ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

УСРЕДНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: t.suslina@spbu.ru

АННОТАЦИЯ

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса C^{2p}. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ изучается самосопряженный сильно эллиптический оператор $A_{N,\varepsilon}$ порядка $2p$, заданный выражением $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$, $\varepsilon > 0$, при условиях Неймана на границе. Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и положительно определенная $(m \times m)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, периодическая относительно некоторой решетки; $b(\mathbf{D}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha$ — дифференциальный оператор порядка p с постоянными коэффициентами; b_α — постоянные $(m \times n)$-матрицы. Предполагается, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет максимальный ранг при любом $0 \ne \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$. Для резольвенты $(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ получены аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, с оценками погрешности в зависимости от ε и ζ.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, эллиптические уравнения высокого порядка, задача Неймана, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РНФ (проект 17-11-01069).

Введение

Задачам усреднения (гомогенизации) дифференциальных операторов (ДО) с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами посвящена обширная литература. Укажем в первую очередь книги [BeLPa], [BaPan], [ZhKO].

0.1. **Операторные оценки погрешности для задач усреднения в $\mathbb{R}^d$.**

В цикле работ Бирмана и Суслиной [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам теории усреднения. С помощью этого подхода изучался широкий класс матричных самосопряженных сильно эллиптических ДО второго порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{0.1}$$

Здесь матрица-функция $g(\mathbf{x})$ размера $m\times m$ ограничена, равномерно положительно определена и периодична относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Оператор $b(\mathbf{D})$ — ДО первого порядка вида $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$, где b_j — постоянные $(m \times n)$-матрицы. Предполагается, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет ранг n при всех $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Простейший пример оператора вида (0.1) — акустический оператор $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$; оператор теории упругости также допускает запись в требуемом виде. Эти и другие примеры подробно рассмотрены в [BSu2].

В [BSu1, BSu2] показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — постоянная *эффективная матрица*. Установлена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

В [BSu3] найдена более точная аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. В [BSu4] получена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с оценкой

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.3}$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon)$ — так называемый *корректор*. Оператор $\mathcal{K}(\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, а потому зависит от ε; при этом $\|\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$.

Оценки вида (0.2), (0.3), получившие название *операторных оценок погрешности*, точны по порядку. Метод работ [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений.

Отметим также недавнюю работу [Su3], в которой были получены двупараметрические аналоги оценок (0.2) и (0.3) для резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ в произвольной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ (в зависимости от ε и ζ). В присутствии младших членов аналогичные результаты получены в [MSu1].

Другой подход к операторным оценкам погрешности (*модифицированный метод первого приближения* или *метод сдвига*) был предложен Жиковым; этим методом в [Zh] и [ZhPas1] были получены оценки вида (0.2) и (0.3) для операторов акустики и теории упругости. Относительно дальнейших результатов Жикова и Пастуховой см. недавний обзор [ZhPas2] и цитированную там литературу.

Отдельный интерес представляет задача усреднения для периодических эллиптических ДО *высокого четного порядка*. Теоретико-операторный подход, предложенный Бирманом и Суслиной, был развит применительно к таким операторам в работе Вениаминова [V] и в недавней статье Кукушкина и Суслиной [KuSu].

В [V] изучался оператор вида $\mathcal{B}_\varepsilon = (\mathbf{D}^p)^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) \mathbf{D}^p$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричный положительно определенный и ограниченный тензор порядка $2p$, периодический относительно решетки Γ. При $p = 2$ оператор такого вида возникает в теории упругости пластин (см. [ZhKO]). Эффективный оператор имеет вид $\mathcal{B}^0 = (\mathbf{D}^p)^* g^0 \mathbf{D}^p$, где g^0 — эффективный тензор. В [V] получен аналог оценки (0.2):

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{B}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon.$$

В [KuSu] изучался более общий класс эллиптических ДО высокого порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}). \tag{0.4}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и равномерно положительно определенная матрица-функция размера $m\times m$, периодическая относительно решетки Γ. Оператор $b(\mathbf{D})$ порядка $p\geqslant 2$ имеет вид $b(\mathbf{D}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha$, где b_α — постоянные $(m\times n)$-матрицы. Предполагается, что $m\geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет ранг n при всех $0\neq \boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$. Основные результаты работы [KuSu] — аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$, где $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, в различных операторных нормах с двупараметрическими оценками погрешности (в зависимости от ε и ζ). Показано, что по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ резольвента $(A_\varepsilon-\zeta I)^{-1}$ сходится к резольвенте эффективного оператора $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ (где g^0 — постоянная эффективная матрица), причем

$$\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1(\zeta)\varepsilon. \tag{0.5}$$

По „энергетической" норме (т. е., по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$) найдена аппроксимация резольвенты при учете корректора:

$$\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2(\zeta)\varepsilon. \tag{0.6}$$

Корректор $K(\zeta;\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители; при этом $\|K(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2\to H^p} = O(\varepsilon^{-p})$. Выяснен характер зависимости $C_1(\zeta)$ и $C_2(\zeta)$ от параметра ζ.

Близкие результаты об усреднении эллиптических операторов высокого порядка в $\mathbb{R}^d$ независимо получены в недавних работах Пастуховой [Pas1, Pas2] с помощью метода сдвига (в этих работах оценки однопараметрические, фиксировано значение $\zeta=-1$).

0.2. **Операторные оценки погрешности для задач усреднения в ограниченной области.** Операторные оценки погрешности изучались также для эллиптических операторов второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами в ограниченной области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ с достаточно гладкой границей. В [Zh, ZhPas1] рассматривались операторы акустики и теории упругости при условии Дирихле либо Неймана на границе $\partial\mathcal{O}$; были получены аналоги оценок (0.2) и (0.3), но с погрешностью порядка $O(\varepsilon^{1/2})$. Погрешность ухудшается за счет влияния границы. (В случае задачи Дирихле для оператора акустики $(L_2\to L_2)$-оценка была улучшена в [ZhPas1], но порядок оценки не был точным.)

Близкие результаты для оператора $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана были установлены в работах Гризо [Gr1, Gr2] с помошью "unfolding"-метода. В статье [Gr2] для того же оператора впервые был получен аналог оценки (0.2) порядка $O(\varepsilon)$ (точной по порядку).

Для матричных операторов второго порядка $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$, заданных выражением (0.1) при условиях Дирихле или Неймана соответственно, операторные оценки погрешности были получены в работах [PSu, Su1, Su2]. В [PSu] изучалась задача Дирихле и была установлена оценка

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_D(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \tag{0.7}$$

Здесь $\mathcal{A}_D^0$ — эффективный оператор с условием Дирихле, а $\mathcal{K}_D(\varepsilon)$ — соответствующий корректор. В [Su1] удалось получить точную по порядку оценку по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$:

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.8}$$

Для задачи Неймана аналогичные результаты получены в [Su2]. Метод работ [PSu, Su1, Su2] основан на использовании результатов для задачи в $\mathbb{R}^d$, введении поправки типа пограничного слоя и получении оценок этой поправки в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Некоторые технические приемы заимствованы из [ZhPas1].

В работе [Su3] получены аппроксимации резольвент $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ и $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ в произвольной точке $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ — двупараметрические аналоги оценок (0.7) и (0.8). В присутствии младших членов аналогичные результаты установлены в [MSu3] в случае условия Дирихле.

Оценка вида (0.8) для равномерно эллиптических систем второго порядка при условиях Дирихле либо Неймана была независимо получена другим методом в работе Кенига, Лина и Шена [KeLiS] при некоторых условиях регулярности коэффициентов.

В недавней работе [Su4] для оператора $A_{D,\varepsilon}$ порядка $2p$ в ограниченной области $\mathcal{O}$ класса C^{2p}, заданного в факторизованной форме (0.4) при условиях Дирихле на границе $\partial\mathcal{O}$, были найдены аппроксимации резольвенты $(A_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ в регулярной точке ζ с оценками погрешности в зависимости от ε и ζ.

0.3. **Основные результаты.** В настоящей работе изучается оператор $A_{N,\varepsilon}$ высокого порядка $2p$ в ограниченной области $\mathcal{O}$ класса C^{2p}, заданный в факторизованной форме (0.4) при условиях Неймана на границе $\partial\mathcal{O}$. *Цель работы* — получение аппроксимаций резольвенты $(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ в регулярной точке ζ с оценками погрешности в зависимости от ε и ζ.

Опишем основные результаты. Пусть $\zeta=|\zeta|e^{i\varphi}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ и $|\zeta|\geqslant 1$. Установлены оценки

$$\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_1(\varphi)\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}, \tag{0.9}$$

$$\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_2(\varphi)\bigl(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}+\varepsilon^p\bigr), \tag{0.10}$$

при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ (где ε_1 — достаточно малое число, зависящее от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ). Здесь A_N^0 — эффективный оператор, заданный выражением $b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})$ с условиями Неймана. Корректор $K_N(\zeta;\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, при этом $\|K_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2\to H^p}=O(\varepsilon^{-p})$. Прослежена зависимость констант $\mathcal{C}_1(\varphi)$ и $\mathcal{C}_2(\varphi)$ от угла φ; оценки (0.9) и (0.10) равномерны по углу φ в секторе $\varphi\in[\varphi_0,2\pi-\varphi_0]$ со сколь угодно малым $\varphi_0>0$. При фиксированном ζ оценка (0.9) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$ (такой же, как в $\mathbb{R}^d$), а оценка (0.10) имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$ (ухудшение порядка объясняется влиянием границы). Оценки (0.9) и (0.10) показывают, что с ростом $|\zeta|$ погрешность приближений резольвенты уменьшается.

Корректор $K_N(\zeta;\varepsilon)$ в общем случае содержит вспомогательный сглаживающий оператор. Мы выделяем дополнительное условие, при котором можно использовать стандартный корректор без сглаживателя.

Помимо аппроксимации резольвенты, мы находим аппроксимацию оператора $g(\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D})(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ (отвечающего „потоку”) по $(L_2\to L_2)$-операторной норме.

Мы находим также аппроксимации резольвенты $(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$, справедливые в более широкой области изменения параметра ζ; при этом характер оценок относительно параметра ζ меняется. Опишем эти результаты. Нижним собственным значением операторов $A_{N,\varepsilon}$ и A_N^0 является точка $\lambda=0$, при этом $\operatorname{Ker}A_{N,\varepsilon}=\operatorname{Ker}A_N^0$. Пусть λ_ε и λ^0 — первые ненулевые собственные значения операторов $A_{N,\varepsilon}$ и A_N^0 соответственно. Пусть $c_\flat>0$ — их общая нижняя грань, т. е., $c_\flat\leqslant\min\{\lambda_\varepsilon,\lambda^0\}$. Рассмотрим значения $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq 0$. Положим $\zeta-c_\flat=|\zeta-c_\flat|e^{i\psi}$. При $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедливы оценки

$$\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathfrak{C}(\zeta)\varepsilon, \tag{0.11}$$

$$\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p\widehat{K}_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\leqslant \bigl(\mathfrak{C}_1(\zeta)\varepsilon\bigr)^{1/2}+\mathfrak{C}_2(\zeta)\varepsilon. \tag{0.12}$$

Вблизи точки $c_\flat$ величины $\mathfrak{C}(\zeta)$, $\mathfrak{C}_1(\zeta)$ и $\mathfrak{C}_2(\zeta)$ ведут себя как $C(\psi)|\zeta-c_\flat|^{-2}$. Прослежена зависимость $C(\psi)$ от угла ψ. Оценки (0.11) и (0.12) равномерны по углу ψ в секторе $\psi\in[\psi_0,2\pi-\psi_0]$ со сколь угодно малым $\psi_0>0$.

0.4. **Метод.** Мы опираемся на результаты для оператора (0.4) порядка $2p$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, полученные в [KuSu] и [Su4] (на оценки (0.5) и (0.6)).

Метод исследования оператора $A_{N,\varepsilon}$ аналогичен случаю операторов второго порядка, а также случаю оператора высокого порядка с условиями Дирихле. Он состоит в рассмотрении ассоциированной задачи в $\mathbb{R}^d$, введении поправки типа пограничного слоя и ее тщательном анализе. Существенную техническую роль играет использование сглаживания по Стеклову (заимствованное из работы [ZhPas1]) и оценки в ε-окрестности границы. Сначала мы доказываем оценку (0.10), а затем оценку (0.9), опираясь на уже доказанное неравенство (0.10) и соображения двойственности.

Оценки (0.11) и (0.12) сравнительно просто выводятся из уже полученных оценок в точке $\zeta = -1$ и подходящих тождеств для резольвент.

Двупараметрические оценки погрешности при аппроксимации резольвенты могут быть применены к изучению усреднения параболических начально-краевых задач. Это применение основано на представлении операторной экспоненты

$$e^{-A_{N,\varepsilon}t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\,d\zeta,$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}$ — подходящий контур. Для операторов второго порядка параболические задачи изучались таким методом в [MSu2]. Применению результатов статьи [Su4] и настоящей работы к изучению параболических задач (для операторов высокого порядка) автор планирует посвятить отдельную работу.

0.5. **План статьи.** Работа состоит из восьми параграфов. §1 посвящен задаче в $\mathbb{R}^d$. Здесь введен класс операторов A_ε в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, описан эффективный оператор A^0, введен сглаживающий оператор и приведены результаты для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$ (из работ [KuSu], [Su4]). В §2 определен оператор $A_{N,\varepsilon}$ с условиями Неймана в ограниченной области, описан эффективный оператор. В §3 приведены вспомогательные утверждения. В §4 сформулированы основные результаты для задачи Неймана — оценки (0.9), (0.10) (теоремы 4.1 и 4.2). Проведены первые два этапа доказательства: рассмотрена ассоциированная задача в $\mathbb{R}^d$ и введена поправка $\mathbf{w}_\varepsilon$ типа пограничного слоя; вопросы сведены к получению оценок норм поправки в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В §5 установлены требуемые оценки норм поправки и завершено доказательство теорем 4.1 и 4.2. В §6 выделен случай, когда можно избавиться от сглаживающего оператора и использовать стандартный корректор. Рассмотрены некоторые специальные случаи. В §7 получена аппроксимация резольвенты $(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\leqslant 1$. В §8 рассмотрена резольвента при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq 0$, — установлены оценки (0.11), (0.12).

0.6. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означает норму, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ — скалярное произведение в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{G}}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$.

Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^n$ обозначаются через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно, $\mathbf{1}=\mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — матрица размера $m\times n$, то $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Классы L_q вектор-функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаются через $L_q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $s\in\mathbb{R}$. Через $H^s_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В случае $n=1$ пишем $L_q(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств векторнозначных или матричнозначных функций.

Жирным шрифтом обозначаются векторные величины. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $iD_j=\partial_j=\partial/\partial x_j$, $j=1,\dots,d$, $\mathbf{D}=-i\nabla=(D_1,\dots,D_d)$. Далее, если

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ — мультииндекс, то $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$, $\mathbf{D}^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$. Для двух мультииндексов α, β запись $\beta \leqslant \alpha$ означает, что $\beta_j \leqslant \alpha_j$, $j = 1, \dots, d$; для числа сочетаний используем обозначение $C_\alpha^\beta = C_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots C_{\alpha_d}^{\beta_d}$.

Используем обозначение $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Через C, c, $\mathfrak{c}$, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные.

§ 1. Задача усреднения в $\mathbb{R}^d$

1.1. **Решетки в $\mathbb{R}^d$.** Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, порожденная базисом $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d$:

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^d : \, \mathbf{n} = \sum_{i=1}^d l_i \mathbf{n}_i, \, l_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \, \mathbf{x} = \sum_{i=1}^d t_i \mathbf{n}_i, \, -\frac{1}{2} < t_i < \frac{1}{2} \right\}.$$

Двойственный по отношению к $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d$ базис $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d$ в $\mathbb{R}^d$ определяется соотношениями $\langle \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = 2\pi \delta_{ij}$. Этот базис порождает *решетку* $\widetilde{\Gamma}$, *двойственную к решетке* Γ. Ниже используются обозначения

$$r_0 = \frac{1}{2} \min_{0 \neq \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{s}|, \quad r_1 = \frac{1}{2} \mathrm{diam}\, \Omega.$$

Через $\widetilde{H}^s(\Omega; \mathbb{C}^n)$ обозначим подпространство тех функций из $H^s(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Если $\varphi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, обозначим

$$\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0.$$

1.2. **Класс операторов.** В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассматривается ДО A_ε порядка $2p$, формально заданный дифференциальным выражением

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — равномерно положительно определенная и ограниченная матрица-функция размера $m \times m$ (вообще говоря, $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами):

$$g, \, g^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad g(\mathbf{x}) > 0. \tag{1.2}$$

Оператор $b(\mathbf{D})$ задан выражением

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha, \tag{1.3}$$

где b_α — постоянные $(m \times n)$-матрицы, вообще говоря, с комплексными элементами. Предполагается, что $m \geqslant n$, а символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \boldsymbol{\xi}^\alpha$ подчинен условию

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.4}$$

Это условие равносильно существованию постоянных α_0 и α_1 таких, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}; \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{1.5}$$

Без ограничения общности будем считать, что нормы матриц b_α ограничены константой $\alpha_1^{1/2}$:

$$|b_\alpha| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad |\alpha| = p. \tag{1.6}$$

Строгое определение оператора A_ε дается через квадратичную форму

$$a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.7}$$

Заметим, что выполнены элементарные неравенства

$$\sum_{|\alpha|=p} |\boldsymbol{\xi}^\alpha|^2 \leqslant |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \leqslant \mathfrak{c}_p \sum_{|\alpha|=p} |\boldsymbol{\xi}^\alpha|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.8}$$

где $\mathfrak{c}_p$ зависит лишь от d и p. С помощью преобразования Фурье и соотношений (1.2), (1.5) и (1.8) легко проверить справедливость оценок

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),$$

где использовано обозначение $|\mathbf{D}^p\mathbf{u}|^2 := \sum_{|\alpha|=p} |\mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}|^2$. Здесь $c_0 = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$, $c_1 = \mathfrak{c}_p \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}$. Следовательно, форма (1.7) замкнута и неотрицательна. Отвечающий ей самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ мы и обозначаем через A_ε.

1.3. **Эффективный оператор.** Опишем эффективный оператор A^0. Пусть $\Lambda \in \widetilde{H}^p(\Omega)$ — матрица-функция размера $n \times m$, являющаяся (слабым) Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right) = 0, \qquad \int\limits_\Omega \Lambda(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.9}$$

Так называемая *эффективная матрица* g^0 размера $m \times m$ строится по следующему правилу:

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \tag{1.10}$$

где

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right). \tag{1.11}$$

Оказывается, что матрица g^0 положительна. *Эффективный оператор* A^0 для оператора (1.1) задается дифференциальным выражением

$$A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \tag{1.12}$$

на области определения $H^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Нам понадобится оценка для символа $L(\boldsymbol{\xi}) = b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi})$ эффективного оператора:

$$L(\boldsymbol{\xi}) \leqslant C_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad C_* = \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}, \tag{1.13}$$

вытекающая из (1.5) и оценки нормы матрицы g^0 (см. (1.15) ниже).

1.4. **Свойства эффективной матрицы.** Следующие свойства эффективной матрицы были проверены в [KuSu, предложение 5.3].

Предложение 1.1. *Обозначим*

$$\overline{g} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \underline{g} := \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

Тогда эффективная матрица g^0 удовлетворяет неравенствам

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{1.14}$$

В случае, когда $m = n$, имеет место равенство $g^0 = \underline{g}$.

Оценки (1.14) известны в теории усреднения для конкретных ДО как вилка Фойгта-Рейсса. Из (1.14) вытекают оценки

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.15}$$

Выделим теперь случаи, когда в (1.14) какое-либо из неравенств превращается в равенство. Следующие два утверждения проверены в [KuSu, предложения 5.4 и 5.5].

Предложение 1.2. *Пусть* $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})$. *Равенство* $g^0 = \overline{g}$ *равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m. \tag{1.16}$$

Предложение 1.3. *Пусть* $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})^{-1}$. *Равенство* $g^0 = \underline{g}$ *равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{v}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{v}_k \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n); \quad k = 1, \dots, m. \tag{1.17}$$

Следующее свойство отмечено в [KuSu, замечание 5.6].

Замечание 1.4. *При условии* $g^0 = \underline{g}$ *матрица* (1.11) *постоянна*: $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$.

1.5. **Сглаживающий оператор по Стеклову.** Нам понадобится вспомогательный оператор S_ε, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ и заданный соотношением

$$(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z})\, d\mathbf{z}. \tag{1.18}$$

Оператор (1.18) называют *сглаживающим по Стеклову*. Отметим, что $\|S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$. Очевидно, $\mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u} = S_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leqslant s$.

Укажем некоторые свойства оператора (1.18); см. [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] или [PSu, предложения 3.1 и 3.2].

Предложение 1.5. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *выполнена оценка*

$$\|S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Предложение 1.6. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$, *причем* $f \in L_2(\Omega)$. *Пусть* $[f^\varepsilon]$ *— оператор умножения на функцию* $f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. *Тогда оператор* $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$ *непрерывен в* $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, *причем*

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \varepsilon > 0.$$

1.6. **Результаты для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$.** В этом пункте мы формулируем результаты об усреднении оператора A_ε в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, полученные в [KuSu] и в [Su4].

Точка $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ является регулярной точкой как для A_ε, так и для A^0. Положим $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, и введем обозначение

$$c(\varphi) = \begin{cases} |\sin\varphi|^{-1}, & \varphi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi) \\ 1, & \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases}. \tag{1.19}$$

Следующая теорема была получена в [KuSu, теорема 8.1].

Теорема 1.7. *Пусть* A_ε *— оператор* (1.1) *и* A^0 *— эффективный оператор* (1.12). *Пусть* $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *и* $c(\varphi)$ *определено в* (1.19). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1 + 1/2p}.$$

Постоянная C_1 *зависит лишь от* d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Чтобы аппроксимировать резольвенту $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, необходимо ввести *корректор*

$$K(\zeta;\varepsilon) := [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}. \tag{1.20}$$

Напомним, что Λ — периодическое решение задачи (1.9), а S_ε — сглаживающий оператор (1.18). Через $[\Lambda^\varepsilon]$ обозначен оператор умножения на матрицу-функцию $\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})$. Оператор (1.20) непрерывно отображает $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Это легко проверить с помощью предложения 1.6, учитывая, что $\Lambda \in \widetilde{H}^p(\Omega)$. При этом $\|K(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2\to H^p} = O(\varepsilon^{-p})$.

Следующий результат был получен в [Su4, теорема 3.3].

Теорема 1.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.7. *Пусть* $K(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (1.20), *а* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (1.11). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)}\\
&\leqslant C_2 \left(c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)\varepsilon^p \right)(1 + |\zeta|^{-1/2}),\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\leqslant C_3 \left(c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)\varepsilon^p \right).
\end{aligned}$$

Постоянные C_2 *и* C_3 *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

§ 2. Задача Неймана в ограниченной области

2.1. **Коэрцитивность.** Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область класса C^{2p}. Наложим дополнительное условие на символ оператора (1.3) при $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$.

Условие 2.1. *Матрица-функция* $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \boldsymbol{\xi}^\alpha$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$, *имеет максимальный ранг*:

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d. \tag{2.1}$$

Отметим, что условие (2.1) более ограничительно, нежели условие (1.4). Согласно [Ne, теорема 7.8 в разделе 3.7], условие 2.1 является необходимым и достаточным для коэрцитивности формы $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}$ на классе $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Предложение 2.2. ([Ne]) *Условие* 2.1 *необходимо и достаточно для существования постоянных* $k_1, k_2 > 0$ *таких, что выполнено неравенство типа Гординга*:

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant k_1 \|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + k_2 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.2}$$

Замечание 2.3.

1) *Предложение* 2.2 *справедливо для любой ограниченной липшицевой области* $\mathcal{O}$.

2) *Постоянные* k_1 *и* k_2 *зависят от символа* $b(\boldsymbol{\xi})$ *и от области* $\mathcal{O}$, *но в общем случае их трудно контролировать явно. Однако, для некоторых конкретных операторов они известны. Поэтому ниже мы отмечаем зависимость других постоянных от* k_1 *и* k_2.

2.2. **Постановка задачи.** В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.3}$$

В силу (1.3) и (1.6) справедлива оценка

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \widetilde{\mathfrak{c}}_p \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}^p \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.4}$$

где постоянная $\widetilde{\mathfrak{c}}_p$ зависит только от d и p. Из (2.2) следует, что

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \geqslant \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} k_1^{-1} \left(\|\mathbf{u}\|^2_{H^p(\mathcal{O})} - k_2 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \right), \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.5}$$

Следовательно, форма (2.3) замкнута и (очевидно) неотрицательна. Порожденный ею самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ мы обозначаем через $A_{N,\varepsilon}$. Формально оператор $A_{N,\varepsilon}$ задан выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ при условиях Неймана (естественных условиях) на границе.

Точка $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ является регулярной точкой для оператора $A_{N,\varepsilon}$. *Наша цель* — найти аппроксимацию при малом ε резольвенты $(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ в различных операторных нормах. Иными словами, нас интересует поведение решения задачи Неймана $\mathbf{u}_\varepsilon := (A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$ при $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Сначала мы будем дополнительно предполагать, что $|\zeta| \geqslant 1$.

Лемма 2.4. *Пусть* $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $c(\varphi)$ *определено в* (1.19). *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon = (A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$, *где* $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\varphi)|\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.6}$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.7}$$

Постоянная $\mathcal{C}_0$ *зависит лишь от* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1 *и* k_2. *В операторных терминах,*

$$\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\varphi)|\zeta|^{-1}, \tag{2.8}$$

$$\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}. \tag{2.9}$$

Доказательство. Поскольку форма (2.3) неотрицательна, то спектр оператора $A_{N,\varepsilon}$ содержится в $\mathbb{R}_+$. Норма резольвенты $(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ не превосходит величины, обратной к расстоянию от точки ζ до $\mathbb{R}_+$. Это влечет (2.8).

Чтобы проверить (2.7), запишем интегральное тождество для $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.10}$$

Подставляя сюда $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon$ и используя (2.6), приходим к неравенству

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с (2.5) и (2.6) это влечет

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|^2_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant c(\varphi)^2 \left(2k_1 \|g^{-1}\|_{L_\infty} |\zeta|^{-1} + k_2 |\zeta|^{-2} \right) \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.11}$$

С учетом ограничения $|\zeta| \geqslant 1$ отсюда вытекает (2.7) с постоянной $\mathcal{C}_0^2 = 2k_1 \|g^{-1}\|_{L_\infty} + k_2$. $\square$

2.3. **Эффективный оператор A_N^0.** В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$a_N^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathcal{O}} \langle g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.12}$$

Здесь g^0 — эффективная матрица, определенная в (1.10). Учитывая (1.15), убеждаемся, что форма (2.12) удовлетворяет оценкам вида (2.4) и (2.5) с теми же постоянными. Таким образом, эта форма замкнута и неотрицательна. Самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, порожденный формой (2.12), обозначим через A_N^0.

В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^{2p}$ область определения оператора A_N^0 содержится в $H^{2p}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и справедлива оценка

$$\|(A_N^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^{2p}(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}, \tag{2.13}$$

где постоянная $\widehat{c}$ зависит от $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1, k_1, k_2 и от области $\mathcal{O}$. Для оправдания этого факта достаточно сослаться на теоремы 2.2 и 2.3 статьи [So].

Замечание 2.5. *Вместо условия $\partial\mathcal{O} \in C^{2p}$ достаточно было бы наложить неявное требование на область: ограниченная область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с липшицевой границей такова, что выполнена оценка* (2.13). *Для такой области остаются справедливыми результаты работы. В случае скалярных эллиптических операторов широкие достаточные условия на $\partial\mathcal{O}$, обеспечивающие справедливость оценки* (2.13), *можно найти в* [KoE] *и* [MaSh, гл. 7] (*в частности, достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O} \in C^{2p-1,\nu}$, $\nu > 1/2$*).

Главным приближением для $\mathbf{u}_\varepsilon$ служит функция $\mathbf{u}_0 := (A_N^0 - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$.

Лемма 2.6. *Пусть $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, и $c(\varphi)$ определено в* (1.19). *Пусть $\mathbf{u}_0 = (A_N^0 - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда при $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\varphi)|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.14}$$

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.15}$$

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^{2p}(\mathcal{O})} \leqslant 2\widehat{c}c(\varphi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.16}$$

В операторных терминах,

$$\|(A_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\varphi)|\zeta|^{-1}, \tag{2.17}$$

$$\|(A_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2},$$

$$\|(A_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{2p}(\mathcal{O})} \leqslant 2\widehat{c}c(\varphi). \tag{2.18}$$

Доказательство. Оценки (2.14) и (2.15) проверяются по аналогии с доказательством леммы 2.4.

Оценка (2.18) вытекает из (2.13) и неравенства

$$\|(A_N^0 + I)(A_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \sup_{x\geqslant 0} \frac{x+1}{|x-\zeta|} \leqslant 2c(\varphi).$$

$\square$

§ 3. Вспомогательные утверждения

3.1. Традиционная лемма теории усреднения.

Лемма 3.1. *Пусть $f_\alpha(\mathbf{x})$, $|\alpha| = p$, — Γ-периодические $(n\times m)$-матрицы-функции в $\mathbb{R}^d$, причем $f_\alpha \in L_2(\Omega)$, $\overline{f_\alpha} = 0$, и выполнено равенство*

$$\sum_{|\alpha|=p} \partial^\alpha f_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \tag{3.1}$$

понимаемое в смысле распределений. Тогда существуют Γ-периодические $(n \times m)$-матрицы-функции $M_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, $|\alpha| = |\beta| = p$, такие что

$$M_{\alpha\beta} \in \widetilde{H}^p(\Omega), \quad \overline{M_{\alpha\beta}} = 0, \quad M_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = -M_{\beta\alpha}(\mathbf{x}), \quad |\alpha| = |\beta| = p, \tag{3.2}$$

$$f_\alpha(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta|=p} \partial^\beta M_{\alpha\beta}(\mathbf{x}), \quad |\alpha| = p. \tag{3.3}$$

При этом выполнены оценки

$$\|M_{\alpha\beta}\|_{H^p(\Omega)} \leqslant \check{\mathfrak{c}}_p \left(\|f_\alpha\|_{L_2(\Omega)} + \|f_\beta\|_{L_2(\Omega)}\right), \quad |\alpha| = |\beta| = p, \tag{3.4}$$

где постоянная $\check{\mathfrak{c}}_p$ зависит лишь от d, p и параметров решетки Γ.

Доказательство. Пусть $|\alpha| = p$ и пусть $(n \times m)$-матрица-функция $\Phi_\alpha(\mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи

$$\widetilde{\Delta}_p \Phi_\alpha(\mathbf{x}) = f_\alpha(\mathbf{x}), \quad \int_\Omega \Phi_\alpha(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \tag{3.5}$$

где $\widetilde{\Delta}_p := \sum_{|\beta|=p} \partial^{2\beta}$. Решение существует и единственно. При этом $\Phi_\alpha \in \widetilde{H}^{2p}(\Omega)$, причем

$$\|\Phi_\alpha\|_{H^{2p}(\Omega)} \leqslant \check{\mathfrak{c}}_p \|f_\alpha\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.6}$$

где постоянная $\check{\mathfrak{c}}_p$ зависит лишь от d, p и параметров решетки Γ. Эти свойства легко проверяются с помощью рядов Фурье.

Положим

$$M_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) := \partial^\beta \Phi_\alpha(\mathbf{x}) - \partial^\alpha \Phi_\beta(\mathbf{x}), \quad |\alpha| = |\beta| = p. \tag{3.7}$$

Свойства (3.2), очевидно, выполнены.

Далее, заметим, что в силу (3.1) и (3.5) матрица-функция $\Psi(\mathbf{x}) := \sum_{|\beta|=p} \partial^\beta \Phi_\beta(\mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи $\widetilde{\Delta}_p \Psi(\mathbf{x}) = 0$, $\overline{\Psi} = 0$, а потому $\Psi(\mathbf{x}) = 0$. Вместе с (3.5) и (3.7) это влечет

$$\sum_{|\beta|=p} \partial^\beta M_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta|=p} \partial^{2\beta} \Phi_\alpha(\mathbf{x}) - \sum_{|\beta|=p} \partial^\beta \partial^\alpha \Phi_\beta(\mathbf{x}) = \widetilde{\Delta}_p \Phi_\alpha(\mathbf{x}) - \partial^\alpha \Psi(\mathbf{x}) = f_\alpha(\mathbf{x}),$$

что доказывает (3.3). Оценки (3.4) вытекают из (3.6) и (3.7). $\square$

3.2. **Свойства матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$.** Ниже нам понадобятся следующие оценки норм периодического решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (1.9) (см. [KuSu, следствие 5.8]):

$$\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} C_\Lambda^{(1)}, \quad C_\Lambda^{(1)} = m^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \tag{3.8}$$

$$\|\Lambda\|_{H^p(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} C_\Lambda, \quad C_\Lambda = C_\Lambda^{(1)} \alpha_0^{-1/2} \Bigl(\sum_{|\beta| \leqslant p} (2r_0)^{-2(p-|\beta|)} \Bigr)^{1/2}. \tag{3.9}$$

3.3. **Оценки в окрестности границы.** В этом пункте мы формулируем два простых вспомогательных утверждения, справедливых для ограниченных областей $\mathcal{O}$ с липшицевой границей. Точнее, предполагается следующее.

Условие 3.2. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область. Положим $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}; \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\}$. Пусть существует число $\varepsilon_0 \in (0,1]$ такое, что полоску $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0}$ можно покрыть конечным числом окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса $C^{0,1}$, распрямляющие границу $\partial\mathcal{O}$. Обозначим $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$, где $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.*

Очевидно, условие 3.2 менее ограничительно, чем сделанное выше предположение $\partial\mathcal{O} \in C^{2p}$.

Лемма 3.3. *Пусть выполнено условие* 3.2. *Для любой функции $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ справедлива оценка*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |u|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_0 \varepsilon \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Постоянная β_0 зависит только от области $\mathcal{O}$.

Лемма 3.4. *Пусть выполнено условие* 3.2. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$ такая, что $f \in L_2(\Omega)$. Пусть S_ε — оператор* (1.18). *Обозначим $\beta_* = \beta_0(1+r_1)$, $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ для любой функции $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ справедлива оценка*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Лемма 3.4 аналогична лемме 2.6 из [ZhPas1]. Леммы 3.3 и 3.4 были проверены в [PSu, §5] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^1$, но доказательства автоматически переносятся и на случай условия 3.2.

§ 4. Результаты для задачи Неймана

4.1. **Аппроксимация резольвенты** $(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ **при** $|\zeta|\geqslant 1$. Сформулируем наши основные результаты.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область класса C^{2p}. Пусть $\zeta=|\zeta|e^{i\varphi}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, и $c(\varphi)$ определено в (1.19). Пусть операторы $A_{N,\varepsilon}$ и A_N^0 отвечают квадратичным формам (2.3) и (2.12) соответственно. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon=(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\mathbf{F}$ и $\mathbf{u}_0=(A_N^0-\zeta I)^{-1}\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Пусть число ε_1 выбрано в соответствии с условием 3.2. Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_1 c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_1 c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}. \tag{4.1}$$

Постоянная $\mathcal{C}_1$ зависит лишь от d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Для аппроксимации $\mathbf{u}_\varepsilon$ в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нужно ввести корректор. Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O}: H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\quad s=0,1,\dots,2p.$$

Такой оператор существует (см., например, [St]). Обозначим

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^s(\mathcal{O})\to H^s(\mathbb{R}^d)}=:C_\mathcal{O}^{(s)},\quad s=0,1,\dots,2p. \tag{4.2}$$

Постоянные $C_\mathcal{O}^{(s)}$ зависят лишь от области $\mathcal{O}$ и от s. Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Введем корректор

$$K_N(\zeta;\varepsilon)=R_\mathcal{O}[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(A_N^0-\zeta I)^{-1}. \tag{4.3}$$

Оператор $K_N(\zeta;\varepsilon)$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Действительно, оператор $b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ непрерывно отображает $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, а оператор $[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен из $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (это следует из предложения 1.6 и включения $\Lambda\in\widetilde{H}^p(\Omega)$).

Пусть $\mathbf{u}_0=(A_N^0-\zeta I)^{-1}\mathbf{F}$. Обозначим $\widetilde{\mathbf{u}}_0:=P_\mathcal{O}\mathbf{u}_0$. Положим

$$\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\mathbf{x}):=\widetilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})+\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \tag{4.4}$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon:=\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon|_\mathcal{O}. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\mathbf{v}_\varepsilon=(A_N^0-\zeta I)^{-1}\mathbf{F}+\varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{4.6}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Пусть $K_N(\zeta;\varepsilon)$ — оператор (4.3). Пусть функция $\mathbf{v}_\varepsilon$ определена в (4.6). Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_2\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p}+c(\varphi)\varepsilon^p\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.7}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \mathcal{C}_2\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p}+c(\varphi)\varepsilon^p\right).\end{aligned} \tag{4.8}$$

Пусть $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция (1.11). Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_3\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p}+c(\varphi)\varepsilon^p\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.9}$$

Постоянные $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{C}_3$ зависят лишь от d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Замечание 4.3.

1) *При фиксированном $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, оценки из теоремы* 4.1 *имеют точный порядок $O(\varepsilon)$.*

2) *При фиксированном $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, оценки из теоремы* 4.2 *имеют порядок $O(\varepsilon^{1/2})$. Это объясняется влиянием границы области.*

3) *С ростом $|\zeta|$ погрешность аппроксимаций из теорем* 4.1 *и* 4.2 *уменьшается.*

4) *Оценки из теорем* 4.1 *и* 4.2 *равномерны по углу φ в области вида $\{\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} : |\zeta| \geqslant 1, \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \varphi_0\}$ со сколь угодно малым $\varphi_0 > 0$.*

4.2. **Первый этап доказательства. Ассоциированная задача в $\mathbb{R}^d$.** Доказательство теорем 4.1 и 4.2 опирается на применение результатов для задачи в $\mathbb{R}^d$ и выделение поправки типа пограничного слоя.

В силу леммы 2.6 и (4.2) справедливы оценки

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(0)} c(\varphi)|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.10}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(p)} c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.11}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(2p)} c(\varphi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.12}$$

где $C^{(p)} = C_{\mathcal{O}}^{(p)}\mathcal{C}_0$, $C^{(2p)} = 2C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\widehat{c}$. Интерполируя между (4.11) и (4.12), получаем

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+k}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(p+k)} c(\varphi)|\zeta|^{-1/2+k/2p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad k = 0, 1, \ldots, p. \tag{4.13}$$

Здесь $C^{(p+k)} = (C^{(p)})^{1-k/p}(C^{(2p)})^{k/p}$.

Положим

$$\widetilde{\mathbf{F}} := A^0\widetilde{\mathbf{u}}_0 - \zeta\widetilde{\mathbf{u}}_0. \tag{4.14}$$

Тогда $\widetilde{\mathbf{F}} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\widetilde{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{F}$. Из (1.13), (4.10) и (4.12) вытекает оценка

$$\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_*\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)} + |\zeta|\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_4 c(\varphi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.15}$$

где $\mathcal{C}_4 = C_* C^{(2p)} + C_{\mathcal{O}}^{(0)}$. Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \in H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ — обобщенное решение уравнения в $\mathbb{R}^d$:

$$A_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \zeta\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{F}}, \tag{4.16}$$

т. е., $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = (A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}\widetilde{\mathbf{F}}$. Применимы теоремы из §1. Из теорем 1.7 и 1.8 с учетом (4.14)–(4.16) следует, что при $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1\mathcal{C}_4 c(\varphi)^3\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.17}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2C_2\mathcal{C}_4\left(c(\varphi)^3\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^2\varepsilon^p\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.18}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_3\mathcal{C}_4\left(c(\varphi)^3\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^2\varepsilon^p\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.19}$$

Мы учли ограничение $|\zeta| \geqslant 1$.

4.3. **Второй этап доказательства. Введение поправки типа пограничного слоя.** Введем „поправку" $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ как функцию, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned}&(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}\\ &= (\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\zeta\mathbf{u}_0 + \mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{4.20}$$

Поскольку правая часть здесь является антилинейным непрерывным функционалом над $\boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, стандартным образом проверяется, что решение $\mathbf{w}_\varepsilon$ существует и единственно.

Покажем, что учет поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ позволяет получить приближение для $\mathbf{u}_\varepsilon$ по H^p-норме с точной по порядку погрешностью $O(\varepsilon)$.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.2. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon$ *удовлетворяет тождеству* (4.20). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5 \left(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.21}$$

Постоянная $\mathcal{C}_5$ *зависит лишь от* d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = (A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} \widetilde{\mathbf{F}}$. Обозначим $\mathbf{V}_\varepsilon := \mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon$. В силу (2.10) и (4.20) функция $\mathbf{V}_\varepsilon \in H^p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} &(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta (\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= (\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} + \zeta (\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \end{aligned} \tag{4.22}$$

при $\boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Обозначим правую часть в (4.22) через $\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]$. Из (4.17) и (4.19) следует, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| &\leqslant C_3 \mathcal{C}_4 \left(c(\varphi)^3 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^2 \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + C_1 \mathcal{C}_4 c(\varphi)^3 \varepsilon |\zeta|^{1/2p} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ в (4.22):

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta \|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{I}_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon]. \tag{4.24}$$

Возьмем мнимую часть в (4.24) и воспользуемся оценкой (4.23). Тогда

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\,\zeta| \|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant C_3 \mathcal{C}_4 \left(c(\varphi)^3 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^2 \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + C_1 \mathcal{C}_4 c(\varphi)^3 \varepsilon |\zeta|^{1/2p} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Если $\mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0$ (а тогда $\mathrm{Im}\,\zeta \neq 0$), отсюда выводим неравенство

$$\begin{aligned} |\zeta| \|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 2 C_3 \mathcal{C}_4 \left(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + C_1^2 \mathcal{C}_4^2 c(\varphi)^8 \varepsilon^2 |\zeta|^{-1+1/p} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Если $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$, то возьмем вещественную часть в (4.24) и получим

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\,\zeta| \|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant C_3 \mathcal{C}_4 \left(\varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + C_1 \mathcal{C}_4 \varepsilon |\zeta|^{1/2p} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathrm{Re}\,\zeta < 0. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Мы учли, что $c(\varphi) = 1$ при $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$. Складывая (4.25) и (4.27), выводим неравенство

$$\begin{aligned} |\zeta| \|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 4 C_3 \mathcal{C}_4 \left(\varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + 4 C_1^2 \mathcal{C}_4^2 \varepsilon^2 |\zeta|^{-1+1/p} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathrm{Re}\,\zeta < 0. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Из (4.26) и (4.28) вытекает, что при всех рассматриваемых значениях параметра ζ выполнено

$$\begin{aligned} |\zeta| \|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 4 C_3 \mathcal{C}_4 \left(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + 4 C_1^2 \mathcal{C}_4^2 c(\varphi)^8 \varepsilon^2 |\zeta|^{-1+1/p} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Теперь, рассматривая вещественную часть в (4.24) и используя (4.23) и (4.29), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} &(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant |\mathcal{I}_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon]| + |\zeta| \|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant 9 C_3 \mathcal{C}_4 \left(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|b(\mathbf{D}) \mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ 9 C_1^2 \mathcal{C}_4^2 c(\varphi)^8 \varepsilon^2 |\zeta|^{-1+1/p} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим оценку

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_6 \left(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.30}$$

где $\mathcal{C}_6^2 = 81\|g^{-1}\|^2_{L_\infty} C_3^2 \mathcal{C}_4^2 + 18\|g^{-1}\|_{L_\infty} C_1^2 \mathcal{C}_4^2$. Вместе с (4.29) это влечет

$$|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_7 \left(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.31}$$

где $\mathcal{C}_7^2 = 4C_3\mathcal{C}_4\mathcal{C}_6 + 4C_1^2\mathcal{C}_4^2$.

Из (2.2), (4.30) и (4.31) с учетом неравенства $|\zeta| \geqslant 1$ вытекает, что

$$\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_8 \left(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.32}$$

где $\mathcal{C}_8^2 = k_1\mathcal{C}_6^2 + k_2\mathcal{C}_7^2$.

Наконец, оценки (4.18) и (4.32) приводят к искомому неравенству (4.21) с постоянной $\mathcal{C}_5 = 2C_2\mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_8$. $\square$

Дальнейший план доказательства теорем 4.1 и 4.2 таков. Мы сначала докажем оценку (4.8) при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$. Затем установим (4.1) также при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$, используя уже доказанную оценку (4.8) и соображения двойственности. После этого мы завершим доказательства теорем, опираясь на подходящие тождества для резольвент, позволяющие переносить уже доказанные оценки из точки ζ в левой полуплоскости в симметричную точку в правой полуплоскости. (Последний прием заимствован из [MSu3, § 10].)

Выводы. 1) Из (4.21) следует неравенство

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5 \left(\varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0, \quad |\zeta| \geqslant 1. \tag{4.33}$$

Поэтому для доказательства оценки (4.8) (при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$) нужно оценить норму поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

2) Из (4.17) и (4.31) видно, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_7 \left(\varepsilon |\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^p |\zeta|^{-1/2} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0, \quad |\zeta| \geqslant 1, \tag{4.34}$$

где $\widetilde{\mathcal{C}}_7 = \mathcal{C}_7 + C_1\mathcal{C}_4$. Поэтому для доказательства теоремы 4.1 (при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$) необходимо оценить норму поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

§ 5. Доказательство теорем 4.1 и 4.2

5.1. **Случай $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$. Оценка поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.** Обозначим

$$\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] := (\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.1}$$

Функция $\mathbf{u}_0$ удовлетворяет тождеству

$$(g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\zeta\mathbf{u}_0 + \mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.2}$$

Из (4.20) и (5.2) видно, что для $\mathbf{w}_\varepsilon$ выполнено тождество

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}], \quad \boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.3}$$

Лемма 5.1. *Пусть $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$ и $|\zeta| \geqslant 1$. Пусть число ε_1 выбрано в соответствии с условием 3.2. При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ функционал (5.1) подчинен оценке*

$$|\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant \mathcal{C}_9 \left(\varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.4}$$

Постоянная $\mathcal{C}_9$ зависит лишь от d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Доказательство. Представим функционал (5.1) в виде

$$\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] = \mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}], \tag{5.5}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] := (g^0 S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.6}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] := ((\widetilde{g}^\varepsilon - g^0) S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.7}$$

Член (5.6) легко оценить с помощью предложения 1.5 и соотношений (1.3), (1.5), (1.6), (1.15) и (4.13):

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}]| &\leqslant |g^0| \|(S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}_{10}\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \end{aligned} \tag{5.8}$$

где $\mathcal{C}_{10} = \|g\|_{L_\infty} r_1 \alpha_1 C^{(p+1)} \widetilde{\mathfrak{c}}_p^{1/2}$.

Используя (1.3), преобразуем член (5.7):

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \sum_{|\alpha|=p} (f_\alpha^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, \mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.9}$$

где $f_\alpha(\mathbf{x}) := b_\alpha^*(\widetilde{g}(\mathbf{x}) - g^0)$, $|\alpha| = p$. В силу (1.6), (1.10), (1.11) и (3.8) справедливы оценки

$$\|f_\alpha\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{C}, \quad |\alpha| = p, \quad \mathfrak{C} = \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} |\Omega|^{1/2} (C_\Lambda^{(1)} + 1). \tag{5.10}$$

Из (1.3) и (1.9)–(1.11) видно, что функции $f_\alpha(\mathbf{x})$, $|\alpha| = p$, удовлетворяют условиям леммы 3.1. Следовательно, существуют Γ-периодические матрицы-функции $M_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, $|\alpha| = |\beta| = p$, такие что выполнены соотношения (3.2)–(3.4). Из (3.4) и (5.10) вытекают оценки

$$\|M_{\alpha\beta}\|_{H^p(\Omega)} \leqslant \check{\mathfrak{C}}, \quad \check{\mathfrak{C}} := 2\check{\mathfrak{c}}_p \mathfrak{C}, \quad |\alpha| = |\beta| = p. \tag{5.11}$$

В силу (3.3) выполнено

$$f_\alpha^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^p \sum_{|\beta|=p} \partial^\beta M_{\alpha\beta}^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad |\alpha| = p,$$

а потому член (5.9) можно представить в виде

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \varepsilon^p \sum_{|\alpha|=|\beta|=p} \Big((\partial^\beta M_{\alpha\beta}^\varepsilon) S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, \mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\eta} \Big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.12}$$

Имеем:

$$(\partial^\beta M_{\alpha\beta}^\varepsilon) S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 = \partial^\beta \left(M_{\alpha\beta}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 \right) - \sum_{\gamma \leqslant \beta : |\gamma| \geqslant 1} C_\beta^\gamma (\partial^{\beta-\gamma} M_{\alpha\beta}^\varepsilon) S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial^\gamma \widetilde{\mathbf{u}}_0.$$

Следовательно, функционал (5.12) можно записать в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] + \widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}], \tag{5.13}$$

$$\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] := \varepsilon^p \sum_{|\alpha|=|\beta|=p} \Big(\partial^\beta \left(M_{\alpha\beta}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 \right), \mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\eta} \Big)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.14}$$

$$\widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] := -\sum_{|\alpha|=|\beta|=p} \sum_{\gamma \leqslant \beta : |\gamma| \geqslant 1} \varepsilon^{|\gamma|} C_\beta^\gamma \Big((\partial^{\beta-\gamma} M_{\alpha\beta})^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial^\gamma \widetilde{\mathbf{u}}_0, \mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\eta} \Big)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.15}$$

Член (5.15) оценим, применяя предложение 1.6 и соотношения (1.5), (5.11):

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]| &\leqslant c_1(d,p) \sum_{|\alpha|=|\beta|=p} \sum_{\gamma \leqslant \beta : |\gamma| \geqslant 1} \varepsilon^{|\gamma|} |\Omega|^{-1/2} \|\partial^{\beta-\gamma} M_{\alpha\beta}\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D}) \partial^\gamma \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant c_2(d,p) |\Omega|^{-1/2} \check{\mathfrak{C}} \alpha_1^{1/2} \sum_{l=1}^p \varepsilon^l \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+l}(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Вместе с (4.13) это влечет

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]| &\leqslant \mathcal{C}_{11} \sum_{l=1}^{p} \varepsilon^l |\zeta|^{-1/2+l/2p} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant p\,\mathcal{C}_{11} \left(\varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Здесь $\mathcal{C}_{11} = c_2(d,p)|\Omega|^{-1/2} \check{\mathfrak{C}} \alpha_1^{1/2} \max_{1 \leqslant l \leqslant p} \{C^{(p+l)}\}$.

Рассмотрим теперь член (5.14). Фиксируем гладкую срезку θ_ε в $\mathbb{R}^d$ такую, что

$$
\begin{aligned}
&\theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{supp} \theta_\varepsilon \subset (\partial \mathcal{O})_\varepsilon, \quad 0 \leqslant \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1, \\
&\theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in (\partial \mathcal{O})_{\varepsilon/2}, \quad \varepsilon^l |\mathbf{D}^l \theta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \varkappa, \ l = 1, \dots, p.
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

Постоянная $\varkappa$ зависит только от области $\mathcal{O}$. Справедливо тождество

$$
\sum_{|\alpha|=|\beta|=p} \left(\partial^\beta \left((1-\theta_\varepsilon) M_{\alpha\beta}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0 \right), \mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\eta} \right)_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n),
$$

что проверяется интегрированием по частям при учете соотношений $M_{\alpha\beta} = -M_{\beta\alpha}$ (см. (3.2)). Следовательно, член (5.14) допускает запись в виде

$$
\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \sum_{|\alpha|=p} \left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(\varepsilon), \mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\eta} \right)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.18}
$$

где

$$
\boldsymbol{\psi}_\alpha(\varepsilon) := \varepsilon^p \sum_{|\beta|=p} \partial^\beta \left(\theta_\varepsilon M_{\alpha\beta}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0 \right), \quad |\alpha| = p. \tag{5.19}
$$

Далее, имеем

$$
\boldsymbol{\psi}_\alpha(\varepsilon) := \varepsilon^p \sum_{|\beta|=p} \sum_{\gamma \leqslant \beta} \sum_{\nu \leqslant \beta-\gamma} C_\beta^\gamma C_{\beta-\gamma}^\nu (\partial^\gamma \theta_\varepsilon)(\partial^{\beta-\gamma-\nu} M_{\alpha\beta}^\varepsilon) S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial^\nu \widetilde{\mathbf{u}}_0. \tag{5.20}
$$

При $k = |\nu| \geqslant 1$ воспользуемся предложением 1.6 и соотношениями (1.5), (4.13), (5.11) и (5.17):

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^p \|(\partial^\gamma \theta_\varepsilon)(\partial^{\beta-\gamma-\nu} M_{\alpha\beta}^\varepsilon) S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial^\nu \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \varkappa \varepsilon^k \|(\partial^{\beta-\gamma-\nu} M_{\alpha\beta})^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial^\nu \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \varkappa \varepsilon^k |\Omega|^{-1/2} \check{\mathfrak{C}} \alpha_1^{1/2} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+k}(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \mathcal{C}^{(k)} \varepsilon^k |\zeta|^{-1/2+k/2p} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},
\end{aligned}
\tag{5.21}
$$

где $\mathcal{C}^{(k)} = \varkappa |\Omega|^{-1/2} \check{\mathfrak{C}} \alpha_1^{1/2} C^{(p+k)}$.

При $\nu = 0$ применим лемму 3.4. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. С учетом (5.17) имеем:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^p \|(\partial^\gamma \theta_\varepsilon)(\partial^{\beta-\gamma} M_{\alpha\beta}^\varepsilon) S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \varkappa \|(\partial^{\beta-\gamma} M_{\alpha\beta})^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} \\
&\leqslant \varepsilon^{1/2} \varkappa \beta_*^{1/2} |\Omega|^{-1/2} \|\partial^{\beta-\gamma} M_{\alpha\beta}\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^{1/2} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Вместе с (1.5), (4.13) и (5.11) это влечет

$$
\varepsilon^p \|(\partial^\gamma \theta_\varepsilon)(\partial^{\beta-\gamma} M_{\alpha\beta}^\varepsilon) S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_{12} \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/2+1/4p} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.22}
$$

где $\mathcal{C}_{12} = \varkappa \beta_*^{1/2} |\Omega|^{-1/2} \check{\mathfrak{C}} \alpha_1^{1/2} (C^{(p+1)} C^{(p)})^{1/2}$.

Оценивая слагаемые из (5.20) при $k = |\nu| \geqslant 1$ с помощью (5.21), а слагаемые с $\nu = 0$ с помощью (5.22), приходим к неравенству

$$\|\boldsymbol{\psi}_\alpha(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_{13} \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \sum_{k=1}^{p} \varepsilon^k |\zeta|^{-1/2+k/2p} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\mathcal{C}_{13} = c_3(d,p)\max\{\mathcal{C}_{12}, \mathcal{C}^{(1)}, \dots, \mathcal{C}^{(p)}\}$. Легко видеть, что выражение в скобках оценивается через $(p+1)(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p)$. Следовательно,

$$\|\boldsymbol{\psi}_\alpha(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (p+1)\,\mathcal{C}_{13} \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad |\alpha| = p. \tag{5.23}$$

Вместе с (5.18) это влечет

$$|\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant \mathcal{C}_{14} \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \tag{5.24}$$

с постоянной $\mathcal{C}_{14} = c_4(d,p)\mathcal{C}_{13}$.

В итоге, соотношения (5.5), (5.8), (5.13), (5.16) и (5.24) приводят к искомой оценке (5.4) с постоянной $\mathcal{C}_9 = \mathcal{C}_{10} + 2p\,\mathcal{C}_{11} + \mathcal{C}_{14}$. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть* $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$. *Пусть число* ε_1 *выбрано в соответствии с условием* 3.2. *Пусть функция* $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ *удовлетворяет тождеству* (4.20). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{15} \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.25}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{15}$ *зависит лишь от* d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. В тождество (5.3) подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_\varepsilon$ и рассмотрим мнимую часть получившегося равенства. С учетом (5.4) получаем

$$|\operatorname{Im}\zeta| \|\mathbf{w}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant |\mathcal{J}_\varepsilon[\mathbf{w}_\varepsilon]| \leqslant \mathcal{C}_9 \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.26}$$

Теперь возьмем вещественную часть полученного равенства, учитывая условие $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$. Находим

$$|\operatorname{Re}\zeta| \|\mathbf{w}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_9 \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.27}$$

Складывая (5.26) и (5.27), получаем

$$|\zeta| \|\mathbf{w}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathcal{C}_9 \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.28}$$

С другой стороны, из (5.3) (при $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_\varepsilon$) и (5.4) вытекает оценка

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon] \leqslant \mathcal{C}_9 \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.29}$$

Сопоставляя (2.5), (5.28) и (5.29), с учетом ограничения $|\zeta| \geqslant 1$, получаем неравенство

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|^2_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{15} \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.30}$$

где $\mathcal{C}_{15} = \mathcal{C}_9(k_1\|g^{-1}\|_{L_\infty} + 2k_2)$. Отсюда вытекает требуемая оценка (5.25). $\square$

5.2. **Завершение доказательства оценки** (4.8) **при** $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$. Из (4.33) и (5.25) вытекает, что при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$, $|\zeta| \geqslant 1$, и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_5 \left(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_{15} \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}_2' \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0, \quad |\zeta| \geqslant 1, \end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_2' = 2\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_{15}$. Это доказывает оценку (4.8) в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} &\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^p(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}_2' \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right), \quad \operatorname{Re}\zeta \leqslant 0, \quad |\zeta| \geqslant 1, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{5.31}$$

5.3. **Оценка поправки** $\mathbf{w}_\varepsilon$ **в** L_2.

Лемма 5.3. *Пусть* $\operatorname{Re}\zeta \leqslant 0$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$. *Пусть число* ε_1 *выбрано в соответствии с условием* 3.2. *Пусть функция* $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *удовлетворяет тождеству* (4.20). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{16} \left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.32}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{16}$ *зависит лишь от* d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. В тождество (5.3) в качестве пробной функции подставим

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon = (A_{N,\varepsilon} - \overline{\zeta} I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}, \quad \boldsymbol{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).$$

Тогда левая часть (5.3) может быть записана в виде $(\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}$. Следовательно,

$$(\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]. \tag{5.33}$$

Считаем, что $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Используя (5.5), (5.8), (5.13) и (5.16), имеем

$$|\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]| \leqslant (\mathcal{C}_{10} + p\,\mathcal{C}_{11}) \left(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]|.$$

Применяя лемму 2.4 для оценивания $\|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$, приходим к неравенству

$$|\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]| \leqslant \mathcal{C}_{17} \left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]|, \tag{5.34}$$

где $\mathcal{C}_{17} = 2\mathcal{C}_0(\mathcal{C}_{10} + p\,\mathcal{C}_{11})$.

Рассмотрим член $|\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]|$, используя представление (5.18). Для аппроксимации функции $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ применим уже доказанную оценку (5.31) (в точке $\overline{\zeta}$). Положим $\boldsymbol{\eta}_0 = (A_N^0 - \overline{\zeta} I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$, $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 = P_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\eta}_0$. Имеем

$$\|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2' \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right) \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.35}$$

Согласно (5.18),

$$\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon] = \mathcal{L}_1(\varepsilon) + \mathcal{L}_2(\varepsilon) + \mathcal{L}_3(\varepsilon), \tag{5.36}$$

$$\mathcal{L}_1(\varepsilon) = \sum_{|\alpha|=p} \left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(\varepsilon), \mathbf{D}^\alpha(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0)\right)_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\mathcal{L}_2(\varepsilon) = \sum_{|\alpha|=p} \left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(\varepsilon), \mathbf{D}^\alpha \boldsymbol{\eta}_0\right)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.37}$$

$$\mathcal{L}_3(\varepsilon) = \sum_{|\alpha|=p} \left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(\varepsilon), \mathbf{D}^\alpha(\varepsilon^p \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0)\right)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.38}$$

Применяя (5.23) и (5.35), приходим к оценке

$$|\mathcal{L}_1(\varepsilon)| \leqslant \mathcal{C}_{18} \left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.39}$$

где $\mathcal{C}_{18} = 2c_4(d,p)\mathcal{C}_2'\mathcal{C}_{13}$.

С учетом (5.17), (5.19) и (5.23) для члена (5.37) справедлива оценка

$$|\mathcal{L}_2(\varepsilon)| \leqslant c_4(d,p)\mathcal{C}_{13}\left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|\mathbf{D}^p\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2}.$$

Применяя лемму 3.3 и оценки (4.11), (4.13) (для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$), отсюда получаем

$$|\mathcal{L}_2(\varepsilon)| \leqslant \mathcal{C}_{19}\left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.40}$$

где $\mathcal{C}_{19} = 2c_4(d,p)\mathcal{C}_{13}\beta_0^{1/2}(C^{(p)}C^{(p+1)})^{1/2}$.

Остается оценить член (5.38), который можно записать в виде

$$\mathcal{L}_3(\varepsilon) = \mathcal{L}_3^{(1)}(\varepsilon) + \mathcal{L}_3^{(2)}(\varepsilon), \tag{5.41}$$

$$\mathcal{L}_3^{(1)}(\varepsilon) = \sum_{|\alpha|=p}\left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(\varepsilon), (\mathbf{D}^\alpha\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\right)_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\mathcal{L}_3^{(2)}(\varepsilon) = \sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta\varepsilon^{|\beta|}\left(\boldsymbol{\psi}_\alpha(\varepsilon), (\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{D}^\beta\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\right)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В силу (5.17), (5.19) и (5.23) имеем

$$|\mathcal{L}_3^{(1)}(\varepsilon)| \leqslant c_4(d,p)\mathcal{C}_{13}\left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|(\mathbf{D}^p\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2}.$$

Применяя лемму 3.4, соотношения (1.5), (3.9), и аналоги оценок (4.11), (4.13) для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$, приходим к неравенству

$$|\mathcal{L}_3^{(1)}(\varepsilon)| \leqslant \mathcal{C}_{20}\left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.42}$$

где $\mathcal{C}_{20} = 2c_4(d,p)C_\Lambda\mathcal{C}_{13}(\beta_*\alpha_1 C^{(p)}C^{(p+1)})^{1/2}$.

Далее, в силу предложения 1.6, (1.5), (3.9) и (5.23) справедливо неравенство

$$|\mathcal{L}_3^{(2)}(\varepsilon)| \leqslant c_5(d,p)\mathcal{C}_{13}\left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\alpha_1^{1/2}C_\Lambda\sum_{k=1}^p\varepsilon^k\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^{p+k}(\mathbb{R}^d)}.$$

Вместе с аналогом (4.13) для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ это влечет

$$|\mathcal{L}_3^{(2)}(\varepsilon)| \leqslant \mathcal{C}_{21}\left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right)\left(\sum_{k=1}^p\varepsilon^k|\zeta|^{-1/2+k/2p}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\mathcal{C}_{21} = c_5(d,p)\mathcal{C}_{13}\alpha_1^{1/2}C_\Lambda\max\{C^{(p+1)},\dots,C^{(2p)}\}$. Отсюда вытекает оценка

$$|\mathcal{L}_3^{(2)}(\varepsilon)| \leqslant 2p\,\mathcal{C}_{21}\left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.43}$$

В итоге, соотношения (5.36) и (5.39)–(5.43) влекут

$$|\widetilde{\mathcal{J}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]| \leqslant \mathcal{C}_{22}\left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.44}$$

где $\mathcal{C}_{22} = \mathcal{C}_{18} + \mathcal{C}_{19} + \mathcal{C}_{20} + 2p\,\mathcal{C}_{21}$. Теперь неравенства (5.34) и (5.44) приводят к оценке

$$|\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]| \leqslant \mathcal{C}_{16}\left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\mathcal{C}_{16} = \mathcal{C}_{17} + \mathcal{C}_{22}$. С учетом (5.33) это дает искомую оценку (5.32). $\square$

5.4. **Завершение доказательства оценки** (4.1) **при** $\mathrm{Re}\,\zeta \leqslant 0$. Пусть $\mathrm{Re}\,\zeta \leqslant 0$ и $|\zeta| \geqslant 1$. Из (4.34) и (5.32) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_7 \left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^p|\zeta|^{-1/2}\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_{16} \left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}_{23} \left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_{23} = 2\widetilde{\mathcal{C}}_7 + \mathcal{C}_{16}$. В операторных терминах это означает, что

$$\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{23} \left(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\right). \tag{5.45}$$

Если $\varepsilon \leqslant |\zeta|^{-1/2p}$, то $\varepsilon^{2p} \leqslant \varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}$, а потому правая часть в (5.45) не превосходит $2\mathcal{C}_{23}\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}$. В случае, когда $\varepsilon > |\zeta|^{-1/2p}$, применим (2.8) и (2.17). Тогда левая часть в (5.45) не превосходит $2|\zeta|^{-1} \leqslant 2\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}$. В итоге получаем требуемую оценку

$$\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1'\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}, \quad \mathrm{Re}\,\zeta \leqslant 0,\ |\zeta| \geqslant 1, \tag{5.46}$$

где $\mathcal{C}_1' = 2\max\{\mathcal{C}_{23}, 1\}$.

5.5. **Случай** $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$. **Завершение доказательства теоремы 4.1.** Пусть теперь $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$, $|\zeta| \geqslant 1$. Положим $\widehat{\zeta} = -\mathrm{Re}\,\zeta + i\mathrm{Im}\,\zeta$. Тогда $|\widehat{\zeta}| = |\zeta|$. Справедливо тождество

$$\begin{aligned}(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_N^0 - \zeta I)^{-1} &= (A_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} I)(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \\ \times \Big((A_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} I)^{-1} &- (A_N^0 - \widehat{\zeta} I)^{-1}\Big) (A_N^0 - \widehat{\zeta} I)(A_N^0 - \zeta I)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.47}$$

Из (5.46) (в точке $\widehat{\zeta}$) и (5.47) вытекает оценка

$$\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1'\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} \sup_{x\geqslant 0} \frac{|x - \widehat{\zeta}|^2}{|x - \zeta|^2}. \tag{5.48}$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x\geqslant 0} \frac{|x - \widehat{\zeta}|^2}{|x - \zeta|^2} \leqslant 4c(\varphi)^2. \tag{5.49}$$

В итоге, (5.48) и (5.49) влекут оценку (4.1) с постоянной $\mathcal{C}_1 = 4\mathcal{C}_1'$. Теорема 4.1 доказана. $\square$

5.6. **Завершение доказательства теоремы 4.2.** Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$, $|\zeta| \geqslant 1$. Пусть $\widehat{\zeta} = -\mathrm{Re}\,\zeta + i\mathrm{Im}\,\zeta$. Справедливо тождество

$$\begin{aligned}&(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon) \\ &= \Big((A_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} I)^{-1} - (A_N^0 - \widehat{\zeta} I)^{-1} - \varepsilon^p K_N(\widehat{\zeta};\varepsilon)\Big) (A_N^0 - \widehat{\zeta} I)(A_N^0 - \zeta I)^{-1} \\ &+ (\zeta - \widehat{\zeta})(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \Big((A_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} I)^{-1} - (A_N^0 - \widehat{\zeta} I)^{-1}\Big) (A_N^0 - \widehat{\zeta} I)(A_N^0 - \zeta I)^{-1}.\end{aligned} \tag{5.50}$$

Имеем

$$\begin{aligned}&\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \|(A_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} I)^{-1} - (A_N^0 - \widehat{\zeta} I)^{-1} - \varepsilon^p K_N(\widehat{\zeta};\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \\ &\times \|(A_N^0 - \widehat{\zeta} I)(A_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} + 2(\mathrm{Re}\,\zeta)\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \\ &\times \|(A_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta} I)^{-1} - (A_N^0 - \widehat{\zeta} I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\|(A_N^0 - \widehat{\zeta} I)(A_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Вместе с (2.9), оценками (5.31) и (5.46) (в точке $\widehat{\zeta}$) и (5.49) это влечет

$$\begin{aligned}&\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\&\leqslant 2c(\varphi)\mathcal{C}_2'\left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}+\varepsilon^p\right)+4(\operatorname{Re}\zeta)\mathcal{C}_0\mathcal{C}_1'c(\varphi)^2|\zeta|^{-1/2}\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}\\&\leqslant \mathcal{C}_2\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p}+c(\varphi)\varepsilon^p\right),\end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_2=2\mathcal{C}_2'+4\mathcal{C}_0\mathcal{C}_1'$. Это доказывает оценку (4.8).

Остается проверить (4.9). Из (4.7) с учетом (1.3), (1.6) следует, что при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ выполнена оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathcal{C}_{24}\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p}+c(\varphi)\varepsilon^p\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\tag{5.51}$$

где $\mathcal{C}_{24}=c_6(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\mathcal{C}_2$. В силу (1.3), (4.4) и (4.5) имеем

$$\begin{aligned}g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon&=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0+g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\\&\quad+\sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant1}g^\varepsilon b_\alpha C_\alpha^\beta\varepsilon^{|\beta|}(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{D}^\beta\widetilde{\mathbf{u}}_0.\end{aligned}\tag{5.52}$$

Из предложения 1.5 и (1.5) вытекает, что

$$\begin{aligned}\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0-g^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}&\leqslant\|g^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant\varepsilon\|g\|_{L_\infty}r_1\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{5.53}$$

Третье слагаемое в правой части (5.52) оценивается на основании предложения 1.6 и соотношений (1.5), (1.6), (3.9):

$$\Big\|\sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant1}g^\varepsilon b_\alpha C_\alpha^\beta\varepsilon^{|\beta|}(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{D}^\beta\widetilde{\mathbf{u}}_0\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\mathcal{C}_{25}\sum_{l=1}^p\varepsilon^l\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+l}(\mathbb{R}^d)},\tag{5.54}$$

где $\mathcal{C}_{25}=c_7(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1 C_\Lambda$. Сопоставляя (1.11), (4.13) и (5.52)–(5.54), приходим к неравенству

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathcal{C}_{26}c(\varphi)\left(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p}+\varepsilon^p\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\tag{5.55}$$

где $\mathcal{C}_{26}=\|g\|_{L_\infty}r_1\alpha_1^{1/2}C^{(p+1)}+p\,\mathcal{C}_{25}\max\{C^{(p+1)},\dots,C^{(2p)}\}$.

В итоге из (5.51) и (5.55) вытекает искомое неравенство (4.9) с постоянной $\mathcal{C}_3=\mathcal{C}_{24}+\mathcal{C}_{26}$. Теорема 4.2 доказана. □

§ 6. Устранение сглаживающего оператора. Специальные случаи

6.1. **Устранение сглаживающего оператора.**

Условие 6.1. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* Λ *задачи* (1.9) *ограничено и является мультипликатором из* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *в* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\Lambda\in L_\infty(\mathbb{R}^d)\cap M(H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)\to H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)).$$

Ввиду периодичности матрицы-функции Λ условие 6.1 равносильно тому, что

$$\Lambda\in L_\infty(\Omega)\cap M(H^p(\Omega;\mathbb{C}^m)\to H^p(\Omega;\mathbb{C}^n)).$$

Норму оператора $[\Lambda]$ умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ обозначим через

$$M_\Lambda:=\|[\Lambda]\|_{H^p(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)}.\tag{6.1}$$

Описание пространств мультипликаторов в классах Соболева можно найти в книге [MaSh]. Можно указать некоторые достаточные условия, гарантирующие выполнение условия 6.1 (см. [KuSu, предложение 7.10]).

Предложение 6.2. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих двух предположений:*
1°. $2p > d$;
2°. $g^0 = \underline{g}$, *т. е. имеют место представления* (1.17).
Тогда условие 6.1 *заведомо выполнено, причем* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и мультипликаторная норма* (6.1) *контролируются через* m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметры решетки* Γ.

При выполнении условия 6.1 вместо корректора (4.3) можно использовать стандартный корректор
$$K_N^0(\zeta;\varepsilon) := [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(A_N^0 - \zeta I)^{-1}, \tag{6.2}$$
который в этом случае непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Соответственно в качестве приближения к $\mathbf{u}_\varepsilon$ вместо функции (4.6) можно использовать функцию
$$\mathbf{v}_\varepsilon^0 := (A_N^0 - \zeta I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon^p K_N^0(\zeta;\varepsilon)\mathbf{F} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0. \tag{6.3}$$

Теорема 6.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *а также условие* 6.1. *Пусть* $K_N^0(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (6.2), *а* $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ — *функция* (6.3). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*
$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_2 \left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)\varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.4}$$
или, в операторных терминах,
$$\begin{aligned} &\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_N^0(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_2 \left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)\varepsilon^p \right). \end{aligned} \tag{6.5}$$
Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_3 \left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)\varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.6}$$
Постоянные $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_3$ *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$, *а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ.

Заметим, что
$$\|\mathbf{v}\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{c}}_p \left(\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{D}^p\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right), \quad \mathbf{v} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{6.7}$$
где $\widehat{\mathfrak{c}}_p$ зависит лишь от d и p.

Для доказательства теоремы 6.3 нам понадобится следующая лемма, установленная в [Su4, лемма 7.2].

Лемма 6.4. 1°. *Пусть* Λ *является мультипликатором из* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *в* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* M_Λ — *норма этого мультипликатора. Тогда для любого* $\mathbf{u}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *при* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*
$$\varepsilon^{2p} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p(\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \widehat{\mathfrak{c}}_p M_\Lambda^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 + \varepsilon^{2p}|\mathbf{D}^p\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x}.$$

2°. *Пусть выполнено условие* 6.1. *Тогда матрица-функция* (1.11) *является мультипликатором из* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, *причем норма этого мультипликатора оценивается константой* $M_{\widetilde{g}}$, *зависящей лишь от* d, p, $\|g\|_{L_\infty}$, α_1, $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ. *При этом для любого* $\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *при* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*
$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{g}^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \widehat{\mathfrak{c}}_p M_{\widetilde{g}}^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 + \varepsilon^{2p}|\mathbf{D}^p\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x}. \tag{6.8}$$

Доказательство теоремы 6.3. Пусть функции $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ определены в (4.6) и (6.3) соответственно. Оценим их разность по норме в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Учитывая (6.7), имеем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|^2_{H^p(\mathcal{O})} &\leqslant \varepsilon^{2p}\|\Lambda^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \widehat{\mathfrak{c}}_p\varepsilon^{2p}\Big(\|\Lambda^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{D}^p(\Lambda^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big).\end{aligned} \tag{6.9}$$

В силу условия 6.1, неравенства $\|S_\varepsilon\|_{L_2\to L_2}\leqslant 1$ и (1.5) выполнено

$$\|\Lambda^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|\Lambda\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.10}$$

Далее, из леммы 6.4 вытекает неравенство

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{2p}\|\mathbf{D}^p(\Lambda^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant \widehat{\mathfrak{c}}_p M_\Lambda^2\big(\|(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{2p}\|(I-S_\varepsilon)\mathbf{D}^p b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\big).\end{aligned} \tag{6.11}$$

Применяя предложение 1.5 и (1.5), имеем

$$\|(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.12}$$

Далее, с учетом неравенства $\|S_\varepsilon\|_{L_2\to L_2}\leqslant 1$ и (1.5) справедлива оценка

$$\|(I-S_\varepsilon)\mathbf{D}^p b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.13}$$

Сопоставляя (4.12), (4.13) и (6.9)–(6.13) и учитывая ограничение $|\zeta|\geqslant 1$, приходим к неравенству

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{27}c(\varphi)\big(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.14}$$

где $\mathcal{C}_{27} = \alpha_1^{1/2}\max\{\widehat{\mathfrak{c}}_p M_\Lambda r_1 C^{(p+1)}, 2\widehat{\mathfrak{c}}_p^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty}C^{(p)} + 2\widehat{\mathfrak{c}}_p M_\Lambda C^{(2p)}\}$.

Теперь из (4.7) и (6.14) вытекает требуемая оценка (6.4) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}_2 = \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_{27}$.

Перейдем к доказательству неравенства (6.6). В силу (6.8) выполнено

$$\begin{aligned}\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \|\widetilde{g}^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \widehat{\mathfrak{c}}_p M_{\widetilde{g}}^2\big(\|(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{2p}\|(I-S_\varepsilon)\mathbf{D}^p b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\big).\end{aligned} \tag{6.15}$$

Отсюда и из (4.12), (4.13), (6.12), (6.13) вытекает оценка

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{28}c(\varphi)\big(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.16}$$

где $\mathcal{C}_{28} = \widehat{\mathfrak{c}}_p^{1/2} M_{\widetilde{g}}\alpha_1^{1/2}\max\{r_1 C^{(p+1)}, 2C^{(2p)}\}$.

Теперь из (4.9) и (6.16) следует искомое неравенство (6.6) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}_3 = \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_{28}$. $\square$

Сопоставляя теорему 6.3 и предложение 6.2, приходим к следующему утверждению.

Следствие 6.5. *Пусть* $2p > d$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки* (6.4)–(6.6), *причем постоянные* $\widetilde{\mathcal{C}}_2$, $\widetilde{\mathcal{C}}_3$ *зависят лишь от* m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Замечание 6.6.

1) *При фиксированном* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, *оценки из теоремы* 6.3 *имеют порядок* $O(\varepsilon^{1/2})$. *С ростом* $|\zeta|$ *погрешность уменьшается.*

2) *Оценки из теоремы* 6.3 *равномерны по углу* φ *в области вида* $\{\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} : |\zeta|\geqslant 1, \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \varphi_0\}$ *со сколь угодно малым* $\varphi_0 > 0$.

3) *Условия следствия* 6.5 *выполнены в следующих интересных для приложений случаях: когда* $p = 2$ *и* $d = 2$ *или* $d = 3$.

4) *Когда* $m = n$, *выполнено* $g^0 = \underline{g}$. *Например, это верно для оператора* $A_\varepsilon = \Delta g^\varepsilon(\mathbf{x})\Delta$ *в* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *в любой размерности. В этом случае применимо предложение* 6.8 (*см. ниже*).

6.2. **Специальные случаи.** Пусть $g^0 = \overline{g}$, т. е. выполнены соотношения (1.16). Тогда Γ-периодическое решение $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (1.9) равно нулю. В силу (4.3)–(4.5) выполнено $K_N(\zeta;\varepsilon) = 0$ и $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0$. Применяя теорему 4.2, приходим к следующему утверждению.

Предложение 6.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Пусть* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.16). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 \left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)\varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $g^0 = \underline{g}$, т. е. выполнены соотношения (1.17). В силу замечания 1.4 справедливо равенство $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. В этом случае результаты допускают усиление.

Предложение 6.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Пусть* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.17). *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ *определено в* (6.3). *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2 \left(c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)\varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.17}$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3 \left(c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)\varepsilon^p \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.18}$$

Постоянные $\widehat{\mathcal{C}}_2$ *и* $\widehat{\mathcal{C}}_3$ *зависят лишь от* m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Сначала будем считать, что $\mathrm{Re}\,\zeta \leqslant 0$ и $|\zeta| \geqslant 1$. При условии $g^0 = \underline{g}$ выполнено $\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = 0$ (см. (5.7)). Тогда в соответствии с (5.5) и (5.8) функционал (5.1) подчинен оценке

$$|\mathcal{J}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant \mathcal{C}_{10}\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{6.19}$$

Подставляя $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_\varepsilon$ в тождество (5.3) и используя (6.19) (аналогично (5.26)–(5.30)), получаем

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}'_{15}\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{6.20}$$

где $\mathcal{C}'_{15} = \mathcal{C}_{10}(k_1\|g^{-1}\|_{L_\infty} + 2k_2)$. Из (4.33) и (6.20) вытекает оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant (\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}'_{15})\big(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathrm{Re}\,\zeta \leqslant 0,\ |\zeta| \geqslant 1,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{6.21}$$

Пусть теперь $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$ и $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$. Пусть $\widehat{\zeta} = -\mathrm{Re}\,\zeta + i\mathrm{Im}\,\zeta$. Оценка (6.21) в точке $\widehat{\zeta}$ означает, что

$$\|(A_{N,\varepsilon} - \widehat{\zeta}I)^{-1} - (A_N^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1} - \varepsilon^p K_N(\widehat{\zeta};\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^p(\mathcal{O})} \leqslant (\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}'_{15})\big(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\big) \tag{6.22}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Используя тождество (5.50) и оценки (2.9), (5.46) (в точке $\widehat{\zeta}$), (5.49) и (6.22), получаем

$$\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}'_2\big(c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)\varepsilon^p\big) \tag{6.23}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, где $\widehat{\mathcal{C}}'_2 = 2(\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}'_{15}) + 4\mathcal{C}_0\mathcal{C}'_1$.

В силу предложения 6.2(2°) выполнено условие 6.1, причем $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и M_Λ контролируются через m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ. Тогда справедлива оценка (6.14). Из (6.14) и (6.23) вытекает искомое неравенство (6.17) с постоянной $\widehat{\mathcal{C}}_2 = \widehat{\mathcal{C}}'_2 + \mathcal{C}_{27}$.

Неравенство (6.18) выводится из (5.55), (6.16) и (6.23) с учетом равенства $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$. При этом $\widehat{\mathcal{C}}_3 = c_6(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\widehat{\mathcal{C}}'_2 + \mathcal{C}_{26} + \mathcal{C}_{28}$. □

§ 7. Аппроксимация резольвенты $(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ при $|\zeta|\leqslant 1$

7.1. **Случай $|\zeta|\leqslant 1$.** В этом параграфе мы распространяем результаты теорем 4.1 и 4.2 на область $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\leqslant 1$, с помощью подходящих тождеств для резольвент.

Лемма 7.1. *Пусть $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\leqslant 1$. Тогда при $\varepsilon>0$ справедливы оценки*

$$\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1}, \tag{7.1}$$

$$\|(A_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{2p}(\mathcal{O})}\leqslant 2\widehat{c}c(\varphi)|\zeta|^{-1}. \tag{7.2}$$

Доказательство. При всех $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ справедливо неравенство (2.11). Если $|\zeta|\leqslant 1$, оно влечет (7.1).

Далее, в силу (2.13) имеем

$$\|(A_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{2p}(\mathcal{O})}\leqslant \widehat{c}\|(A_N^0+I)(A_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \widehat{c}\sup_{x\geqslant 0}\frac{x+1}{|x-\zeta|}. \tag{7.3}$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x\geqslant 0}\frac{x+1}{|x-\zeta|}\leqslant 2c(\varphi)|\zeta|^{-1},\quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+,\ |\zeta|\leqslant 1. \tag{7.4}$$

Из (7.3) и (7.4) вытекает оценка (7.2). $\square$

Теорема 7.2. *Пусть $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область класса C^{2p}. Пусть $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ и $|\zeta|\leqslant 1$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon=(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\mathbf{F}$, $\mathbf{u}_0=(A_N^0-\zeta I)^{-1}\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Пусть $K_N(\zeta;\varepsilon)$ — оператор (4.3), а $\mathbf{v}_\varepsilon$ определено в (4.4), (4.5). Пусть число ε_1 выбрано согласно условию 3.2. Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathfrak{C}_1 c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})}\leqslant \mathfrak{C}_2\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.5}$$

или, в операторных терминах,

$$\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathfrak{C}_1 c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}, \tag{7.6}$$

$$\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\leqslant \mathfrak{C}_2\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\right). \tag{7.7}$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathfrak{C}_3\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.8}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ и $\mathfrak{C}_3$ зависят лишь от m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Доказательство. Применим теорему 4.1 при $\zeta=-1$:

$$\|(A_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(A_N^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_1\varepsilon,\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1. \tag{7.9}$$

Используя аналог тождества (5.47), отсюда получаем

$$\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_1\varepsilon\sup_{x\geqslant 0}\frac{(x+1)^2}{|x-\zeta|^2},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1. \tag{7.10}$$

Из (7.4) и (7.10) вытекает искомая оценка (7.6) с постоянной $\mathfrak{C}_1=4\mathcal{C}_1$.

Применим теперь теорему 4.2 при $\zeta=-1$: при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ выполнено

$$\|(A_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(A_N^0+I)^{-1}-\varepsilon^p K_N(-1;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\leqslant 3\mathcal{C}_2\varepsilon^{1/2}. \tag{7.11}$$

Аналогично (5.50), справедливо тождество

$$\begin{aligned}&(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\\&=\left((A_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(A_N^0+I)^{-1}-\varepsilon^p K_N(-1;\varepsilon)\right)(A_N^0+I)(A_N^0-\zeta I)^{-1}\\&+(\zeta+1)(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\left((A_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(A_N^0+I)^{-1}\right)(A_N^0+I)(A_N^0-\zeta I)^{-1}.\end{aligned}\tag{7.12}$$

С учетом (7.4) имеем

$$\begin{aligned}&\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\&\leqslant 2c(\varphi)|\zeta|^{-1}\|(A_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(A_N^0+I)^{-1}-\varepsilon^p K_N(-1;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\&+2c(\varphi)|\zeta|^{-1}|\zeta+1|\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\|(A_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(A_N^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}\tag{7.13}$$

Вместе с (7.1), (7.9) и (7.11) с учетом ограничения $|\zeta|\leqslant 1$ это влечет искомую оценку (7.7) с постоянной $\mathfrak{C}_2=\max\{6\mathcal{C}_2,4\mathcal{C}_0\mathcal{C}_1\}$.

Остается проверить (7.8). Из (1.3), (1.6) и (7.5) следует, что при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant c_6(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\mathfrak{C}_2\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{7.14}$$

Аналогично (5.52)–(5.54) имеем

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\\&\leqslant\varepsilon\|g\|_{L_\infty}r_1\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^d)}+\mathcal{C}_{25}\sum_{l=1}^{p}\varepsilon^l\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+l}(\mathbb{R}^d)}\leqslant\mathfrak{C}_4\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}\tag{7.15}$$

где $\mathfrak{C}_4=\|g\|_{L_\infty}r_1\alpha_1^{1/2}+p\,\mathcal{C}_{25}$. Из (4.2) и (7.2) вытекает оценка

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathcal{O})}\leqslant 2C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\widehat{c}c(\varphi)|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{7.16}$$

В итоге, соотношения (7.14)–(7.16) влекут искомую оценку (7.8) с постоянной $\mathfrak{C}_3=c_6(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\mathfrak{C}_2+2\mathfrak{C}_4C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\widehat{c}$. $\square$

7.2. **Устранение сглаживающего оператора.**

Теорема 7.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.2 *и условие* 6.1. *Пусть* $K_N^0(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (6.2), *а* $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ — *функция* (6.3). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathfrak{C}}_2\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{7.17}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p K_N^0(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\&\leqslant\widetilde{\mathfrak{C}}_2\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\right).\end{aligned}$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathfrak{C}}_3\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1}+c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{7.18}$$

Постоянные $\widetilde{\mathfrak{C}}_2$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_3$ *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$, *а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ.

Доказательство. Аналогично (6.9)–(6.13) имеем

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_5\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)},\tag{7.19}$$

где $\mathfrak{C}_5 = 2\widehat{\mathfrak{c}}_p^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2} + \widehat{\mathfrak{c}}_p M_\Lambda \alpha_1^{1/2}(r_1+2)$. Из (7.16) и (7.19) вытекает оценка

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathfrak{C}_5 C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\widehat{c}\, c(\varphi)\varepsilon|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.20}$$

Неравенства (7.5) и (7.20) влекут искомую оценку (7.17) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_2 = \mathfrak{C}_2 + 2\mathfrak{C}_5 C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\widehat{c}$.

Остается проверить (7.18). Аналогично (6.12), (6.13), (6.15) имеем

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_6\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)}, \tag{7.21}$$

где $\mathfrak{C}_6 = \widehat{\mathfrak{c}}_p^{1/2} M_{\widetilde{g}}\alpha_1^{1/2}(r_1+2)$. Вместе с (7.16) это влечет

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathfrak{C}_6 C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\widehat{c}\, c(\varphi)\varepsilon|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.22}$$

Сопоставляя (7.8) и (7.22), приходим к искомой оценке (7.18) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_3 = \mathfrak{C}_3 + 2\mathfrak{C}_6 C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\widehat{c}$. $\square$

7.3. **Специальные случаи.** Следующее утверждение проверяется аналогично предложению 6.7 с помощью теоремы 7.2.

Предложение 7.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.2. *Пусть* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.16). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \leqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_2\left(c(\varphi)\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1} + c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $g^0 = \underline{g}$.

Предложение 7.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.2. *Пусть* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.17). *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ *определено в* (6.3). *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \leqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_2 c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.23}$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_3 c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.24}$$

Постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}_2$ *и* $\widehat{\mathfrak{C}}_3$ *зависят лишь от* m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. При условии $g^0 = \underline{g}$ выполнено неравенство (6.23) в точке $\zeta = -1$. Комбинируя его с тождеством (7.12), аналогично (7.13) получаем

$$\|(A_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_2' c(\varphi)^2\varepsilon|\zeta|^{-2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{7.25}$$

где $\widehat{\mathfrak{C}}_2' = 4\widehat{\mathcal{C}}_2' + 4\mathcal{C}_0\mathcal{C}_1$.

В силу предложения 6.2(2°) выполнено условие 6.1, причем $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и M_Λ контролируются через $m, n, d, p, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ. Тогда справедливо неравенство (7.20). Вместе с (7.25) оно влечет искомую оценку (7.23) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_2 = \widehat{\mathfrak{C}}_2' + 2\mathfrak{C}_5 C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\widehat{c}$.

Неравенство (7.24) выводится из (7.15), (7.16), (7.22) и (7.25) с учетом $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$. $\square$

§ 8. Аппроксимация резольвенты $(B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$

8.1. **Оператор** $B_{N,\varepsilon}$**.** Введем обозначение

$$Z := \operatorname{Ker} b(\mathbf{D}) = \{\mathbf{z} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) :\ b(\mathbf{D})\mathbf{z} = 0\}.$$

Из (2.2) вытекает неравенство

$$\|\mathbf{z}\|^2_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant k_2\|\mathbf{z}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{z} \in Z.$$

Отсюда и из компактности вложения $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ следует, что пространство Z конечномерно. Обозначим $\dim Z = q$. Заведомо Z содержит подпространство $\mathbb{C}^n$-значных многочленов степени не выше $p-1$. Положим $\mathcal{H}(\mathcal{O}) := L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \ominus Z$, $H^p_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) := H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap \mathcal{H}(\mathcal{O})$. Легко проверить (ср. [Su2, предложение 9.1]), что форма $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ задает в $H^p_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ норму, эквивалентную стандартной: существует постоянная $\widetilde{k}_1 > 0$ такая, что

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{k}_1 \|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^p_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{8.1}$$

Напомним, что оператор $A_{N,\varepsilon}$ порожден в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ формой (2.3), а оператор A^0_N порожден формой (2.12). Очевидно, $\operatorname{Ker} A_{N,\varepsilon} = \operatorname{Ker} A^0_N = Z$. Ортогональное разложение $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) = \mathcal{H}(\mathcal{O}) \oplus Z$ приводит оба оператора $A_{N,\varepsilon}$ и A^0_N. Обозначим через $B_{N,\varepsilon}$ (соответственно, B^0_N) часть оператора $A_{N,\varepsilon}$ (соответственно, A^0_N) в подпространстве $\mathcal{H}(\mathcal{O})$. Иначе говоря, $B_{N,\varepsilon}$ — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, порожденный квадратичной формой

$$b_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^p_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).$$

Аналогично, B^0_N — оператор, порожденный в $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ квадратичной формой

$$b^0_N[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^p_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).$$

В силу (2.4) и (8.1) выполнены оценки

$$\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} (\widetilde{k}_1)^{-1} \|\mathbf{u}\|^2_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant b_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \widetilde{\mathfrak{c}}_p \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}^p \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^p_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{8.2}$$

Аналогично,

$$\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} (\widetilde{k}_1)^{-1} \|\mathbf{u}\|^2_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant b^0_N[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \widetilde{\mathfrak{c}}_p \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}^p \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^p_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{8.3}$$

Через $\mathcal{P}$ обозначим ортопроектор пространства $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ на $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, а через $\mathcal{P}_Z$ — ортопроектор на Z; тогда $\mathcal{P} = I - \mathcal{P}_Z$.

Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$, где $c_\flat > 0$ — общая нижняя грань операторов $B_{N,\varepsilon}$ и B^0_N. Иначе говоря, $0 < c_\flat \leqslant \min\{\lambda_{2,\varepsilon}(N), \lambda^0_2(N)\}$, где $\lambda_{2,\varepsilon}(N)$ (соответственно, $\lambda^0_2(N)$) — первое ненулевое собственное значение оператора $A_{N,\varepsilon}$ (соответственно, A^0_N). Если нумеровать собственные значения в порядке неубывания с учетом кратностей — это $(q+1)$-е собственные значения.

Замечание 8.1. 1) *В силу* (8.2), (8.3) *в качестве* $c_\flat$ *подходит число* $\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} (\widetilde{k}_1)^{-1}$.

2) *Пусть* $\delta > 0$ *— сколь угодно малое число. Если считать* ε *достаточно малым, то в качестве* $c_\flat$ *можно принять* $c_\flat = \lambda^0_2(N) - \delta$.

3) *Легко указать верхнюю оценку числа* $c_\flat$: *из* (8.2), (8.3) *и из вариационного принципа видно, что* $c_\flat \leqslant \widetilde{\mathfrak{c}}_p \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \mu^0_{q+1}(N)$, *где* $\mu^0_{q+1}(N)$ *—* $(q+1)$*-е собственное значение оператора* $(-1)^p \widetilde{\Delta}_p = (-1)^p \sum_{|\alpha|=p} \partial^{2\alpha}$ *с условиями Неймана в пространстве* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. *Тем самым,* $c_\flat$ *оценивается величиной, зависящей лишь от* d, p, n, q, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ *и от области* $\mathcal{O}$.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = (B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$, и пусть $\boldsymbol{\varphi}_0 = (B^0_N - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$. Обозначим

$$\mathcal{K}_N(\zeta;\varepsilon) := R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} (B^0_N - \zeta I)^{-1} \tag{8.4}$$

и положим $\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 = P_{\mathcal{O}} \boldsymbol{\varphi}_0$,

$$\boldsymbol{\psi}_\varepsilon = \boldsymbol{\varphi}_0 + \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0 = (B^0_N - \zeta I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon^p \mathcal{K}_N(\zeta;\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{8.5}$$

Лемма 8.2. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$, *где* $c_\flat > 0$ *— общая нижняя грань операторов* $B_{N,\varepsilon}$ *и* B^0_N. *Положим* $\zeta - c_\flat = |\zeta - c_\flat| e^{i\vartheta}$ *и введем обозначение*

$$\rho_\flat(\zeta) = \begin{cases} c(\vartheta)^2 |\zeta - c_\flat|^{-2}, & |\zeta - c_\flat| < 1, \\ c(\vartheta)^2, & |\zeta - c_\flat| \geqslant 1. \end{cases} \tag{8.6}$$

Здесь $c(\vartheta)$ *определено согласно* (1.19). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_7 \rho_\flat(\zeta)^{1/2}, \tag{8.7}$$

$$\|(B_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^{2p}(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_8 \rho_\flat(\zeta)^{1/2}. \tag{8.8}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_7$ *и* $\mathfrak{C}_8$ *зависят лишь от* m, n, d, p, q, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Из (2.9) (при $\zeta = -1$) получаем

$$\begin{aligned} &\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \|(B_{N,\varepsilon} + I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \|(B_{N,\varepsilon} + I)(B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to \mathcal{H}(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0 \sup_{x \geqslant c_\flat} \frac{x+1}{|x-\zeta|}. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x \geqslant c_\flat} \frac{x+1}{|x-\zeta|} \leqslant \check{c}_\flat \rho_\flat(\zeta)^{1/2}, \tag{8.10}$$

где $\check{c}_\flat = c_\flat + 2$. Из (8.9) и (8.10) вытекает оценка (8.7) с постоянной $\mathfrak{C}_7 = \mathcal{C}_0 \check{c}_\flat$.

Оценка (8.8) с постоянной $\mathfrak{C}_8 = 2\widehat{c}\check{c}_\flat$ вытекает из (2.18) (при $\zeta = -1$) и (8.10). □

Теорема 8.3. *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область класса* C^{2p}. *Пусть число* $\varepsilon_1 > 0$ *выбрано согласно условию* 3.2. *Пусть* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$, *где* $c_\flat > 0$ *— общая нижняя грань операторов* $B_{N,\varepsilon}$ *и* B_N^0. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = (B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$ *и* $\boldsymbol{\varphi}_0 = (B_N^0 - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$, *где* $\mathbf{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$. *Пусть* $\mathcal{K}_N(\zeta;\varepsilon)$ *— оператор* (8.4) *и* $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$ *— функция* (8.5). *Тогда справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_9 \varepsilon \rho_\flat(\zeta) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ &\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{10} \left(\varepsilon^{1/2} \rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{8.11}$$

В операторных терминах,

$$\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to \mathcal{H}(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_9 \varepsilon \rho_\flat(\zeta), \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} &\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p \mathcal{K}_N(\zeta;\varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathfrak{C}_{10} \left(\varepsilon^{1/2} \rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right). \end{aligned} \tag{8.13}$$

Для потока $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{11} \left(\varepsilon^{1/2} \rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.14}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_9$, $\mathfrak{C}_{10}$ *и* $\mathfrak{C}_{11}$ *зависят лишь от* m, n, d, p, q, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. В силу (7.9) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнена оценка

$$\|(B_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (B_N^0 + I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to \mathcal{H}(\mathcal{O})} = \|\left((A_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (A_N^0 + I)^{-1}\right)\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 \varepsilon. \tag{8.15}$$

Аналогично (5.47), справедливо тождество

$$\begin{aligned} &(B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_N^0 - \zeta I)^{-1} \\ &= (B_{N,\varepsilon} + I)(B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \left((B_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (B_N^0 + I)^{-1}\right)(B_N^0 + I)(B_N^0 - \zeta I)^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (8.15) вытекает неравенство

$$\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to \mathcal{H}(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 \varepsilon \sup_{x \geqslant c_\flat} \frac{(x+1)^2}{|x-\zeta|^2} \tag{8.16}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Из (8.10) и (8.16) следует искомая оценка (8.12) с постоянной $\mathfrak{C}_9 = \mathcal{C}_1 \check{c}_\flat^2$.

Домножая операторы под знаком нормы в (7.11) справа на $\mathcal{P}$, получаем

$$\|(B_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(B_N^0+I)^{-1}-\varepsilon^p\mathcal{K}_N(-1;\varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\leqslant 3\mathcal{C}_2\varepsilon^{1/2}. \tag{8.17}$$

Аналогично (7.12), справедливо тождество

$$\begin{aligned}&(B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(B_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p\mathcal{K}_N(\zeta;\varepsilon)\\&=\left((B_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(B_N^0+I)^{-1}-\varepsilon^p\mathcal{K}_N(-1;\varepsilon)\right)(B_N^0+I)(B_N^0-\zeta I)^{-1}\\&+(\zeta+1)(B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\left((B_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(B_N^0+I)^{-1}\right)(B_N^0+I)(B_N^0-\zeta I)^{-1}.\end{aligned} \tag{8.18}$$

С учетом (8.10) отсюда вытекает неравенство

$$\begin{aligned}&\|(B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(B_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p\mathcal{K}_N(\zeta;\varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\&\leqslant\check{c}_\flat\rho_\flat(\zeta)^{1/2}\|(B_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(B_N^0+I)^{-1}-\varepsilon^p\mathcal{K}_N(-1;\varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\&+|\zeta+1|\check{c}_\flat\rho_\flat(\zeta)^{1/2}\|(B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\|(B_{N,\varepsilon}+I)^{-1}-(B_N^0+I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to\mathcal{H}(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{8.19}$$

Вместе с (8.7), (8.15) и (8.17) это приводит к оценке

$$\|(B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(B_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p\mathcal{K}_N(\zeta;\varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_{12}\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\mathfrak{C}_{13}\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta), \tag{8.20}$$

где $\mathfrak{C}_{12}=3\check{c}_\flat\mathcal{C}_2$ и $\mathfrak{C}_{13}=\mathfrak{C}_7\mathcal{C}_1\check{c}_\flat$. В итоге, неравенство (8.20) влечет искомую оценку (8.13) с постоянной $\mathfrak{C}_{10}=\max\{\mathfrak{C}_{12};\mathfrak{C}_{13}\}$.

Остается проверить (8.14). В силу (1.3), (1.6) и (8.11) справедлива оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon-g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant c_6(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\mathfrak{C}_{10}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.21}$$

Аналогично (5.52)–(5.54) (ср. (7.15)) имеем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\psi}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_4\varepsilon\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)}. \tag{8.22}$$

Из (4.2) и (8.8) вытекает оценка

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{H^{2p}(\mathcal{O})}\leqslant C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\mathfrak{C}_8\rho_\flat(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.23}$$

В итоге, соотношения (8.21)–(8.23) влекут искомую оценку (8.14) с постоянной $\mathfrak{C}_{11}=c_6(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\mathfrak{C}_{10}+\mathfrak{C}_4\mathfrak{C}_8C_{\mathcal{O}}^{(2p)}$. $\square$

8.2. **Устранение сглаживающего оператора.** Рассмотрим случай, когда выполнено условие 6.1. Введем корректор

$$\mathcal{K}_N^0(\zeta;\varepsilon):=[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(B_N^0-\zeta I)^{-1} \tag{8.24}$$

и положим

$$\boldsymbol{\psi}_\varepsilon^0=\boldsymbol{\varphi}_0+\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0=(B_N^0-\zeta I)^{-1}\mathbf{F}+\varepsilon^p\mathcal{K}_N^0(\zeta;\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{8.25}$$

Теорема 8.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.3 *и условие* 6.1. *Пусть* $\mathcal{K}_N^0(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (8.24), *а* $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon^0$ — *функция* (8.25). *Тогда при* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon-\boldsymbol{\psi}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathfrak{C}}_{10}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.26}$$

или, в операторных терминах,

$$\|(B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(B_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p\mathcal{K}_N^0(\zeta;\varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathfrak{C}}_{10}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right). \tag{8.27}$$

Для потока $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathfrak{C}}_{11}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.28}$$

Постоянные $\widetilde{\mathfrak{C}}_{10}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_{11}$ *зависят лишь от* m, n, d, p, q, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ, *от области* $\mathcal{O}$, *а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ.

Доказательство. Аналогично (6.9)–(6.13) имеем

$$\|\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_5 \varepsilon \|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)}, \tag{8.29}$$

ср. (7.19). Из (8.23) и (8.29) вытекает оценка

$$\|\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(2p)} \mathfrak{C}_5 \mathfrak{C}_8 \varepsilon \rho_\flat(\zeta)^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.30}$$

Теперь оценки (8.11) и (8.30) влекут (8.26) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_{10} = \mathfrak{C}_{10} + C_{\mathcal{O}}^{(2p)} \mathfrak{C}_5 \mathfrak{C}_8$.

Проверим (8.28). Аналогично (6.12), (6.13), (6.15) имеем

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_0 - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_6 \varepsilon \|\widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)},$$

ср. (7.21). Вместе с (8.23) это дает

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_0 - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\varphi}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(2p)} \mathfrak{C}_6 \mathfrak{C}_8 \varepsilon \rho_\flat(\zeta)^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.31}$$

В итоге, соотношения (8.14) и (8.31) приводят к неравенству (8.28) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_{11} = \mathfrak{C}_{11} + C_{\mathcal{O}}^{(2p)} \mathfrak{C}_6 \mathfrak{C}_8$. □

8.3. **Специальные случаи.** Случай, когда корректор обращается в ноль, выделяется следующим утверждением.

Предложение 8.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.3. *Пусть* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.16). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{10} \left(\varepsilon^{1/2} \rho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon |\zeta + 1| \rho_\flat(\zeta) \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $g^0 = \underline{g}$.

Предложение 8.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.3. *Пусть* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.17). *Пусть* $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon^0$ *определено в* (8.25). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_{10} \varepsilon \left(\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + |\zeta + 1| \rho_\flat(\zeta) \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.32}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_{11} \varepsilon \left(\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + |\zeta + 1| \rho_\flat(\zeta) \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.33}$$

Постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}_{10}$ *и* $\widehat{\mathfrak{C}}_{11}$ *зависят лишь от* m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, k_1, k_2, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. При условии $g^0 = \underline{g}$ выполнено неравенство (6.23) в точке $\zeta = -1$, откуда

$$\|(B_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (B_N^0 + I)^{-1} - \varepsilon^p \mathcal{K}_N(-1; \varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \to H^p(\mathcal{O})} \leqslant 2 \widehat{\mathcal{C}}_2' \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{8.34}$$

Применяя тождество (8.18) и (8.34), аналогично (8.19) получаем

$$\|(B_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p \mathcal{K}_N(\zeta; \varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_{10}' \varepsilon \left(\rho_\flat(\zeta)^{1/2} + |\zeta + 1| \rho_\flat(\zeta) \right), \tag{8.35}$$

где $\widehat{\mathfrak{C}}_{10}' = \max\{2 \widehat{\mathcal{C}}_2' \check{c}_\flat, \mathfrak{C}_{13}\}$.

В силу предложения 6.2(2°) выполнено условие 6.1, причем $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и M_Λ контролируются через m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ. Тогда выполнена оценка (8.30). Из (8.30) и (8.35) вытекает оценка (8.32) с постоянной $\widehat{\mathfrak{C}}_{10} = \widehat{\mathfrak{C}}_{10}' + C_{\mathcal{O}}^{(2p)} \mathfrak{C}_5 \mathfrak{C}_8$.

Неравенство (8.33) выводится из (8.22), (8.23), (8.31) и (8.35) с учетом $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0$. □

8.4. **Применение результатов об операторе $B_{N,\varepsilon}$ к оператору $A_{N,\varepsilon}$.** Теорема 8.3 позволяет получить аппроксимацию резольвенты $(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ в регулярной точке $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq 0$.

Теорема 8.7. *Пусть $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область класса C^{2p}. Пусть число $\varepsilon_1>0$ выбрано согласно условию 3.2. Пусть $0<c_\flat\leqslant\min\{\lambda_{2,\varepsilon}(N),\lambda_2^0(N)\}$, где $\lambda_{2,\varepsilon}(N)$ (соответственно, $\lambda_2^0(N)$) — первое ненулевое собственное значение оператора $A_{N,\varepsilon}$ (соответственно, A_N^0). Пусть $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq0$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon=(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\mathbf{F}$ и $\mathbf{u}_0=(A_N^0-\zeta I)^{-1}\mathbf{F}$, где $\mathbf{F}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_9\varepsilon\rho_\flat(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\rho_\flat(\zeta)$ определено в (8.6). В операторных терминах,

$$\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_9\varepsilon\rho_\flat(\zeta).\tag{8.36}$$

Положим $\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon=\mathbf{u}_0+\varepsilon^p\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{u}}_0$, где $\widehat{\mathbf{u}}_0=P_\mathcal{O}(A_N^0-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}\mathbf{F}$. Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_{10}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p\widehat{K}_N(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\&\leqslant\mathfrak{C}_{10}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right),\end{aligned}\tag{8.37}$$

где $\widehat{K}_N(\zeta;\varepsilon)=R_\mathcal{O}[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(A_N^0-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}$. Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_{11}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{8.38}$$

Постоянные $\mathfrak{C}_9$, $\mathfrak{C}_{10}$ и $\mathfrak{C}_{11}$ — те же, что в теореме 8.3.

Доказательство. Заметим, что при $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq0$, выполнено

$$(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}=(B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\mathcal{P},\quad (A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}_Z=-\zeta^{-1}\mathcal{P}_Z.$$

Аналогично,

$$(A_N^0-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}=(B_N^0-\zeta I)^{-1}\mathcal{P},\quad (A_N^0-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}_Z=-\zeta^{-1}\mathcal{P}_Z.$$

Отсюда с учетом равенства $\mathcal{P}+\mathcal{P}_Z=I$ получаем

$$(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}=\left((B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(B_N^0-\zeta I)^{-1}\right)\mathcal{P}.\tag{8.39}$$

Оценка (8.36) непосредственно следует из (8.12) и (8.39).

Отметим очевидное равенство $\widehat{K}_N(\zeta;\varepsilon)=\mathcal{K}_N(\zeta;\varepsilon)\mathcal{P}$. Вместе с (8.39) это влечет

$$(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p\widehat{K}_N(\zeta;\varepsilon)=\left((B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(B_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p\mathcal{K}_N(\zeta;\varepsilon)\right)\mathcal{P}.\tag{8.40}$$

Из (8.13) и (8.40) вытекает (8.37).

Далее, поскольку $b(\mathbf{D})(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}_Z=0$, то

$$\begin{aligned}&g^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(A_N^0-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}\\&=\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_N^0-\zeta I)^{-1}\right)\mathcal{P}.\end{aligned}\tag{8.41}$$

Неравенство (8.14) в операторных терминах означает, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_{11}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)$$

при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$. Отсюда и из (8.41) вытекает (8.38). $\square$

Замечание 8.8. *Оценки* (8.36)–(8.38) *представляют интерес при ограниченных значениях* $|\zeta|$ *и малом* $\varepsilon\rho_\flat(\zeta)$. *В этом случае величина* $\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)$ *мажорируется через* $C\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}$. *При большом* $|\zeta|$ *предпочтительнее применять оценки из теорем* 4.1 *и* 4.2.

Далее, из теоремы 8.4 выводится следующий результат.

Теорема 8.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.7 *и условие* 6.1. *Пусть оператор* $K_N^0(\zeta;\varepsilon)$ *определен в* (6.2), *а* $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ *— функция* (6.3). *Тогда при* $\zeta\in\mathbb{C}\backslash[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq 0$, *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathfrak{C}}_{10}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

или, в операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p K_N^0(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\&\leqslant\widetilde{\mathfrak{C}}_{10}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right).\end{aligned}\tag{8.42}$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathfrak{C}}_{11}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{8.43}$$

Постоянные $\widetilde{\mathfrak{C}}_{10}$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_{11}$ *— те же, что в теореме* 8.4.

Доказательство. С учетом (6.2), (8.24) и тождества $b(\mathbf{D})\mathcal{P}_Z=0$ имеем $K_N^0(\zeta;\varepsilon)=\mathcal{K}_N^0(\zeta;\varepsilon)\mathcal{P}$. Вместе с (8.39) это дает тождество

$$(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p K_N^0(\zeta;\varepsilon)=\left((B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(B_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p\mathcal{K}_N^0(\zeta;\varepsilon)\right)\mathcal{P}.\tag{8.44}$$

Из (8.27) и (8.44) прямо вытекает (8.42).

Далее, поскольку $b(\mathbf{D})\mathcal{P}_Z=0$, то

$$\begin{aligned}&g^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_N^0-\zeta I)^{-1}\\&=\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_N^0-\zeta I)^{-1}\right)\mathcal{P}.\end{aligned}\tag{8.45}$$

Соотношения (8.28) и (8.45) влекут (8.43). $\square$

Случай, когда корректор обращается в ноль, выделяется следующим утверждением, вытекающим из теоремы 8.7.

Предложение 8.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.7. *Пусть* $g^0=\overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.16). *Тогда при* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{H^p(\mathcal{O})}\leqslant\mathfrak{C}_{10}\left(\varepsilon^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+\varepsilon|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следующее утверждение выводится из предложения 8.6 с помощью тождеств (8.44) и (8.45).

Предложение 8.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.7. *Пусть* $g^0=\underline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.17). *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ *определено в* (6.3). *Тогда при* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq 0$, *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})}\leqslant\widehat{\mathfrak{C}}_{10}\varepsilon\left(\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\widehat{\mathfrak{C}}_{11}\varepsilon\left(\rho_\flat(\zeta)^{1/2}+|\zeta+1|\rho_\flat(\zeta)\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Постоянные $\widehat{\mathfrak{C}}_{10}$ *и* $\widehat{\mathfrak{C}}_{11}$ *— те же, что в предложении* 8.6.

Список литературы

[BaPan] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLPa] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[V] Вениаминов Н. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 5, 69–103.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[Zh] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), № 3, 305–308.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[ZhPas2] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи мат. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[KoE] Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д.*Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач*, Докл. АН СССР **246** (1979), № 4, 812–815.

[KuSu] Кукушкин А. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **28** (2016), вып. 1, 89–149.

[MaSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1986.

[MSu1] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Two-parametric error estimates in homogenization of second order elliptic systems in $\mathbb{R}^d$*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 7, 1413–1448.

[MSu2] Yu. M. Meshkova and T. A. Suslina, *Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 8, 1736–1775.

[MSu3] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: Two-parametric error estimates*, preprint (2017), arXiv:1702.00550.

[Ne] Necas J., *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer Monographs in Mathematics, 2011.

[Pas1] Пастухова С. Е., *Операторные оценки усреднения для эллиптических уравнений четвертого порядка*, Алгебра и анализ **28** (2016), вып. 2, 204–226.

[Pas2] Pastukhova S. E., *Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators*, Appl. Anal. **16** (2016), no. 2, 1–18.

[PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.

[So] Солонников В. А., *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса–Л. Ниренберга.* II, Тр. Мат. ин-та АН СССР **92** (1966), 233–297.

[St] Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[Su1] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463–476.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453–3493.

[Su3] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), вып. 4, 87–166.

[Su4] Суслина Т. А., *Усреднение задачи Дирихле для эллиптических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **29** (2017), вып. 2, 139–192.