ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 4/2017

О ГЁЛЬДЕРОВОМ УСЛОВИИ В ГРАНИЧНОЙ ТОЧКЕ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ: ОБЩИЕ МОДУЛИ ГЛАДКОГО ПОРЯДКА НЕ ВЫШЕ 2

А. Н. МЕДВЕДЕВ

С.-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
191023, наб. р. Фонтанки, 27,
Санкт-Петербург, Россия
Санкт-Петербургский электротехнический университет,
197376, ул. проф. Попова, д.5, Санкт-Петербург, Россия
e-mail: `alkomedvedev@gmail.com`

АННОТАЦИЯ

В недавней статье автора, А. В. Васина и С. В. Кислякова было среди прочего установлено, что если Φ – ограниченная аналитическая функция в круге, удовлетворяющая некоторым естественным условиям на нули, а её модуль $\varphi = |\Phi|$ удовлетворяет в одной граничной точке e^{it} оценке $|\varphi(e^{it}) - \varphi(e^{ix}) - b(t-x)| \leqslant C|t-x|^\alpha$ при некотором $\alpha \in [1, 2]$, то функция Φ удовлетворяет в точке e^{it} условию Гёльдера порядка $\alpha/2$ в некотором интегральном смысле. В настоящей статье доказывается аналог этого утверждения для не обязательно степенных мажорант для модуля гладкости: мы накладываемна функцию φ условие $|\varphi(e^{it}) - \varphi(e^{ix}) - b(t-x)| \leqslant \omega(|t-x|)$, где мажоранта ω удовлетворяет некоторым условиям регулярности. Для простоты мы рассматриваем лишь случай, когда функция Φ – внешняя.

Ключевые слова: внешняя функция, гёльдеровы условия

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-01-00198-А.

1 Введение и постановка задачи

Данная работа посвящена обобщению результатов статьи [7]. Нами будет установлено поточечное падение гладкости внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ (определение см. в конце введения) в сравнении с гладкостью её модуля φ для случая условий вида $|\varphi(t)-\varphi(x)-b(t-x)| \le C\omega(|t-x|)$. Последние при правильном выборе мажоранты ω соответствуют гладкости функции φ порядка между 1 и 2.

Для числовых функций f и g, заданных на одном и том же множестве, условимся писать $f \lesssim g$, если $f(x) \le Cg(x)$ при всех x с постоянной C, не зависящей от x. Если же $f \lesssim g$ и $g \lesssim f$, то будем писать $f \asymp g$.

При описании условий на гладкость мы будем придерживаться подхода Стечкина. Приведем, с небольшой поправкой, следующее определение, которое можно найти в [1, 201–202].

Определение 1.1. Назовем мажорантой типа k-го модуля непрерывности непрерывную неотрицательную неубывающую функцию ω на $[0,+\infty)$, для которой $\omega(0)=0$ и функция $t^{-k}\omega(t)$ является почти убывающей, т.е. для всяких значений $t_1 \le t_2$ выполнено неравенство

$$\frac{\omega(t_2)}{t_2^k} \lesssim \frac{\omega(t_1)}{t_1^k}, \tag{QD}$$

с некоторой универсальной постоянной.

На все рассматриваемые мажоранты (а интересуют нас только мажоранты типа 2-го модуля непрерывности) наложим дополнительное ограничение, которое поможет нам отделить условия на гладкость меньше 1, от условий на гладкость порядка между 1 и 2. Для мажоранты типа 2-го модуля непрерывности ω это условие имеет вид:

$$\frac{\omega(t_1)}{t_1} \lesssim \frac{\omega(t_2)}{t_2}, \quad t_1 \le t_2, \tag{QI}$$

т.е. функция $t^{-1}\omega(t)$ почти возрастает. Легко заметить, что степенные мажоранты $\omega(t) \asymp t^\alpha$ при $1 \le \alpha \le 2$ заведомо удовлетворяют условиям (QD) и (QI). Такие мажоранты будем, для краткости, в дальнейшем называть просто *правильными.*

Фиксируем точку $x \in [-\pi,\pi]$. Рассмотрим функцию f на окружности (2π–периодическую на $\mathbb{R}$). В данной работе, как и в [7], рассматриваются 2 типа поточечных условий на гладкость:

(I) Первый тип подразумевает наличие для функции f оценки

$$|f(y)-f(x)-b_x(x-y)| \lesssim \omega_x(|x-y|), \tag{SC}$$

по всем точкам y, для которых $|x-y| \le 4\pi$, где b_x некоторая постоянная, а ω_x правильная мажоранта.

(II) Второй тип — условие на усредненные вторые разности функции f. В наших обозначениях запишем его так:

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \left|\Delta^2 f(x,t)\right|^r dt\right)^{1/r} \lesssim \omega_x(|x-y|), \tag{DC}$$

для всех $h \le 4\pi$ при некотором $r>1$, а мажоранта ω_x не обязательно правильная, но точно типа 2-го модуля непрерывности.

В данной работе мы ограничимся лишь внешними функциями. Рассмотрим 2π–периодическую неотрицательную функцию φ, для которой $\log\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Обозначим через $\mathcal{O}_\varphi$ внешнюю функцию, построенную по φ, с граничными значениями, равными $\varphi\exp(\mathcal{H}(\log\varphi))$, где $\mathcal{H}$ — оператор гармонического сопряжения. В основной статье [7] был получен следующий результат для степенных мажорант: условие (SC) на функцию φ в одной точке x с мажорантой $\omega_x^1(t) \asymp t^\alpha$, где $\alpha \in [1,2]$, гарантирует для внешней функции $\mathcal{O}_\varphi$ оценку (DC) в той же точке x с мажорантой $\omega_x^2(t) = Ct^{\alpha p/(p+1)}$, причем на значение постоянной C оказывают влияние только ω_x^1 и $\|\log\varphi\|_{L^p}$.

Именно этот результат мы и планируем обобщить на случай произвольной правильной мажоранты.

2 Случай гладкости не больше 2, с произвольной мажорантой типа 2-го модуля непрерывности

Пусть дана 2π–периодическая неотрицательная функция φ, для которой $\log\varphi \in L^p(\mathbb{T})$. Пусть $\mathcal{O}_\varphi$ — внешняя функция, построенная по φ. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если функция φ удовлетворяет в точке x условию* (SC) *с правильной мажорантой ω_x, то тогда верны следующие два утверждения.*

1. *Если $\varphi(0) = 0$, то функция $\mathcal{O}_\varphi$ удовлетворяет условию* (DC) *с мажорантой, пропорциональной ω_x, причем коэффициент пропорциональности здесь зависит от ω_x (от постоянных из условий* (QD) *и* (QI)*) и от $\|\log\varphi\|_{L^p}$.*

2. *Если $\varphi(0) > 0$, то функция $\mathcal{O}_\varphi$ удовлетворяет условию* (DC) *с мажорантой, пропорциональной $\omega_x(\cdot) + \omega_x((\cdot)^\beta)$, где $\beta = p/(p+1)$, при этом коэффициент пропорциональности здесь зависит от ω_x (от постоянных из условий* (QD) *и* (QI)*) и от $\|\log\varphi\|_{L^p}$.*

Замечание 2.1. Следует отметить, что если мажоранта ω_x, по условию, обязана быть правильной, т.е. соответствовать гладкости между 1 и 2, то результирующая мажоранта $\omega_x(\cdot)+\omega_x((\cdot)^\beta)$ может перестать быть таковой. Такой же эффект наблюдался и в [7] для степенных мажорант.

2.1 Восстановлении "глобальной" гладкости из поточечных оценок типа (DC)

Общий принцип в даннм круге задач гласит, что если интегральные условия вроде (DC) выполнены равномерно во всех точках x, то соответствующая функция будет гладкой в классическом смысле этого слова. Обсудим то, как это утверждение проявляется в нашей ситуации. Для случая степенных мажорант необходимые построения были приведены в [7, стр. 59–64]. Мы же в данной работе адаптируем их для произвольных правильных мажорант.

Как было упомянуто в замечании 2.1, мажоранта, которая появляется в оценках для средних вторых разностей функции $\mathcal{O}_\varphi$ в теореме 1б не обязательно будет правильной, т.е. она вполне может соответствовать гладкости не больше 1, а не между 1 и 2. Этот случай мы обсудим чуть позже. А пока предположим, что мажоранта правильная.

Итак, рассмотрим 2π–периодическую измеримую функцию g, для которой предположим выполненным условие (DC) во всех точках x, $|x| \le 4\pi$, с одной и той же постоянной, одной и той же **правильной** мажорантой ω и $r > 1$. Приведем аналог предложения 3 из [7] (доказательство будет отличаться лишь несколькими поправками).

Утверждение 1. *Пусть g такая же, как и выше. Дополнительно предположим, что $g \in C^2$. Тогда для каждого отрезка $|I|$, $|I| < 2\pi$, найдется такой линейный полином ρ_I, что*

$$\sup_{x\in I} |g(x) - \rho_I(x)| \lesssim \omega(|I|).$$

Proof. Из условия (DC) с объявленными выше параметрами немедленно следует

$$\frac{1}{h}\int_{h/2\le|t|\le h}|\Delta^2 g(x,t)|\;dt \lesssim \omega(h),\quad 0<h\le 4\pi.$$

Кроме того, верно соотношение

$$\Delta^2 g(x,t)=\int_0^t\int_0^t g''(x+\sigma+\tau)\;d\sigma\;d\tau. \tag{1}$$

Из формулы для второй разности получим

$$g(x)=\Delta^2 g(x,\sigma+\tau)+(2g(x+\sigma+\tau)-g(x+2\sigma+2\tau)).$$

Проинтегрируем данное равенство по σ и τ от 0 до t и поделим на t^2:

$$g(x)=\psi(x,t)+\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^t\Delta^2 g(x,\sigma+\tau)\;d\sigma\;d\tau, \tag{2}$$

где

$$\psi(x,t)=\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^t[2g(x+\sigma+\tau)-g(x+2\sigma+2\tau)]\;d\sigma\;d\tau.$$

Далее, усредним (2) по t:

$$g(x)=\varphi_h(x)+\frac{1}{h}\int_{h/2\le|t|\le h}\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^t\Delta^2 g(x,\sigma+\tau)\;d\sigma\;d\tau\;dt,$$

где

$$\varphi_h(x)=\frac{1}{h}\int_{h/2\le|t|\le h}\psi(x,t)\;dt.$$

Оценим второе слагаемое справа. Оно разбивается на два интеграла, по положительным и отрицательным t, которые оцениваются аналогично. Поэтому приведем только одну оценку, например интеграла $I_1(x)$ по $h/2\le t\le h$. Имеем

$$|I_1(x)|\lesssim\frac{1}{h^3}\int_{h/2\le|t|\le h}\left(\int_0^h\int_0^h|\Delta^2 g(x,\sigma+\tau)|\;d\sigma\;d\tau\right)dt\lesssim$$

$$\lesssim\frac{1}{h^2}\int_0^h\int_0^h|\Delta^2 g(x,\sigma+\tau)|\;d\sigma\;d\tau=\int_0^h\int_\tau^{\tau+h}|\Delta^2 g(x,u)|\;du\;d\tau=$$

$$=\frac{1}{h^2}\left[\int_0^h\int_0^u|\Delta^2 g(x,u)|\;d\sigma\;du+\int_h^{2h}\int_{u-h}^h|\Delta^2 g(x,u)|\;d\sigma\;du\right]\lesssim\omega(h).$$

Последнюю оценку обеспечивает (DC). Таким образом

$$|g(x)-\varphi_h(x)|\lesssim\omega(h). \tag{3}$$

Оценим теперь вторую производную по x функции $\varphi_h(x)$. Прежде всего,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=\frac{1}{t^2}\int_0^t\int_0^t(2g''(x+\sigma+\tau)-g''(x+2\sigma+2\tau))\;d\sigma\;d\tau=$$

$$=\frac{2}{t^2}\Delta^2 g(x,t)-\frac{4}{t^2}\Delta^2 g(x,2t)$$

в силу (1). Поэтому

$$|\varphi_h''(x)| \le \frac{1}{h}\int_{h/2\le|t|\le h}\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\right| dt \lesssim$$

$$\lesssim \frac{1}{h^2}\left(\frac{1}{h}\int_{h/2\le|t|\le h}|\Delta^2 g(x,t)|\ dt + \frac{1}{h}\int_{h/2\le|t|\le h}|\Delta^2 g(x,2t)|\ dt\right) \lesssim \frac{\omega(h)}{h^2}.$$

Последнюю оценку опять обеспечивает (DC).

Рассмотрим отрезок I, его центр x_0, и пусть $h = |I|/2$. Для точки $x \in I$ имеем

$$\varphi_h(x) = \varphi_h(x_0) + \frac{1}{2}\varphi_h'(x)(x-x_0) + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}\varphi_h''(u)(x-u)\ du.$$

Возьмем

$$\rho_I(x) = \varphi_h(x_0) + \frac{1}{2}\varphi_h'(x)(x-x_0).$$

Тогда

$$|\varphi_h(x) - \rho_I(x)| \lesssim \frac{\omega(h)}{h^2}(x-x_0)^2 \lesssim \omega(h).$$

□

Из данного утверждения стандартным методом (достаточно рассмотреть свертки с ядрами Фейера, подробнее [7, стр. 61]) можем получить неравенство

$$|\Delta^2 g(x,t)| \lesssim \omega(h)$$

при всех x и $|t| \le \pi/2$, без априорных предположений о гладкости функции g. Последнее означает принадлежность g классу Lip_ω. Отметим, что для $\omega(t) = t$ мы получаем класс Зигмунда, а не Lip_1.

Замечание 2.2. Утверждение 1, а значит и рассуждение после него, верно и для комплекснозначных функций g (напомним, что мы измеряем гладкость функции $\mathcal{O}_\varphi$). Действительно, если функция g удовлетворяет (DC), то этому же условию будут удовлетворять $\operatorname{Re} g$ и $\operatorname{Im} g$, так как $|\Delta^2 \operatorname{Re} g(t,x)| \le |\Delta^2 g(t,x)|$ и $|\Delta^2 \operatorname{Im} g(t,x)| \le |\Delta^2 g(t,x)|$. Если $\rho_I^1(x) = a_0^1 + a_1^1 x$ — многочлен из утверждения 1 для $\operatorname{Re} g$, а $\rho_I^2(x) = a_0^2 + a_1^2 x$ — для $\operatorname{Im} g$, до достаточно положить $\rho_I(x) = (a_0^1 + ia_0^2) + (a_0^1 + ia_0^2)x$ и утверждение 1 будет верным для g, ввиду очевидного неравенства

$$|g(x) - \rho_I(x)| \le |\operatorname{Re} g(x) - \rho_I^1(x)| + |\operatorname{Im} g(x) - \rho_I^2(x)|.$$

Если же мажоранта в (DC) оказалась неправильной, то мы на самом деле имеем дело с условием на гладкость порядка меньше 1. Стандартным методом (см. предложение 1 и 2 [7]) мы можем свести (DC) к оценкам средних осцилляций из [4], для которых процедура восстановления гладкости стандартна (описана как в [7], так и в [4]; для примера предлагаем ознакомится с [6]) Фактически в этом случае мы имеем $|g(x) - g(y)| \lesssim \omega(|x-y|)$.

2.2 Вспомогательные результаты

Наше доказательство во многом будет повторять доказательство соответствующего результата из [7]. Однако, ввиду его сложности, нам придется привести его в практически полном объеме, опуская лишь некоторые моменты. Тем не менее, вспомогательные результаты мы можем привести без доказательств.

Пусть функция φ такая же, как и в формулировке теоремы. Рассмотрим внешнюю функцию $\mathcal{O}_\varphi$, построенную по φ. Без ограничения общности, будем считать, что точка, в которой мы измеряем гладкость, есть точка $x = 0$. Т.е. считаем, что задана мажоранта 2-ого модуля непрерывности ω такая, что

$$|\varphi(t) - \varphi(0) - bt| \leq \omega(|t|). \tag{4}$$

Дополнительно, будем считать, что выполнено условие (QI), т.е. мажоранта ω соответствует гладкости от 1 до 2. Также будет полезно выделить следующую оценку, которая, разумеется, является очевидным следствием условия (4):

$$|\varphi(t) - \varphi(0)| \leq |b||t| + \omega(|t|). \tag{5}$$

Все вспомогательные утверждения, приводимые здесь, были доказаны в одноименной части статьи [7]. Тем не менее, чтобы сформулировать их в удобной форме, нам понадобится наложить ограничения, которые могут быть оправданы только после полной формулировки упомянутых выше утверждений. Поэтому мы поступим следующим образом: сначала упомянем результаты [7], позволяющие наложить дополнительные ограничения, а затем дадим упрощенные формулировки, которые нам понадобятся в дальнейшем. Итак, следствия 1 и 2 статьи [7, 65-66] позволяют утверждать, что значение $\varphi(0)$, постоянная $|b|$ и сама функция φ, равномерно ограничены сверху значением, которое зависит только от $\|\log\varphi\|_{L^p}$ и ω. Поэтому считаем, что $\varphi(0) < 1$. Дополнительно предположим, что $\omega(2\pi) > \varphi(0)$. Последнее позволит укоротить формулировки приводимых вспомогательных результатов.

Прежде чем окончательно их сформулировать, рассмотрим *почти обратную* к функции ω функцию $\widetilde{\omega}$, заданную по формуле $\widetilde{\omega}(s) = \inf\{t\colon \omega(t) = s\}$. Введем важную постоянную — пороговое значение A. Считаем, что $A \asymp \widetilde{\omega}(\varphi(0)/2)$, с постоянной сильно меньше 1 (например, 20^{-1}). Следует уточнить, что всякий раз, когда мы будем писать ниже $|t| \lesssim A$, то, по крайней мере, $16|t| \leq A$. В целом, мы полагаем, что значение A достаточно мало, чтобы удовлетворить всем нашим нуждам. Отметим также, что наш выбор постоянной A позволяет дополнительно утверждать, что $\varphi(0) \asymp \omega(A)$. Заметим, что дополнительной нормировкой мы можем добиться того, что $A < 1$ (например, разделив на $\widetilde{\omega}(2\pi)$). Так и будем считать.

Теперь сформулируем вспомогательные результаты статьи [7] в наших обозначениях.

Лемма 1. *Если для некоторого $\gamma > 0$ функция $t \mapsto \omega(t)/t^\gamma$ почти убывает, то функция $s \mapsto s/\widetilde{\omega}^\gamma(s)$ тоже почти убывает.*

Лемма 2. *Пусть $\varphi(0) > 0$. Тогда $|b| \lesssim \varphi(0)/A \lesssim \omega(A)/A$.*

Лемма 3. *Пусть $\varphi(0) > 0$. Если $|t| \leq A$, то $\varphi(t) > \varphi(0)/2$.*

Лемма 3 позволяет нам использовать на малых значения t, т.е. $|t| \leq A$, оценку

$$|\log\varphi(t) - \log\varphi(0)| \leq \frac{|\varphi(t) - \varphi(0)|}{\varphi(0)} \leq \frac{|b||t| + \omega(|t|)}{\varphi(0)}. \tag{6}$$

Дополнительно, нам понадобится следующее простое утверждение о вторых разностях, которое также может быть найдено в [7].

Лемма 4. *Пусть функция G принадлежит классу C^2 на $\mathbb{R}$. Пусть даны точки $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Обозначим $\delta_1 = x_1 - x_0$, $\delta_2 = (x_2 - x_1) - (x_1 - x_0)$. Допустим, что $|G'| \leq \nu$, $|G''| \leq \mu$ на минимальном отрезке, содержащем точки x_0, x_1, x_2. Тогда имеет место оценка*

$$|G(x_2) - 2G(x_1) + G(x_0)| \leq \nu(|\delta_1|^2 + |\delta_2|)^2 + \mu|\delta_2|.$$

Завершим подготовку следующим простым утверждением о первом приближении ядра оператора $\mathcal{H}$.

Лемма 5. *Пусть дан промежуток $I \subset [-\pi, \pi]$. И пусть $t \in I$, а $s \notin 2I$. Тогда*

$$\left|\operatorname{ctg}\Big(\frac{t-s}{2}\Big) - \operatorname{ctg}\Big(\frac{-s}{2}\Big)\right| \lesssim \frac{|t|}{s^2}.$$

2.3 Оценки средних разностей

Сохраним обозначения и конструкцию предыдущей части работы. Дополнительно, обозначим через $\psi = \mathcal{H}\log\varphi$, $u(\cdot) = \log\varphi(\cdot) - \log\varphi(0)$. Кроме того, отметим, что неравенство (5) позволяет нам рассматривать $\psi(0)$, так как из данного соотношения следует, что значение $\psi(0)$ вполне определено, т.е. соответствующий интеграл в смысле главного значения существует (для $\varphi(0) > 0$) Если же $\varphi(0) = 0$, то просто припишем какое-нибудь значение $\psi(0)$, которое не будет влиять на вычисления никоим образом, как будет видно ниже.

Итак, нам необходимо оценить следующее значение

$$\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h) := \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \left|\Delta^2(\varphi e^{i\psi})(0,t)\right|^r dt\right)^{1/r}.$$

Рассмотрим подробнее подынтегральную функцию. Заметим, что

$$\Delta^2(\varphi e^{i\psi})(0,t) = \Delta^2\varphi(0,t)e^{i\psi(2t)} + 2\Delta^1\varphi(0,t)\Delta^1(e^{i\psi})(0,t) + \varphi(0)\Delta^2(e^{i\psi})(0,t) =: S_1(t) + S_2(t) + S_3(t).$$

Отсюда получаем

$$\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h) \le \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |S_j(t)|^r dt\right)^{1/r} =: d_1 + d_2 + d_3.$$

Оценим каждое слагаемое по отдельности.

Лемма 6. $|S_1(t)| \lesssim \omega(|t|)$.

Proof. Рассмотрим $v = \varphi(0) + bt$. Заметим, что $\Delta^2 v = 0$ и $v(0) = \varphi(0)$. Отсюда получаем

$$|S_1(t)| = |\Delta^2\varphi(0,t)| = |\Delta^2(\varphi - v)(0,t)|$$

$$= |(\varphi - v)(2t) - 2(\varphi - v)(t) - (\varphi - v)(0)| = |(\varphi - v)(2t) - 2(\varphi - v)(t)$$
$$\le |\varphi(2t) - b2t - \varphi(0)| + 2|\varphi(t) - bt - \varphi(0)| \le \omega(2|t|) + 2\omega(|t|).$$

Отметим, что условие (QD) дает $\omega(2|t|) \lesssim \omega(|t|)$. Последнее вместе с полученной выше оценкой, завершает доказательство. □

Заметим, что из леммы 6 следует, что $d_1 \lesssim \omega(h)$. Перейдем к оставшимся слагаемым.

Лемма 7. *(a)* $|S_2(t)| \le 4(|b||t| + \omega(|t|))$

(b) Если $\varphi(0) > 0$ *и* $h \lesssim A$, *то*

$$d_2 \lesssim \omega(h) + \frac{\varphi(0)h^2}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2}{A^{\frac{p+1}{p}}A},$$

причем постоянная в оценке зависит только от ω *и* $\|\log\varphi\|_{L_p}$.

Proof. В первую очередь отметим, что $|\Delta^1(e^{i\psi})(0,t)| \le 2$. С другой стороны, оценка (5) дает

$$|\Delta^1\varphi(0,t)| \le |b||t| + \omega(|t|). \tag{7}$$

Обе эти оценки вместе доказывают пункт (a).

Перейдем теперь к доказательству пункта (b). Итак, считаем, что $\varphi(0) > 0$ и $h \lesssim A$. Воспользовавшись все той же оценкой (7), получаем

$$d_3 = \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|S_2(t)|^r dt\right)^{1/r} \le 2\omega(h) + 2|b|h\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|e^{i\psi(2t)} - e^{i\psi(t)}|^r dt\right)^{1/r}.$$

Теперь необходимо оценить значение соответствующего среднего в формуле выше должным образом. Рассмотрим стандартную константу приближения

$$c := 1/2\pi \int_{[-\pi,\pi]\setminus[-4h,4h]} \mathrm{ctg}(-s/2)u(s)ds.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|e^{i\psi(2t)} - e^{i\psi(t)}|^r dt\right)^{1/r} \le \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|e^{i\psi(2t)} - e^{ic}|^r dt\right)^{1/r} + \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|e^{i\psi(t)} - e^{ic}|^r dt\right)^{1/r}.$$

Оба слагаемых оцениваются одним и тем же способом, поэтому мы остановимся лишь на оценке последнего. Для краткости обозначим его через d_4. Для оценки величины d_4 применим стандартное разбиение. Имеем

$$d_4 \le \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|\mathcal{H}(\chi_{[-4h,4h]}u)(s)|^r ds\right)^{1/r} +$$

$$+\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\Big(\sum_{j=2}^{l}\int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}\Big|\mathrm{ctg}\Big(\frac{t-s}{2}\Big) - \mathrm{ctg}\Big(\frac{-s}{2}\Big)\Big||u(s)|ds\Big)^r dt\right)^{1/r},$$

где, стандартно, $l \asymp \log_2(1/h)$.

Для оценки первого слагаемого, воспользуемся ограниченностью оператора $\mathcal{H}$ в L^r; для второго — используем лемму 5. Итак, можем продолжить оценку следующим образом

$$... \lesssim \left(\frac{1}{2h}\int_{-4h}^{4h}|u(s)|^r ds\right)^{1/r} + h\sum_{j=2}^{l}(2^j h)^{-2}\int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|u(s)|ds.$$

Первое слагаемое мы можем оценить сверху величиной$(\varphi(0))^{-1}(|b|h + \omega(h))$, так как на промежутке $[-4h, 4h]$ работает оценка (6), а для мажоранты ω выполнено (QD) (фактически это условие обеспечивает стандартное условие удвоения). С оставшейся суммой поступим стандартным образом, а именно, разобьем ее на две части: те слагаемые, в которых промежутки не достигли порога A, и оставшиеся. Для оценки первой части используем (6); чтобы оценить вторую, используем неравенство $|u(s)| \le |\log\varphi(s)| + |\log\varphi(0)|$ и неравенство Гёльдера. Таким образом, имеем

$$d_4 \lesssim \frac{|b|h + \omega(h)}{\varphi(0)} + \frac{h}{\varphi(0)}\sum_{j=2}^{k}\frac{|b|2^j h + \omega(2^j h)}{2^j h} +$$

$$+h\sum_{j=k+1}^{l}(2^j h)^{-\frac{p+1}{p}}\|\log\varphi\|_{L^1} + \sum_{j=k+1}^{l}\frac{|\log\varphi(0)|}{2^j} := T_1 + T_2 + T_3 + T_4,$$

где пороговый индекс k задан соотношением $2^k h \asymp A$.

Чтобы завершить доказательство, построим правильные оценки для $|b|hT_j$, $j = 1,..,4$. Начнем с T_1. Согласно лемме 2, $|b|/\varphi(0) \lesssim 1/A$. Отсюда получаем $T_1 \lesssim h/A + \omega(h)/\varphi(0)$, а значит

$$|b|hT_1 \lesssim \frac{\varphi(0)h^2}{A^2} + \frac{h}{A}\omega(h).$$

В последней оценке мы можем грубо оценить второе слагаемое через $\omega(h)$, так как $h \lesssim A$.

Перейдем к оценке величины T_2. Имеем

$$T_2 \le \frac{h}{\varphi(0)}\Big(\sum_{j\le k}|b| + \sum_{j\le k}\frac{\omega(2^jh)}{2^jh}\Big) \le h\frac{|b|}{\varphi(0)}\Big|\log\frac{A}{h}\Big| + \frac{h}{\varphi(0)}\sum_{j\le k}2^jh\frac{\omega(2^jh)}{(2^jh)^2} \lesssim$$

$$\lesssim \frac{h\log(1/h)}{A} + \frac{h}{\varphi(0)}\sum_{j\le k}2^jh\frac{\omega(h)}{h^2} = \frac{h\log(1/h)}{A} + \frac{\omega(h)}{\varphi(0)}\sum_{j\le k}2^j$$

$$\lesssim \frac{h\log(1/h)}{A} + \frac{\omega(h)}{\varphi(0)}2^k \asymp \frac{h\log(1/h)}{A} + \frac{\omega(h)A}{\varphi(0)h}.$$

Отсюда для $|b|hT_2$ получаем оценку

$$|b|hT_2 \lesssim \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} + \omega(h).$$

Рассмотрим T_3. Согласно построению, $A \lesssim 2^kh$. Поэтому имеем

$$|b|hT_3 \lesssim \frac{|b|h^2}{A^{\frac{p+1}{p}}}\sum_{j=k+1}^{l}(2^{j-k})^{-\frac{p+1}{p}}\|\log\varphi\|_{L^p} \lesssim \frac{\varphi(0)h^2}{A^{\frac{p+1}{p}}A}.$$

Приступим к оценке последнего слагаемого T_4. Проведем те же рассуждения, что и для T_3. Имеем $T_4 \lesssim h|\log\varphi(0)|/A$. Отсюда $|b|hT_4 \lesssim h^2\varphi(0)|\log\varphi(0)|/A^2$. Напомним, что $\varphi(0) \asymp \omega(A)$. Ввиду того, что $t^{-2}\omega(t)$ почти убывает, мы можем утверждать, что $\log(1/\varphi(0)) \lesssim \log(1/A)$. Поэтому мы можем оценить $|\log\varphi(0)|$ через $\log(1/h)$. Отсюда, окончательно, имеем

$$|b|hT_4 \lesssim \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2}.$$

Собрав все результаты воедино, получаем требуемую оценку. $\square$

Лемма 8. *(a)* $|S_3(t)| \le 4\varphi(0)$*;*

(b) Если $\varphi(0) > 0$ *и* $h \lesssim A$*, то*

$$d_3 \lesssim h^2 + \omega(h) + \frac{\varphi(0)h^2}{A^2} + \frac{\omega^2(h)}{\varphi(0)} + \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} +$$

$$+\frac{\varphi(0)h^2\log^2(1/h)}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2}{AA^{\frac{p+1}{p}}} + \frac{\varphi(0)h^2}{A^{2\frac{p+1}{p}}},$$

причем постоянная в оценке зависит только от ω *и* $\|\log\varphi\|_{L_p}$.

Proof. Пункт (a) данной леммы тривиален, поэтому переходим сразу к пункту (b). Итак, считаем, что $\varphi(0)>0$ и $h\lesssim A$. Необходимо оценить следующее значение:

$$d_3=\varphi(0)\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left|\Delta^2(e^{i\psi})(0,t)\right|^r dt\right)^{1/r}.$$

Воспользуемся леммой 4 для $G(x)=e^{ix}$. Имеем

$$|\Delta^2(e^{i\psi})(0,t)|\le(|\Delta^1\psi(0,t)|+|\Delta^2\psi(0,t)|)^2+|\Delta^2\psi(0,t)|.$$

Вторую разность в скобках можно оценить через первую, применив тривиальное тождество $\psi(2t)-2\psi(t)+\psi(0)=(\psi(2t)-\psi(0))-2(\psi(t)\psi(0))$. Поэтому имеем

$$|\Delta^2(e^{i\psi})(0,t)|\lesssim|\Delta^1\psi(0,t)|^2+|\Delta^1\psi(0,2t)|^2+|\Delta^2\psi(0,t)|.$$

Как и в предыдущей лемме, первое и второе слагаемое оцениваются одинаковым образом, поэтому будем проводить вычисления только для первого и третьего слагаемого в соотношении выше. Обозначим их средние по промежутку $[-h,h]$ через d_5 и d_6 соответственно.

Приступим к оценке среднего d_5. Напомним, что мы обозначили $u=\log\varphi-\log\varphi(0)$. Разобьем u на две части $u=u\chi_{[-2h,2h]}+v$, где $v=u-u\chi_{[-2h,2h]}$. Тогда имеем

$$d_5=\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left|(\mathcal{H}\log\varphi)(t)-(\mathcal{H}\log\varphi)(0)\right|^{2r}dt\right)^{1/r}\lesssim$$

$$\lesssim\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left|(\mathcal{H}(u\chi_{[-2h,2h]}))(t)\right|^{2r}dt\right)^{1/r}+|(\mathcal{H}(u\chi_{[-2h,2h]}))(0)|^2+$$

$$+\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-2h,2h]}\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{t-s}{2}\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{-s}{2}\right)\right||u(s)|ds\right)^{2r}dt\right)^{1/r}.$$

Заметим, что оценки первого и третьего слагаемого мы уже приводили в доказательстве леммы 7 (с точностью до возведения в квадрат), поэтому приведем оценку второго слагаемого, а затем добавим уже вычисленный ранее результат для оставшихся двух. Воспользовавшись формулой (6), имеем

$$|(\mathcal{H}(u\chi_{[-2h,2h]}))(0)|^2=\frac{1}{4\pi^2}\left|\int_{-2h}^{2h}\operatorname{ctg}\left(\frac{-s}{2}\right)u(s)ds\right|^2\lesssim\left(\int_{-2h}^{2h}\frac{|b||s|+\omega(|s|)}{|s|}ds\right)^2\lesssim$$

$$\lesssim\left(\frac{|b|h+\omega(h)}{\varphi(0)}\right)^2\lesssim\frac{h^2}{A^2}+\frac{\omega^2(h)}{\varphi^2(0)}.$$

Теперь осталось только скомбинировать это соотношение с квадратами оценок, полученных для значений T_1, T_2, T_3, T_4 из доказательства леммы 7. Однако, прежде чем продолжить, нам придется уточнить оценку для T_2. К сожалению, если ее оставить в прежнем виде, то ее нам не хватит. Итак, в обозначениях соответствующей части доказательства леммы 7, напишем еще раз выражение, для которого необходимо уточнить оценку:

$$D=\frac{h}{\varphi(0)}\sum_{j=2}^{k}\frac{\omega(2^jh)}{2^j},$$

где $2^k h \asymp A$. Вместо того, чтобы использовать почти убывание функции $s^{-2}\omega(s)$, как прежде, используем ограничение (QI), отделяющее условия на гладкость меньше 1 от условий на гладкость от 1 до 2. Имеем

$$\frac{\omega(2^j h)}{2^j h} \lesssim \frac{\omega(2^k h)}{2^k h} \asymp \frac{\omega(A)}{A} \asymp \frac{\varphi(0)}{A}, \quad j = 2 \dots k-1.$$

Отсюда получаем $D \lesssim A^{-1} h \log(1/h)$, т.е. обе компоненты в T_2 оцениваются одним и тем же выражением.

Как и обещалось, комбинируем квадраты соответствующих оценок и получаем

$$\varphi(0) d_5 \lesssim \frac{\varphi(0)h^2}{A^2} + \frac{\omega^2(h)}{\varphi(0)} + \frac{\varphi(0)h^2 \log^2(1/h)}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2}{A^{2\frac{p+1}{p}}}. \tag{8}$$

Осталось оценить значение $\varphi(0)d_6$. Для этого, приблизим функцию $\log\varphi$ подходящим многочленом степени 1 (подправленным до периодической функции)

Проведем подготовительные построения. Рассмотрим $\eta(s) = \varphi(0) + bs$. Возьмем многочлен $\tau(s) = \log\varphi(0) + bs/\varphi(0)$, который является многочленом Тейлора первого порядка для функции $\log\eta(s)$. Представим без доказательства следующее утверждение, которое доказывается аналогично лемме 3 (см. [7, 79]) Итак, для $|s| \lesssim A$ выполнено $\eta(s) \geq \varphi(0)/2$. Заметим, что вторая производная $\eta(s)$ совпадает с $-b^2/\eta^2(s)$. Поэтому, используя вышеупомянутую оценку и лемму 2, имеем

$$|\log\eta(s) - \tau(s)| \leq 4\frac{b^2}{\varphi(0)^2} \lesssim \frac{s^2}{A^2}. \tag{9}$$

Далее, возьмем $p(s) = \xi(s)\tau(s)$, где ξ — срезающая функция класса C^∞, которая равна 1 на $[-\pi/4, \pi/4]$ и 0 на $[-\pi, \pi] \setminus [-\pi/4, \pi/4]$ и продолжим p до периодической.

Теперь, для d_6 напишем

$$d_6 \leq \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |\Delta^2[\mathcal{H}(\log\varphi - p)](0,t)|^r dt\right)^{1/r} + \left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} |\Delta^2\mathcal{H}(p)(0,t)|^r dt\right)^{1/r} := d_7 + d_8.$$

Для начала, оценим слагаемые d_8. Заметим, что оператор $\mathcal{H}$ коммутирует с оператором Δ^2, поэтому имеем

$$\Delta^2\mathcal{H}(p)(0,t) \asymp \int_{-h}^{h} \operatorname{ctg}\Big(-\frac{s}{2}\Big)\Delta^2 u(s,t)ds.$$

Для удобства, считаем, что $A \leq \pi/4$. Тогда $\Delta^2 p(s,t) = 0$ на промежутке $\{|s| \leq \pi/8\}$. На дополнении данного промежутка функция $\operatorname{ctg}(-s/2)$ ограниченна некоторой универсальной постоянной. Поэтому имеем

$$|\Delta^2\mathcal{H}(p)(0,t)| \lesssim \int_{-\pi}^{\pi} |\Delta^2 p(s,t)|ds.$$

Далее, отметим, что $p''(s) = \xi''(s)\tau(s) + 2\xi'(s)\tau'(s)$, откуда $|u''(s)| \lesssim \log(1/\varphi(0)) + 1/\varphi(0)$. Применив лемму 4 для $G = p$, равноотстоящих узлов (т.е. $\delta_2 = 0$) и $\nu \asymp \log(1/\varphi(0)) + 1/\varphi(0)$, получаем

$$|\Delta^2(s,t)| \lesssim \frac{1 + \log(1/\varphi(0))}{\varphi(0)} h^2 \quad \text{при} \quad |t| \leq h.$$

Откуда, окончательно, имеем $\underline{\varphi(0)d_8 \lesssim h^2}$.

Далее, приступим к оценке величины $\varphi(0)d_7$. Напомним, что d_7 есть усредненная вторая разность $\Delta^2\mathcal{H}(\log\varphi - p)(0,t)$. Разобьем функцию $\log\varphi - p$ на две части: на $w_0 := (\log\varphi - p)\chi_{[-4h,4h]}$, и остаток $w = (\log\varphi - p) - w_0$. Имеем

$$\varphi(0)d_7 \le \varphi(0)\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|\Delta^2\mathcal{H}(w_0)(0,t)|^r dt\right)^{1/r} + \varphi(0)\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|\Delta^2\mathcal{H}(w)(0,t)|^r dt\right)^{1/r}. \tag{10}$$

Теперь, оценим усредненные вторые разности от w_0 и w в отдельности. Начнем с w_0. Имеем

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}|\Delta^2\mathcal{H}(w_0)(0,t)|^r dt\right)^{1/r} \le \left(\frac{1}{2h}\int_{-\pi}^{\pi}|\mathcal{H}(w_0)(2t) - 2\mathcal{H}(w_0)(t) + \mathcal{H}(w_0)(0)|^r dt\right)^{1/r} \le$$

$$\le \left(\frac{1}{2h}\int_{-\pi}^{\pi}(|\mathcal{H}(w_0)(2t)| + 2|\mathcal{H}(w_0)(t)|)^r dt\right)^{1/r} + |\mathcal{H}(w_0)(0)| \le$$

$$\lesssim \left(\frac{1}{2h}\int_{-4h}^{4h}|w_0(s)|^r ds\right)^{1/r} + |\mathcal{H}(w_0)(0)|.$$

Чтобы получить последнее неравенство, мы воспользовались ограниченностью оператора $\mathcal{H}$ в L^r. Теперь, рассмотрим и оценим каждое из полученных значений. Для подынтегральной функции в первом напишем

$$|w_0(s)| = |\log\varphi(s) - \tau(s)| \le |\log\varphi(s) - \log\eta(s)| + |\log\eta(s) - \tau(s)|.$$

Если $|s| \le 4h \le A$, то верны соотношения $\eta(s) \ge \varphi(0)/2$ и $\varphi(s) \ge \varphi(0)/2$, а также оценка (9). Применим их, соответственно, к первому и второму слагаемому в полученной выше оценке. Получим

$$|w_0(s)| \lesssim \frac{|\varphi(s) - \eta(s)|}{\varphi(0)} + \frac{s^2}{A^2} \lesssim \frac{\omega(|s|)}{\varphi(0)} + \frac{s^2}{A^2}.$$

Отсюда получаем оценку

$$\varphi(0)\left(\frac{1}{2h}\int_{-4h}^{4h}|w_0(s)|^r ds\right)^{1/r} \lesssim \omega(h) + \frac{\varphi(0)h^2}{A^2}. \tag{11}$$

С другой стороны, если использовать ту же оценку, что мы получили для $|w_0(s)|$, но уже в $|\mathcal{H}(w_0)(0)|$, то получим

$$|\mathcal{H}(w_0)(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\Big(-\frac{s}{2}\Big)w_0(s)ds\right| \lesssim \int_{-4h}^{4h}\frac{1}{|s|}\Big(\frac{\omega(|s|)}{\varphi(0)} + \frac{s^2}{A^2}\Big)ds \lesssim \frac{\omega(h)}{\varphi(0)} + \frac{h^2}{A^2}.$$

Значит $\varphi(0)|\mathcal{H}(w_0)(0)|$ оценивается тем же значением, что и в (11). Таким образом, вклад первого слагаемого в (10) можно оценить через $\omega(h) + A^{-2}\varphi(0)h^2$.

Теперь рассмотрим второе слагаемое в (10). Оно оценивается (без множителя $\varphi(0)$) сверху ($\lesssim$) следующим значением:

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left|\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-4h,4h]}\Delta^2\operatorname{ctg}(s,t)(\log\varphi(s) - p(s))ds\right|^r dt\right)^{1/r}.$$

Применим к котангенсу лемму 4. Тогда на области интегрирования $|\Delta^2 \operatorname{ctg}(s,t)| \lesssim |s|^{-3}t^2$. Поэтому последнее выражение не превосходит

$$\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\Big(\int_{[-\pi,\pi]\setminus[-4h,4h]}\frac{t^2}{|s|^3}|\log\varphi(s)-p(s)|ds\Big)^r dt\right)^{1/r}.$$

Введем, как и при доказательстве леммы 7, разбиение $[-\pi,\pi]\setminus[-4h,4h]$ на промежутки вида $\{2^j h \le |s| \le 2^{j+1}h\}$, $j = 2\dots l$, где $l \asymp \log(1/h)$. Тогда можем продолжить оценку следующим выражением

$$h^2\sum_{j=2}^{l}(2^j h)^{-3}\int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-p(s)|ds.$$

Точно так же как и прежде, рассмотрим пороговый номер k, заданный соотношением $2^k h \asymp A$ и разобьем сумму на две: по индексам $\{j \le k\}$ и $\{j > k\}$. В слагаемых первой суммы функция $p(s)$ совпадает с $\tau(s)$, верны соотношения $\eta(s) \ge \varphi(0)/2$ и $\varphi(s) \ge \varphi(0)/2$, а также оценка (9). Поэтому для слагаемых суммы по индексам $\{j \le k\}$ имеем

$$\int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-p(s)|ds \le \int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-\log\eta(s)|ds+$$

$$\int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\eta(s)-\tau(s)|ds \lesssim \int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}\frac{|\varphi(s)-\eta(s)|}{\varphi(0)}ds+\int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}\frac{s^2}{A^2}ds \lesssim$$

$$\lesssim 2^j h\Big(\frac{\omega(2^j h)}{\varphi(0)}+\frac{(2^j h)^2}{A^2}\Big).$$

Отсюда

$$h^2\sum_{j=2}^{k}(2^j h)^{-3}\int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-p(s)|ds \lesssim \left(\frac{h^2}{\varphi(0)}\sum_{j=2}^{k}\frac{\omega(2^j h)}{(2^j h)^2}\right)+k\frac{h^2}{A^2}.$$

Разберемся с каждым слагаемым отдельно. Рассмотрим первое. Используя условие (QD), получаем

$$h^2\sum_{j=2}^{k}\frac{\omega(2^j h)}{(2^j h)^2} \lesssim h^2\sum_{j=2}^{k}\int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}\frac{\omega(s)}{s^2}ds \lesssim h^2\int_h^{2\pi}\frac{\omega(s)}{s^2}ds.$$

Последний интеграл можно оценить, опять же, используя свойство (QD). А именно,

$$h^2\int_h^{2\pi}\frac{\omega(s)}{s^2}ds \lesssim h^2\frac{\omega(h)}{h^2}\int_h^{2\pi}ds \le 2\pi\omega(h).$$

Теперь рассмотрим значение $kA^{-2}h^2$. Согласно построению, число k пропорционально $\log(A/h)$. Поэтому

$$k\frac{h^2}{A^2} \lesssim \frac{h^2\log(1/h)}{A^2}+\frac{h^2\log(1/A)}{A^2} \lesssim \frac{h^2\log(1/h)}{A^2},$$

последнее верно, так как $h \lesssim A < 1$. А значит,

$$\varphi(0)h^2\sum_{j=2}^{k}(2^j h)^{-3}\int_{2^j h\le|s|\le 2^{j+1}h}|\log\varphi(s)-p(s)|ds \lesssim \omega(h)+\frac{h^2\log(1/h)\varphi(0)}{A^2}. \tag{12}$$

Для подынтегральной функции в слагаемых оставшейся суммы по индексам $\{j > k\}$ используем "грубую" оценку $|\log\varphi(s) - p(s)| \le |\log\varphi(s)| + |\tau(s)|$. Отсюда, используя неравенство Гёльдера, для каждого слагаемого этой суммы получим оценку

$$\int_{2^j h \le |s| \le 2^{j+1}h} |\log\varphi(s) - p(s)|ds \le \int_{2^j h \le |s| \le 2^{j+1}h} |\log\varphi(s)|ds + \int_{2^j h \le |s| \le 2^{j+1}h} |\tau(s)|ds \le$$

$$\le (2^j h)^{1-1/p} \|\log\varphi\|_{L^p} + 2^j h |\log\varphi(0)| + \frac{|b|(2^j h)^2}{\varphi(0)}.$$

Используя те же соображения, что и при оценке выражения T_4 в доказательстве леммы 7, мы можем заменить $|\log\varphi(0)|$ на $\log(1/h)$. Как и раньше, используем то, что $A \lesssim 2^j h$ для индексов $\{j > k\}$ и $|b|/\varphi(0) \lesssim 1/A$. Таким образом, имеем

$$\varphi(0)h^2 \sum_{j=k+1}^{l} (2^j h)^{-3} \int_{2^j h \le |s| \le 2^{j+1}h} |\log\varphi(s) - p(s)|ds \lesssim \frac{\varphi(0)h^2}{AA^{\frac{p+1}{p}}} + \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2}{A^2}. \quad (13)$$

Собрав вместе оценки (8), (11), (12), (13), а также две подчеркнутые, получаем искомую оценку для d_3. $\square$

Теперь, когда мы оценили d_1, d_2 и d_3, вернемся к $\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0, h)$. Соберем вместе, с одной стороны, оценки леммы 6 и пунктов (a) лемм 7 и 8; а с другой — оценки пунктов (b) лемм 7 и 8, и лемму 6. Получается два неравенства:

(I) $\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0, h) \lesssim \omega(h) + \frac{\varphi(0)h}{A} + \varphi(0)$;

(II) Если $|h| \lesssim A$, то

$$\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0, h) \lesssim h^2 + \omega(h) + \frac{\varphi(0)h^2}{A^2} + \frac{\omega^2(h)}{\varphi(0)} + \frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} +$$

$$+ \frac{\varphi(0)h^2\log^2(1/h)}{A^2} + \frac{\varphi(0)h^2}{AA^{\frac{p+1}{p}}} + \frac{\varphi(0)h^2}{A^{2\frac{p+1}{p}}}.$$

Заметим, что если $\varphi(0) = 0$, то неравенство (I), дает оценку $\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0, h) \lesssim \omega(h)$, что можно трактовать как отсутствие падения гладкости.

Теперь, пусть $\varphi(0) > 0$. Напомним, что, согласно построению, $\varphi(0) < 1$, $A < 1$. Обозначим через $\beta := p/(p+1)$. Отметим, что $\beta < 1$, а значит $x^\beta \ge x$ для $x \le 1$. В неравенствах ниже (типа $\cdot \gtrsim A$ и $\cdot \lesssim A$) выберем достаточно малую постоянную и рассмотрим следующие две имеющиеся противоположные возможности:

1°. $h^\beta \gtrsim A$. Отметим, что $\varphi(0) \asymp \omega(A) \lesssim \omega(h^\beta)$. Кроме того, воспользуемся ограничением (QI) и получим $\varphi(0)/A \asymp \omega(A)/A \lesssim h^{-\beta}\omega(h^\beta)$. Отсюда имеем оценку

$$\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0, h) \lesssim \omega(h) + \omega(h^\beta) + h^{1-\beta}\omega(h^\beta) \lesssim \omega(h) + \omega(h^\beta),$$

которая и является искомой.

2°. $h \le h^\beta \lesssim A$. В этом случае применимо неравенство (II). Обсудим как оценится каждое из его слагаемых. В первую очередь отметим, что $h < 1$, поэтому в паре h^2 — $\omega(h)$ доминирует второе, а значит h^2 можно отбросить. Заметим, что $\varphi(0) \asymp \omega(A)$, по этой причине и тому, что $x^{-2}\omega(x)$ почти убывает, можем написать

$$\frac{\varphi(0)}{A^2} \lesssim \frac{\omega(A)}{A^2} \lesssim \frac{\omega(h^\beta)}{h^{2\beta}}.$$

Отметим, что мы могли добиться этой оценки иначе — используя лемму 1 напрямую, но так, как написали мы, на наш взгляд, нагляднее. Т.е. будем использовать почти убывание соответствующих функций $t^{-\gamma}\omega(t)$ напрямую, а не переходя к соответствующим выражениям с $\widetilde{\omega}$.

Далее, оценка выше приведет к следующему набору соотношений:

$$\frac{\varphi(0)h^2}{A^2} \lesssim \omega(h^\beta)h^{2(1-\beta)} \lesssim \omega(h^\beta);$$

$$\frac{\varphi(0)h^2\log(1/h)}{A^2} \lesssim \omega(h^\beta)h^{2(1-\beta)}\log(1/h) \lesssim \omega(h^\beta);$$

$$\frac{\varphi(0)h^2\log^2(1/h)}{A^2} \lesssim \omega(h^\beta)h^{2(1-\beta)}\log^2(1/h) \lesssim \omega(h^\beta);$$

Последние неравенства в этой серии оценок верны, потому что функции $h^{2(1-\beta)}$, $h^{2(1-\beta)}\log(1/h)$, $h^{2(1-\beta)}\log^2(1/h)$ равномерно ограничены при $h \le 1$, причем постоянные зависят только от β.

Теперь, рассмотрим последние два (по порядку вхождения) слагаемых неравенства (II). Учтем введенное обозначение $\beta = p/(p+1)$, тогда знаменатели этих слагаемых примут вид: $A^{1+1/\beta}$ и $A^{2/\beta}$ соответственно. Еще раз напомним, что $\beta < 1$, поэтому почти убывание функции $t^{-2}\omega(t)$ влечет почти убывание функций $t^{-(1+1/\beta)}\omega(t)$ и $t^{-2/\beta}\omega(t)$ (соответствующие показатели у степени больше 2). Применим это обстоятельство к рассматриваемым слагаемым неравенства (II) и получим

$$\frac{\varphi(0)h^2}{A^{1+1/\beta}} \asymp \frac{\omega(A)h^2}{A^{1+1/\beta}} \lesssim \omega(h^\beta)h^{2-\beta(1+1/\beta)} = \omega(h^\beta)h^{1-\beta} \lesssim \omega(h^\beta);$$

$$\frac{\varphi(0)h^2}{A^{2/\beta}} \asymp \frac{\omega(A)h^2}{A^{2/\beta}} \lesssim \omega(h^\beta)h^{2-\beta\cdot 2/\beta} = \omega(h^\beta).$$

Осталось оценить последнее значение $\omega^2(h)/\varphi(0)$. Заметим, что ограничение (QI) нам дает $h^{-1}\omega(h) \le A^{-1}\omega(A)$. Отсюда, окончательно, имеем

$$\frac{\omega^2(h)}{\varphi(0)} \asymp \frac{\omega(h)}{\omega(A)}\omega(h) \lesssim \frac{h}{A}\omega(h) \le \omega(h).$$

Собирая все полученные соотношения, имеем искомую оценку

$$\delta^2_{\mathcal{O}_\varphi}(0,h) \lesssim \omega(h) + \omega(h^\beta).$$

References

[1] Vladislav K. Dzyadyk, Igor A. Shevchuk, Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials. — Walter de Gruyter, 2008. — 480 p.

[2] В. П. Хавин, *Обобщение теоремы Привалова-Зигмунда о модуле непрерывности сопряженной функции.*, Изв. Акад. наук Армянской ССР, серия Математика **6** (1971), 252-258, 265-287.

[3] K. Hoffman, Banach spaces of analytic functions. — Prentice Hall, Engelewood Cliffs, NJ, (1962)

[4] А. Н. Медведев, *Падение гладкости внешней функции в сравнении с гладкостью ее модуля при дополнительных ограничениях на величину граничной функции*, Исследования по линейным операторам и теории функций. **43**, Зап. научн. сем. ПОМИ **434**, (2015), 101–115

[5] Н. А. Широков, *Достаточные условия для гельдоровской гладкости функции.*, Алгебра и анализ, **25.3** (2013).

[6] S. Spanne, *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes.* — Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze, **19.4** (1965), 593–608.

[7] А.В. Васин, С.В. Кисляков, А.Н. Медведев, *Локальная гладкость аналитической функции в сравнении с гладкостью ее модуля.* — Алгебра и анализ, **25.3** (2013).