\
u_0(\cdot, t)|_{\partial\mathcal{O}} & = 0, \quad t > 0;\\
u_0(\mathbf{x}, 0) & = \varphi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}.
\end{cases}
$$

Из предложения 4.1 выводим следующий результат.

Предложение 5.1. *Пусть выполнены условия п. 5.2. Обозначим*

$$
\begin{aligned}
\check{v}_\varepsilon(\cdot, t) &:= u_0(\cdot, t) + \varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla u_0(\cdot, t) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon u_0(\cdot, t),\\
\check{q}_\varepsilon(\cdot, t) &:= \widetilde{g}^\varepsilon\nabla u_0(\cdot, t) + g^\varepsilon(\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon u_0(\cdot, t).
\end{aligned}
$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|(\omega^\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon(\cdot,t) - u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{15}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t \geqslant 0;$$
$$\|(\omega^\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon(\cdot,t) - \check{v}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{18}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|g^\varepsilon\nabla(\omega^\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon(\cdot,t) - \check{q}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{18}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\varphi\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

$t > 0$. *Постоянные* C_{15}, C_{18} *и* $\widetilde{C}_{18}$ *зависят только от исходных данных* (5.9).

Отметим, что при наличии сильно сингулярного потенциала в уравнении „хорошо аппроксимируется“ не само решение u_ε, а произведение $(\omega^\varepsilon)^{-1}u_\varepsilon$. В этом отличие характера результатов §5 от результатов §4.

Приложение

В приложении мы рассматриваем случай $d \geqslant 3$ и доказываем утверждения об устранении сглаживающего оператора S_ε в случае достаточно гладкой границы области (лемма 2.9 и теорема 2.10) и в строго внутренней подобласти.

6 Свойства матриц-функций Λ и $\widetilde{\Lambda}$

Нам потребуется результат [PSu, лемма 2.3].

Лемма 6.1. *Пусть* Λ — Γ*-периодическое решение задачи* (1.25). *Тогда для любой функции* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *при* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta_1\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^d}|\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}.$$

Постоянные β_1 *и* β_2 *зависят от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ *и* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Следующий результат установлен в [MSu2, лемма 3.4].

Лемма 6.2. *Пусть* $\widetilde{\Lambda}$ — Γ*-периодическое решение задачи* (1.33). *Тогда для любой функции* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \widetilde{\beta}_1\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{\beta}_2\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^d}|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}.$$

Постоянные $\widetilde{\beta}_1$ *и* $\widetilde{\beta}_2$ *зависят только от* n, d, α_0, α_1, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от норм* $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1,\dots,d$, *а также от параметров решетки* Γ.

Ниже в §7 нам потребуются следующие мультипликаторные свойства матриц-функций $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$.

Лемма 6.3. *Пусть матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи* (1.25). *Пусть $d \geqslant 3$ и $l = d/2$.*
1°. *При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ для $\mathbf{u} \in H^{l-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ справедливы включение $\Lambda^\varepsilon \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и оценка*

$$\|\Lambda^\varepsilon \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(0)} \|\mathbf{u}\|_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.1}$$

2°. *При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ для $\mathbf{u} \in H^{l}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ справедливы включение $\Lambda^\varepsilon \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и оценка*

$$\|\Lambda^\varepsilon \mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(1)} \varepsilon^{-1} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C^{(2)} \|\mathbf{u}\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.2}$$

Постоянные $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ зависят от m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Доказательство. Достаточно проверить (6.1) и (6.2) при $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. Подставляя $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y}$, $\varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{U}(\mathbf{y})$, имеем

$$\begin{aligned}\|\Lambda^\varepsilon \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(\mathbf{y})|^2 |\mathbf{U}(\mathbf{y})|^2\, d\mathbf{y} \\ &= \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} \int_{\Omega+\mathbf{a}} |\Lambda(\mathbf{y})|^2 |\mathbf{U}(\mathbf{y})|^2\, d\mathbf{y} \leqslant \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} \|\Lambda\|^2_{L_{2\nu}(\Omega)} \|\mathbf{U}\|^2_{L_{2\nu'}(\Omega+\mathbf{a})},\end{aligned} \tag{6.3}$$

где $\nu^{-1} + (\nu')^{-1} = 1$. Число ν выбираем таким, чтобы имело место непрерывное вложение $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_{2\nu}(\Omega)$, то есть $\nu = d(d-2)^{-1}$. Тогда

$$\|\Lambda\|^2_{L_{2\nu}(\Omega)} \leqslant c_\Omega \|\Lambda\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{6.4}$$

где постоянная c_Ω зависит только от размерности d и решетки Γ. При сделанном выборе ν имеем $2\nu' = d$. В силу непрерывности вложения $H^{l-1}(\Omega) \hookrightarrow L_d(\Omega)$ выполнено

$$\|\mathbf{U}\|^2_{L_d(\Omega+\mathbf{a})} \leqslant c'_\Omega \|\mathbf{U}\|^2_{H^{l-1}(\Omega+\mathbf{a})}, \tag{6.5}$$

где постоянная c'_Ω зависит только от размерности d и решетки Γ. Теперь из (6.3)–(6.5) вытекает оценка

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant c_\Omega c'_\Omega \|\Lambda\|^2_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{U}\|^2_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.6}$$

Очевидно, что при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполнено неравенство $\|\mathbf{U}\|_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\mathbf{u}\|_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}$. Отсюда и из (6.6) с учетом (1.28) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant c_\Omega c'_\Omega M^2 \|\mathbf{u}\|^2_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m), \tag{6.7}$$

что доказывает оценку (6.1) с постоянной $C^{(0)} := (c_\Omega c'_\Omega)^{1/2} M$.

Далее, в силу леммы 6.1 имеем

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{D}(\Lambda^\varepsilon \mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2\varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} + 2\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \\ &\leqslant 2\beta_1 \varepsilon^{-2} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} + 2(1+\beta_2) \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Из (6.7) (с заменой $\mathbf{u}$ на производные $\partial_j \mathbf{u}$) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant c_\Omega c'_\Omega M^2 \|\mathbf{u}\|^2_{H^{l}(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m). \tag{6.9}$$

В итоге из (6.7)–(6.9) вытекает неравенство (6.2) с постоянными $C^{(1)} := (2\beta_1)^{1/2}$ и $C^{(2)} := M(3+2\beta_2)^{1/2}(c_\Omega c'_\Omega)^{1/2}$. $\square$

Используя оператор продолжения $P_\mathcal{O}$, удовлетворяющий оценкам (1.46), из леммы 6.3(1°) выводим следующее утверждение.

Следствие 6.4. *Пусть выполнены условия леммы* 6.3. *Тогда оператор* $[\Lambda^\varepsilon]$ *непрерывно переводит* $H^{l-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$ *в* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, *причем*

$$\|[\Lambda^\varepsilon]\|_{H^{l-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C^{(0)} C_\mathcal{O}^{(l-1)}.$$

С учетом леммы 6.2 и оценки (1.34) следующее утверждение проверяется аналогично лемме 6.3.

Лемма 6.5. *Пусть матрица-функция* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ-*периодическое решение задачи* (1.33). *Пусть* $d \geqslant 3$ *и* $l = d/2$.
1°. *При* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *для* $\mathbf{u} \in H^{l-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *справедливо включение* $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и оценка*

$$\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{C}^{(0)} \|\mathbf{u}\|_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}.$$

2°. *При* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *для* $\mathbf{u} \in H^{l}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *справедливы включение* $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и оценка*

$$\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon \mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{C}^{(1)} \varepsilon^{-1} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{C}^{(2)} \|\mathbf{u}\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}.$$

Здесь постоянные $\widetilde{C}^{(0)} := (c_\Omega c'_\Omega)^{1/2}\widetilde{M}$, $\widetilde{C}^{(1)} := (2\widetilde{\beta}_1)^{1/2}$ *и* $\widetilde{C}^{(2)} := \sqrt{2}(\widetilde{\beta}_2 + 1)^{1/2}(c_\Omega c'_\Omega)^{1/2}\widetilde{M}$ *зависят только от исходных данных* (1.9).

Применяя оператор продолжения (1.45), из леммы 6.5(1°) выводим следствие.

Следствие 6.6. *В условиях леммы* 6.5 *оператор* $[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]$ *непрерывно переводит* $H^{l-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *в* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, *причем*

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\|_{H^{l-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}^{(0)} C_{\mathcal{O}}^{(l-1)}.$$

7 Устранение сглаживающего оператора в случае достаточно гладкой границы

7.1 Доказательство леммы 2.9

Пусть выполнены условия леммы 2.9. Пусть $\mathbf{u}_0$ — функция (2.3), где $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Положим $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) = P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$. В соответствии с (2.22) и (2.32) имеем

$$\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} = \big(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\big)\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t), \tag{7.1}$$

$$\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} = \big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)\mathbf{u}_0(\cdot,t). \tag{7.2}$$

Требуется оценить величину

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|\Lambda^\varepsilon\big((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ + \|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{7.3}$$

В силу леммы 2.8 при сделанных предположениях заведомо выполнено $\mathbf{u}_0 \in H^{l+1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, а тогда $\widetilde{\mathbf{u}}_0 \in H^{l+1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Это дает возможность применить лемму 6.3(2°) для оценки первого слагаемого в правой части (7.3):

$$\begin{aligned}\|\Lambda^\varepsilon\big((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(1)}\varepsilon^{-1}\|\big((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ + C^{(2)}\|\big((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}, \quad l = d/2.\end{aligned} \tag{7.4}$$

Первый член в правой части (7.4) оценим с помощью предложения 1.1, а также (1.3), (1.43), (1.46), (2.3) и (2.8):

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}\|\big((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant r_1\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant r_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(2)}\|\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant C^{(3)}t^{-1}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{7.5}$$

где $C^{(3)} := r_1 \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widetilde{c} \|f\|_{L_\infty}$.

Для оценки второго члена в правой части (7.4) применим (1.2) и (1.3):

$$\begin{aligned} \|\big((S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2\alpha_1^{1/2} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{7.6}$$

В силу (1.43), (1.46), (2.3) и леммы 2.8 имеем

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C_{\mathcal{O}}^{(l+1)} \|\mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{H^{l+1}(\mathcal{O})} \\ &\leqslant C_{\mathcal{O}}^{(l+1)} \widehat{\mathrm{C}}_{l+1} \|f\|_{L_\infty}^2 t^{-(l+1)/2} e^{-c_\flat t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Из (7.6) и (7.7) следует оценка

$$\|\big((S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(4)} t^{-(l+1)/2} e^{-c_\flat t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.8}$$

где $C^{(4)} := 2\alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(l+1)} \widehat{\mathrm{C}}_{l+1} \|f\|_{L_\infty}^2$.

Теперь оценим второй член в правой части (7.3) на основании леммы 6.5(2°):

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon \big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \widetilde{C}^{(1)} \varepsilon^{-1} \|(S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \widetilde{C}^{(2)} \|(S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}, \quad l = d/2. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Первое слагаемое в правой части (7.9) оценим с помощью предложения 1.1, (1.43), (1.46), (2.3), (2.8):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \|(S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant r_1 \|\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant r_1 C_{\mathcal{O}}^{(2)} \|\mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant C^{(5)} t^{-1} e^{-c_\flat t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

где $C^{(5)} := r_1 C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widetilde{c} \|f\|_{L_\infty}$. Второе слагаемое в (7.9) оценим на основании (1.2) и (7.7):

$$\begin{aligned} \|(S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\|\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C^{(6)} t^{-(l+1)/2} e^{-c_\flat t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{7.11}$$

где $C^{(6)} := 2 C_{\mathcal{O}}^{(l+1)} \widehat{\mathrm{C}}_{l+1} \|f\|_{L_\infty}^2$.

В итоге соотношения (7.3)–(7.5), (7.8)–(7.11) приводят к неравенству

$$\|\mathcal{K}_D(t; \varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_D^0(t; \varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant (C^{(7)} t^{-1} + C^{(8)} t^{-(l+1)/2}) e^{-c_\flat t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $l = d/2$, $C^{(7)} := C^{(1)} C^{(3)} + \widetilde{C}^{(1)} C^{(5)}$ и $C^{(8)} := C^{(2)} C^{(4)} + \widetilde{C}^{(2)} C^{(6)}$. Тем самым установлена оценка (2.36) с постоянной $\widehat{\mathcal{C}}_d := \max\{C^{(7)}; C^{(8)}\}$. $\square$

7.2 Доказательство теоремы 2.10

Неравенство (2.37) непосредственно следует из (2.24) и (2.36). При этом $\mathcal{C}_d := 2(\widehat{\mathcal{C}}_d + C_{16})$. Мы учли, что при $t > 1$ член εt^{-1} оценивается через $\varepsilon^{1/2} t^{-3/4}$, а при $t \leqslant 1$ не превосходит $\varepsilon t^{-d/4-1/2}$, так как $d \geqslant 3$.

Проверим (2.38). Из (2.37) с учетом (1.4) следует оценка

$$\Big\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Big(f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon} t} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 - \varepsilon \big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon \big) f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 \Big) \Big\|_{L_2 \to L_2} \\ \leqslant \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}_d (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-d/4-1/2}) e^{-c_\flat t/2}. \tag{7.12}$$

Имеем

$$\varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon \big) f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 = g^\varepsilon \Big((b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon + \big(b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda} \big)^\varepsilon \Big) f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 \\ + \varepsilon \sum_{k,j=1}^d g^\varepsilon b_k \Lambda^\varepsilon b_j D_k D_j f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^d g^\varepsilon b_j \widetilde{\Lambda}^\varepsilon D_j f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0. \tag{7.13}$$

Норма второго слагаемого в правой части (7.13) оценивается с помощью (1.4), (1.43), леммы 2.8 и следствия 6.4:

$$\varepsilon \Big\| \sum_{k,j=1}^d g^\varepsilon b_k \Lambda^\varepsilon b_j D_k D_j f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 \Big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C^{(9)} \varepsilon t^{-(l+1)/2} e^{-c_\flat t/2}, \tag{7.14}$$

где $l = d/2$ и $C^{(9)} := \alpha_1 d C^{(0)} C_{\mathcal{O}}^{(l-1)} \widehat{\mathrm{C}}_{l+1} \|g\|_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty}$.

Третье слагаемое в правой части (7.13) оценивается на основании (1.4), (1.43), леммы 2.8 и следствия 6.6:

$$\varepsilon \Big\| \sum_{j=1}^d g^\varepsilon b_j \widetilde{\Lambda}^\varepsilon D_j f_0 e^{-\widetilde{B}^0_D t} f_0 \Big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C^{(10)} \varepsilon t^{-(l+1)/2} e^{-c_\flat t/2}, \tag{7.15}$$

где $l = d/2$ и $C^{(10)} := (d\alpha_1)^{1/2} \widetilde{C}^{(0)} C_{\mathcal{O}}^{(l-1)} \widehat{\mathrm{C}}_{l+1} \|g\|_{L_\infty} \|f\|^2_{L_\infty}$. Теперь из соотношений (7.12)–(7.15) вытекает неравенство (2.38) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}_d := \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}_d + C^{(9)} + C^{(10)}$. $\square$

8 Устранение сглаживателя в строго внутренней подобласти

8.1 Одно свойство оператора S_ε

Перейдем к рассмотрениям, связанным с оценками в строго внутренней подобласти. Начнем с одного простого свойства оператора S_ε.

Пусть $\mathcal{O}'$ — строго внутренняя подобласть области $\mathcal{O}$, и пусть δ определено в (1.61). Введем обозначения

$$\mathcal{O}'' := \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}; \partial\mathcal{O}\} > \delta/2\}, \quad \mathcal{O}''' := \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}; \partial\mathcal{O}\} > \delta/4\}.$$

Лемма 8.1. *Пусть S_ε — оператор* (1.1). *Пусть $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$. Пусть $\mathbf{v} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, причем $\mathbf{v} \in H^\sigma(\mathcal{O}'''; \mathbb{C}^m)$ при некотором $\sigma \in \mathbb{Z}_+$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant (4r_1)^{-1}\delta$ выполнено $S_\varepsilon \mathbf{v} \in H^\sigma(\mathcal{O}''; \mathbb{C}^m)$ и*

$$\|S_\varepsilon \mathbf{v}\|_{H^\sigma(\mathcal{O}'')} \leqslant \|\mathbf{v}\|_{H^\sigma(\mathcal{O}''')}.$$

Доказательство. В соответствии с (1.1) имеем

$$\begin{aligned}\|S_\varepsilon \mathbf{v}\|^2_{H^\sigma(\mathcal{O}'')} &= |\Omega|^{-2} \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} \int_{\mathcal{O}''} d\mathbf{x} \left| \int_\Omega \mathbf{D}^\alpha \mathbf{v}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})\, d\mathbf{z} \right|^2 \\ &\leqslant |\Omega|^{-1} \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} \int_{\mathcal{O}''} d\mathbf{x} \int_\Omega |\mathbf{D}^\alpha \mathbf{v}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})|^2\, d\mathbf{z}.\end{aligned} \tag{8.1}$$

Поскольку $0 < \varepsilon r_1 \leqslant \delta/4$, при $\mathbf{x} \in \mathcal{O}''$ и $\mathbf{z} \in \Omega$ выполнено $\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z} \in \mathcal{O}'''$. Тогда, меняя порядок интегрирования в (8.1), получаем

$$\|S_\varepsilon \mathbf{v}\|^2_{H^\sigma(\mathcal{O}'')} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant\sigma} \int_{\mathcal{O}'''} |\mathbf{D}^\alpha \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} = \|\mathbf{v}\|^2_{H^\sigma(\mathcal{O}''')}.$$

□

8.2 Срезка $\chi(\mathbf{x})$

Фиксируем гладкую срезку $\chi(\mathbf{x})$ такую, что

$$\begin{aligned}&\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad 0 \leqslant \chi(\mathbf{x}) \leqslant 1; \quad \chi(\mathbf{x}) = 1,\ \mathbf{x} \in \mathcal{O}'; \\ &\operatorname{supp}\chi \subset \mathcal{O}''; \quad |\mathbf{D}^\alpha \chi(\mathbf{x})| \leqslant \kappa_\sigma \delta^{-\sigma}, \quad |\alpha| = \sigma, \quad \sigma \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{8.2}$$

Постоянные κ_σ зависят только от d, σ и от области $\mathcal{O}$.

Лемма 8.2. *Пусть функция $\chi(\mathbf{x})$ подчинена условиям* (8.2). *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$.*
1°. *Для любой функции $\mathbf{v} \in H^k(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ справедливо неравенство*

$$\|\chi\mathbf{v}\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_k^{(11)} \sum_{j=0}^{k} \delta^{-(k-j)} \|\mathbf{v}\|_{H^j(\mathcal{O}'')}, \tag{8.3}$$

где постоянная $C_k^{(11)}$ зависит лишь от d, k и от области $\mathcal{O}$.
2°. *Для любой функции $\mathbf{v} \in H^{k+1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ выполнена оценка*

$$\begin{aligned} \|\chi\mathbf{v}\|_{H^{k+1/2}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{k+1/2}^{(11)} &\left(\sum_{j=0}^{k+1} \delta^{-(k+1-j)} \|\mathbf{v}\|_{H^j(\mathcal{O}'')} \right)^{1/2} \\ &\times \left(\sum_{i=0}^{k} \delta^{-(k-i)} \|\mathbf{v}\|_{H^i(\mathcal{O}'')} \right)^{1/2}, \end{aligned} \tag{8.4}$$

где постоянная $C_{k+1/2}^{(11)}$ зависит лишь от d, k и от области $\mathcal{O}$.

Доказательство. Неравенство (8.3) вытекает из формулы Лейбница для производных произведения $\chi\mathbf{v}$ и из оценок производных срезки χ (см. (8.2)). Для проверки (8.4) нужно дополнительно учесть неравенство

$$\|\mathbf{w}\|^2_{H^{k+1/2}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\mathbf{w}\|_{H^{k+1}(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{w}\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{w} \in H^{k+1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m).$$

$\square$

8.3 Доказательство леммы 2.16

Пусть выполнены условия леммы 2.16. Пусть $\mathbf{u}_0$ — функция (2.3) при $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Согласно (1.43) и (2.7) выполнено

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_3 \|f\|_{L_\infty} t^{-1/2} e^{-c_\flat t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.5}$$

В силу (1.43) и (2.8) имеем

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{c} \|f\|_{L_\infty} t^{-1} e^{-c_\flat t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.6}$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_\mathcal{O}\mathbf{u}_0$. Соотношения (7.1), (7.2) сохраняют силу. Требуется оценить величину

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant{}& \|\Lambda^\varepsilon \chi\big((S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon \chi\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Напомним (см. обсуждение в п. 2.10), что $\mathbf{u}_0(\cdot, t) \in H^\sigma(\mathcal{O}'''; \mathbb{C}^n)$ при любом $\sigma \in \mathbb{Z}_+$. Тогда функция $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)$ удовлетворяет условиям леммы 8.1 при любом $\sigma \in \mathbb{Z}_+$. Следовательно, $(S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0)(\cdot, t) \in H^\sigma(\mathcal{O}''; \mathbb{C}^n)$ при $0 < \varepsilon \leqslant (4r_1)^{-1}\delta$. Это дает возможность применить лемму 6.3(2°) для оценки первого слагаемого в правой части (8.7):

$$\begin{aligned} \|\Lambda^\varepsilon \chi\big((S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot, t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C^{(1)} \varepsilon^{-1} \|\chi\big((S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ C^{(2)} \|\chi\big((S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}, \quad l = d/2. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Первый член в правой части (8.8) с учетом соотношения $0 \leqslant \chi(\mathbf{x}) \leqslant 1$ оценивается на основании неравенства (7.5) (которое справедливо без предположения высокой гладкости границы):

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \|\chi\big((S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \varepsilon^{-1} \|\big((S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot, t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C^{(3)} t^{-1} e^{-c_\flat t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Перейдем к рассмотрению второго слагаемого в правой части (8.8). Очевидно,

$$\begin{aligned} \|\chi\big((S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|\chi(S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0)(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|\chi b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Для оценки второго члена справа в (8.10) применим лемму 8.2 и (1.4). В случае целого $l = d/2$ (т. е. четной размерности d) имеем

$$\|\chi b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_l^{(11)} (d\alpha_1)^{1/2} \sum_{j=0}^{l} \delta^{-(l-j)} \|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{H^j(\mathcal{O}'')}. \tag{8.11}$$

В случае полуцелого $l = d/2 = k + 1/2$ (т. е. нечетной размерности d) выполнено

$$\begin{aligned} \|\chi b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C_l^{(11)} (d\alpha_1)^{1/2} \Big(\sum_{j=0}^{k+1} \delta^{-(k+1-j)} \|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{H^j(\mathcal{O}'')}\Big)^{1/2} \\ &\times \Big(\sum_{\sigma=0}^{k} \delta^{-(k-\sigma)} \|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{H^\sigma(\mathcal{O}'')}\Big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Норма $\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оценена в (8.5) и (8.6). В силу (1.43), (2.3) и (2.45) (с заменой $\mathcal{O}'$ на $\mathcal{O}''$)

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^\sigma(\mathcal{O}'')} \leqslant \mathrm{C}'_{\sigma+1}\|f\|^2_{L_\infty} 2^\sigma t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{\sigma/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.13}$$

$\sigma \geqslant 2$. Используя (8.5), (8.6) и (8.11)–(8.13), приходим к неравенству

$$\|\chi b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(12)}t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.14}$$

Постоянная $C^{(12)}$ зависит только от исходных данных (1.9).

Для оценки первого члена справа в (8.10) применим леммы 8.1 и 8.2. Считаем, что $0<\varepsilon\leqslant(4r_1)^{-1}\delta$. Учитывая (1.4), в случае целого l имеем

$$\begin{aligned}\|\chi(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C_l^{(11)}\sum_{\sigma=0}^{l}\delta^{-(l-\sigma)}\|(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)(\cdot,t)\|_{H^\sigma(\mathcal{O}'')}\\ &\leqslant C_l^{(11)}\sum_{\sigma=0}^{l}\delta^{-(l-\sigma)}\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^\sigma(\mathcal{O}''')}\\ &\leqslant C_l^{(11)}(d\alpha_1)^{1/2}\sum_{\sigma=0}^{l}\delta^{-(l-\sigma)}\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^\sigma(\mathcal{O}''')}.\end{aligned} \tag{8.15}$$

Нормы $\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оценены в (8.5), (8.6). В силу (1.43), (2.3) и (2.45) (с заменой $\mathcal{O}'$ на $\mathcal{O}'''$)

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^\sigma(\mathcal{O}''')} \leqslant \mathrm{C}'_{\sigma+1}\|f\|^2_{L_\infty} 4^\sigma t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{\sigma/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.16}$$

$\sigma \geqslant 2$. Из (8.5), (8.6), (8.15) и (8.16) вытекает оценка

$$\|\chi(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(13)}t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.17}$$

Постоянная $C^{(13)}$ зависит только от исходных данных (1.9). Оценка (8.17) в случае полуцелого l проверяется аналогично. На основании (8.8)–(8.10), (8.14) и (8.17) получаем оценку для первого слагаемого в правой части (8.7):

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^\varepsilon\chi\big((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\quad\leqslant C^{(14)}\big(t^{-1}+t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4}\big)e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{8.18}$$

где $C^{(14)} := \max\{C^{(1)}C^{(3)}; C^{(2)}(C^{(12)} + C^{(13)})\}$.

Второе слагаемое в правой части (8.7) оценим с помощью леммы 6.5(2°):

$$\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon \chi\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{C}^{(1)}\varepsilon^{-1}\|\chi\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{C}^{(2)}\|\chi\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}, \quad l = d/2. \tag{8.19}$$

Чтобы оценить первое слагаемое в правой части (8.19), воспользуемся (8.2) и неравенством (7.10) (которое справедливо без предположения высокой гладкости границы):

$$\begin{aligned}\varepsilon^{-1}&\|\chi\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \varepsilon^{-1}\|\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-1}\|(\mathbf{D}\chi)\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C^{(5)}t^{-1}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \varepsilon^{-1}\kappa_1\delta^{-1}\|(S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

В силу предложения 1.1, (1.43), (1.46), (2.3) и (2.7) отсюда следует, что

$$\varepsilon^{-1}\|\chi\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(15)}(\delta^{-1}t^{-1/2} + t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.20}$$

где $C^{(15)} := \max\{C^{(5)}; \kappa_1 r_1 C^{(1)}_{\mathcal{O}} c_3\|f\|_{L_\infty}\}$.

В случае целого $l = d/2$ второе слагаемое в правой части (8.19) оценивается по аналогии с (8.15):

$$\|\chi\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2C_l^{(11)}\sum_{\sigma=0}^{l}\delta^{-(l-\sigma)}\|\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^\sigma(\mathcal{O}''')}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant (4r_1)^{-1}\delta. \tag{8.21}$$

Норма $\mathbf{u}_0$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оценивается с помощью леммы 2.1, (1.43) и (2.3). При $\sigma \geqslant 3$ норма $\|\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^\sigma(\mathcal{O}''')}$ оценивается согласно (2.45) (с заменой $\mathcal{O}'$ на $\mathcal{O}'''$):

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^\sigma(\mathcal{O}''')} &\leqslant \|\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^{\sigma+1}(\mathcal{O}''')}\\ &\leqslant \mathrm{C}'_{\sigma+1}\|f\|^2_{L_\infty}4^\sigma t^{-1/2}(\delta^{-2} + t^{-1})^{\sigma/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

С учетом этих соображений из (8.21) вытекает неравенство

$$\|\chi\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(16)}t^{-1/2}(\delta^{-2} + t^{-1})^{d/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.22}$$

с постоянной $C^{(16)}$, зависящей только от исходных данных (1.9). Оценка (8.22) в случае полуцелого l проверяется аналогично. В итоге из (8.19), (8.20) и (8.22) получаем оценку для второго слагаемого в правой части (8.7):

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon \chi\big((S_\varepsilon - I)\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{C}^{(1)}C^{(15)}(\delta^{-1}t^{-1/2}+t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad+\widetilde{C}^{(2)}C^{(16)}t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{8.23}$$

Объединяя (8.7), (8.18) и (8.23), заключаем, что справедливо неравенство (2.47) с постоянной $\mathrm{C}''_d := C^{(14)} + \widetilde{C}^{(1)}C^{(15)} + \widetilde{C}^{(2)}C^{(16)}$. Мы учли, что член $\delta^{-1}t^{-1/2}$ мажорируется членом $t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4}$. $\square$

8.4 Доказательство теоремы 2.17

Неравенство (2.48) непосредственно следует из (2.44) и (2.47), при этом $\mathrm{C}_d := \max\{C_{20}; C_{21}\} + \mathrm{C}''_d$.

Проверим (2.49). Из (2.48) с учетом (1.4) и (2.32) следует оценка

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big(f^\varepsilon e^{-\widetilde{B}_{D,\varepsilon}t}(f^\varepsilon)^* - (I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)f_0e^{-\widetilde{B}^0_Dt}f_0\big)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')}\\ &\quad\leqslant \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathrm{C}_d\varepsilon h_d(\delta;t)e^{-c_\flat t/2}.\end{aligned} \tag{8.24}$$

Воспользуемся тождеством (7.13). Норма второго слагаемого в правой части (7.13) оценивается с помощью (1.4), (8.2) и леммы 6.3(1°):

$$\begin{aligned}&\varepsilon\Big\|\sum_{k,j=1}^d g^\varepsilon b_k\Lambda^\varepsilon b_jD_kD_jf_0e^{-\widetilde{B}^0_Dt}f_0\Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')}\\ &\leqslant \varepsilon\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\sum_{k,j=1}^d\|\Lambda^\varepsilon b_j\chi D_kD_jf_0e^{-\widetilde{B}^0_Dt}f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \varepsilon\alpha_1\|g\|_{L_\infty}C^{(0)}\sum_{k,j=1}^d\|\chi D_kD_jf_0e^{-\widetilde{B}^0_Dt}f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{l-1}(\mathbb{R}^d)},\quad l=d/2.\end{aligned} \tag{8.25}$$

Далее применим лемму 8.2. В случае целого l с учетом (1.43) получаем

$$\begin{aligned}&\sum_{k,j=1}^d\|\chi D_kD_jf_0e^{-\widetilde{B}^0_Dt}f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant dC^{(11)}_{l-1}\|f\|_{L_\infty}\sum_{i=0}^{l-1}\delta^{-(l-1-i)}\|f_0e^{-\widetilde{B}^0_Dt}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{i+2}(\mathcal{O}'')}.\end{aligned} \tag{8.26}$$

Норма $\|f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}$ оценена в (2.8). При $i \geqslant 1$ в силу (1.43) и (2.45) (с заменой $\mathcal{O}$ на $\mathcal{O}''$) имеем

$$\|f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{i+2}(\mathcal{O}'')} \leqslant \mathrm{C}'_{i+2}\|f\|_{L_\infty} 2^{i+1} t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{(i+1)/2} e^{-c_\flat t/2}. \tag{8.27}$$

Из (2.8) и (8.25)–(8.27) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\varepsilon \Big\| \sum_{k,j=1}^{d} g^\varepsilon b_k \Lambda^\varepsilon b_j D_k D_j f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0 \Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \\ &\leqslant C^{(17)} \varepsilon t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4} e^{-c_\flat t/2}, \end{aligned} \tag{8.28}$$

где постоянная $C^{(17)}$ зависит только от исходных даных (1.9). В случае полуцелого l неравенство (8.28) проверяется с использованием леммы 8.2(2°).

Третье слагаемое в правой части (7.13) оценивается аналогично на основании (1.4), (8.2), леммы 6.5(1°) и леммы 8.2. В результате получаем

$$\varepsilon \sum_{j=1}^{d} \|g^\varepsilon b_j \widetilde{\Lambda}^\varepsilon D_j f_0 e^{-\widetilde{B}_D^0 t} f_0\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant C^{(18)} \varepsilon t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4} e^{-c_\flat t/2}. \tag{8.29}$$

Здесь постоянная $C^{(18)}$ зависит только от исходных данных (1.9).

В итоге соотношения (1.27), (7.13), (8.24), (8.28) и (8.29) влекут неравенство (2.49) с постоянной $\widetilde{\mathrm{C}}_d := \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathrm{C}_d + C^{(17)} + C^{(18)}$. □

Список литературы

[AlCPiSiVa] Allaire G., Capdeboscq Y., Piatnitski A., Siess V., Vanninathan M., *Homogenization of periodic systems with large potentials*, Arch. Rational Mech. Anal. **174** (2004), no. 2, 179–220.

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLPap] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical* *physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[Bo] Борисов Д. И., *Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 2, 19–42.

[ChKonLe] Choe J. H., Kong K.-B., Lee Ch.-O., *Convergence in L^p space for the homogenization problems of elliptic and parabolic equations in the plane*, J. Math. Anal. Appl. **287** (2003), no. 2, 321–336.

[GeS] Geng J., Shen Zh., *Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent periodic coefficients*, J. Funct. Anal. **272** (2017), no. 5, 2092–2113.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[Zh1] Жиков В. В., *Асимптотическое поведение и стабилизация решений параболического уравнения второго порядка с младшими членами*, Тр. ММО **46**, Издательство Московского университета, М., 1983, 69–98.

[Zh2] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН **71 (429)** (2016), вып. 3, 27–122.

[Ka] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[K] Козлов С. М., *Приводимость квазипериодических дифференциальных операторов и усреднение*, Тр. ММО **46**, Издательство Московского университета, М., 1983, 99–123.

[KoE] Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д., *Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач*, Докл. АН СССР **246** (1979), вып. 4, 812–815.

[LaSoU] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.

[LaU] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

[MaSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1986.

[McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[M] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), вып. 6, 125–177.

[MSu1] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 8, 1736–1775.

[MSu2] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Two-parametric error estimates in homogenization of second order elliptic systems in* $\mathbb{R}^d$, Appl. Anal. **95** (2016), no. 7, 1413–1448.

[MSu3] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: Two-parametric error estimates*, arXiv:1702.00550v4 (2017).

[MSu4] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение задачи Дирихле для эллиптических и параболических систем с периодическими коэффициентами*, Функц. анализ и его прил. **51** (2017), вып. 3, в печати.

[MoV] Moskow Sh., Vogelius M., *First-order corrections to the homogenised eigenvalues of a periodic composite medium. A convergence proof*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), no. 6, 1263–1299.

[PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.

[R] Rychkov V. S., *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. **60** (1999), 237–257.

[Sa] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, pp. 201–233.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Math. Model. Nat. Phenom. **5**, no. 4 (2010), 390–447.

[Su4] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго* *порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 1, 108–222.

[Su5] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463-476.

[Su6] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453-3493.

[Su7] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), вып. 4, 87–166.

[Xu1] Xu Q., *Uniform regularity estimates in homogenization theory of elliptic system with lower order terms*, J. Math. Anal. Appl. **438** (2016), no. 2, 1066–1107.

[Xu2] Xu Q., *Uniform regularity estimates in homogenization theory of elliptic systems with lower order terms on the Neumann boundary problem*, J. Diff. Equ. **261** (2016), no. 8, 4368—4423.

[Xu3] Xu Q., *Convergence rates for general elliptic homogenization problems in Lipschitz domains*, SIAM J. Math. Anal. **48** (2016), no. 6, 3742–3788.

[XuZ] Xu Q., Zhou Sh., *Quantitative estimates in homogenization of parabolic systems of elasticity in Lipschitz cylinders*, arXiv: 1705.01479 (2017).