ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 05/2017

ОЦЕНКА НОРМЫ ФУНКЦИИ, ОРТОГОНАЛЬНОЙ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫМ, ЧЕРЕЗ ВТОРОЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ. ПОДРОБНОЕ ИСЗОЖЕНИЕ

Л. Н. Ихсанов

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетский пр. д. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия

e-mail: lv.ikhs@gmail.com

3 июля 2017 г.

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена задаче нахождения константы

$$W_2^* = \sup_{f\in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\,1)},$$

где F_0 – пространство ограниченных функций, обладающих свойством

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Предложенный подход к решению позволил значительно улучшить оценку W_2^* по отношению к известной ранее, а также сузить круг поиска по функциональному семейству.

Доказано, что искомая константа также является наилучшей в одном неравенстве типа Джексона.

Ключевые слова: второй модуль непрерывности, неравенство типа Джексона

1 Введение

1.1 Постановка задачи

Обозначим через F^0 пространство измеримых ограниченных функций, обладающих свойством

$$\int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx = 0 \qquad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Функции предполагаются определенными в любой точке и вещественнозначными. Введём в пространстве F^0 норму

$$\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f|. \tag{1.2}$$

Напомним, что второй модуль непрерывности функции f с шагом h определяется как

$$\omega_2(f,\, h) = \sup_{|t|\le h} \|f(x-t) - 2f(x) + f(x+t)\|\,.$$

Здесь же отметим несколько очевидных свойств $\omega_2(f,\, h)$, которые нам скоро понадобятся:

$$\omega_2(f,\, h) \le \omega_2(g,\, h) + 4\|f-g\|, \tag{1.3}$$

$$\omega_2(\alpha f,\, h) = |\alpha|\omega_2(f,\, h), \tag{1.4}$$

$$\omega_2(f(\cdot+1),\, h) = \omega_2(f(\cdot),\, h), \tag{1.5}$$

$$\omega_2(f(-\cdot),\, h) = \omega_2(f(\cdot),\, h). \tag{1.6}$$

Обозначим через W_2^* точную константу в неравенстве

$$\|f\| \le K\cdot\omega_2(f,\, 1) \tag{1.7}$$

для пространства F^0.

В [1] Ю. Крякин установил, что

$$0.5058 \le W_2^* \le 0.6244.$$

При этом им было показано, что можно ограничиться рассмотрением функций f, для которых

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f| = \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |f|.$$

Доказательство оценки снизу $(0.5810 < W_2^*)$ в [1] содержит ошибку, поэтому мы заменили эту оценку на ту, которая была установлена на самом деле.

Им также рассматривалась аналогичная задача для старших модулей непрерывности. Наилучшие известные на данный момент результаты в этом направлении получены в [2].

Пусть

$$F_b = \left\{ f \in F^0 \middle| f\left(\frac{1+b}{2}\right) = \|f\| = 1 \right\}, \quad F^* = \bigcup_{b\in[0,1]} F_b.$$

В настоящей работе исследуется поведение величины $\inf\limits_{f\in F_b} \omega_2(f,\,1)$ при $b \in [0,\,1]$. Это мотивировано следующими результатами.

Утверждение 1.

$$W_2^* = \sup_{f\in F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\,1)} = \frac{1}{\inf\limits_{f\in F^*} \omega_2(f,\,1)}.$$

Proof. Покажем, что

$$\sup_{f\in F^0} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\,1)} = \sup_{f\in F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\,1)}.$$

По определению, для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся точка $x_n \in \mathbb{R}$ такая, что

$$|f(x_n)| > \|f\| - \frac{1}{n}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $f(x_n) > 0$. Рассмотрим

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_n, \\ \|f\|, & x = x_n \end{cases}$$

В силу (1.3)

$$\omega_2(f_n,\,1) \le \omega_2(f,\,1) + \frac{1}{n},$$

значит, нам достаточно рассмотреть функции, достигающие своей нормы.

В силу (1.4) достаточно ограничиться случаем $f \in F_b$, $b \in \mathbb{R}$.

Наконец, в виду (1.5) и (1.6) можно считать $b \in [0,\,1]$. □

Обозначим через F пространство ограниченных измеримых функций, обладающих свойством

$$\int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

с нормой, определённой выше.

Утверждение 2. *Пусть $f \in F$, $E_0(f)$ – наилучшее приближение f постоянными, J_2^* – точная константа в неравенстве типа Джексона*

$$E_0(f) \le K \cdot \omega_2(f,\,1).$$

Тогда

$$J_2^* = W_2^*.$$

Proof. Пусть $f \in F^*$,

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x), & x \le 1, \\ \frac{n-k}{n} f(x), & x \in (k,\, k+1],\ k = 1..n \\ 0, & x > n+1. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\tilde{f}_n = f_n(x) - f_n(2n+2-x), \quad \tilde{F} = \left\{ \tilde{f}_n \middle| f \in F^*,\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Несложно видеть, что

$$E_0(\tilde{f}_n) = \|\tilde{f}_n\| = \|f\| = 1, \quad \omega_2(\tilde{f}_n,\, 1) \le \omega_2(f) + \frac{4}{n}.$$

Поэтому

$$W_2^* = \sup_{F^*} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)} = \sup_{\tilde{F}} \frac{\|f\|}{\omega_2(f,\, 1)} = \sup_{\tilde{F}} \frac{E_0(f)}{\omega_2(f,\, 1)} \le \sup_{F} \frac{E_0(f)}{\omega_2(f,\, 1)} = J_2^*.$$

С другой стороны, если $f \in F$, то $(f - \int\limits_0^1 f(x)\,dx) \in F^0$, поэтому

$$E_0(f) \le \|f - \int\limits_0^1 f(x)\,dx\| \le W_2^* \cdot \omega_2(f,\, 1),$$

откуда следует, что

$$J_2^* \le W_2^*.$$

□

1.2 Основные результаты

Для формулировки теорем нам понадобится функция

$$q(b) = \begin{cases} \frac{96}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55}, & b \in \left[0,\, \frac{1}{3}\right], \\ \frac{8(11b^2 + 66b - 13)}{3b^4 - 69b^3 + 17b^2 + 385b - 80}, & b \in \left[\frac{1}{3},\, 1\right]. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть $f \in F_b$. Тогда*

$$q(b) \le \omega_2(f,\, 1).$$

Функция $q(b)$ непрерывна на отрезке $[0,\, 1]$, имеет на этом отрезке ровно два интервала монотонности и достигает минимума между точками 0.43 и 0.44, причём

$$q(b) > 1.6721.$$

После доказательства теоремы 1 мы предлагаем функцию из множества F^* с вторым модулем непрерывности равным $\frac{37861}{20548} - \frac{37\sqrt{8545}}{20548} < 1.6762$. Таким образом

$$1.6721 \le q(b) \le \inf_{f \in F^*} \omega_2(f,\, 1) \le 1.6762,$$

откуда, согласно утверждению 1, следует

Теорема 2.
$$0.5965 \le W_2^* \le 0.5981,$$

причём

$$W_2^* = \sup_{b \in [b_0,\, b_1]} \frac{1}{\inf\limits_{f \in F_b} \omega_2(f,\, 1)},$$

где точки $\frac{1}{3} < b_0 < b_1 < 1$ *являются корнями уравнения*

$$q(b) = \frac{37861}{20548} - \frac{37}{20548}\sqrt{8545}.$$

2 Несколько лемм, а также о методе в целом

Для среднего значения функции на отрезке $\left[x - \frac{r}{2},\, x + \frac{r}{2}\right]$, где $r > 0$, мы используем обозначение

$$f_r(x) = \frac{1}{r} \int\limits_{x-r/2}^{x+r/2} f(s)\, ds.$$

При этом считаем $f_0(x) = f(x)$.

Для доказательства теоремы 1 мы сформулируем ряд неравенств, связывающих средние значения функции $f \in F_b$ с её вторым модулем непрерывности. Затем мы поставим задачу линейного программирования

$$\omega_2(f,\, 1) \to \inf,$$

относительно этих средних и величины $\omega_2(f,\, 1)$, считая их при этом абстрактными переменными.

Следующая лемма фиксирует простейшие свойства функций из множества F_b.

Лемма 1. *Пусть* $f \in F_b$, $\tau,\, h \ge 0$. *Тогда*

$$f_{2\tau}\left(\frac{1+b}{2} - 2h\right) - 2f_\tau\left(\frac{1+b}{2} - h\right) + 1 \le \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right), \tag{2.1}$$

$$-f_\tau\left(\frac{1+b}{2} - h\right) - f_\tau\left(\frac{1+b}{2} + h\right) + 2 \le \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right), \tag{2.2}$$

$$-2f_{2\tau}\left(\frac{1+b}{2}\right)+2\le\omega_2\left(f,\,\frac{\tau}{2}\right), \tag{2.3}$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)+f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)+\frac{4}{1-b}\le\frac{2}{1-b}\cdot\omega_2(f,\,1). \tag{2.4}$$

Proof. Поскольку $f\left(\frac{1+b}{2}\right)=1$, неравенства (2.1) и (2.2) получаются интегрированием соответственно

$$f\left(\frac{1+b}{2}-2h+2\tau s\right)-2f\left(\frac{1+b}{2}-h+\tau s\right)+f\left(\frac{1+b}{2}\right)\le\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right)$$

и

$$-f\left(\frac{1+b}{2}-h+\tau s\right)-2f\left(\frac{1+b}{2}+h+\tau s\right)+f\left(\frac{1+b}{2}\right)\le\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right)$$

по $s\in\left[-\frac{1}{2},\,\frac{1}{2}\right]$.

Далее, (2.3) следует из (2.2), если заметить, что

$$2f_{2\tau}\left(\frac{1+b}{2}\right)=f_\tau\left(\frac{1+b}{2}-\frac{\tau}{2}\right)+f_\tau\left(\frac{1+b}{2}+\frac{\tau}{2}\right).$$

Наконец, согласно (2.3),

$$-2f_2\left(\frac{1+b}{2}\right)+2\le\omega_2(f,\,1),$$

и для доказательства (2.4) осталось заметить, что, с учётом (1.1)

$$2f_2\left(\frac{1+b}{2}\right)=\frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)+f_1\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1+b}{2}f_{\frac{1+b}{2}}\left(1+\frac{1+b}{4}\right)=$$
$$=\frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)-\frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right).$$

□

Более сложные результаты получается по следующей схеме: сперва выводится утверждение вида

$$\left|f_\tau(x)-2f_\sigma(y)+\sum_{i=1}^{n}\delta_i f_{\rho_k}(z_k)\right|\le\omega_2(f,\,h), \tag{2.5}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_i=1,\quad \delta_i>0,\quad x+\sum_{i=1}^{n}\delta_i z_k=2y.$$

Далее, если это требуется, полученное соотношение преобразуется с учётом (1.1). Встречающиеся в доказательствах системы уравнений решены при помощи программного пакета Maple.

Примечательно, что до определённого этапа в доказательствах не используется специфика рассматриваемых функций, иными словами, утверждения вида (2.5) могут быть верны для любой ограниченной измеримой функции. В ходе исследования был получен лишь ряд частных случаев. Дальнейшие исследования в этом направлении, по мнению автора, могут быть полезны для решения широкого круга задач.

Простейший случай формулы (2.5) даёт

Лемма 2. *Пусть* $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, h, τ, $\sigma \geq 0$. *Тогда*

$$\left|f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_{|2\sigma-\tau|}(a+h)\right| \leq \omega_2\left(f,\, h + \frac{|\sigma-\tau|}{2}\right).$$

Proof. Достаточно показать, что для любой функции f из $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$

$$f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_{|2\sigma-\tau|}(a+h) \leq \omega_2\left(f,\, h + \frac{|\sigma-\tau|}{2}\right).$$

Пусть

$$x(s) = a - \frac{\sigma}{2} + \sigma s, \quad t(s) = h + (\sigma-\tau)s - \frac{\sigma-\tau}{2}$$

Легко видеть, что для любого $s \in [0,1]$

$$f(x(s) - t(s)) - 2f(x(s)) + f(x(s)+t(s)) \leq \omega_2\left(f,\, h + \frac{|\sigma-\tau|}{2}\right).$$

Для завершения доказательства осталось проинтегрировать по $s \in [0,1]$. $\square$

Лемма 3. *Пусть* $f \in L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$, h, τ, $\sigma \geq 0$, *причём* $\tau \geq \sigma$. *Тогда*

$$|f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_\tau(a+h)| \leq \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right).$$

Proof. Достаточно показать, что для любой функции f из $L_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$

$$f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_\tau(a+h) \leq \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right).$$

В случае $\tau = \sigma$, требуемое неравенство

$$f_\sigma(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_\sigma(a+h) \leq \omega_2(f,\, h) \tag{2.6}$$

следует из леммы 2.

Пусть теперь $\tau > \sigma$. Введём следующие обозначения:

$$\mu = \frac{\tau-\sigma}{2}, \quad \nu = \frac{\tau+\sigma}{2}. \tag{2.7}$$

Снова пользуясь леммой 2, получаем

$$f_\nu\left(a - h - \frac{\mu}{2}\right) - 2f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a + \frac{\sigma}{4}\right) + f_\mu\left(a + h + \frac{\nu}{2}\right) \leq \omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right), \tag{2.8}$$

$$f_\mu\left(a-h+\frac{\nu}{2}\right)-2f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a+\frac{\sigma}{4}\right)+f_\nu\left(a+h-\frac{\mu}{2}\right)\le\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right), \quad (2.9)$$

$$f_\nu\left(a-h+\frac{\mu}{2}\right)-2f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a-\frac{\sigma}{4}\right)+f_\mu\left(a+h-\frac{\nu}{2}\right)\le\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right), \quad (2.10)$$

$$f_\mu\left(a-h-\frac{\nu}{2}\right)-2f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a-\frac{\sigma}{4}\right)+f_\nu\left(a+h+\frac{\mu}{2}\right)\le\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right), \quad (2.11)$$

Средние значения f связаны равенствами

$$f_\tau(a-h)=\frac{\mu}{\tau}f_\mu\left(a-h-\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\sigma}{\tau}f_\sigma(a-h)+\frac{\mu}{\tau}f_\mu(a-h+\frac{\nu}{2}), \quad (2.12)$$

$$f_\tau(a-h)=\frac{\mu}{\tau}f_\mu\left(a-h+\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\nu}{\tau}f_\nu\left(a-h-\frac{\mu}{2}\right), \quad (2.13)$$

$$f_\tau(a-h)=\frac{\mu}{\tau}f_\mu\left(a-h-\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\nu}{\tau}f_\nu\left(a-h+\frac{\mu}{2}\right), \quad (2.14)$$

$$f_\tau(a+h)=\frac{\mu}{\tau}f_\mu\left(a+h-\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\sigma}{\tau}f_\sigma(a+h)+\frac{\mu}{\tau}f_\mu(a+h+\frac{\nu}{2}), \quad (2.15)$$

$$f_\tau(a+h)=\frac{\mu}{\tau}f_\mu\left(a+h+\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\nu}{\tau}f_\nu\left(a+h-\frac{\mu}{2}\right), \quad (2.16)$$

$$f_\tau(a+h)=\frac{\mu}{\tau}f_\mu\left(a+h-\frac{\nu}{2}\right)+\frac{\nu}{\tau}f_\nu\left(a+h+\frac{\mu}{2}\right), \quad (2.17)$$

$$\frac{1}{2}f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a-\frac{\sigma}{4}\right)+\frac{1}{2}f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a+\frac{\sigma}{4}\right)=f_\sigma\left(a\right). \quad (2.18)$$

Поставим задачу линейного программирования:

$$f_\tau(a-h)+f_\tau(a+h)\to\sup$$

относительно величин

$$\begin{array}{llll}
f_\sigma(a-h), & f_\mu\left(a+h-\frac{\nu}{2}\right), & f_\nu\left(a+h-\frac{\mu}{2}\right), & f_\tau(a-h),\\
f_\sigma(a+h), & f_\mu\left(a-h-\frac{\nu}{2}\right), & f_\nu\left(a-h-\frac{\mu}{2}\right), & f_\tau(a+h),\\
f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a-\frac{\sigma}{4}\right), & f_\mu\left(a+h+\frac{\nu}{2}\right), & f_\nu\left(a+h+\frac{\mu}{2}\right), & \\
f_{\frac{\sigma}{2}}\left(a+\frac{\sigma}{4}\right), & f_\mu\left(a-h+\frac{\nu}{2}\right) & f_\nu\left(a-h+\frac{\mu}{2}\right), &
\end{array}$$

с ограничениями (2.6)–(2.18).

С учётом (2.7), двойственная задача

$$\begin{array}{lll}
a_1-\frac{\sigma}{\tau}c_1=0 & a_1-\frac{\sigma}{\tau}c_4=0, & 2a_2+2a_3-\frac{1}{2}c_7=0,\\
a_2-\frac{\nu}{\tau}c_2=0 & a_2-\frac{\mu}{\tau}c_4-\frac{\mu}{\tau}c_5=0, & 2a_4+2a_5-\frac{1}{2}c_7=0,\\
a_3-\frac{\mu}{\tau}c_1-\frac{\mu}{\tau}c_2=0, & a_3-\frac{\nu}{\tau}c_5=0, & c_1+c_2+c_3=1,\\
a_4-\frac{\nu}{\tau}c_3=0, & a_4-\frac{\mu}{\tau}c_4-\frac{\mu}{\tau}c_6=0, & c_4+c_5+c_6=1\\
a_5-\frac{\mu}{\tau}c_1-\frac{\mu}{\tau}c_3=0, & a_5-\frac{\nu}{\tau}c_6=0, &
\end{array}$$

$$a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4,\,a_5\ge 0,$$

$$(2a_1+c_7)\cdot f_\sigma(a)+a_1\cdot\omega_2(f,\,h)+\sum_{i=2}^{5}a_i\cdot\omega_2\left(f,\,h+\frac{\tau}{2}\right)\to\inf$$

имеет решение

$$a_1 = \frac{\sigma^2}{\tau^2}, \quad a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = \frac{\mu\nu}{\tau^2}\frac{\tau^2 - \sigma^2}{4\tau^2},$$
$$c_1 = c_4 = \frac{\sigma}{\tau}, \quad c_2 = c_3 = c_5 = c_6 = \frac{\mu}{\tau}, \quad c_7 = \frac{8\mu\nu}{\tau^2},$$

откуда

$$f_\tau(a-h) - 2f_\sigma(a) + f_\tau(a+h) \le$$
$$\le \frac{\sigma^2}{\tau^2}\omega_2(f,\, h) + \frac{\tau^2-\sigma^2}{\tau^2}\omega_2\left(f,\, h + \frac{\tau}{2}\right) \le \omega_2\left(f,\, h+\frac{\tau}{2}\right).$$

□

Замечание 1. *Леммы 2 и 3 верны для любой ограниченной измеримой функции.*

Лемма 4. *Пусть* $\delta \in \left[0,\, \frac{1}{2}\right]$, $f \in F^0$. *Тогда*

$$\left| f_\delta\left(k \pm \frac{\delta}{2}\right)\right| \le \frac{2-\delta^2}{4}\omega_2(f,\, 1) \qquad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Proof. Достаточно доказать, что

$$f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) \le \frac{2-\delta^2}{4}\omega_2(f,\, 1).$$

По лемме 3

$$-f_{1-\delta}\left(\frac{1+\delta}{2}\right) + 2f_\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right) - f_{1-\delta}\left(1+\frac{1+\delta}{2}\right) \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.19}$$

$$-f_{1-\delta}\left(-1+\frac{1+\delta}{2}\right) + 2f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) - f_{1-\delta}\left(\frac{1+\delta}{2}\right) \le \omega_2(f,\, 1), \tag{2.20}$$

$$-f_\delta\left(-1+\frac{\delta}{2}\right) + 2f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) - f_\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right) \le \omega_2(f,\, 1). \tag{2.21}$$

Средние значения функции f связаны равенствами

$$\delta f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) + (1-\delta)f_{1-\delta}\left(\frac{1+\delta}{2}\right) = 0, \tag{2.22}$$

$$\delta f_\delta\left(1+\frac{\delta}{2}\right) + (1-\delta)f_{1-\delta}\left(1+\frac{1+\delta}{2}\right) = 0, \tag{2.23}$$

$$\delta f_\delta\left(-1+\frac{\delta}{2}\right) + (1-\delta)f_{1-\delta}\left(-1+\frac{1+\delta}{2}\right) = 0, \tag{2.24}$$

Поставим задачу линейного программирования

$$f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) \to \sup$$

относительно величин

$$f_{1-\delta}\left(-1+\tfrac{1+\delta}{2}\right), \quad f_{1-\delta}\left(\tfrac{1+\delta}{2}\right), \quad f_{1-\delta}\left(1+\tfrac{1+\delta}{2}\right),$$

$$f_\delta\left(-1+\tfrac{\delta}{2}\right), \qquad f_\delta\left(\tfrac{\delta}{2}\right), \qquad f_\delta\left(1+\tfrac{\delta}{2}\right).$$

с ограничениями (2.19)–(2.24). Решение двойственной задачи

$$\begin{array}{ll} a_1+a_2-(1-\delta)c_1=0, & a_3-\delta c_3=0, \\ a_1-(1-\delta)c_2=0, & 2a_1-a_3+\delta c_2=0, \\ a_2-(1-\delta)c_3=0, & 2a_2+2a_3+\delta c_1=1, \end{array}$$
$$a_1,\, a_2,\, a_3 \geq 0, \quad (a_1+a_2+a_3)\cdot\omega_2(f,\,1) \to \inf$$

имеет вид

$$\begin{array}{ccc} a_1=\frac{\delta(1-\delta)}{4}, & a_2=\frac{(1-\delta)(2-\delta)}{4}, & a_3=\frac{\delta(2-\delta)}{4}, \\ c_1=\frac{1}{2}, & c_2=\frac{\delta}{4}, & c_3=\frac{2-\delta}{4}, \end{array}$$

откуда

$$f_\delta\left(\frac{\delta}{2}\right) \leq \frac{2-\delta^2}{4}\omega_2(f,\,1).$$

$\square$

Лемма 5. *Пусть* $b\in[\frac{1}{3},\,1]$, $f\in F_b$. *Тогда*

$$\frac{3+b}{1+b}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)-$$
$$-\frac{1+b}{4}\left(f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right)+f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right)\right)-\frac{1-b}{2}f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right)\leq\omega_2(f,\,1).$$

Proof. Поскольку

$$\frac{1+b}{2}f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right)+\frac{1-b}{2}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)=0,$$

достаточно доказать, что

$$-f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right)+2f_{\frac{1-b}{2}}\left(\frac{1-b}{4}\right)-$$
$$-\frac{1+b}{4}\left(f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right)+f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right)\right)-\frac{1-b}{2}f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right)\leq\omega_2(f,\,1).$$

Пусть $b \in [\frac{1}{3},\, \frac{3}{5}]$. По лемме 2

$$-f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right) + 2f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{1-b}{8}\right) - f_{\frac{3-b}{4}}\left(\frac{5+b}{8}\right) \le \omega_2(f,\,1), \tag{2.25}$$

$$-f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{5-3b}{8}\right) + 2f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{3-3b}{8}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) \le \omega_2(f,\,1), \tag{2.26}$$

$$-f_{\frac{3-b}{4}}\left(-\frac{5+b}{8}\right) + 2f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) \le \omega_2(f,\,1), \tag{2.27}$$

$$-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{3-b}{8}\right) + 2f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) \le \omega_2(f,\,1), \tag{2.28}$$

$$-f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right) + 2f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{3-3b}{8}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) \le \omega_2(f,\,1). \tag{2.29}$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) + 2f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\frac{5-3b}{16}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) \le \omega_2(f,\,1). \tag{2.30}$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) + 2f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\frac{3-5b}{16}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) \le \omega_2(f,\,1). \tag{2.31}$$

Средние значения функции f связаны соотношениями

$$\frac{1}{2}f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right) + \frac{1}{2}f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{5-3b}{8}\right) = f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right), \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{2}f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right) + \frac{1-b}{1+b}f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3b-1}{2+2b}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{3-b}{8}\right) = \\ = f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right), \tag{2.33}$$

$$\frac{3-b}{2+2b}f_{\frac{3-b}{4}}\left(-\frac{5+b}{8}\right) + \frac{3b-1}{2+2b}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{3-b}{8}\right) = f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right), \tag{2.34}$$

$$\frac{1}{2}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) + \frac{1}{2}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) = \gamma, \tag{2.35}$$

$$f_{\frac{3-b}{4}}\left(\frac{5+b}{8}\right) = \frac{3b-1}{3-b}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) + \frac{4-4b}{3-b}f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right), \tag{2.36}$$

$$f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) = \frac{1}{2}f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{1-b}{8}\right) + \frac{1}{2}f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{3-3b}{8}\right), \tag{2.37}$$

$$\frac{3-5b}{4-4b}\left(f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\frac{5-3b}{16}\right) + f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\frac{3-5b}{16}\right)\right) + \frac{3b-1}{2-2b}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) = \\ = f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) \tag{2.38}$$

Поставим задачу линейного программирования

$$2f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) \to \sup$$

относительно величин

$$\begin{array}{cccc}
f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right), & f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{5-3b}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right), & f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{3-b}{8}\right), \\
f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{1-b}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{3-3b}{8}\right), & f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right), & f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right), \\
f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\frac{5-3b}{16}\right), & f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{1-b}{4}\right), & f_{\frac{3-5b}{8}}\left(-\frac{3-5b}{16}\right), & f_{\frac{3-b}{4}}\left(-\frac{5+b}{8}\right), \\
f_{\frac{3-b}{4}}\left(\frac{5+b}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right). & &
\end{array}$$

с ограничениями (2.25)–(2.38).

Двойственная задача

$$\begin{array}{ll}
a_1 + a_5 - \frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2}c_2 = 0, & \\
a_1 - c_5 = 0, & 2a_1 - \frac{1}{2}c_6 = 0, \\
a_2 - \frac{1}{2}c_1 = 0, & 2a_2 + 2a_5 - \frac{1}{2}c_6 = 0, \\
a_2 + a_4 + a_6 - \frac{1}{2}c_4 = 0, & 2a_4 - \frac{3b-1}{2-2b}c_7 = 0, \\
a_3 - \frac{3-b}{2+2b}c_3 = 0, & 2a_6 - \frac{3-5b}{4-4b}c_7 = 0, \\
a_3 + a_5 + a_7 - \frac{1}{2}c_4 + \frac{3b-1}{3-b}c_5 = 0, & 2a_7 - \frac{3-5b}{4-4b}c_7 = 0, \\
a_4 - \frac{3b-1}{2+2b}c_2 - \frac{3b-1}{2+2b}c_3 = 0, & 2a_3 + c_6 + c_7 = 2, \\
a_6 + a_7 - \frac{1-b}{1+b}c_2 = 0, &
\end{array}$$

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5,\, a_6,\, a_7 \geq 0,$$

$$(c_1 + c_2 + c_3)\cdot f_{\frac{1+b}{2}}\left(-\frac{3-b}{4}\right) + c_4\cdot\gamma + \frac{4-4b}{3-b}\cdot c_5\cdot f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) +$$

$$+\omega_2(f,\,1)\cdot\sum_{i=1}^{7} a_i \to \inf$$

имеет решение

$$\begin{array}{ll}
a_1 = \frac{3-b}{8}, & c_1 = b, \\
a_2 = \frac{1}{2}b, & c_2 = \frac{3-5b}{2}, \\
a_3 = \frac{(3-b)(3b-1)}{4+4b}, & c_3 = \frac{3b-1}{2}, \\
a_4 = \frac{(3b-1)(1-b)}{2+2b}, & c_4 = \frac{1+b}{2}, \\
a_5 = \frac{3-5b}{8}, & c_5 = \frac{3-b}{8}, \\
a_6 = \frac{(3-5b)(1-b)}{4+4b}, & c_6 = \frac{3-b}{2}, \\
a_7 = \frac{(3-5b)(1-b)}{4+4b}, & c_7 = \frac{2(1-b)^2}{1+b}.
\end{array}$$

откуда следует требуемое.

Пусть теперь $b \in [\frac{3}{5},\, 1]$.

По лемме 3

$$-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{3-b}{8}\right) + 2f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) \leq \omega_2(f,\,1), \quad (2.39)$$

и нам остаётся рассмотреть задачу

$$2f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right)\to\sup$$

относительно величин

$$\begin{array}{ll}
f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{7-b}{8}\right), & f_{\frac{1+b}{4}}\left(-\frac{5-3b}{8}\right),\\
f_{\frac{3b-1}{4}}\left(-\frac{3-b}{8}\right), & f_{\frac{3-b}{4}}\left(-\frac{5+b}{8}\right),\\
f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{1-b}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{4}}\left(-\frac{3-3b}{8}\right),\\
f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right), & f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right),\\
f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right). &
\end{array}$$

с ограничениями (2.25)-(2.27), (2.39), (2.32), (2.34)-(2.37). □

Лемма 6. *Пусть* $b\in[\frac{1}{3},1]$, $f\in F_b$. *Тогда*

$$\frac{1}{2}\left(f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right)+f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{5b+1}{8}\right)\right)-2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)\le\omega_2(f,1).$$

Proof. По лемме 2

$$f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{9+5b}{8}\right)-2f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{5+3b}{8}\right)+f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\frac{1+b}{8}\right)\le\omega_2(f,1),\quad(2.40)$$

$$f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right)-2f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{7+b}{8}\right)+f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\frac{7-b}{8}\right)\le\omega_2(f,1),\quad(2.41)$$

$$f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{5b+1}{8}\right)-2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)+f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\frac{3-b}{8}\right)\le\omega_2(f,1),\quad(2.42)$$

$$f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right)-2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)+f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\frac{5+b}{8}\right)\le\omega_2(f,1).\quad(2.43)$$

Средние значения функции f связаны соотношением

$$\frac{1}{2}f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{5+3b}{8}\right)+\frac{1}{2}f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{7-b}{8}\right)=f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right),\quad(2.44)$$

кроме того, поскольку $f\in F_b$,

$$\frac{1+b}{4}f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\frac{1+b}{8}\right)+\frac{3+b}{4}f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\frac{5+b}{8}\right)=0,\quad(2.45)$$

$$\frac{3-b}{4}f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\frac{3-b}{8}\right)+\frac{1+b}{4}f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\frac{7-b}{8}\right)=0.\quad(2.46)$$

Аналогично предыдущему, справедливость утверждения следует из решения задачи

$$-2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right)\to\sup,$$

относительно величин

$$\begin{array}{ll} f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{5+3b}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{7+b}{8}\right), \\ f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\frac{1+b}{8}\right), & f_{\frac{1+b}{4}}\left(2+\frac{7-b}{8}\right), \\ f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\frac{3-b}{8}\right), & f_{\frac{3-b}{4}}\left(2+\frac{5+b}{8}\right), \\ f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3-b}{4}\right). & \end{array}$$

с ограничениями (2.40)–(2.46). □

3 Доказательство теоремы 1 в случае $b \in \left[0,\, \frac{1}{3}\right]$

Пусть $b \in \left[0,\, \frac{1}{3}\right]$, $f \in F_b$. По лемме 1

$$f_b\left(-\frac{1-2b}{2}\right) - 2f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{3b}{4}\right) + 1 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{3.1}$$

$$-f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{b}{4}\right) - f_{\frac{b}{2}}\left(1+\frac{3b}{4}\right) + 2 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{3.2}$$

$$-f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{1+b}{4}\right) - f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{3+3b}{4}\right) + 2 \le \omega_2(f,\, 1), \tag{3.3}$$

$$-2f_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2 \le \omega_2(f,\, 1). \tag{3.4}$$

$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) + f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right) + \frac{4}{1-b} \le \frac{2}{1-b} \cdot \omega_2(f,\, 1). \tag{3.5}$$

По лемме 2

$$-f_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2f_{\frac{b}{2}}\left(1+\frac{3b}{4}\right) - f_b\left(1+\frac{1+2b}{2}\right) \le \omega_2(f,\, 1). \tag{3.6}$$

По лемме 4

$$f_{\frac{1-3b}{2}}\left(-\frac{1-3b}{4}\right) - f_{\frac{1-3b}{2}}\left(1+\frac{3+3b}{4}\right) \le \frac{7+6b-9b^2}{8}\omega_2(f,\, 1). \tag{3.7}$$

Средние значения функции f связаны равенствами

$$f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) = \frac{2b}{1-b}f_b\left(-\frac{1-2b}{2}\right) + \frac{1-3b}{1-b}f_{\frac{1-3b}{2}}\left(-\frac{1-3b}{4}\right), \tag{3.8}$$

$$f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right) = \frac{2b}{1-b}f_b\left(1+\frac{1+2b}{2}\right) + \frac{1-3b}{1-b}f_{\frac{1-3b}{2}}\left(1+\frac{3+3b}{4}\right), \tag{3.9}$$

$$\begin{gathered} \frac{b}{2}f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{b}{4}\right) + \frac{b}{2}f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{3b}{4}\right) + \\ + \frac{1-3b}{2}f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{1+b}{4}\right) + 2bf_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + \frac{1-3b}{2}f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{3+3b}{4}\right) = 0. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Поставим задачу линейного программирования

$$\omega_2(f,\,1) \to \inf$$

относительно величин

$$\begin{array}{lll}
f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{3b}{4}\right), & f_b\left(1+\frac{1+2b}{2}\right), & f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right), \\
f_{\frac{b}{2}}\left(\frac{b}{4}\right), & f_b\left(-\frac{1-2b}{2}\right), & f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right), \\
f_{2b}\left(\frac{1+b}{2}\right), & f_{\frac{1-3b}{2}}\left(1+\frac{3+3b}{4}\right), & \omega_2(f,\,1). \\
f_{\frac{b}{2}}\left(1+\frac{3b}{4}\right), & f_{\frac{1-3b}{2}}\left(\frac{1+b}{4}\right), &
\end{array}$$

с ограничениями (3.1)–(3.10). Двойственная задача

$$\begin{array}{lll}
a_1 - \frac{2b}{1-b}c_1 = 0, & a_2 - 2a_5 = 0, & 2a_1 - \frac{b}{2}c_3 = 0, \\
a_6 - \frac{1-3b}{1-b}c_1 = 0, & a_5 + \frac{2b}{1-b}c_2 = 0, & a_2 - \frac{b}{2}c_3 = 0, \\
a_7 - c_1 = 0, & a_6 + \frac{1-3b}{1-b}c_2 = 0, & a_3 - \frac{1-3b}{2}c_3 = 0, \\
 & a_7 + c_2 = 0, & 2a_4 + a_5 - 2bc_3 = 0,
\end{array}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \frac{7+6b-9b^2}{8}a_6 + \frac{2}{1-b}a_7 = 1,$$

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4,\, a_5,\, a_6,\, a_7 \ge 0,$$

$$a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + \frac{4}{1-b}\cdot a_7 \to \sup$$

имеет решение

$$a_1 = \frac{16b}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55},$$
$$a_2 = \frac{32b}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55},$$
$$a_3 = \frac{32(1-3b)}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55},$$
$$a_4 = \frac{56b}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55},$$
$$a_5 = \frac{16b}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55},$$
$$a_6 = \frac{8(1-3b)}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55},$$
$$a_7 = \frac{8(1-b)}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55},$$
$$c_1 = \frac{8(1-b)}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55},$$
$$c_2 = -\frac{8(1-b)}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55},$$
$$c_3 = \frac{64}{27b^3 - 27b^2 + 9b + 55},$$

откуда
$$\frac{96}{27b^3-27b^2+9b+55} \le \omega_2(f,\,1).$$
$\square$

4 Доказательство теоремы 1 в случае $b \in \left[\frac{1}{3},\,1\right]$

Пусть $b \in \left[\frac{1}{3},\,1\right]$, $f \in F_b$. По лемме 1
$$f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) - 2f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{1+3b}{4}\right) + 1 \le \omega_2(f,\,1), \tag{4.1}$$
$$-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{5b+1}{8}\right) + 2 \le \omega_2(f,\,1), \tag{4.2}$$
$$-f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) - f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right) + 2 \le \omega_2(f,\,1), \tag{4.3}$$
$$-f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{5b-1}{8}\right) - f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{3b+1}{8}\right) + 2 \le \omega_2(f,\,1), \tag{4.4}$$
$$-2f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2 \le \omega_2(f,\,1). \tag{4.5}$$
$$-f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right) + f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right) + \frac{4}{1-b} \le \frac{2}{1-b}\cdot\omega_2(f,\,1). \tag{4.6}$$
По лемме 2
$$-f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) + 2f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{1+3b}{8}\right) - f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right) \le \omega_2(f,\,1). \tag{4.7}$$
По лемме 5
$$\frac{3+b}{1+b}f_{\frac{1-b}{2}}\left(\frac{1+b}{2}\right) - \\ - \frac{1+b}{4}\left(f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) + f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right)\right) - \frac{1-b}{2}f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) \le \\ \le \omega_2(f,\,1). \tag{4.8}$$
По лемме 6
$$\frac{1}{2}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{7+3b}{8}\right) + \frac{1}{2}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{9+5b}{8}\right) - 2f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right) \le \omega_2(f,\,1). \tag{4.9}$$
Средние значения функции f связаны равенством
$$\frac{3b-1}{4}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right) + \frac{1-b}{4}f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{5b-1}{8}\right) + \frac{1-b}{4}f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{1+3b}{8}\right) + \\ + \frac{3b-1}{4}f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right) + (1-b)f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right) = 0. \tag{4.10}$$

Поставим задачу линейного программирования

$$\omega_2(f,\,1) \to \inf$$

относительно величин

$$\begin{array}{lll}
f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{3b-1}{8}\right), & f_{1-b}\left(\frac{1+b}{2}\right), & f_{\frac{1-b}{2}}\left(1+\frac{3+b}{4}\right), \\
f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{5b-1}{8}\right), & f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1+\frac{3b-1}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{2}}\left(-\frac{1-b}{4}\right), \\
f_{\frac{1-b}{4}}\left(\frac{3b+1}{8}\right), & f_{\frac{1-b}{4}}\left(1+\frac{3b+1}{8}\right), & \omega_2(f,\,1). \\
f_{\frac{3b-1}{4}}\left(\frac{5b+1}{8}\right), & &
\end{array}$$

с ограничениями (4.1)–(4.10).

Двойственная задача

$$\begin{array}{ll}
a_1 - a_7 + \frac{3+b}{1+b}a_8 = 0, & a_3 - \frac{1}{2}a_9 = 0, \\
2a_1 - \frac{1-b}{4}c_1 = 0, & a_3 + \frac{1+b}{4}a_8 - \frac{3b-1}{4}c_1 = 0, \\
a_2 + \frac{1+b}{4}a_8 - \frac{3b-1}{4}c_1 = 0, & a_4 - \frac{1-b}{4}c_1 = 0, \\
a_4 - 2a_6 = 0, & a_4 - 2a_6 = 0, \\
a_6 - a_7 + 2a_9 = 0, & 2a_5 + a_6 + \frac{1-b}{2}a_8 - (1-b)c_1 = 0,
\end{array}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \frac{2}{1-b}a_7 + a_8 + a_9 = 1,$$

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9 \geq 0,$$

$$a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + 2a_5 + \frac{4}{1-b}a_7 + \left(\frac{1}{2}a_9 - a_2\right) f_{\frac{3b-1}{4}}\left(1 + \frac{5b+1}{8}\right) \to \sup$$

имеет решение

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2(1-b)^2(b^2+3b+4)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, \\
a_2 &= \frac{4(3b-1)(1-b)(3+b)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, \\
a_3 &= \frac{4(3b-1)(1-b)(3+b)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, \\
a_4 &= \frac{4(1-b)^2(b^2+3b+4)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, \\
a_5 &= \frac{(1-b)^2(-5b^2+13b+32)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, \\
a_6 &= \frac{2(1-b)^2(b^2+3b+4)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, \\
a_7 &= \frac{2(1-b)(-b^3+22b^2+63b-20)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, \\
a_8 &= \frac{16(1-b)(1+b)(3b-1)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80}, \\
a_9 &= \frac{8(3b-1(1-b)(3+b))}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80},
\end{aligned}$$

$$c_1 = \frac{16(1-b)(b^2+3b+4)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80},$$

откуда

$$\frac{8(11b^2+66b-13)}{3b^4-69b^3+17b^2+385b-80} \le \omega_2(f,\,1).$$

$\square$

5 Функция из F^* со вторым модулем непрерывности, меньшим 1.6762.

Мы представим интересующую нас функцию в виде суммы линейной и кусочно-постоянной функций. Таким образом вычисление второго модуля потребуется только для кусочно-постоянной части, а линейная часть будет выбрана так, чтобы выполнялось условие (1.1).

Пусть

$$b^* = -\frac{50}{93} + \frac{1}{93}\sqrt{8545}, \quad w = -\frac{37861}{20548} - \frac{37}{20548}\sqrt{8545},$$

$$B_1 = \left[-1,\, -\tfrac{1-b^*}{2}\right), \qquad B_2 = \left[-\tfrac{1-b^*}{2},\, 0\right], \qquad B_3 = \left(0,\, \tfrac{1-b^*}{8}\right],$$

$$B_4 = \left[\tfrac{b^*}{2},\, \tfrac{1+b^*}{4}\right], \qquad B_5 = \left\{\tfrac{1+b^*}{2}\right\}, \qquad B_6 = \left(1+\tfrac{3b^*-1}{4},\, 1+\tfrac{b^*}{2}\right),$$

$$B_7 = \left(1+\tfrac{9b^*-1}{8},\, 1+b^*\right), \qquad B_8 = (0,\, 1+b^*) \setminus \bigcup_{i=3}^{7} B_i, \qquad B_9 = \left[1+b^*,\, 1+\tfrac{1+b^*}{2}\right],$$

$$B_{10} = \left[2,\, 2+\tfrac{1-b^*}{8}\right), \qquad B_{11} = (1+b^*,\, 3) \setminus B_9 \bigcup B_{10},$$

$$h_1 = \tfrac{2(3b^*-1)}{3-3b^*}w, \qquad h_2 = \tfrac{1+3b^*}{2(3-3b^*)}w, \qquad h_3 = \tfrac{3b^*-1}{4(3-3b^*)}w,$$

$$h_4 = \tfrac{3b^*-1}{2(3-3b^*)}w, \qquad h_5 = \tfrac{w}{2}, \qquad h_6 = -\tfrac{3b^*-1}{2(3-3b^*)}w,$$

$$h_7 = -\tfrac{3b^*-1}{4(3-3b^*)}w, \qquad h_8 = 0, \qquad h_9 = -\tfrac{1+3b^*}{2(3-3b^*)}w,$$

$$h_{10} = \tfrac{15b^*-13}{4(3-3b^*)}w \qquad h_{11} = -w,$$

$$M = \mathbb{Z} \setminus \{-1,\, 0,\, 1,\, 2\},$$

$$h(x) = \begin{cases} h_i, & x \in B_i, \\ \left(\tfrac{5(3b^*-1)}{96} - \tfrac{3b^*+23}{48}m\right)w, & m \in M,\ x \in [m,\, m+1). \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{(3b^*+23)x - 9(1+b^*)}{48}w,$$

$$f^*(x) = h(x) + g(x).$$

Утверждение 3. $f^* \in F_{b^*}$.

Proof. Сперва покажем, что $f^* \in F^0$. Пусть $m \in M$. Тогда

$$\int_m^{m+1} f^*(x)\,dx =$$
$$= \left(\frac{5(3b^*-1)}{96} - \frac{3b^*+23}{48}m\right) w + \frac{3b^*+23}{48} w \left(\frac{(m+1)^2}{2} - \frac{m^2}{2}\right) - \frac{9(1+b^*)}{48} w =$$
$$= \left(\frac{5(3b^*-1)}{96} + \frac{3b^*+23}{96} - \frac{9(1+b^*)}{48}\right) w = 0.$$

В случае $m \in \{-1, 0, 1, 2\}$ имеем

$$\int\limits_{-1}^{0} f^*(x)\,dx = h_1 \frac{1+b^*}{2} + h_2 \frac{1-b^*}{2} - \frac{3b^*+23}{96} w - \frac{9(1+b^*)}{48} w =$$
$$= \frac{2(3b^*-1)}{3-3b^*} \frac{1+b^*}{2} w + \frac{1+3b^*}{2(3-3b^*)} \frac{1-b^*}{2} w - \frac{3b^*+23}{96} w - \frac{9(1+b^*)}{48} w =$$
$$= \left(\frac{-3+10b^*+9b^{*2}}{4(3-3b^*)} - \frac{21b^*+41}{96}\right) w = \frac{93b^{*2}+100b^*-65}{96(1-b^*)} w = 0,$$

$$\int\limits_{0}^{1} f^*(x)\,dx = h_3 \frac{1-b^*}{8} + h_4 \frac{1-b^*}{4} + \frac{(3b^*+23)}{96} w - \frac{9(1+b^*)}{48} w =$$
$$= \frac{3b^*-1}{4(3-3b^*)} \frac{1-b^*}{8} w + \frac{3b^*-1}{2(3-3b^*)} \frac{1-b^*}{4} w + \frac{(3b^*+23)}{96} w - \frac{9(1+b^*)}{48} w = 0,$$

$$\int\limits_{1}^{2} h(x)\,dx =$$
$$= h_6 \frac{1-b^*}{4} + h_7 \frac{1-b^*}{8} + h_9 \frac{1-b^*}{2} + h_{11} \frac{1-b^*}{2} + \frac{3(3b^*+23)}{96} w - \frac{9(1+b^*)}{48} w =$$
$$= -\frac{3b^*-1}{2(3-3b^*)} \frac{1-b^*}{4} w - \frac{3b^*-1}{4(3-3b^*)} \frac{1-b^*}{8} w - \frac{1+3b^*}{2(3-3b^*)} \frac{1-b^*}{2} w - \frac{1-b^*}{2} w +$$
$$+ \frac{3(3b^*+23)}{96} w - \frac{9(1+b^*)}{48} w = 0,$$

$$\int\limits_{2}^{3} f^*(x)\,dx = h_{10} \frac{1-b^*}{8} + h_{11} \frac{7+b}{8} + \frac{5(3b^*+23)}{96} w - \frac{9(1+b^*)}{48} w =$$
$$= \frac{15b^*-13}{4(3-3b^*)} \frac{1-b^*}{8} - \frac{7+b^*}{8} w + \frac{5(3b^*+23)}{96} w - \frac{9(1+b^*)}{48} w = 0.$$

Теперь покажем, что

$$\max_{x\in\mathbb{R}}|f^*| = 1 = f^*\left(\frac{1+b^*}{2}\right).$$

Сразу отметим, что

$$f^*\left(\frac{1+b^*}{2}\right) = 1.$$

Оценим $|f|$ в остальных точках следующим образом:

$$\max_{x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1+b^*}{2}\right\}}|f| =$$

$$= \max\{\max_{m\in M}\max_{x\in[m,\,m+1)}|f|,\ \max_{x\in[-1,\,0]}|f|,\ \max_{x\in(0,\,1+b^*)\setminus\left\{\frac{1+b^*}{2}\right\}}|f|,\ \max_{x\in[1+b^*,3)}|f|\}.$$

Осталось оценить каждую из этих величин:

$$\max_{m\in M}\max_{x\in[m,\,m+1)}|f| = \max_{m\in M}\max\{|\max_{x\in[m,\,m+1)}f^*(x)|,\ |\min_{x\in[m,\,m+1)}f^*(x)|\} \le$$

$$\le \max_{m\in M}\max\left\{\left|\min_{x\in[m,\,m+1)}g(x) + \min_{x\in[m,\,m+1)}h(x)\right|,\left|\max_{x\in[m,\,m+1)}g(x) + \max_{x\in[m,\,m+1)}h(x)\right|\right\} =$$

$$= \max_{m\in M}\max\left\{\left|\frac{(3b^*+23)m-9(1+b^*)}{48}w + \left(\frac{5(3b^*-1)}{96} - \frac{3b^*+23}{48}m\right)w\right|,\right.$$

$$\left.\left|\frac{(3b^*+23)(m+1)-9(1+b^*)}{48}w + \left(\frac{5(3b^*-1)}{96} - \frac{3b^*+23}{48}m\right)w\right|\right\} =$$

$$= \frac{3b^*+23}{96}w < 0.5,$$

$$\max_{x\in[-1,\,0]}|f| = \max\{|\max_{x\in[-1,\,0]}f^*(x)|,\ |\min_{x\in[-1,\,0]}f^*(x)|\} \le$$

$$\le \max\left\{\left|\min_{x\in[-1,\,0]}g(x) + \min_{x\in B_1\cup B_2}h(x)\right|,\left|\max_{x\in[-1,\,0]}g(x) + \max_{x\in B_1\cup B_2}h(x)\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{|g(-1)+h_1|,|g(0)+h_2|\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|-\frac{3b+8}{12}w + \frac{6b^*-2}{3-3b^*}w\right|,\left|-\frac{3+3b^*}{16} + \frac{1+3b^*}{6-6b^*}\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|\frac{-16+29b^*+3b^{*2}}{12-12b^*}w\right|,\left|\frac{-1+24b^*+9b^{*2}}{48(1-b^*)}\right|\right\} \le \max\{0.6, 0.8\} = 0.8,$$

$$\max_{x\in(0,\,1+b^*)\setminus\left\{\frac{1+b^*}{2}\right\}}|f| = \max\{|\max_{x\in(0,\,1+b^*)\setminus\left\{\frac{1+b^*}{2}\right\}} f^*(x)|,\,|\min_{(0,\,1+b^*)\setminus\left\{\frac{1+b^*}{2}\right\}} f^*(x)|\} \le$$

$$\le \max\left\{\left|\min_{x\in(0,\,1+b^*)} g(x) + \min_{x\in\bigcup_{i=3,\,4,\,6,\,7,\,8} B_i} h(x)\right|,\left|\max_{x\in(0,\,1+b^*)} g(x) + \max_{x\in\bigcup_{i=3,\,4,\,6,\,7,\,8} B_i} h(x)\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|g(0)+h_6\right|,\left|g(1+b^*)+h_2\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|-\frac{3+3b^*}{16}w - \frac{3b^*-1}{6-6b^*}w\right|,\left|\frac{14+17b^*+3b^{*2}}{48} + \frac{3b^*-1}{6-6b^*}\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|\frac{-1-24b^*+9b^{*2}}{48-48b^*}w\right|,\left|\frac{6+27b^*-14b^{*2}-3b^{*3}}{48(1-b^*)}\right|\right\} \le \max\{0.7, 0.98\} = 0.98,$$

$$\max_{x\in[1+b^*,3)}|f| = \max\{|\max_{x\in[1+b^*,\,3)} f^*(x)|,\,|\min_{x\in[1+b^*,\,3)} f^*(x)|\} \le$$

$$\le \max\left\{\left|\min_{x\in[1+b^*,\,3)} g(x) + \min_{x\in B_9\cup B_{10}\cup B_{11}} h(x)\right|,\left|\max_{x\in[1+b^*,\,3)} g(x) + \max_{x\in B_9\cup B_{10}\cup B_{11}} h(x)\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|g(1+b^*)+h_{11}\right|,\left|g(3)+h_9\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|\frac{14+17b^*+3b^{*2}}{48}w - w\right|,\left|\frac{5}{4} - \frac{1+3b^*}{6-6b^*}\right|\right\} =$$

$$= \max\left\{\left|\frac{-34+17b^*+3b^{*2}}{48}w\right|,\left|\frac{13-21b^*}{12-12b^*}\right|\right\} \le \max\{0.9, 0.9\} = 0.9.$$

□

Утверждение 4.

$$\omega_2(f^*,\,1) = w.$$

Proof. Поскольку функция g линейна, то $\omega_2(f^*,\,1) = \omega_2(h,\,1)$.

Пусть, $m \in M$,

$$a_m = \max_{x\in[m,\,m+1),t\in[0,\,1]} |h(x-t) - 2h(x) + h(x+t)|.$$

Тогда

$$a_m = \max_{x\in[m,\,m+1),t\in[0,\,1]} |h(x-t) - 2\left(\frac{5(3b^*-1)}{96} - \frac{3b^*+23}{48}m\right)w + h(x+t)| \le$$

$$\le \max\left\{\left|\max_{x\in[m-1,m+1)} h(x) - 2\left(\frac{5(3b^*-1)}{96} - \frac{3b^*+23}{48}m\right)w + \max_{x\in[m,\,m+2)} h(x)\right|,\right.$$
$$\left.\left|\min_{x\in[m-1,m+1)} h(x) - 2\left(\frac{5(3b^*-1)}{96} - \frac{3b^*+23}{48}m\right)w + \min_{x\in[m,\,m+2)} h(x)\right|\right\}.$$

Легко видеть, что если $m \in M$, то

$$\max_{x\in[m,\,m+2)} h(x) = \min_{x\in[m-1,\,m+1)} h(x) = \left(\frac{5(3b^*-1)}{96} - \frac{3b^*+23}{48}m\right)w,$$

поэтому

$$a_m \le \max\Bigg\{ \bigg| \max_{x\in[m-1,m+1)} h(x) - \left(\frac{5(3b^*-1)}{96} - \frac{3b^*+23}{48}m\right) w \bigg|,$$
$$\bigg| - \left(\frac{5(3b^*-1)}{96} - \frac{3b^*+23}{48}m\right) w + \min_{x\in[m,\,m+2)} h(x) \bigg| \Bigg\} = \frac{3b^*+23}{48} w.$$

Далее, пусть $i,\, j = 1..11$,

$$c_{ij} = \begin{cases} \max_{x\in B_i, y\in B_j} |f(y) - 2f(x) + f(2x-y)|, & B_i\cap B_j \ne \emptyset, \\ 0, & B_i \cap B_j = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда $(c_{ij})_{i=1,\,j=1}^{5,\,11}$ имеет вид

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{151-252b^*-27b^{*2}}{96(1-b^*)}w, & \frac{77-132b^*-9b^{*2}}{32(1-b^*)}w, & \frac{7(3b^*-1)}{12(1-b^*)}w, & \frac{3b^*-1}{2(1-b^*)}w, & 0, \\
w, & \frac{1+3b^*}{6(1-b^*)}w, & \frac{13-15b^*}{12(1-b^*)}w, & \frac{7-9b^*}{6(1-b^*)}w, & \frac{w}{2}, \\
\frac{b^*}{1-b^*}w, & \frac{1+b^*}{4(1-b^*)}w, & \frac{1+b^*}{4(1-b^*)}w, & \frac{1+3b^*}{6(1-b^*)}w, & \frac{b^*}{1-b^*}w, \\
\frac{1+3b^*}{6(1-b^*)}w, & w, & \frac{3b^*-1}{4(1-b^*)}w, & \frac{3b^*-1}{2(1-b^*)}w, & w, \\
0, & w, & w, & w, & 0, \\
0, & 0, & 0, & \frac{3-5b^*}{2(1-b^*)}w, & 0, \\
0, & 0, & 0, & 0, & \frac{2-3b^*}{3(1-b^*)}w, \\
\frac{9b^*-1}{6(1-b^*)}w, & \frac{b^*}{1-b^*}w, & \frac{13-15b^*}{12(1-b^*)}w, & \frac{7-9b^*}{6(1-b^*)}w, & \frac{9b^*-1}{6(1-b^*)}w, \\
0, & 0, & 0, & 0, & \frac{9b^*-1}{6(1-b^*)}w, \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0,
\end{array}$$

а $(c_{ij})_{i=6,j=1}^{11,\,11}$ выглядит как

$$\begin{array}{cccccc}
0, & 0, & \frac{2(3b^*-1)}{3(1-b^*)}w, & 0, & 0, & 0, \\
0, & 0, & w, & 0, & 0, & 0, \\
0, & 0, & \frac{1}{3(1-b^*)}w, & 0, & 0, & 0, \\
\frac{3b^*-1}{6(1-b^*)}w, & 0, & \frac{w}{2}, & 0, & 0, & 0, \\
w, & w, & w, & w, & 0, & 0, \\
\frac{3b^*-1}{2(1-b^*)}w, & \frac{3b^*-1}{4(1-b^*)}w, & \frac{2(2-3b^*)}{3(1-b^*)}w, & \frac{w}{2}, & \frac{17-27b^*}{12(1-b)}w, & \frac{2(2-3b^*)}{3(1-b^*)}w, \\
w, & \frac{1+b^*}{4(1-b^*)}w, & \frac{7-9b^*}{6(1-b^*)}w, & \frac{1+3b^*}{6(1-b^*)}w, & \frac{5-7b^*}{4(1-b^*)}w, & w, \\
\frac{b^*}{1-b^*}w, & \frac{1+b^*}{4(1-b^*)}w, & w, & \frac{b^*}{1-b^*}w, & \frac{13-15b^*}{12(1-b^*)}w, & w, \\
\frac{7(3b^*-1)}{12(1-b^*)}w, & \frac{2(3b^*-1)}{3(1-b^*)}w, & \frac{3(3b^*-1)}{4(1-b^*)}w, & \frac{1+3b^*}{6(1-b^*)}w, & \frac{3(3b^*-1)}{4(1-b^*)}w, & \frac{9b^*-1}{6(1-b^*)}w, \\
\frac{2(2-3b^*)}{3(1-b^*)}w, & \frac{5-7b^*}{4(1-b^*)}w, & \frac{7-9b^*}{6(1-b^*)}w, & \frac{1-2b^*}{1-b^*}w, & \frac{3b^*-1}{12(1-b^*)}w, & \frac{7-9b^*}{6(1-b^*)}w, \\
\frac{7-9b^*}{6(1-b^*)}w, & w, & w, & \frac{3-5b^*}{4(1-b^*)}w, & w, & w.
\end{array}$$

Для завершения доказательства остаётся заметить, что

$$\omega_2(h,\,1) = \max\{\max_{m\in M} a_m,\ \max_{i\,j=1..11} c_{ij}\} = w.$$

$\square$

References

[1] *Kryakin Yu.* Whitney's theorem for oscillating on $\mathbb{R}$ functions. arXiv:math/0612442v1.2006

[2] *Виноградов О.Л., Ихсанов Л.Н.* Оценки нормы функции, ортогональной кусочно-постоянным, через модули непрерывности высоких порядков. Вестник СПбГУ. Сер. 1. Т. 3(61). Вып. 1. С. 8–12. 2016.