ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 2/2017

УСРЕДНЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО МОДЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

М. А. Дородный, Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Физический факультет,
Ульяновская ул., д. 3, Петродворец,
Санкт-Петербург, 198504, Россия

e-mail: mdorodni@yandex.ru
e-mail: t.suslina@spbu.ru

11 октября 2017 г.

АННОТАЦИЯ

В $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ рассматривается самосопряженный оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, порожденный дифференциальным выражением $\operatorname{rot}\eta(\mathbf{x}/\varepsilon)^{-1}\operatorname{rot} - \nabla\nu(\mathbf{x}/\varepsilon)\operatorname{div}$, где матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ с вещественными элементами и вещественная функция $\nu(\mathbf{x})$ периодичны относительно некоторой решетки, положительно определены и ограничены. Изучается поведение операторного косинуса $\cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ при $\tau \in \mathbb{R}$ и малом ε. Показано, что этот оператор сходится к $\cos(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})$ по норме операторов, действующих из пространства Соболева H^s (с подходящим s) в L_2. Здесь $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор с постоянными коэффициентами. Получены оценки погрешности; исследован вопрос о точности результата в отношении типа операторной нормы. Результаты применяются к вопросу об усреднении задачи Коши для модельного гиперболического уравнения $\partial_\tau^2\mathbf{v}_\varepsilon = -\mathcal{L}_\varepsilon\mathbf{v}_\varepsilon$, $\operatorname{div}\,\mathbf{v}_\varepsilon = 0$, возникающего в электродинамике. Рассмотрено применение к нестационарной системе Максвелла в случае, когда магнитная проницаемость равна единице, а диэлектрическая проницаемость задается матрицей $\eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, усреднение, операторные оценки погрешности, нестационарная система Максвелла.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 16-01-00087).

Введение

0.1. **Операторные оценки погрешности.** Работа относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов (ДО). В первую очередь упомянем книги [BeLP, BaPa, ZhKO].

В [BSu1, BSu2, BSu3] был развит теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам теории усреднения. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ изучался широкий класс матричных сильно эллиптических ДО второго порядка вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0, \tag{0.1}$$

где $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и положительно определенная $(m \times m)$-матрица-функция, периодическая относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$, а $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$ — ДО первого порядка. Здесь b_l — постоянные $(m \times n)$-матрицы. Предполагается, что $m \geqslant n$ и символ $b(\boldsymbol{\xi})$ — матрица максимального ранга.

В [BSu1] было показано, что резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в L_2 к резольвенте эффективного оператора $\mathcal{A}^0$, причем

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

Эффективный оператор имеет вид $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — постоянная положительная матрица, называемая *эффективной*. В [Su1] аналогичный результат был получен для параболической полугруппы:

$$\|e^{-\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-\tau\mathcal{A}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\tau)\varepsilon, \quad \tau > 0. \tag{0.3}$$

Оценки (0.2), (0.3) точны по порядку. Подобные неравенства называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения.

Другой подход к операторным оценкам погрешности (метод сдвига) был предложен В. В. Жиковым. В [Zh2, ZhPas1, ZhPas2] оценки вида (0.2), (0.3) были получены для операторов акустики и упругости.

Операторные оценки погрешности для нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа изучались в [BSu3] и в недавних работах [Su3, Su4, DSu1, DSu2]. В операторных терминах речь идет о поведении оператор-функций $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\tau \in \mathbb{R}$. Выяснилось, что характер результатов отличается от случая эллиптических и параболических уравнений: приходится менять тип операторной нормы. Остановимся на результатах для операторного косинуса. В [BSu3] установлена оценка точного порядка

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (C' + C''|\tau|)\varepsilon. \tag{0.4}$$

Отсюда при $0 \leqslant s \leqslant 2$ интерполяцией получается оценка порядка $O(\varepsilon^{s/2})$ для $(H^s \to L_2)$-нормы оператора в левой части. В [DSu1, DSu2] было показано, что в общем случае результат (0.4) точен относительно типа операторной нормы. С другой стороны, при дополнительных предположениях результат допускает следующее усиление:

$$\| \cos(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) \|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant (\widetilde{C}' + \widetilde{C}'' |\tau|)\varepsilon. \qquad (0.5)$$

По интерполяции при $0 \leqslant s \leqslant 3/2$ можно оценить $(H^s \to L_2)$-норму оператора в левой части через $O(\varepsilon^{2s/3})$. Дополнительные предположения формулируются в терминах спектральных характеристик оператора $\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ на краю спектра. Аналогичные результаты для экспоненты $e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon}$ были предварительно получены в [Su3, Su4].

0.2. **Основные результаты.** В настоящей статье мы применяем результаты работ [DSu1, DSu2] к *модельному оператору электродинамики*, действующему в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и заданному выражением

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \operatorname{rot} \eta(\mathbf{x}/\varepsilon)^{-1} \operatorname{rot} - \nabla \nu(\mathbf{x}/\varepsilon) \operatorname{div}, \quad \varepsilon > 0. \qquad (0.6)$$

Здесь матрица $\eta(\mathbf{x})$ и функция $\nu(\mathbf{x})$ периодичны, ограничены и положительно определены. Оператор (0.6) представляет собой частный случай оператора (0.1) при $m = 4$, $n = 3$. Специфика в том, что оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$ распадается в ортогональном разложении пространства $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ на соленоидальное и градиентное подпространства (разложение Вейля). Нас в основном интересует соленоидальная часть $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$. Для $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ мы получаем оценку вида (0.4). Показываем, что в случае общего положения этот результат нельзя усилить. С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях мы получаем оценку вида (0.5). Приведены примеры той и другой ситуации.

Результаты применяются к вопросу об усреднении задачи Коши для модельного гиперболического уравнения $\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon = -\mathcal{L}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon$, $\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0$, возникающего в электродинамике. Рассмотрено применение к нестационарной системе Максвелла в случае, когда магнитная проницаемость равна единице, а диэлектрическая проницаемость задается матрицей $\eta(\mathbf{x}/\varepsilon)$.

Метод основан на масштабном преобразовании, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений. Важную роль играют спектральные характеристики оператора $\mathcal{L}$ (заданного выражением (0.6) при $\varepsilon = 1$) на краю спектра.

0.3. **План статьи.** В §1 введен оператор $\mathcal{L}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$; описано его распадение в разложении Вейля; описано разложение этого оператора в прямой интеграл по операторам $\mathcal{L}(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^3)$ (где Ω — ячейка решетки Γ) и зависящим от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ (квазиимпульса). В §2 введены эффективные характеристики оператора $\mathcal{L}$. В §3 получены основные результаты работы об усреднении операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$. §4 содержит примеры, подкрепляющие основные результаты (и ту, и другую ситуации). В §5 мы применяем результаты к вопросу об усреднении задачи Коши для модельного гиперболического уравнения. Некоторые утверждения удается извлечь и для нестационарной системы Максвелла.

0.4. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Через $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ обозначаются соответственно скалярное произведение и норма в $\mathfrak{H}$, символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора, действующего из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^n$ обозначены через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно, $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — матрица размера $n\times n$, то $|a|$ означает норму матрицы a как оператора в $\mathbb{C}^n$. Используются обозначения $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $iD_j=\partial/\partial x_j$, $j=1,\dots,d$, $\mathbf{D}=-i\nabla=(D_1,\dots,D_d)$.

Класс L_2 вектор-функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}$ обозначены через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n=1$ пишем просто $L_2(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но, если это не ведет к смешениям, мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций и матричнозначных функций.

1. Оператор $\mathcal{L}$

1.1. **Решетки. Преобразование Гельфанда.** Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^3$, порожденная базисом $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$:

$$\Gamma=\Big\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3\ :\ \mathbf{a}=\sum_{j=1}^{3}q_j\mathbf{a}_j,\ q_j\in\mathbb{Z}\Big\}.$$

Пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega=\Big\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^3\ :\ \mathbf{x}=\sum_{j=1}^{3}\xi_j\mathbf{a}_j,\ 0<\xi_j<1\Big\}.$$

Базис $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3\in\mathbb{R}^3$, двойственный к $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$, определяется из соотношений $\langle\mathbf{b}_j,\mathbf{a}_i\rangle=2\pi\delta_{ji}$. Этот базис порождает решетку $\widetilde{\Gamma}$, двойственную к Γ. Через $\widetilde{\Omega}$ обозначим центральную зону Бриллюэна решетки $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega}=\big\{\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3:\ |\mathbf{k}|<|\mathbf{k}-\mathbf{b}|,\ 0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}\big\}.$$

Пусть r_0 — радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$, т. е. $2r_0=\min_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}|\mathbf{b}|$.

Для Γ-периодических измеримых матриц-функций систематически используем обозначения $f^\varepsilon(\mathbf{x}):=f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon>0$;

$$\overline{f}:=|\Omega|^{-1}\int_\Omega f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\quad \underline{f}:=\bigg(|\Omega|^{-1}\int_\Omega f(\mathbf{x})^{-1}\,d\mathbf{x}\bigg)^{-1}.$$

Здесь при определении $\overline{f}$ предполагается, что $f\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, а при определении $\underline{f}$ считается, что матрица $f(\mathbf{x})$ квадратная и неособая, причем $f^{-1}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$.

Через $\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^3$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^n)$.

Введём *преобразование Гельфанда* $\mathcal{U}$. Первоначально $\mathcal{U}$ определяется на функциях из класса Шварца следующей формулой:

$$(\mathcal{U}\mathbf{f})(\mathbf{k},\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k},\mathbf{x}) := |\widetilde{\Omega}|^{-1/2}\sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle}\mathbf{f}(\mathbf{x}+\mathbf{a}),$$
$$\mathbf{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3),\ \mathbf{x}\in\Omega,\ \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},$$

а затем продолжается до унитарного отображения

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)\,d\mathbf{k} =: \mathcal{K}.$$

Включение $\mathbf{f}\in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ равносильно тому, что $\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$ при почти всех $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и

$$\int_{\widetilde{\Omega}}\int_{\Omega}\left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\right)\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую матрицу-функцию в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ под действием преобразования $\mathcal{U}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$. Действие дифференциального оператора $b(\mathbf{D})$ первого порядка на $\mathbf{f}\in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{f}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3)$.

1.2. **Оператор $\mathcal{L}$.** Пусть в $\mathbb{R}^3$ заданы (3×3)-матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ с вещественными элементами и вещественная функция $\nu(\mathbf{x})$, причем они периодичны относительно решетки Γ и

$$\eta(\mathbf{x}) > 0;\quad \eta,\eta^{-1}\in L_\infty;$$
$$\nu(\mathbf{x}) > 0;\quad \nu,\nu^{-1}\in L_\infty.$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^3,\mathbb{C}^3)$ рассмотрим ДО $\mathcal{L}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{L} = \operatorname{rot}\eta(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{rot} - \nabla\nu(\mathbf{x})\operatorname{div}. \tag{1.1}$$

Точное определение оператора $\mathcal{L}$ даётся через замкнутую неотрицательную квадратичную форму

$$\mathfrak{l}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^3}\left(\langle\eta(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{u},\operatorname{rot}\mathbf{u}\rangle + \nu(\mathbf{x})|\operatorname{div}\mathbf{u}|^2\right)\,d\mathbf{x},\quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3).$$

Оператор (1.1) представляется в виде $\mathcal{L} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, где

$$b(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} -i\operatorname{rot} \\ -i\operatorname{div}\end{pmatrix},\quad g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}\eta(\mathbf{x})^{-1} & 0 \\ 0 & \nu(\mathbf{x})\end{pmatrix}.$$

Символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет вид

$$b(\boldsymbol{\xi}) = \begin{pmatrix} 0 & -\xi^3 & \xi^2 \\ \xi^3 & 0 & -\xi^1 \\ -\xi^2 & \xi^1 & 0 \\ \xi^1 & \xi^2 & \xi^3 \end{pmatrix}.$$

Сейчас $m = 4$, $n = 3$. Таким образом, оператор $\mathcal{L}$ является частным случаем оператора $\mathcal{A}$ (см. введение). К нему применимы общие результаты, полученные в предшествующих работах для класса операторов $\mathcal{A}$.

1.3. **Разложение Вейля. Распадение оператора $\mathcal{L}$.** В пространстве $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ введём “потенциальное” подпространство

$$G := \left\{ \mathbf{u} = \nabla\phi\colon\ \phi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3),\ \nabla\phi \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) \right\}.$$

“Соленоидальное” подпространство J определяется как ортогональное дополнение к G. То есть, имеет место разложение Вейля

$$L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3) = J \oplus G. \tag{1.2}$$

Подпространство J состоит из тех вектор-функций $\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, для которых выполнено $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ (в смысле распределений). Через $\mathcal{P}_J$ обозначим ортопроектор на J.

Замечание 1.1. *Легко видеть* (*см., например,* [BSu1, гл. 7, п. 2.4]), *что в Фурье-представлении действие проектора $\mathcal{P}_J$ состоит в умножении на символ*

$$p(\boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{\xi}|^{-2} \begin{pmatrix} \xi_2^3 + \xi_3^2 & -\xi_1\xi_2 & -\xi_1\xi_3 \\ -\xi_1\xi_2 & \xi_1^3 + \xi_3^2 & -\xi_2\xi_3 \\ -\xi_1\xi_3 & -\xi_2\xi_3 & \xi_1^3 + \xi_2^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3 \setminus 0.$$

Таким образом, $\mathcal{P}_J$ является псевдодифференциальным оператором нулевого порядка и действует непрерывно во всей шкале пространств $H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, $s \in \mathbb{R}$. Более того, при $s > 0$ оператор $\mathcal{P}_J^{(s)}$, получающийся сужением $\mathcal{P}_J$ на $H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, является ортопроектором пространства $H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ на подпространство $J^s := J \cap H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Оператор $\mathcal{P}_G^{(s)}$, являющийся сужением проектора $\mathcal{P}_G = I - \mathcal{P}_J$ на $H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$, является ортопроектором пространства $H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ на подпространство $G^s := G \cap H^s(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$.

Разложение Вейля приводит оператор $\mathcal{L}$, т.е. $\mathcal{L} = \mathcal{L}_J \oplus \mathcal{L}_G$. Действующая в “соленоидальном” подпространстве J часть $\mathcal{L}_J$ формально задаётся дифференциальным выражением $\operatorname{rot}\eta(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{rot}$, а части $\mathcal{L}_G$, действующей в “потенциальном” подпространстве G, отвечает выражение $-\nabla\nu(\mathbf{x})\operatorname{div}$.

1.4. **Операторы $\mathcal{L}(\mathbf{k})$.** В пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}(\mathbf{k})$, зависящий от параметра $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3$ (квазиимпульса) и заданный формально выражением

$$\mathcal{L}(\mathbf{k})=\operatorname{rot}_{\mathbf{k}}\eta(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{rot}_{\mathbf{k}}-\nabla_{\mathbf{k}}\nu(\mathbf{x})\operatorname{div}_{\mathbf{k}}$$

при периодических граничных условиях. Здесь

$$\nabla_{\mathbf{k}}\phi:=\nabla\phi+i\mathbf{k}\phi,\quad \operatorname{div}_{\mathbf{k}}\mathbf{f}:=\operatorname{div}\mathbf{f}+i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{f},\quad \operatorname{rot}_{\mathbf{k}}\mathbf{f}:=\operatorname{rot}\mathbf{f}+i\,\mathbf{k}\times\mathbf{f}$$

($\mathbf{k}\cdot\mathbf{f}$ — скалярное, а $\mathbf{k}\times\mathbf{f}$ — векторное произведение векторов). Строго говоря, $\mathcal{L}(\mathbf{k})$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$, порожденный замкнутой неотрицательной квадратичной формой

$$\mathfrak{l}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}]=\int_\Omega\left(\left\langle\eta(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{rot}_{\mathbf{k}}\mathbf{u},\operatorname{rot}_{\mathbf{k}}\mathbf{u}\right\rangle+\nu(\mathbf{x})|\operatorname{div}_{\mathbf{k}}\mathbf{u}|^2\right)d\mathbf{x},\qquad \mathbf{u}\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3).$$

Используя разложение функции $\mathbf{u}$ в ряд Фурье, легко проверить, что

$$\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant\mathfrak{l}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}]\leqslant\|g\|_{L_\infty}\|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)},\qquad \mathbf{u}\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3).\tag{1.3}$$

Используя нижнюю оценку (1.3), нетрудно показать, что

$$\mathcal{L}(\mathbf{k})\geqslant c_*|\mathbf{k}|^2I,\quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega};\quad c_*=\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}.\tag{1.4}$$

1.5. **Распадение операторов $\mathcal{L}(\mathbf{k})$.** В пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ выделим “потенциальное” подпространство (зависящее от параметра $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^3$)

$$G(\mathbf{k}):=\{\mathbf{u}=\nabla_{\mathbf{k}}\phi\colon\ \phi\in\widetilde{H}^1(\Omega)\}.$$

“Соленоидальное” подпространство $J(\mathbf{k})$ определяется как ортогональное дополнение к $G(\mathbf{k})$:

$$L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)=J(\mathbf{k})\oplus G(\mathbf{k}).\tag{1.5}$$

Подпространство $J(\mathbf{k})$ состоит из тех вектор-функций $\mathbf{u}\in L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$, для которых выполнено $\operatorname{div}_{\mathbf{k}}\mathbf{u}=0$ (в смысле распределений). Через $\mathcal{P}_J(\mathbf{k})$ обозначим ортопроектор на $J(\mathbf{k})$.

Разложение (1.5) приводит оператор $\mathcal{L}(\mathbf{k})$. Действующая в “соленоидальном” подпространстве $J(\mathbf{k})$ часть $\mathcal{L}_J(\mathbf{k})$ формально задаётся выражением $\operatorname{rot}_{\mathbf{k}}\eta(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{rot}_{\mathbf{k}}$ (при периодических граничных условиях), а части $\mathcal{L}_G(\mathbf{k})$, действующей в “потенциальном” подпространстве $G(\mathbf{k})$, отвечает выражение $-\nabla_{\mathbf{k}}\nu(\mathbf{x})\operatorname{div}_{\mathbf{k}}$.

1.6. **Разложение оператора $\mathcal{L}$ в прямой интеграл.** Под действием преобразования Гельфанда $\mathcal{U}$ оператор $\mathcal{L}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{L}(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{U}\mathcal{L}\mathcal{U}^{-1}=\int_{\widetilde{\Omega}}\oplus\mathcal{L}(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}.$$

Подробнее, имеется ввиду следующее. Пусть $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$. Тогда

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^3) \qquad \text{при п.в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{1.6}$$

$$\mathfrak{l}[\mathbf{v},\mathbf{v}] = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{l}(\mathbf{k})[\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot),\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)]\,d\mathbf{k}. \tag{1.7}$$

Обратно, если для $\widetilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}$ выполнено (1.6) и интеграл в (1.7) конечен, тогда $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$ и выполнено (1.7).

Проследим за распадением операторов при разложении в прямой интеграл. При преобразовании Гельфанда ортопроектор $\mathcal{P}_J$ раскладывается в прямой интеграл по ортопроекторам $\mathcal{P}_J(\mathbf{k})$; см. [Su2]. Поэтому оператор $\mathcal{L}\mathcal{P}_J = \mathcal{L}_J \oplus \mathbf{0}_G$ разложится по операторам $\mathcal{L}(\mathbf{k})\mathcal{P}_J(\mathbf{k}) = \mathcal{L}_J(\mathbf{k}) \oplus \mathbf{0}_{G(\mathbf{k})}$:

$$\mathcal{U}\mathcal{L}\mathcal{P}_J\mathcal{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{L}(\mathbf{k})\mathcal{P}_J(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}.$$

2. Эффективные характеристики

2.1. **Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов.** Следуя [BSu1], положим

$$\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}, \quad t = |\mathbf{k}|, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2,$$

и обозначим $\mathcal{L}(\mathbf{k}) = \mathcal{L}(t\boldsymbol{\theta}) =: L(t;\boldsymbol{\theta})$. Операторное семейство $L(t;\boldsymbol{\theta})$ аналитически зависит от одномерного параметра t и имеет дискретный спектр (поскольку $\mathcal{L}(\mathbf{k})$ является эллиптическим оператором в ограниченной области). Применима аналитическая теория возмущений (см. [K]). При $t = 0$ “невозмущенный” оператор $\mathcal{L}(0)$ имеет изолированное трехкратное собственное значение $\lambda_0 = 0$. Соответствующее собственное подпространство состоит из постоянных вектор-функций:

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} \mathcal{L}(0) = \left\{ \mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^3) \colon \ \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^3 \right\}. \tag{2.1}$$

Через P обозначим ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ на подпространство $\mathfrak{N}$:

$$P\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Положим

$$\delta := \frac{r_0^2}{4} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}, \quad t^0 := \frac{r_0}{2} \|g\|_{L_\infty}^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2}.$$

Как показано в [BSu1], при $t \leqslant t^0$ оператор $L(t;\boldsymbol{\theta})$ имеет ровно три собственных значения (с учетом кратностей) $\lambda_l(t;\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$, принадлежащих промежутку $[0,\delta]$, а интервал $(\delta, 3\delta)$ свободен от спектра. Через $\mathfrak{F}(\mathbf{k}) = \mathfrak{F}(t;\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство оператора $L(t;\boldsymbol{\theta})$, отвечающее промежутку $[0,\delta]$.

Согласно аналитической теории возмущений при $t \leqslant t^0$ собственные значения $\lambda_l(t;\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$, можно занумеровать так, чтобы они являлись вещественно-аналитическими функциями от t (при каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$) и соответствующие им ортонормированные в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^3)$ собственные элементы $\boldsymbol{\varphi}_l(t;\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$, были вещественно аналитичны по t. Таким образом,

$$L(t;\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varphi}_l(t;\boldsymbol{\theta}) = \lambda_l(t;\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varphi}_l(t;\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1,2,3, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^0,$$

причем набор $\boldsymbol{\varphi}_l(t;\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$, является ортонормированным базисом в подпространстве $\mathfrak{F}(t;\boldsymbol{\theta})$. Для достаточно малого $0 < t_* = t_*(\boldsymbol{\theta}) \leqslant t^0$ при $t \leqslant t_*(\boldsymbol{\theta})$ справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t;\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \dots, \qquad l = 1,2,3, \tag{2.2}$$

$$\boldsymbol{\varphi}_l(t;\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) + t\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \qquad l = 1,2,3. \tag{2.3}$$

Векторы $\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1,2,3$, образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$. В силу (1.4) выполнено $\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* > 0$; коэффициенты $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}$ в общем случае могут быть ненулевыми. Коэффициенты степенных разложений (2.2), (2.3) называют *пороговыми характеристиками* оператора $\mathcal{L}$ на краю спектра.

2.2. **Спектральный росток. Эффективная матрица.** Ключевым является понятие *спектрального ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $L(t;\boldsymbol{\theta})$; см. [BSu1]. Дадим спектральное определение ростка: $S(\boldsymbol{\theta})$ — *это самосопряженный оператор в пространстве* $\mathfrak{N}$ *такой, что числа* $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ *и элементы* $\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ *являются его собственными значениями и собственными элементами*:

$$S(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1,2,3.$$

В [BSu1] найдено следующее инвариантное представление для ростка:

$$S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2, \tag{2.4}$$

где $b(\boldsymbol{\theta})$ — символ оператора $b(\mathbf{D})$, а g^0 — так называемая эффективная матрица. Постоянная положительная (4×4)-матрица g^0 определяется по следующему правилу. Пусть $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — (3×4)-матрица-функция, являющаяся Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_4) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{2.5}$$

Эффективная матрица g^0 определена в терминах матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$:

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_4), \tag{2.6}$$

$$g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{2.7}$$

Выясняется, что матрица g^0 положительно определена. Как показано в [BSu1, гл. 7, п. 2.2], для оператора $L(t;\boldsymbol{\theta})$ матрица (2.7) задаётся выражением

$$g^0 = \begin{pmatrix} (\eta^0)^{-1} & 0 \\ 0 & \underline{\nu} \end{pmatrix}, \tag{2.8}$$

где η^0 — эффективная матрица для скалярного эллиптического оператора $-\operatorname{div}\eta(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^*\eta(\mathbf{x})\mathbf{D}$.

Напомним правило вычисления матрицы η^0. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ — стандартные орты в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\Phi_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div}\eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \qquad \int_\Omega \Phi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0. \tag{2.9}$$

Рассмотрим матрицу $\widetilde{\eta}(\mathbf{x})$ со столбцами $\eta(\mathbf{x})(\nabla\Phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1,2,3$. Тогда

$$\eta^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{\eta}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Замечание 2.1. *Отметим следующие свойства матрицы η^0 :*
1°. *Выполнены оценки $\underline{\eta} \leqslant \eta^0 \leqslant \overline{\eta}$ (известные как вилка Фойгта–Рейсса). Из них вытекает, что $|\eta^0| \leqslant \|\eta\|_{L_\infty}$, $|(\eta^0)^{-1}| \leqslant \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$.*
2°. *Равенство $\eta^0 = \overline{\eta}$ равносильно тому, что столбцы $\boldsymbol{\eta}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$, матрицы $\eta(\mathbf{x})$ соленоидальны: $\operatorname{div}\boldsymbol{\eta}_j(\mathbf{x}) = 0$. В этом случае решение задачи (2.5) тривиально: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$.*
3°. *Равенство $\eta^0 = \underline{\eta}$ равносильно тому, что столбцы $\mathbf{l}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$, матрицы $\eta(\mathbf{x})^{-1}$ потенциальны: $\mathbf{l}_j(\mathbf{x}) = \nabla\phi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{l}_j^0$ для некоторых $\phi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{l}_j^0 \in \mathbb{R}^3$. В этом случае $\widetilde{\eta}(\mathbf{x}) = \eta^0 = \underline{\eta}$.*

В соответствии с (2.4), (2.8) можно записать росток $S(\boldsymbol{\theta})$ в виде

$$S(\boldsymbol{\theta}) = b_r(\boldsymbol{\theta})^*(\eta^0)^{-1}b_r(\boldsymbol{\theta}) + \underline{\nu}\, b_d(\boldsymbol{\theta})^* b_d(\boldsymbol{\theta}), \tag{2.10}$$

где

$$b_r(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b_d(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Рассмотрим ортогональное разложение трёхмерного пространства (2.1), зависящее от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$:

$$\mathfrak{N} = J^0_{\boldsymbol{\theta}} \oplus G^0_{\boldsymbol{\theta}}, \tag{2.12}$$

где

$$J^0_{\boldsymbol{\theta}} = \{\mathbf{c} \in \mathbb{C}^3 \colon \mathbf{c} \perp \boldsymbol{\theta}\},$$
$$G^0_{\boldsymbol{\theta}} = \{\mathbf{c} = \lambda\boldsymbol{\theta} \colon \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Очевидно, разложение (2.12) приводит оператор $S(\boldsymbol{\theta})$. При этом $S_J(\boldsymbol{\theta})$ (часть $S(\boldsymbol{\theta})$ в $J^0_{\boldsymbol{\theta}}$) отвечает первому слагаемому в (2.10), а $S_G(\boldsymbol{\theta})$ (часть $S(\boldsymbol{\theta})$ в $G^0_{\boldsymbol{\theta}}$) — второму слагаемому. В подпространстве $G^0_{\boldsymbol{\theta}}$ оператор $S(\boldsymbol{\theta})$ имеет единственное собственное значение $\gamma_3(\boldsymbol{\theta}) = \underline{\nu}$ (не зависящее от $\boldsymbol{\theta}$). В подпространстве $J^0_{\boldsymbol{\theta}}$ — два собственных значения $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$, $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$, отвечающих алгебраической задаче

$$b_r(\boldsymbol{\theta})^*(\eta^0)^{-1}b_r(\boldsymbol{\theta})\mathbf{c} = \gamma\mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \perp \boldsymbol{\theta}. \tag{2.13}$$

Поскольку $|b_r(\boldsymbol{\theta})| = 1$, с учетом замечания 2.1(1°), ясно, что

$$\gamma_j(\boldsymbol{\theta}) \leqslant |(\eta^0)^{-1}| \leqslant \|\eta^{-1}\|_{L_\infty}, \quad j = 1, 2. \tag{2.14}$$

Поскольку при $\mathbf{c} \perp \boldsymbol{\theta}$ выполнено $|b_r(\boldsymbol{\theta})\mathbf{c}| = |\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{c}| = |\mathbf{c}|$, из (2.13) следует нижняя оценка

$$\gamma_j(\boldsymbol{\theta}) \geqslant |\eta^0|^{-1} \geqslant \|\eta\|^{-1}_{L_\infty}, \quad j = 1, 2.$$

Замечание 2.2. *Как отмечено в* [Su2, замечание 4.5], *всегда можно так выбрать аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $L(t;\boldsymbol{\theta})$, $t \in [0, t^0]$, что один из собственных векторов (будем считать, что это $\boldsymbol{\varphi}_3(t;\boldsymbol{\theta})$) принадлежит "градиентному" подпространству $G(t\boldsymbol{\theta})$ при $t \neq 0$, а тогда (автоматически) два оставшихся собственных вектора $\boldsymbol{\varphi}_1(t;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t;\boldsymbol{\theta})$ принадлежат "соленоидальному" подпространству $J(t\boldsymbol{\theta})$. При этом коэффициент $\gamma_3(\boldsymbol{\theta})$ в разложении* (2.2) *для $\lambda_3(t;\boldsymbol{\theta})$ есть собственное значение части ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ в подпространстве $G^0_{\boldsymbol{\theta}}$, т.е. $\gamma_3(\boldsymbol{\theta}) = \underline{\nu}$. "Зародыш" $\boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta})$ в разложении* (2.3) *для $\boldsymbol{\varphi}_3(t;\boldsymbol{\theta})$ совпадает с точностью до фазового множителя с собственным вектором ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ в подпространстве $G^0_{\boldsymbol{\theta}}$, т.е. можно считать $\boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}$. Коэффициенты $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$, $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ в разложениях* (2.2) *для $\lambda_1(t;\boldsymbol{\theta})$, $\lambda_2(t;\boldsymbol{\theta})$ являются собственными значениями части ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ в подпространстве $J^0_{\boldsymbol{\theta}}$ и отвечают алгебраической задаче* (2.13). *"Зародыши" $\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\theta})$ в разложениях* (2.3) *для $\boldsymbol{\varphi}_1(t;\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\varphi}_2(t;\boldsymbol{\theta})$ принадлежат $J^0_{\boldsymbol{\theta}}$ и являются собственными векторами задачи* (2.13). *Если $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \neq \gamma_2(\boldsymbol{\theta})$, то $\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\theta})$ определены однозначно* (*с точностью до фазовых множителей*). *При $t = 0$ все три собственных вектора принадлежат "соленоидальному" подпространству $J(0)$: $\boldsymbol{\varphi}_l(0;\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) \in \mathfrak{N}$, $l = 1, 2, 3$. Отметим также, что в случае $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ знания ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ недостаточно для определения "зародышей" $\boldsymbol{\omega}_1(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\omega}_2(\boldsymbol{\theta})$.*

2.3. **Оператор $N(\boldsymbol{\theta})$.** Нам понадобится также оператор $N(\boldsymbol{\theta})$, действующий в пространстве $\mathfrak{N}$ и определенный в терминах коэффициентов степенных разложений (2.2), (2.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} &N(\boldsymbol{\theta}) = N_0(\boldsymbol{\theta}) + N_*(\boldsymbol{\theta}), \\ &N_0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^{3} \mu_l(\boldsymbol{\theta})(\cdot, \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \\ &N_*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^{3} \gamma_l(\boldsymbol{\theta}) \left((\cdot, P\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) + (\cdot, \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} P\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{\theta}) \right). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Подробнее см. [BSu2].

Замечание 2.3. *В базисе* $\{\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})\}_{l=1}^3$ *оператор* $N_0(\boldsymbol{\theta})$ *диагонален, а* $N_*(\boldsymbol{\theta})$ *имеет нулевую диагональ. Выполнены соотношения:*

$$(N(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (N_0(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \mu_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, 2, 3, \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}(N(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} &= (N_*(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} \\ &= (\gamma_l(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j(\boldsymbol{\theta}))(P\boldsymbol{\psi}_l(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{\theta})), \quad l \neq j.\end{aligned} \tag{2.17}$$

В [BSu2, §4] получено следующее инвариантное представление для оператора $N(\boldsymbol{\theta})$:

$$N(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* M(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}),$$

где $M(\boldsymbol{\theta})$ — (4×4)-матрица, заданная соотношением

$$M(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}.$$

Здесь $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи (2.5), а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция (2.6). Для оператора $L(t;\boldsymbol{\theta})$ оператор $N(\boldsymbol{\theta})$ вычислен в [BSu2, п. 14.3]. Положим

$$\mathbf{c}_j = (\eta^0)^{-1} \mathbf{e}_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

Пусть $\widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} \eta(\mathbf{x})(\nabla \widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_j) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{2.18}$$

Тогда

$$N(\boldsymbol{\theta}) = -i f(\boldsymbol{\theta}) b_r(\boldsymbol{\theta}), \tag{2.19}$$

где матрица $b_r(\boldsymbol{\theta})$ определена в (2.11), а

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta}) :=& (\rho_{12}(\boldsymbol{\theta}) - \rho_{21}(\boldsymbol{\theta}))\theta_3 + (\rho_{31}(\boldsymbol{\theta}) - \rho_{13}(\boldsymbol{\theta}))\theta_2 + (\rho_{23}(\boldsymbol{\theta}) - \rho_{32}(\boldsymbol{\theta}))\theta_1, \\ \rho_{jk}(\boldsymbol{\theta}) :=& |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{\Phi}_j(\mathbf{x}) \big\langle \eta(\mathbf{x})(\nabla \widetilde{\Phi}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_k), \boldsymbol{\theta} \big\rangle\, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Очевидно, оператор $N(\boldsymbol{\theta})$ приводится разложением (2.12). Часть $N(\boldsymbol{\theta})$, отвечающая подпространству $G^0_{\boldsymbol{\theta}}$, равна нулю.

Замечание 2.4. *Поскольку* $\boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}$*, то с учетом* (2.19) *и очевидного равенства* $b_r(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\theta} = 0$ *выполнено*

$$(N(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{\theta})) = (N(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\omega}_j(\boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta})) = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2.$$

Отсюда следует (см. (2.16)*), что коэффициент* $\mu_3(\boldsymbol{\theta})$ *в разложении* (2.2) *собственного значения* $\lambda_3(t;\boldsymbol{\theta})$*, отвечающего "потенциальному" подпространству* $G(t\boldsymbol{\theta})$*, равен нулю:*

$$\mu_3(\boldsymbol{\theta}) = 0, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2.$$

Замечание 2.5. 1°. *Если столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})$ соленоидальны, то периодические решения $\widetilde{\Phi}_j(\boldsymbol{\theta})$ $(j = 1, 2, 3)$ задач* (2.18) *равны нулю, а тогда и $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$. В частности, это равенство выполнено, если матрица $\eta(\mathbf{x})$ постоянна.*
2°. *Если столбцы матрицы $\eta(\mathbf{x})^{-1}$ потенциальны, то вектор-функции $\eta(\mathbf{x})(\nabla\widetilde{\Phi}_k(\mathbf{x}) + \mathbf{c}_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ постоянны. Тогда в силу* (2.19), (2.20) *выполнено $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$.*

Замечание 2.6. 1°. *Как отмечено в* [BSu2, предложение 4.2], *если элементы матриц $b(\boldsymbol{\theta})$ и $g(\mathbf{x})$ вещественные (что выполнено для оператора $\mathcal{L}$) и векторы $\boldsymbol{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, 2, 3$, можно выбрать вещественными (в данной точке $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$), то $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Указанные условия заведомо выполнены, если $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \neq \gamma_2(\boldsymbol{\theta})$, поскольку вектор $\boldsymbol{\omega}_3(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\theta}$ — вещественный, а собственные векторы задачи* (2.13) *в данном случае определены однозначно (с точностью до фазовых множителей) и их можно выбрать вещественными. В такой точке $\boldsymbol{\theta}$ выполнено $N(\boldsymbol{\theta}) = N_*(\boldsymbol{\theta})$ и $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, 2, 3$.*
2°. *Если в какой-либо точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^2$ выполняется равенство $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \gamma_2(\boldsymbol{\theta}_0)$, то с учетом замечаний* 2.3 *и* 2.4 *справедливы соотношения $N_*(\boldsymbol{\theta}_0) = 0$ и $N(\boldsymbol{\theta}_0) = N_0(\boldsymbol{\theta}_0)$. При этом числа $\mu_{1,2}(\boldsymbol{\theta}_0)$ суть собственные значения оператора* (2.19) *в подпространстве $J^0_{\boldsymbol{\theta}_0}$, они задаются выражениями $\mu_{1,2}(\boldsymbol{\theta}_0) = \pm f(\boldsymbol{\theta}_0)$. Если $\mu_{1,2}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, то векторы $\boldsymbol{\omega}_{1,2}(\boldsymbol{\theta}_0)$ определяются однозначно (с точностью до фазовых множителей) и совпадают с собственными векторами матрицы $b_r(\boldsymbol{\theta}_0)$, отвечающими собственным значениям $\pm i$.*

2.4. **Эффективный оператор.** Положим

$$S(\mathbf{k}) := t^2 S(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3. \tag{2.21}$$

Выражение (2.21) является символом ДО

$$\mathcal{L}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) = \operatorname{rot} (\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} - \nabla \underline{\nu} \operatorname{div}, \tag{2.22}$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ на области определения $H^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и называемого *эффективным оператором* для оператора $\mathcal{L}$.

3. Усреднение оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$

3.1. **Оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$.** *Наш основной объект* — оператор $\mathcal{L}_\varepsilon$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^3)$ и формально заданный выражением

$$\mathcal{L}_\varepsilon = \operatorname{rot} (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \operatorname{rot} - \nabla \nu^\varepsilon(\mathbf{x}) \operatorname{div} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{3.1}$$

Строгое определение дается через соответствующую квадратичную форму (ср. п. 1.2). Коэффициенты оператора (3.1) быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$. Мы получаем аппроксимации операторов $\cos(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ и $\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2})$ при малом ε.

Как и оператор $\mathcal{L}$, оператор (3.1) распадается в разложении Вейля (1.2). Его части в соленоидальном и градиентном подпространствах обозначим через $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ и $\mathcal{L}_{G,\varepsilon}$ соответственно.

Ниже нам понадобится следующее простое утверждение, вытекающее из одновременного распадения операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\mathcal{L}^0$ в разложении Вейля (1.2) и из замечания 1.1.

Лемма 3.1. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1)*, а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22)*. Пусть $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$, $\mathcal{L}_{G,\varepsilon}$ — части оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$ в подпространствах J и G, соответственно. Пусть $\mathcal{L}_J^0$, $\mathcal{L}_G^0$ — части оператора $\mathcal{L}^0$ в подпространствах J и G, соответственно. Тогда оценка вида*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma$$

при некоторых $s \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$ равносильна паре неравенств

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\|_{J^s\to J} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma,$$
$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\|_{G^s\to G} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon^\sigma.$$

Оценка вида

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^\sigma$$

при некоторых $s \geqslant 0$ и $\sigma \geqslant 0$ равносильна паре неравенств

$$\|\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\|_{J^s\to J} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^\sigma,$$
$$\|\mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_G^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_G^0)^{1/2})\|_{G^s\to G} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon^\sigma.$$

3.2. **Аппроксимация оператор-функций от $\mathcal{L}_\varepsilon$.** Для удобства дальнейших ссылок назовем *данными задачи* следующий набор величин

$$\|\eta\|_{L_\infty},\ \|\eta^{-1}\|_{L_\infty},\ \|\nu\|_{L_\infty},\ \|\nu^{-1}\|_{L_\infty}; \quad \text{параметры решетки } \Gamma. \tag{3.2}$$

Непосредственное применение теоремы 13.2 из [BSu3] приводит к следующему результату.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathcal{L}_\varepsilon$ — оператор* (3.1)*, а $\mathcal{L}^0$ — эффективный оператор* (2.22)*. Тогда для $0 \leqslant s \leqslant 2$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнены оценки*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_1(s;\tau)\varepsilon^{s/2},$$
$$\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_2(s;\tau)\varepsilon^{s/2},$$

где

$$\mathcal{C}_1(s;\tau) = 2^{1-s/2}(C_1 + C_2|\tau|)^{s/2},$$
$$\mathcal{C}_2(s;\tau) = \mathcal{C}_1(s;\tau)(1+s/2)^{-1}(C_1 C_2^{-1} + |\tau|),$$

а постоянные C_1, C_2 контролируются в терминах данных задачи (3.2).

Далее, теорема 13.2 из [DSu2] (см. также теорему 1 из [DSu1]) приводит к следующему результату.

Теорема 3.3. *Пусть* $\mathcal{L}_\varepsilon$ *— оператор* (3.1)*, а* $\mathcal{L}^0$ *— эффективный оператор* (2.22)*. Пусть оператор* $N(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (2.19)*,* (2.20)*. Предположим, что* $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$*. Тогда для* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$*,* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_3(s;\tau) \varepsilon^{2s/3}, \tag{3.3}$$

$$\| \mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_4(s;\tau) \varepsilon^{2s/3}, \tag{3.4}$$

где

$$\mathcal{C}_3(s;\tau) = 2^{1-2s/3} (C_3 + C_4 |\tau|)^{2s/3},$$
$$\mathcal{C}_4(s;\tau) = \mathcal{C}_3(s;\tau) (1 + 2s/3)^{-1} (C_3 C_4^{-1} + |\tau|),$$

а постоянные C_3*,* C_4 *контролируются в терминах данных задачи* (3.2)*.*

Учтем, что операторы $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$, $\mathcal{L}_J^0$ зависят от коэффициента $\eta(\mathbf{x})$, но не от $\nu(\mathbf{x})$. Напротив, $\mathcal{L}_{G,\varepsilon}$, $\mathcal{L}_G^0$ зависят от коэффициента $\nu(\mathbf{x})$, но не от $\eta(\mathbf{x})$. Рассмотрим оператор $\check{\mathcal{L}}_\varepsilon$ с прежним коэффициентом $\nu(\mathbf{x})$ и с постоянным $\check{\eta}(\mathbf{x})$ (для простоты считаем $\check{\eta} = \mathbf{1}_3$). В силу замечания 2.5(1°) для такого оператора выполнены условия теоремы 3.3, а следовательно, для него справедливы оценки вида (3.3), (3.4). Применяя лемму 3.1, приходим к следующему утверждению.

Следствие 3.4. *Пусть* $\mathcal{L}_\varepsilon$ *— оператор* (3.1)*, а* $\mathcal{L}^0$ *— эффективный оператор* (2.22)*. Пусть* $\mathcal{L}_{G,\varepsilon}$ *и* $\mathcal{L}_G^0$ *— части операторов* $\mathcal{L}_\varepsilon$ *и* $\mathcal{L}^0$*, соответственно, в подпространстве* G*. Тогда выполнены оценки*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_G^0)^{1/2}) \|_{G^s \to G} \leqslant \check{\mathcal{C}}_3(s;\tau) \varepsilon^{2s/3},$$
$$\| \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_G^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_G^0)^{1/2}) \|_{G^s \to G} \leqslant \check{\mathcal{C}}_4(s;\tau) \varepsilon^{2s/3}.$$

где

$$\check{\mathcal{C}}_3(s;\tau) = 2^{1-2s/3} (\check{C}_3 + \check{C}_4 |\tau|)^{2s/3},$$
$$\check{\mathcal{C}}_4(s;\tau) = \check{\mathcal{C}}_3(s;\tau) (1 + 2s/3)^{-1} (\check{C}_3 \check{C}_4^{-1} + |\tau|),$$

а постоянные $\check{C}_3$*,* $\check{C}_4$ *контролируются в терминах* $\|\nu\|_{L_\infty}$*,* $\|\nu^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметров решетки* Γ*.*

Наконец, из [DSu2, теорема 13.4] (см. также теорему 3 из [DSu1]) мы выводим результат, справедливый при следующем условии.

Условие 3.5. 1°. *Оператор* $N_0(\boldsymbol{\theta})$ *равен нулю*: $N_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *для любого* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$*. Это равносильно тому, что* $\mu_1(\boldsymbol{\theta}) = \mu_2(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *для всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$*.*
2°. *Ветви собственных значений* $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$ *и* $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ *либо не пересекаются, либо тождественно совпадают.*

Отметим, что допустимо пересечение ветви $\gamma_3 = \underline{\nu}$ с ветвями $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$. Считая условие 3.5 выполненным, в случае, когда ветви собственных значений $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ не пересекаются, обозначим

$$c^\circ := \min_{\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^2} |\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_2(\boldsymbol{\theta})|.$$

В силу замечания 2.6, если ветви $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ не пересекаются, то $N_0(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ и условие 3.5 выполнено автоматически.

Теорема 3.6. *Пусть* $\mathcal{L}_\varepsilon$ *— оператор* (3.1), *а* $\mathcal{L}^0$ *— эффективный оператор* (2.22). *Пусть выполнено условие* 3.5. *Тогда при* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\| \cos(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_5(s;\tau)\varepsilon^{2s/3}, \tag{3.5}$$

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^3)\to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}_6(s;\tau)\varepsilon^{2s/3}, \tag{3.6}$$

где

$$\mathcal{C}_5(s;\tau) = 2^{1-2s/3}(C_5 + C_6|\tau|)^{2s/3},$$
$$\mathcal{C}_6(s;\tau) = \mathcal{C}_5(s;\tau)(1+2s/3)^{-1}(C_5C_6^{-1} + |\tau|),$$

а постоянные C_5, C_6 *контролируются в терминах данных задачи* (3.2) *и спектральных характеристик ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ (*параметра* c°).

Доказательство. В силу леммы 3.1 искомые оценки (3.5), (3.6) равносильны таким же оценкам для соленоидальной и градиентной частей оператора $\mathcal{L}_\varepsilon$. Согласно следствию 3.4 для градиентной части нужные неравенства выполнены всегда. Поэтому дело сводится к доказательству следующих оценок:

$$\| \cos(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\|_{J^s\to J} \leqslant \mathcal{C}_5(s;\tau)\varepsilon^{2s/3}, \tag{3.7}$$

$$\|\mathcal{L}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\|_{J^s\to J} \leqslant \mathcal{C}_6(s;\tau)\varepsilon^{2s/3}. \tag{3.8}$$

Рассмотрим оператор $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ с исходным коэффициентом $\eta(\mathbf{x})$ и с постоянным коэффициентом $\widehat{\nu}(\mathbf{x}) = 2\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$. С учетом оценки (2.14) такой выбор коэффициента $\widehat{\nu}$ обеспечивает непересечение ветви $\widehat{\gamma}_3 = 2\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ с $\gamma_1(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_2(\boldsymbol{\theta})$. Вместе с условием 3.5 это гарантирует выполнение условия 9.4 из [DSu2] (состоящего в том, что $N_0(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$ и кратность спектра ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ не зависит от $\boldsymbol{\theta}$). Тогда к оператору $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ применима теоремы 13.4 из [DSu2] (см. также теорему 3 из [DSu1]), в силу которой для $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ справедливы оценки вида (3.5), (3.6). Применяя теперь лемму 3.1 и учитывая совпадение соленоидальных частей операторов $\mathcal{L}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$, заключаем, что справедливы требуемые оценки (3.7), (3.8). $\square$

3.3. **Аппроксимации оператор-функций от $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$.** Учитывая лемму 3.1 и применяя теоремы 3.2, 3.3, 3.6 к оператору $\widehat{\mathcal{L}}_\varepsilon$ с исходным коэффициентом $\eta(\mathbf{x})$ и с постоянным коэффициентом $\widehat{\nu}(\mathbf{x}) = 2\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, получаем следующий (объединенный) результат.

Теорема 3.7. *Пусть* $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ *— часть оператора* (3.1) *в соленоидальном подпространстве* J *и* $\mathcal{L}_J^0$ *— часть эффективного оператора* (2.22) *в подпространстве* J.

1°. *При* $0 \leqslant s \leqslant 2$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1(s;\tau)\varepsilon^{s/2}, \tag{3.9}$$

$$\| \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2(s;\tau)\varepsilon^{s/2}, \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{C}}_1(s;\tau) = 2^{1-s/2}(\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2|\tau|)^{s/2}, \\ &\widehat{\mathcal{C}}_2(s;\tau) = \widehat{\mathcal{C}}_1(s;\tau)(1+s/2)^{-1}(\widehat{C}_1\widehat{C}_2^{-1} + |\tau|), \end{aligned} \tag{3.11}$$

а постоянные $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$ *контролируются в терминах норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметров решетки* Γ.

2°. *Пусть оператор* $N(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (2.19), (2.20). *Предположим, что* $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$. *Тогда для* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3(s;\tau)\varepsilon^{2s/3},$$

$$\| \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_4(s;\tau)\varepsilon^{2s/3},$$

где

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{C}}_3(s;\tau) = 2^{1-2s/3}(\widehat{C}_3 + \widehat{C}_4|\tau|)^{2s/3}, \\ &\widehat{\mathcal{C}}_4(s;\tau) = \widehat{\mathcal{C}}_3(s;\tau)(1+2s/3)^{-1}(\widehat{C}_3\widehat{C}_4^{-1} + |\tau|), \end{aligned} \tag{3.12}$$

а постоянные $\widehat{C}_3$, $\widehat{C}_4$ *контролируются в терминах норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметров решетки* Γ.

3°. *Пусть выполнено условие* 3.5. *Тогда для* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_5(s;\tau)\varepsilon^{2s/3},$$

$$\| \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_6(s;\tau)\varepsilon^{2s/3},$$

где

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathcal{C}}_5(s;\tau) = 2^{1-2s/3}(\widehat{C}_5 + \widehat{C}_6|\tau|)^{2s/3}, \\ &\widehat{\mathcal{C}}_6(s;\tau) = \widehat{\mathcal{C}}_5(s;\tau)(1+2s/3)^{-1}(\widehat{C}_5\widehat{C}_6^{-1} + |\tau|), \end{aligned} \tag{3.13}$$

а постоянные $\widehat{C}_5$, $\widehat{C}_6$ *контролируются в терминах норм* $\|\eta\|_{L_\infty}$, $\|\eta^{-1}\|_{L_\infty}$, *параметров решетки* Γ, *а также спектральных характеристик ростка* $S(\boldsymbol{\theta})$ (*параметра* c°).

3.4. **Оценки при большом $|\tau|$.** Контроль за зависимостью постоянных в оценках от τ позволяет получать квалифицированные оценки при малом ε и большом $|\tau|$, что представляет самостоятельный интерес. Для примера извлечем следствие из теоремы 3.7.

Следствие 3.8. 1°. *В условиях пункта* 1° *теоремы* 3.7 *при* $0 \leqslant s \leqslant 2$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$ *выполнены оценки*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1(s;1)\varepsilon^{s(1-\alpha)/2}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$\| \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2(s;1)\varepsilon^{s(1-\alpha)/2-\alpha},$$
$$0 < \alpha < \frac{s}{s+2}.$$

2°. *В условиях пункта* 2° *теоремы* 3.7 *при* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$ *выполнены оценки*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3(s;1)\varepsilon^{2s(1-\alpha)/3}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$\| \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_4(s;1)\varepsilon^{2s(1-\alpha)/3-\alpha},$$
$$0 < \alpha < \frac{2s}{2s+3}.$$

3°. *В условиях пункта* 3° *теоремы* 3.7 *при* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$ *выполнены оценки*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_5(s;1)\varepsilon^{2s(1-\alpha)/3}, \quad 0 < \alpha < 1;$$

$$\| \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_6(s;1)\varepsilon^{2s(1-\alpha)/3-\alpha},$$
$$0 < \alpha < \frac{2s}{2s+3}.$$

3.5. **Подтверждение точности результатов.** Непосредственное применение теоремы 13.6 из [DSu2] (см. также теорему 5 из [DSu1]) приводит к следующему утверждению, подтверждающему точность теоремы 3.2 в общем случае.

Теорема 3.9. *Пусть оператор* $N_0(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (2.15). *Предположим, что хотя бы в одной точке* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^2$ *имеет место* $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$. *Пусть* $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ *и* $0 \leqslant s < 2$. *Тогда не существует такой постоянной* $\mathcal{C}(\tau) > 0$, *чтобы оценка*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}^0)^{1/2}) \|_{H^s(\mathbb{R}^3) \to L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \qquad (3.14)$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

В силу замечания 2.6 условие $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ равносильно соотношениям $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}_0) = \gamma_2(\boldsymbol{\theta}_0)$ и $f(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, где $f(\boldsymbol{\theta})$ определено в (2.20).

Выведем отсюда аналогичный результат для оператора $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$, подтверждающий точность теоремы 3.7(1°).

Теорема 3.10. *Пусть $\mathcal{L}_{J,\varepsilon}$ — часть оператора (3.1) в соленоидальном подпространстве J и $\mathcal{L}_J^0$ — часть эффективного оператора (2.22) в подпространстве J. Пусть оператор $N_0(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.15). Предположим, что хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^2$ имеет место $N_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$. Пусть $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_J^0)^{1/2}) \|_{J^s \to J} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{3.15}$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно считать, что $3/2 \leqslant s < 2$. Рассуждаем от противного. Предположим, что при некоторых $3/2 \leqslant s < 2$ и $\tau \neq 0$ выполнена оценка (3.15). В силу следствия 3.4 заведомо выполнена также и оценка

$$\| \cos(\tau \mathcal{L}_{G,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(\tau (\mathcal{L}_G^0)^{1/2}) \|_{G^s \to G} \leqslant \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon. \tag{3.16}$$

Согласно лемме 3.1 из (3.15) и (3.16) вытекает неравенство (3.14) с постоянной $\mathcal{C}(\tau) = \max\{\widetilde{\mathcal{C}}(\tau), \check{\mathcal{C}}(\tau)\}$. Но это противоречит утверждению теоремы 3.9. $\square$

4. Примеры

4.1. Пример, когда $N_0(\boldsymbol{\theta})$ отлично от нуля в некоторых точках. Пусть $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^3$. Пусть матрица $\eta(\mathbf{x})$ зависит только от переменной x_1 и имеет вид:

$$\eta(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \eta_1(x_1) & \eta_2(x_1) & 0 \\ \eta_2(x_1) & \eta_3(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & \eta_4(x_1) \end{pmatrix},$$

где $\eta_j(x_1)$, $j = 1,2,3,4$, — (2π)–периодические вещественные функции, такие что матрица-функция $\eta(\mathbf{x})$ ограничена и равномерно положительно определена. Периодические решения задач (2.9) сейчас зависят лишь от x_1. Функции $\Phi_1(x_1)$, $\Phi_2(x_1)$ — (2π)–периодические решения задач

$$\partial_1 \eta_1(x_1)(\partial_1 \Phi_1(x_1) + 1) = 0, \qquad \int_\Omega \Phi_1(x_1)\, dx_1 = 0;$$

$$\partial_1 \left(\eta_1(x_1)\partial_1 \Phi_2(x_1) + \eta_2(x_1)\right) = 0, \qquad \int_\Omega \Phi_2(x_1)\, dx_1 = 0,$$

а функция $\Phi_3(x_1)$ равна нулю. Тогда матрица $\widetilde{\eta}(\mathbf{x})$ принимает вид

$$\widetilde{\eta}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ \widetilde{\eta}_{21}(x_1) & \widetilde{\eta}_{22}(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & \eta_4(x_1) \end{pmatrix},$$

где

$$A = \underline{\eta_1}, \quad B = \underline{\eta_1}(\overline{\eta_2/\eta_1}), \quad \widetilde{\eta}_{21}(x_1) = \underline{\eta_1}\eta_2(x_1)\eta_1(x_1)^{-1},$$

$$\widetilde{\eta}_{22}(x_1) = \eta_3(x_1) - \eta_2(x_1)^2\eta_1(x_1)^{-1} + \underline{\eta_1}(\overline{\eta_2/\eta_1})\eta_2(x_1)\eta_1(x_1)^{-1}.$$

В итоге имеем:

$$\eta^0 = \begin{pmatrix} A & B & 0 \\ B & C & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\eta_4} \end{pmatrix}, \qquad g^0 = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{\nu} \end{pmatrix},$$

где $C = \overline{\eta_3} - (\overline{\eta_2^2/\eta_1}) + \underline{\eta_1} \left(\overline{\eta_2/\eta_1}\right)^2$,

$$c_1 = (AC - B^2)^{-1} C, \quad c_2 = -(AC - B^2)^{-1} B,$$
$$c_3 = (AC - B^2)^{-1} A, \quad c_4 = (\overline{\eta_4})^{-1}.$$

Собственные значения задачи (2.13) имеют вид

$$\gamma_{1,2}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}\left((c_3 + c_4)\theta_1^2 + (c_1 + c_4)\theta_2^2 + (c_1 + c_3)\theta_3^2 - 2c_2\theta_1\theta_2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{D(\boldsymbol{\theta})},$$

где

$$D(\boldsymbol{\theta}) = \left((c_3 + c_4)\theta_1^2 + (c_1 + c_4)\theta_2^2 + (c_1 + c_3)\theta_3^2 - 2c_2\theta_1\theta_2\right)^2$$
$$-4\left(c_3c_4\theta_1^2 - 2c_2c_4\theta_1\theta_2 + c_1c_4\theta_2^2 + (c_1c_3 - c_2^2)\theta_3^2\right).$$

Мы стремимся подобрать пример, когда $N_0(\boldsymbol{\theta})$ отлично от нуля в некоторых точках. В силу замечания 2.6, если $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \neq \gamma_2(\boldsymbol{\theta})$, то $N_0(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$. Поэтому нас интересуют точки $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$, в которых $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_2(\boldsymbol{\theta})$. Это приводит к уравнению $D(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Используем параметризацию на единичной сфере:

$$\theta_1 = \sin\phi\cos\psi, \ \theta_2 = \sin\phi\sin\psi, \ \theta_3 = \cos\phi, \quad \phi \in [0, \pi], \ \psi \in [0, 2\pi).$$

Тогда уравнение $D(\boldsymbol{\theta}) = 0$ можно преобразовать к биквадратному уравнению для θ_3 с коэффициентами, зависящими от угла ψ. Выражения для коэффициентов в общем случае весьма громоздкие. Мы рассмотрим случай, когда

$$c_1 = c_3 = \frac{c_4}{2}, \quad c_2 < 0, \quad c_1^2 - c_2^2 > 0.$$

Тогда уравнение для θ_3 упрощается и принимает вид

$$(c_2\sin 2\psi - c_1)^2\theta_3^4 + (-2c_2^2\sin^2 2\psi + 4c_2^2 - 2c_1^2)\theta_3^2 + (c_2\sin 2\psi + c_1)^2 = 0. \quad (4.1)$$

Находим решение:

$$\theta_3^2 = \frac{2c_2^2\sin^2 2\psi - 4c_2^2 + 2c_1^2 \pm \sqrt{-16c_2^2(c_1^2 - c_2^2)\cos^2 2\psi}}{2(c_2\sin 2\psi - c_1)^2}.$$

Очевидно, подкоренное выражение неположительно и обращается в ноль при $\cos 2\psi = 0$. Тогда $\sin 2\psi = \pm 1$. Если $\sin 2\psi = 1$ (что реализуется в точках $\psi = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$), то правая часть равна $(c_1+c_2)(c_1-c_2)^{-1}$; эта величина лежит в интервале $(0, 1)$ и решение существует. Если $\sin 2\psi = -1$, то правая часть равна $(c_1 - c_2)(c_1 + c_2)^{-1}$; эта величина больше единицы, а потому решений нет.

Теперь перейдем к конкретному выбору коэффициентов. Положим

$$\eta_1(x_1) = \begin{cases} a, & \text{если } x_1 < \pi \\ a+1, & \text{если } x_1 \geqslant \pi \end{cases},$$
$$\eta_2(x_1) = b + \cos x_1, \quad \eta_3(x_1) = d, \quad \eta_4(x_1) = h.$$

Пусть

$$a = \frac{73+\sqrt{5629}}{4}, \quad b = \frac{25}{2}, \quad d = \frac{5627}{150}, \quad h = \frac{50}{3}.$$

Тогда $A = C = \frac{75}{2}$, $B = \frac{25}{2}$, $c_1 = c_3 = \frac{c_4}{2} = \frac{3}{100}$, $c_2 = -\frac{1}{100}$.

При таком выборе параметров находим решение уравнения (4.1): $\theta_3^2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_2(\boldsymbol{\theta})$ в следующих точках сферы $\mathbb{S}^2$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\theta}^{(1)} &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \boldsymbol{\theta}^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \\ \boldsymbol{\theta}^{(3)} &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \boldsymbol{\theta}^{(4)} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Для функций $\widetilde{\Phi}_j$, $j = 1, 2$, (см. (2.18)) получаем задачи:

$$\begin{aligned} &\partial_1 \Big(\eta_1(x_1)(\partial_1 \widetilde{\Phi}_1(x_1) + c_1) + c_2 \eta_2(x_1)\Big) = 0, \quad \int_0^{2\pi} \widetilde{\Phi}_1(x_1)\, dx_1 = 0, \\ &\partial_1 \Big(\eta_1(x_1)(\partial_1 \widetilde{\Phi}_2(x_1) + c_2) + c_3 \eta_2(x_1)\Big) = 0, \quad \int_0^{2\pi} \widetilde{\Phi}_2(x_1)\, dx_1 = 0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

а $\widetilde{\Phi}_3 = 0$. Решения уравнений (4.3) имеют вид:

$$\widetilde{\Phi}_1(x_1) = \begin{cases} -\dfrac{c_2}{a}(bx_1 + \sin(x_1)) + (a^{-1} - c_1)x_1 + E_1 & \text{при } x_1 < \pi \\ -\dfrac{c_2}{a+1}(bx_1 + \sin(x_1)) + ((a+1)^{-1} - c_1)x_1 + F_1 & \text{при } x_1 \geqslant \pi, \end{cases}$$
$$\widetilde{\Phi}_2(x_1) = \begin{cases} -\dfrac{c_3}{a}(bx_1 + \sin(x_1)) - c_2 x_1 + E_2 & \text{при } x_1 < \pi \\ -\dfrac{c_3}{a+1}(bx_1 + \sin(x_1)) - c_2 x_1 + F_2 & \text{при } x_1 \geqslant \pi, \end{cases}$$

где константы E_1, E_2, F_1, F_2 выбираются так, чтобы решения были непрерывны и имели нулевое среднее.

По правилам (2.19), (2.20) вычисляется оператор $N(\boldsymbol{\theta})$:

$$N(\boldsymbol{\theta}) = i\varkappa\theta_2\theta_3 \begin{pmatrix} 0 & \theta_3 & -\theta_2 \\ -\theta_3 & 0 & \theta_1 \\ \theta_2 & -\theta_1 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\varkappa = \overline{\widetilde{\Phi}_1 \eta_2 (\partial_1 \widetilde{\Phi}_2 + c_2)} - \overline{\widetilde{\Phi}_2 \eta_2 (\partial_1 \widetilde{\Phi}_1 + c_1)} = -\overline{(c_3 \widetilde{\Phi}_1 - c_2 \widetilde{\Phi}_2)\eta_2^2/\eta_1} - \overline{\widetilde{\Phi}_2 \eta_2/\eta_1}.$$

Вычисление дает

$$\varkappa = \frac{-(c_1^2 - c_2^2)\left(b^2\pi^2 + 8b + \frac{\pi^2}{2}\right) + c_1 \frac{2a+1}{a(a+1)}\left(6b + \frac{\pi^2}{4}\right) - c_2\left(4 + b\pi^2\right)}{4\pi a(a+1)}.$$

При выбранных параметрах $\varkappa \neq 0$; приближённое значение: $\varkappa \approx 4,5 \cdot 10^{-6}$. Таким образом, если $\boldsymbol{\theta}_0$ принимает значения (4.2), то $\mu_1(\boldsymbol{\theta}_0) = -\mu_2(\boldsymbol{\theta}_0) = \frac{\varkappa}{2\sqrt{2}} \neq 0$. В данном примере реализуется условие теорем 3.9 и 3.10.

4.2. **Пример, когда $N(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$.** Напомним, что некоторые случаи, когда выполнянтся условие $N(\boldsymbol{\theta}) \equiv 0$, были выделены в замечании 2.5. Здесь мы рассмотрим еще один пример реализации этого условия, заимствованный из [Zh1]. Пусть $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^3$, выберем ячейку с центром в нуле: $\Omega = (-\pi,\pi)^3$. Пусть $B_1 = \{|\mathbf{x}| \leqslant 1\}$ — единичный шар, B_ϑ — концентрический с ним шар, причём $|B_\vartheta| = \vartheta|B_1|$, $0 < \vartheta < 1$. Пусть $\eta(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция, на ячейке заданная соотношениями

$$\eta(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x})I, \qquad a(\mathbf{x}) = \begin{cases} \kappa, & \text{если } \mathbf{x} \in B_\vartheta \\ 1, & \text{если } \mathbf{x} \in B_1 \setminus B_\vartheta \\ 1 + \frac{3\vartheta(\kappa-1)}{3+(1-\vartheta)(\kappa-1)}, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega \setminus B_1, \end{cases}$$

где $\kappa > 0$. Периодические решения $\Phi_j(\mathbf{x})$, $j = 1,2,3$, задач (2.9) имеют вид

$$\Phi_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} l_1\, x_j, & \text{если } \mathbf{x} \in B_\vartheta \\ l_2\, x_j(1 - |\mathbf{x}|^{-3}), & \text{если } \mathbf{x} \in B_1 \setminus B_\vartheta \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \in \Omega \setminus B_1, \end{cases}$$

где l_1, l_2 находятся из условий непрерывности и сопряжения на ∂B_ϑ: $l_1 = \frac{(1-\vartheta)(\kappa-1)}{\vartheta(\kappa-1)-(\kappa+2)}$, $l_2 = -\frac{\vartheta(\kappa-1)}{\vartheta(\kappa-1)-(\kappa+2)}$. Матрица η^0 сейчас равна $\eta^0 = \hat{a}I$, $\hat{a} = 1 + \frac{3\vartheta(k-1)}{3+(1-\vartheta)(k-1)}$. Решение $\widetilde{\Phi}_j$ задачи (2.18) лишь множителем отличается от соответствующей функции Φ_j. Легко убедиться, что величины $\rho_{jk}(\boldsymbol{\theta})$, $j \neq k$, определенные в (2.20), равны нулю. Следовательно, $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$. Применимы теоремы 3.3 и 3.7.

5. Применение к усреднению решений задачи Коши

5.1. **Задача Коши для модельного гиперболического уравнения.** Пусть $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, $\tau \in \mathbb{R}$, — обобщенное решение следующей задачи Коши

$$\begin{cases} \partial_\tau^2 \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -\operatorname{rot}(\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3,\ \tau \in \mathbb{R}; \\ \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{5.1}$$

где $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in J$. Решение $\mathbf{v}_\varepsilon$ можно представить в виде

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) = \cos(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2})\boldsymbol{\phi} + \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{L}_{J,\varepsilon}^{1/2})\boldsymbol{\psi}. \tag{5.2}$$

Соответствующая усредненная задача имеет вид

$$\begin{cases} \partial_\tau^2 \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau) = -\operatorname{rot}(\eta^0)^{-1}\operatorname{rot}\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau), \\ \operatorname{div}\,\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau) = 0, \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^3,\ \tau\in\mathbb{R}; \\ \mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau\mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{5.3}$$

Справедливо представление

$$\mathbf{v}_0(\cdot,\tau) = \cos(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\boldsymbol{\phi} + (\mathcal{L}_J^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{L}_J^0)^{1/2})\boldsymbol{\psi}. \tag{5.4}$$

Из теоремы 3.7(1°) и следствия 3.8(1°) выводим следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ *— решение задачи* (5.1) *и* $\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)$ *— решение усредненной задачи* (5.3).
1°. *Пусть* $\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}\in J^s$, *где* $0\leqslant s\leqslant 2$. *Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon^{s/2}\left(\widehat{\mathcal{C}}_1(s;\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \widehat{\mathcal{C}}_2(s;\tau)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}\right), \tag{5.5}$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_1(s;\tau)$, $\widehat{\mathcal{C}}_2(s;\tau)$ *определены в* (3.11). *В частности, при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *и* $|\tau|=\varepsilon^{-\alpha}$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})-\mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1(s;1)\varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \widehat{\mathcal{C}}_2(s;1)\varepsilon^{s(1-\alpha)/2-\alpha}\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

где $0<\alpha<\frac{s}{s+2}$ *при* $\boldsymbol{\psi}\neq 0$ *и* $0<\alpha<1$ *при* $\boldsymbol{\psi}=0$.
2°. *Если* $\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\psi}\in J$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad \tau\in\mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Если $\boldsymbol{\phi}\in J$ *и* $\boldsymbol{\psi}=0$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})-\mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad 0<\alpha<1. \tag{5.8}$$

Доказательство. Неравенство (5.5) непосредственно вытекает из (3.9), (3.10) и представлений (5.2), (5.4). Оценка (5.6) выводится аналогичным образом из следствия 3.8(1°).

При $s=0$ оценка (5.5) дает равномерную ограниченность нормы в левой части. Применяя (5.5) при $s=2$ и $s=0$ и используя плотность множества J^2 в J, на основании теоремы Банаха–Штейнгауза получаем (5.7).

В случае $\boldsymbol{\psi}=0$ оценка (5.6) при $s=0$ дает равномерную ограниченность нормы в левой части. Тогда (5.8) следует из (5.6) и теоремы Банаха–Штейнгауза. $\square$

Аналогичным образом утверждения 2°, 3° теоремы 3.7 и следствия 3.8 влекут следующий результат.

Теорема 5.2. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ *— решение задачи* (5.1) *и* $\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)$ *— решение усредненной задачи* (5.3).

1°. *Предположим, что* $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in J^s$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon^{2s/3} \left(\widehat{\mathcal{C}}_3(s;\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \widehat{\mathcal{C}}_4(s;\tau)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \right), \tag{5.9}$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_3(s;\tau)$, $\widehat{\mathcal{C}}_4(s;\tau)$ *определены в* (3.12). *В частности, при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3(s;1)\varepsilon^{2s(1-\alpha)/3}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \widehat{\mathcal{C}}_4(s;1)\varepsilon^{2s(1-\alpha)/3-\alpha}\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

где $0 < \alpha < \frac{2s}{2s+3}$ *при* $\boldsymbol{\psi} \neq 0$ *и* $0 < \alpha < 1$ *при* $\boldsymbol{\psi} = 0$.

2°. *Пусть выполнено условие* 3.5. *Пусть* $\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\psi} \in J^s$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \varepsilon^{2s/3} \left(\widehat{\mathcal{C}}_5(s;\tau)\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \widehat{\mathcal{C}}_6(s;\tau)\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} \right), \tag{5.11}$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_5(s;\tau)$, $\widehat{\mathcal{C}}_6(s;\tau)$ *определены в* (3.13). *В частности, при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leqslant \widehat{\mathcal{C}}_5(s;1)\varepsilon^{2s(1-\alpha)/3}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)} + \widehat{\mathcal{C}}_6(s;1)\varepsilon^{2s(1-\alpha)/3-\alpha}\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

где $0 < \alpha < \frac{2s}{2s+3}$ *при* $\boldsymbol{\psi} \neq 0$ *и* $0 < \alpha < 1$ *при* $\boldsymbol{\psi} = 0$.

Из теоремы 3.10 следует, что в общем случае результат теоремы 5.1(1°) неулучшаем.

5.2. **Задача Коши для нестационарной системы Максвелла.** Из теорем 5.1 и 5.2 можно извлечь некоторые (частичные) результаты об усреднении нестационарной системы Максвелла в случае, когда магнитная проницаемость равна единице, а диэлектрическая проницаемость задана быстро осциллирующей матрицей $\eta^\varepsilon(\mathbf{x})$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = \eta^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ — вектор электрической индукции. Напряженность магнитного поля (совпадающую в нашем случае с магнитной индукцией) обозначим через $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$. Рассмотрим следующую задачу Коши для нестационарной системы Максвелла

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = (\eta^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \\ \partial_\tau \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -\operatorname{rot} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau), \\ \operatorname{div} \eta^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \ \tau \in \mathbb{R}; \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = 0, \quad \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{5.13}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in J$. Усредненная задача имеет вид

$$\begin{cases} \partial_\tau \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) = (\eta^0)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau), \\ \partial_\tau \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau) = -\operatorname{rot} \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau), \\ \operatorname{div} \eta^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \ \tau \in \mathbb{R}; \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = 0, \quad \mathbf{v}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{5.14}$$

Усредненный вектор электрической индукции задан соотношением $\mathbf{w}_0(\mathbf{x},\tau) = \eta^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$. Классические результаты теории усреднения (см. [ZhKO, гл. 4]) дают слабую L_2-сходимость решений задачи (5.13) к решениям усредненной задачи: $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) \to \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)$, $\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,\tau) \to \mathbf{w}_0(\cdot,\tau)$, $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) \to \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)$ при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon \to 0$ слабо в $L_2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^3)$.

Мы усиливаем классический результат для поля $\mathbf{v}_\varepsilon$. Из (5.13) следует, что $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ является решением задачи (5.1) при $\boldsymbol{\psi} = 0$. Из (5.14) видно, что $\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)$ является решением задачи (5.3) при $\boldsymbol{\psi} = 0$. Применяя теоремы 5.1 и 5.2, приходим к следующему результату.

Теорема 5.3. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ *— решение задачи* (5.13) *и* $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{v}_0(\mathbf{x},\tau)$ *— решение усредненной задачи* (5.14).
1°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in J$, *то имеет место сильная сходимость:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad \tau \in \mathbb{R};$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} = 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Пусть $\boldsymbol{\phi} \in J^s$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 2$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1(s;\tau)\varepsilon^{s/2}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)},$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_1(s;\tau)$ *определено в* (3.11). *В частности, при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1(s;1)\varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}.$$

2°. *Предположим, что* $N(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^2$. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in J^s$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3(s;\tau)\varepsilon^{2s/3}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)},$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_3(s;\tau)$ *определено в* (3.12). *В частности, при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3(s;1)\varepsilon^{2s(1-\alpha)/3}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}.$$

3°. *Предположим, что выполнено условие* 3.5. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in J^s$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 3/2$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_5(s;\tau)\varepsilon^{2s/3}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)},$$

где $\widehat{\mathcal{C}}_5(s;\tau)$ *определено в* (3.13). *В частности, при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_5(s;1)\varepsilon^{2s(1-\alpha)/3}\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^3)}.$$

В заключение отметим, что нам удалось получить усиление классических результатов для системы Максвелла в случае, когда начальное данное для $\mathbf{u}_\varepsilon$ равно нулю, и усиление касается только поведения магнитной напряженности $\mathbf{v}_\varepsilon$. Более полное исследование усреднения нестационарной системы Максвелла — дело будущего исследования.

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), вып. 6, 30–107.

[DSu1] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений*, Функц. анализ и его прил. **50** (2016), вып. 4, 91–96.

[DSu2] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, submitted to J. Diff. Equ.; available from https://arxiv.org/abs/1606.05868.

[Zh1] Жиков В. В., *Об оценках для усреднённой матрицы и усредненного тензора*, Успехи матем. наук **46** (1991), вып. 3(279), 49–109.

[Zh2] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.

[Su2] Суслина Т. А., *Усреднение стационарной периодической системы Максвелла*, Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 5, 162–244.

[Su3] Суслина Т. А., *Усреднение уравнений типа Шрёдингера*, Функц. анализ и его прил. **50** (2016), вып. 3, 90–96.

[Su4] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. Appl. **446** (2017), no. 2, 1466–1523.