**ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**



Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А.  Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

**ПРЕПРИНТ ПОМИ 01/2017**

**А. М. ВЕРШИК**

# ТЕОРИЯ ФИЛЬТРАЦИЙ ПОДАЛГЕБР, СТАНДАРТНОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ

Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН;
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
Математико-Механический факультет,
Университетский пр., д. 28, 198504,
Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Б. Каретный пер., д. 19, 127051, Москва, Россия
avershik@gmail.com

**Аннотация**

Обзор посвящен комбинаторной и метрической теории фильтраций – убывающих последовательностей сигма-алгебр в пространствах с мерой, или убывающих последовательностей подалгебр некоторых алгебр. Одно из центральных понятий — стандартность — играет роль обобщения понятия независимости последовательности случайных величин. Обсуждается вопрос о возможности классификации фильтраций, об их инвариантах и о разнообразных связях с задачами алгебры, динамики и комбинаторики.

**Ключевые слова:** фильтрация, условная мера, закон 0-1, стандартность, финитный изоморфизм, энтропия

Поддержано грантом РНФ 14-11-00581.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

# Contents

# 1 ВВЕДЕНИЕ

Этот обзор относится к области, в которой переплелась теория меры с комбинаторикой и асимптотикой, и приложения которой к динамике, алгебре и другим вопросам будут затронуты частично в этой и в следующих статьях. Обзор содержит большое количество новых задач, относящихся к динамике теории графов, теории представлений алгебр и групп.

## 1.1 Простой пример и трудный вопрос

Начнем с элементарного примера, иллюстрирующего, что такое фильтрация, и в чем состоят вопросы комбинаторной теория меры.

Рассмотрим пространство всех односторонних последовательностей нулей и единиц:

$$X = \{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\}, x_n = 0 \vee 1, n = 1 \ldots$$

т.е. бесконечное произведение двоеточий. Будем рассматривать это пространство $X$ как диадический (канторовский) компакт в слабой топологии, а также, как стандартное борелевское пространство. Определим в нем "хвостовое" или остаточное отношение эквивалентности и хвостовую или остаточную фильтрацию сигма-подалгебр множеств. А именно: две последовательности $\{x_k\}$, $\{x'_k\}$ — $n$-эквивалентны, если $x_{k+n} = x'_{k+n}$, при $k \geq 0$; и эквивалентны относительно хвостового отношения эквивалентности, если они являются $n$-эквивалентными при некотором $n$.

Сигма-алгебра $\mathfrak{A}_n, n = 0, 1, \ldots$ есть сигма-алгебра борелевских подмножеств в $X$, которые вместе с каждой своей точкой содержат все точки $n$-эквивалентные ей. Иначе говоря, $\mathfrak{A}_n, n = 0, 1, 2 \ldots$, есть сигма-подалгебра борелевских множеств, задаваемых условиями на координаты с номерами не меньшими чем $n$. Убывающая последовательность сигма-подалгебр борелевских множеств

$$\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2 \ldots,$$

называется *хвостовой, борелевской фильтрацией пространства* $X$ *как бесконечного прямого произведения:*

$$X = \prod_{n=1}^{\infty}[0;1].$$

Если пространство $X$ снабдить произвольной вероятностной борелевской мерой $\mu$, то та же последовательность сигма-подалгебр, (понимаемых уже, как сигма-алгебры классов $\mod 0$ (по данной мере $\mu$) совпадающих множеств) дает пример фильтрации в стандартном пространстве с мерой.

Например, возьмем в качестве меры $\mu$ бернуллиевскую меру — бесконечное произведение мер $\theta = (1/2, 1/2)$; построенная фильтрация называется *диадической бернуллиевской фильтрацией пространства с мерой.* По знаменитому закону $0-1$ Колмогорова ("закон: все или ничего") , пересечение $\bigcap_n \mathfrak{A}_n = \mathfrak{N}$ есть тривиальная сигма-алгебра, состоящая из классов двух множеств - нулевой и единичной мер.

Для всякого натурального $n$ пространство $(X, \mu)$ может быть представлено как прямое произведение пространств с мерой:

$$(X, \mu) = (\prod_{1}^{n}\{(0;1), \theta\}) \times (X_n, \mu_n),$$

где $(X_n, \mu_n) = \prod_{n+1}^{\infty}\{(0;1), \theta\}$

А теперь поставим основной вопрос. Предположим, что на каком-то диадическом компакте $X'$ задана некоторая борелевская вероятностная мера $\mu'$, удовлетворяющая колмогоровскому закону $0-1$, и для каждого натурального $n$ есть изоморфизм пространств с мерой:

$$(X', \mu') \simeq (\prod_{1}^{n}(\{0;1\}, \theta) \times (X'_n, \mu'_n),$$

где $(X'_n, \mu'_n)$ некоторые пространства с мерами $\mu'_n$ .

*Можно ли утверждать что существует изоморфизм* $T$ *пространств с мерой* $T(X', \mu') = (X, \mu)$ *при котором* $T(X'_n, \mu') = (X_n, \mu)$ *при всех* $n$*?*

На языке, который будет объяснён далее, это вопрос о том, единственна ли с точностью до изоморфизма финитно бернуллиевская диадическая эргодическая фильтрация.

Этот вопрос аналогичен, следующему вопросу из теории бесконечных тензорных произведений $C^*$-алгебр и, возможно, выглядит даже более естественным.

Рассмотрим некоторую $C^*$-алгебру $\mathcal{A}$ и предположим, что существует убывающая последовательность её $C^*$-подалгебр $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}$, пересечение которых состоит из констант: $\bigcap_n \mathcal{A}_n = \{Const\}$, и такая что при всех $n$:

$$\mathcal{A} \simeq M_2(\mathbb{C})^{\otimes n} \otimes \mathcal{A}_n,$$

($\sim$ означает изоморфизм $C^*$-алгебр).

*Верно ли, что существует изоморфизм*

$$\mathcal{A} \simeq \prod_{1}^{\infty\otimes} M_2(\mathbb{C}),$$

*при котором для всех* $n$ *подалгебра* $\mathcal{A}_n$ *переходит при этом изоморфзиме в подалгебру* $\prod_{n+1}^{\infty\otimes} M_2(\mathbb{C}) \subset \mathcal{A}$*?*

Эти вопросы были поставлены автором около 50 лет назад. Первый в исходных терминах выглядел так: будет ли всякая фильтрация, у которой конечные отрезки изоморфны конечным отрезкам бернуллиевской фильтрации, а пересечение всех сигма-алгебр фильтрации - тривиально, изоморфной бернуллиевской фильтрации. Источником задачи была эргодическая теория (см. далее). В [5]) *оба вопроса получили отрицательный ответ*, более того оказалось, что существует континуум пространств с мерой (соответственно $C^*$-алгебр) с финитно изоморфными, но попарно неизоморфными в целом диадическими структурами. Этот факт дал старт важной, но все еще не ставшей предметом достаточного внимания, тематике: асимптотической теории фильтраций. Для данного обзора мы отобрали наиболее важные старые и новые факты и главное — новые задачи этой области. Теория фильтраций находит применения в теории меры, теории процессов и динамических систем, а также в теории представлений групп и алгебр. Главный вопрос — о сложности асимптотического поведения на бесконечности монотонных последовательностей алгебр и о возможной классифкации таких последовательностей. Второй задаче — о тензорных произведениях $C^*$-алгебр — будет посвящена другая работа, и мы привели ее здесь, чтобы подчеркнуть параллелизм задач из очень разных областей математики. Обе они относятся к асимптотическому алгебраическому анализу.

Принципиально новые соображения по сравнению с работами по теории фильтрации прежних лет появились в связи с теорией градуированных графов (диаграммам Браттели); это – одна из центральных тем обзора; до сих пор эта связь как будто не отмечалась, хотя для теории $AF$-алгебр хвостовая фильтрация — принципиально важный объект. С позиций теории градуированных графов фильтрации рассматривались в моей недавней статье [23], а в этой статье мы акцентируем внимание, наоборот, на метрической стороне вопроса, и используем технику и понятия, связанные с графами.

## 1.2 Три языка теории меры

Вернемся к метрической формулировке первого вопроса. Если рассмотреть алгебру $L^\infty(X,\mu)$ всех классов $\mod 0$ совпадающих измеримых ограниченных функций на пространстве $(X,\mu)$, то мы получим фильтрацию подалгебр:

$$L^\infty(X,\mu) \equiv \mathcal{A}_0 \supset \mathcal{A}_1 \supset \mathcal{A}_2 \supset \dots,$$

где $\mathcal{A}_n$ есть подалгебра алгебры $L^\infty(X,\mu)$ всех функций, зависящих от координат с номерами, не меньшими $n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Опишем теперь этот пример на языке разбиений, - пусть $\xi_n$ есть разбиение пространства $(X,\mu)$ на классы последовательностей, с совпадающими координатами, номера которых больше $n$; тогда сигма-алгебра $\mathfrak{A}_n$ есть сигма-алгебра множеств, измеримых относительно разбиения $\xi_n$ (т.е. составленных из элементов этого разбиения). А пространство $\mathcal{A}_n$ есть пространство функций, измеримых относительно $\xi_n$. Убывание последовательности разбиений означает, что (почти всякий) элемент разбиения $\xi_n$ есть объединение некоторого числа элементов разбиения $\xi_{n-1}, n = 1, 2 \dots$ (По поводу частичного порядка в протранстве измеримых разбиений см. далее)

В этих терминах подалгебра $\mathcal{A}_n$ есть алгебра $L^\infty(X/\xi_n, \mu_n)$, где $X/\xi_n$ есть фактор-пространство, пространства $(X,\mu)$ по разбиению $\xi_n$, а $\mu_{\xi_n}$ -фактор-мера на нем.

Таким образом имеется функториальная эквивалентность трех описанных выше языков теории фильтраций: язык фильтрацией сигма-подалгебр пространства с мерой, язык фильтрацией подпространств измеримых функций и языка фильтрацией измеримых разбений. Точные определения будут даны далее.

Под фильтрациями мы будем понимать либо бесконечные убывающие последовательности подалгебр некоторой коммутативной алгебры, с инволюцией (например, $L^\infty(X,\mu)$), либо, эквивалентным образом, бесконечные убывающие последовательности сигма-подалгебр алгебры стандартного пространства с мерой $(X,\mu)$, или, наконец на еще одном эквивалентном, геометрическом языке, который мы будем чаще всего использовать — бесконечные убывающие последовательности измеримых разбиений.

Все эти три языка эквивалентны различие между ними терминологическое. Первый контекст (фильтрации подалгебр алгебр с инолюцией) наиболее общий, он допускает важное обобщение, состоящее в отказе от коммутативности объемлющей алгебры, и в переходе к $AF$-алгебрам, — в этой работе это обобщение как отмечено выше, не затрагивается, хотя тесно примыкает к её содержанию статьи.

Мы также будем рассматривать убывающие последовательности сигма-подалгебр множеств в стандартном борелевском пространстве, т.е. борелевские фильтрации — в этом случае мера на пространстве не задана, и возникает вопрос об описании мер, согласованных с данной фильтрацией. Эта постановка вопроса охватывает почти все задачи об инвариантных мерах в различных контекстах.

## 1.3 Где появляются фильтрации?

Фильтрации возникают в теории случайных процессов, теории потенциала и марковских процессов, в эргодической теории, в топологической и метрической динамике. Наиболее интересные приложения относятся к теории градуированных графов (диаграммы Браттели), теории AF-алгебр и к асимптотической комбинаторике. Вот несколько общих примеров.

1. Рассмотрим произвольный случайный процесс, например, с вещественными значениями и с дискретным временем $\{x_m\}_m, m \le 0$ (удобно нумеровать случайные величины отрицательными числами).

Сигма-алгебра $\mathfrak{A}_n$ состоит из измеримых множеств, которые описываются "прошлым" процесса, т.е. случайными величинами с номерами $m < -n$. В этом контексте фильтрация $\{\mathfrak{A}_n\}_n$ есть *фильтрация прошлого случайного процесса.* Аналогично, можно определять фильтрацию "будущего" случайного процесса.

Соответственно этому, теория фильтраций находит приложения в эргодической теории, а именно, в теории эндморфизмов пространств с мерой: в этом случае процесс $\{x_m\}_m$ в вышеприведенном примере — стационарный, т.е. вероятностная мера, отвечающая процессу, — инвариантна относительно левого сдвига: $T\{x_m\}_m = x_{m-1}, m < 0$. Ряд дальнеших результатов будет применен к этому случаю. Для эргодической теории важен случай стационарной фильтрация: сдвиг, т.е. факторизация пространства по первому разбиения (эквивалентным образом, фильтрация, рассматриваемая с любого конечного номера) — изоморфна исходной:

$$\{\xi_n\}_{n=0}^\infty \sim \{\xi_n/\xi_1\}_{n=1}^\infty$$

2. Рассмотрим эргодический автоморфизм, пространства $(X,\mu)$ с мерой: $T : X \to X, T\mu = \mu$. По классической теореме Рохлина он может быть аппроксимирован в равномерной топологии периодическими автморфизмами. Периодические аппроксимации можно усовершенствовать таким образом, чтобы разбиения на траектории этих аппроксимаций убывали, т.е образовывали *фильтрацию разбиений на траектории периодических аппроксимаций*

Такое построение и приводит к так называемой адической реализации автоморфизма [24, 25]. Многие важные метрические инварианты автоморфизма могут быть извлечны из свойств этой фильтрации, об этом также пойдет речь далее.

Этот пример допускает обобщение. Рассмотрим динамическую систему в пространстве $X$ с инвариантной мерой $\mu$, "время" которой есть счетная аменабельная группа $G$. Иначе говоря группа $G$ представлена автоморфизмами пространства $(X, \mu)$, т.е измеримыми преобразованиями, сохраняющими меру: $T : G \to Aut(X, \mu) : g \to T_g : X \to X, T_g\mu = mu$. Фундаментальная теорема эргодической теории утверждает, что если группа $G$ -аменабельна, т.е. имеет инвариантное среднее, то траекторное разбиения группы является ручным (гиперконечным), т.е. существует (неединственная) фильтрация, которая задает убывающую последовательность разбиений, стремящуюся к разбиению на траектории действия группы. Особенно естествнно связывается теория фильтраций с действием локально-конечных групп: в этом случае группа $G = \bigcup_n G_n$, есть индуктивный предел конечных групп и ее для любого её действия канонически определена последовательность разбиений на траектории конечных подгрупп $G_n$.

Некоторые инварианты так построенных фильтраций являются одновременно инварантами действия. Например, энтропия фильтрации (см. далее)

3. Пусть задан $N$-градуированный локально-конечный граф $\Gamma = \coprod_n \Gamma_n, \Gamma_0 = \{\emptyset\}$ (см.рисунок) и $T(\Gamma)$ пространство бесконечных путей в нем, начинающихся в вершине $\emptyset$. Пространство $T(\Gamma)$, как обратный спектр конечных пространств (конечных путей) есть канторовское топологическое пространство, и тем самым снабжается борелевской структурой. В этом пространстве задана *хвостовая фильтрация*: $n$-я сигма-алгебра состоит из множеств, которые не меняются, если в любом их путей в этом множестве изменить начальную часть пути до этажа $n$. Если задать борелевскую меру на пространстве путей, то хвостовая фильтрация станет фильтрацией из примера 1. Но в этом примере возникает новая задача *о мерах, с задаными копереходными вероятностями.* В частности, задача о центральных мерах (см. далее). Эта задача возникала, в теории $C^*$ $AF$-алгебр, и локально-конечных групп - список следов и характеров, в теории марковских процессов и инвариантых марковских мер — описание в духе границ-выход -вход по Дынкину, в теории ивариантных мер для динамических систем. Этот круг вопросов имеет эквивалентные и интересные сами по себе комбинаторные и геометрические формулировки. Заметим, что этот класс примеров фильтрации имеет дополнительную важную специфику и мы будем ее использовать далее.

Один из результатов статьи таков (п.3.2):

**Теорема 1.** *Всякая эргодическая локально-конечная фильтрация изоморфна марковской фильтрации.*

Это означает, что наиболее интересный класс фильтраций можно изучать, рассматривая лишь односторонние марковские цепи (вообще говоря неоднородные по времени и с произвольнм множеством состояний). В частности, отсюда следует плодотворная редукция теории $AF$-алгебр к вероятностной теории марковских цепей и обратное движение от марковских цепей к общим диаграммам Браттели с их алгебраическим подтекстом. Фактически, эта теорема уточняет теорему о существоавнии адической реализации для действия аменбельных групп. Здесь же уместно заметить, что теоремы о хвостовой фильтрации пространства путей градуированных графов тесно сязаны с и фильтрациями коммутантов конечномерных подалгебр $AF$-алгебр.

4.Наконец, самый распространенный повод для рассмотрения фильтраций дает современный формализм статистической физики - классической или квантовой. Рассмотрим решетку ли даже произвольный счетный граф $\Gamma$ и представим его как объединение конечных подмножеств (объемов):

$$\Gamma = \bigcup_n \Gamma_n.$$

Будем рассматривать пространство конфигураций (например, подмножеств) на $\Gamma$, т.е. пространство функций со значениями в некотором алфавите (например, $(0,1)$). Снабдим его структурой борелевского пространства, считая базисными борелевскими нодмножествами -цилиндры, т.е. множества конфигураций, задаваемых некоторыми условиями на конечную часть конфигурации (ограничением на некоторый объем $\Gamma_n$) и произвольными вне этого объема. Тогда перед нами фильтрация в этом борелевском пространстве: $n$-ая сигма-подалгебра фильтрации состоит из цилиндрических множеств, определяемых условиями на ограничение конфигурации на объем $\Gamma_n$. По другому: две конфигурации лежат в одном элементе разбиения, если они совпадают вне объема $\Gamma_n$ при некотором $n$. Если задана вероятностная мера (статистика) на пространстве конфигураций, то мы определили фильтрацию этого пространства с мерой. Популярная схема изучения фазовых переходов и других свойств статистик, принятая в последние годы после работ Добрушина и других [51, 72] состоит в том, что задается не мера, а лишь система условных вероятностей на конфигурациях в объемах при условии фиксации её вне объема, и изучаются те меры, которые имеют эти заданные условные меры. В этом состоит способ задания мер в бесконечномерных пространствах,альтернативный к общепринятому колмогоровскому заданию с помощью совместных распределний. Эта схема изучения фильтраций кратко излагается далее.

Подчеркнем, что приведенный список не претендует на полноту тем, соприкасающихся с теорией фильтраций, и что наш обзор литературы и список работ по перечиленым выше темам далеко не полон.

## 1.4 Конечность и бесконечность в задачах классификации; стандартность, как обобщение независимости.

В математике и физике имеется огромное число задач классификации, в которых возникают "конечные" и "бесконечные инварианты ", и, как правило, именно отыскание последних составляют сущность вопроса о классификации. Обсуждаемая задача о метрической классификции фильтраций кажется типичной для задач, где присутствуют и аналитческие, и алгебраические, и комбинаторные составляющие: и кроме того, нетривиальное соотношение между финитными и бесконечными инвариантами. Может быть, описываемые идеи будут полезны и в других задачах.

В дальнейшем классификация и типы фильтраций понимаются в смысле теории преобразований сохраняющих меру, и эквивалентность —- относительно группы таких преобразований. Вместо слов "эквивалентные объекты (фильтрации)" будем чаще использовать слов "изоморфмные объекты (фильтрации)".

Всякая бесконечная фильтрация алгебр (или сходных объектов)

$$\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty} = \mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \dots$$

может рассматриваться как бесконечный набор своих конечных фрагментов, т.е. конечных фильтраций:

$$\{\mathfrak{A}_k\}_{k=0}^{n}, n = 0, 1, 2 \dots .$$

Предположим, что мы умеем классифицировать относительно некоторого отношения эквивалентности конечные фильтрации данной длины $n$ при всех конечных $n$.

Более точно, пусть это означает, что мы можем построить топологическое или борелевское *пространство модулей*: $\mathcal{M}_n, n = 0, 1, 2 \ldots$, т.е. пространство полных инвариантов конечных фильтраций данной длины. Будем говорить, что две бесконечные фильтрации *финитно изоморфны, если для каждого $N$ их фрагменты длины $N$ эквивалентны*, т.е определяют одну и ту же точку в пространстве $\mathcal{M}_N, N = 0, 1 \ldots$.

Разумеется, финитный изоморфизм бесконечных фильтраций вообще говоря не влечет автоматически их изоморфизм. Иначе говоря пространство модулей бесконечных фильтраций, если даже оно и может быть корректно определено, не есть, вообще говоря, объединение пространств модулей конечных фрагментов фильтраций. Мы подробно рассмотрим этот эффект далее.

Основной предмет данного обзора и новые результаты так или иначе связаны с вопросом о классификации бесконечных фильтраций и с выделением наиболее существенных для приложений классов. Есть бесконечные фильтации, тип которых относительно изоморфзима однозначно определяется финитным типом. Например, если группа симметрий некоторого конечного фрагмента фильтрации тривиальна, то тип (относительно изоморфзима) уже этого фрагмента определяет тип всей фильтрации. Поэтому в содержательной теории должен обсуждаться только класс тех фильтраций, у которых группа симметрий любого бесконечного "хвоста" фильтрации — бесконечна: отчасти из-за этого мы рассматриваем только локально конечные фильтрации (см. далее): для них эти группы бесконечны и это их свойство уже напоминает о марковости. В классе локально конечных фильтраций финитный изоморфизм не накладывает серьезных ограничений на "бесконечные свойства" фильтрации, в частности и не определяет даже эргодична она или нет.

Классификация конечных фильтраций (т.е. конечных убывающих последовательностей подалгебр) должна предшествовать попыткам классифицировать бесконечные последовательности, и в нужных нам категориях она или известна, или легко формулируется. Она начата В.А.Рохлиным (одна сигма-подалгебра или одного разбиения) и по этому образцу можно строить инварианты конечных фильтраций (см. напр.[86]). Мы переизлагаем на удобном языке графов и деревьев классификацию произвольных конечного убывающего наборов. Инварианты т.е. пространства модулей в этих случаях вполне обозримы — это пространства конечных деревьев с мерой. Это содержание части параграфа 2.

Что же еще нужно добавить к финитному изоморфизму, чтобы получить полный изоморфизм? Иначе говоря, какие есть "бесконечные инварианты", не определяемые конечными? И всегда ли они нужны? Существуют ли классы фильтраций, для которых финитный изоморфизм уже гарантирует изоморфизм? Ведь из анализа финитных инвариантов нельзя сделать вывод — достаточны они или нет для определения типа фильтрации.

Это один из основных вопросов, пожалуй, типичный для любых дискуссий о конечном и бесконечном.

Ответ на поставленный вопрос положителен: искомый класс—это совокупность, так называемых *стандартных фильтраций*. Для случая однородных (например диадических) фильтраций этот класс, как это непосредственно следовало из критерия стандартности (см. [5] и далее параграф 4) состоял и бернуллиевских фильтраций т.е. фильтраций прошлого произвольной последовательности независимых величин.

Для общих локально конечных фильтраций сама постановка вопроса не столь очевидна и выглядит следующим образом. Постараемся обобщить задачу классификации фильтраций, т.е. дополнить фильтрации некоторой структурой так, чтобы по поведению финитных инвариантов фильтрации для дополненной задачи классификации можно было бы определить, будут обычные финитные инварианты однозначно определять тип этой фильтрации.

Фильтрации, для которых выполнено нужное условие поведения назовем *стандартными фильтрациями*: этот класс обобщает понятие независимости (=бернуллиевости).

Что же такое эта обобщенная задача и эти обобщенные финитные инварианты? Ответ в том, что классифицировать надо не сами конечные фрагменты фильтраций, а их вместе с дополнительными данными; этими данными могут быть фиксированые измеримые функции, заданные на пространстве, но наиболее удачный вариант состоит в том, чтобы классифицировать конечные фильтрации *вместе с метрикой на пространстве с мерой.* Тогда деревья с мерой, как инварианты конечных фрагментов фильтраций, будут оснащены еще и метрикой, и в новых терминах удается сформулировать *критерий асиптотического поведения инвариантов — критерий стандартности*, выполнение которого в точности эквивалентно тому, что финитные инварианты полностью определяли тип фильтрации. При этом выбор метрики не вляияет на справедливость или несправедливость этого критерия — метрика лишь должна быть допустимой (см. далее). Это и есть основная идея, которую мы излагаем в параграфе 5. Прострнство модулей таким образом и есть простpнство финитных инвариантов, а критерий стандартности есть условие сближения по мере инвариантов условных фильтаций (на элементах $n$-го разбиения)когда $n$ стремтся к бесконечности. Инварианты конечных фильтраций на конечных элемнтах разбиений есть меры на конечных деревьях, снабженных условными мерами и метрикой как деревьев с метрикой и мерой. Мы приводим этот критерий также в терминах, сходных с терминами мартингальных теорем.

На первый взгляд кажется, что такую процедуру выделения хороших классов можно продолжить далее, т.е. расширять задачу классификации фильтраций получая дальнейшие классифицируемые классы. Но это не так: за пределами класса стандартности в существенном остается неделимый и интереснейший класс — *вполне нестандартных фильтраций,*— для которого пока существуют частные инварианты, типа старых — шкалы, энтропии (вторичной), и, возмодно, новых — "высших законов $0-1$, далеко обобщающих колмогоровские законы. Мы допускаем изменение терминологии, поскольку стандартность может пониматься в жестком смысле (как минимальность) и более мягком собственно стандартность; будущее выявит удобную терминологию.

Любопытно сравнить сказанное с орнштейновской теорией слабой бернуллиевости — $WVB$, $d$ и $f$ метриками и т.д.): условие $WVB$ сходно со стандартностью, различие лишь в выборе метрик на пространстве условных мер, а также в том, что в эргодической теории рассматриваются лишь стационарные фильтрации.

Мы показываем, что финитная класссификация и классификация стандартных фильтраций являются ручными задачами, т.е. пространство модулей обозримое борелевское пространство. Общая же задача метрической классифкации произвольных фильтраций в принятом смысле слова "дикая", и, повидимому, столь же сложна, как задача классификации автоморфизмов пространств с мерой и задач, подобных ей.

## 1.5 Краткое содержание статьи

Статья в основном носит обзорный характер и подводит некоторые итоги исследования фильтраций с момента появления (1969 г) понятия нестандартности, точнее, открытия примеров не бернуллиевских, но финитно изоморфных бернуллиевским, фильтрациям, и критерия стандартности. Мы не включили в обзор несколько важных тем, непосредственно относящихся к теории фильтраций, например понятие "удобных" ("cosy") по Цирельсону, недавние работы Laurent и др. Главная цель — во-первых, перенести на неоднородные и не финитно бернуллевские фильтрации основные результаты о стандартности и во-вторых, соединитьтематику фильтраций с теорей градуированных графов (диаграмм Браттели) и,тем самым, с теорией $AF$-алгебр, с комбинаторикой графов и марковских цепей. Поэтому основной интерес представляют локально конечные или конечно представимые фильтрации, т.е такие, для которых слои (элементы разбиений) конечны для каждого разбиения и число различных типов условных мер тоже конечно. Подробное введение, включающее рохлинскую теорию одного разбиения содежится во втором параграфе. Связи с теорией градуированных графов и марковских цепей изложены в третьем и четвертых параграфах. Нужно сказать, что наличие этих связи обогащают и теорию фильтраций, и теорию графов, марковских цепей и алгебр. Появившиеся в последние годы примеры отлично иллюстрируют это увеждение. Появилось много интересных и сложных графов, пришедших из теории адических (т.е. "графических") аппроксимаций динамических систем (графы упорядоченных и неупорядченных пар, графы слов и др.) и дающих примеры нестандартных фильтраций, а с другой стороны, теория графов привносит новые задачи, связанные с алгебрами и новые реализации фильтраций. Теорема марковской реализации локадьно конечной фильтрации доказывается в параграфе 4. Ключевое понятие теории -стандартность. Для однородных и финитно бернуллиевских эргодических фильтраций — это то же самое, что независимость, т.е. фильтрация есть "прошлое" бернуллиевской схемы. Для общих локально конечных фильтраций это более сложное понятие и мы приводим его определение и критерий проверки. В частности, дается формулировка критерия стандарности в терминах случайных процессов, а именно как усиление теоремы о сходимости мартингалов. Это усиление есть теорема о диагональной в опредленном смысле сходимости. Появляется шкала усилений, которые мы трактуем как шкалу законов $0-1$, на одном конце этой шкалы – колмогоровский закон $0-1$, а на другом стандартность илив однородном случае -бернулиевость Эти вопросы обсуждаются в пятом параграфе. Нужно сразу сказать, что для случая общих фильтраций можно определить разные степени "нестандартности", или разные степени близости к стандартным фильтрациям. Наиболее интересна нестандартность в обнородном (например, диадическом случае. Мы разбираем в шестом параграфе несколько ключевых примеров, например, схему случайных блужданий в случайной среде. Но работы над этой темой продолжается, поэтому он носит рабочий характер. Наконец последний параграф посвящен фильтраиям в борелевском пространстве и вопросу о перечислении всех мер с данным оснащением. Приложения этой темы очень широки, мы приводим связи с теорей случайных блужданий на группах и теорией следов алгебр и характеров групп.

Я счел полезным снабдить обзор несколькими историческими комментариями об интересной истории вопроса.

# 2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИЙ В ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРОЙ

## 2.1 Теория меры: пространство Лебега, основные факты

Мы рассматриваем определённую категорию пространств с мерой — категорию *пространств Лебега по Рохлину* [83] или стандартных пространств с мерой. Это — пространства с полной сепарабельной сигма-алгеброй множеств, полных относительно некоторого (а тогда и любого) базиса; на этой сигма-алгебре задана вероятностная сигма-аддитивная мера. Сепарабельность сигма-алгебры означает наличие в ней счетного базиса измеримых множеств, разделяющего точки пространства, с условием, что произвольное измеримое множество $A$ должно содержаться в некотором множестве $B$ из борелевской оболочки базиса, причем $\mu(B \setminus A) = 0$ (более слабого условия $\mu(B \triangle A) = 0$ недостаточно для полной аксиоматики пространств Лебега; мы не останавливаемся на этом подробно (см.[83]).

Все объекты и понятия —т.е. пространства, базисы, полнота, множества, функции, разбиения, отображения и пр.— все должно пониматься по модулю 0: $\mod 0$, т.е. с точностью до изменения этих объектов, понятий на множествах нулевой меры. Пространства Лебега — есть класс пространств Лебега $mod0$, измеримая функция также есть класс совпадающих $mod0$ функций и т.д.

Такое соглашение накладывает обязательство проверять корректность по отношению к переходу $\mod 0$ всех понятий, определений, формулировок, доказательств, что, как правило, всеми авторами игнорируется, но, правда, такое невнимание никогда не подводило опытных авторов.

Морфизмы в категории пространств Лебега это измеримые в понятном смысле отображения пространств, сохраняющие меру, а точнее, классы $mod0$ (в образе и прообразе) совпадающих отображений. Более подробно, измеримое отображение пространства Лебега в произвольное "измеримое", т.е., снабженное сигма-алгеброй пространство (например в стандартное борелевское пространство со счетной базой — отрезок $[0, 1]$), есть отображение, для которого прообраз измеримого множества измерим. Если пространство-образ снабжено мерой и мера образа равна мере прообраза то говорят, что отображение сохраняет меру. Если то же верно для обратного преобразования то говорят об изоморфизме (автоморфизме, если образ и прообраз совпадают) пространств с мерой.

Заметим, что образ пространства Лебега при измеримом отображении есть пространство Лебега. (ср. с соответствующей теоремой о компактах.)

Два объекта, переводимые изоморфизмом и обратным к нему, один в другой, называются изморфными (или иногда, эквивалентными)

Следующая классификационная теорема Рохлина уточняет более раннюю теорему фон Неймана [77] того же типа, но онованую на более сложной аксиоматике пространств с мерой:

*существует единственное с точностью до изоморфизма пространство Лебега с непрерывной (т.е. не имеющая атомов) вероятностной мерой. Отрезок* $[0, 1]$, *снабженный лебеговой мерой есть универсальный пример пространства Лебега с непрерывной мерой. Любой сепарабельный компакт с непрерывной борелевской вероятностной мерой есть другой такой пример. Наиболее удобный универсальный пример пространства Лебега это счетное произведение двоеточий — т.е. диадический компакт с произвольной непрерывной борелевской мерой.* Таким образом в категории пространств Лебего наиболее интересные объекты (с непрерывной мерой) изоморфны.

Заметим, что построение теория пространств Лебега по Рохлину в [83] фактически повторяет теорию метрических компактов и даже более конкретно — диадического компакта с необходимыми поправками, учитывающими специфику теории меры.

Переход к классификации общих пространств Лебега, т.е. с произвольной мерой состоит в добавлени не более чем счетного числа атомов положительной меры.

*Поэтому полный (метрический) инвариант общего пространства Лебега есть* *упорядоченная последовательность неотрицательных чисел:*

$$m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \cdots \geq 0; \quad \sum_i m_i \leq 1,$$

*а именно последовательность размеров атомов т.е. точек положительной меры.*

Нулевая последовательность отвечает пространству с непрерывной мерой, последовательность с единичной суммой $\sum_i m_i = 1$ — пространств с атомической мерой.

## 2.2 Измеримые разбиения, фильтрации

Измеримым разбиением $\xi$ пространства Лебега $(X, \mu)$ называется разбиение на прообразы точек при измеримом отображении $f : X \to R$, где $R$ произвольное стандартное борелевское пространство, например, (не умаляя общности) $[0, 1]$. Тот факт, что множество $C$ есть элемент (или блок) разбиения $\xi$ записывается так: $C \in \xi$. Разбиения также рассматриваются с точностью до класса $mod0$ совпадающих.

Фундаментальный факт, восходящий к работам по теории вероятности 30-х годов (Дж.Дуб и др.), но строго доказанный В.А.Рохлиным по иницитиве А.Н.Колмогорова (о необходимости строгого исследования условных мер есть некоторые намеки в его знаменитой книге [68]) состоит в следующем:

**Теорема 2.** *(Рохлин* [83]*) Всякое измеримое разбиение $\xi$ пространство Лебега $(X, \mu)$ может быть снабжено единственной $mod0$ канонической системой мер $\{\mu^C\}, C \in \xi$ (на более распространенном языке — системой условных мер) на почти всех элементах разбиения $\xi$ так, что*

1) *почти все по мере $\mu$ элементы $(C, \mu^C)$, снабженные условной мерой есть пространства Лебега; фактор-пространство $X/\xi$, снабженное фактор-мерой $\mu_\xi$ есть также пространство Лебега;*

2) *Для любого измеримого множества $A \in X$ функция $\mu^C(A \cap C)$ измерима (как функция на $(X/\xi, \mu_\xi)$) и имеет место формула (Фубини — повторного интегрирования)):*

$$\mu(A) = \int_{X/\xi} \mu^C(A \cap C) d\mu_\xi(C)$$

Напомним, что измеримому разбиению $\xi$ отвечает единственная сигма-алгебра множеств $\mathfrak{A}_\xi$ — измеримых относительно $\xi$, т.е.множеств, составленных из элементов разбиения $\xi$. В пространствах Лебега верно и обратное, всякой сигма-подалгебре $\mathfrak{A}_\xi$ измеримых множеств в пространстве $(X, \mu)$ отвечает единственное ( $\mod 0$) измеримое разбиение $\xi$ и $\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A}$.

В пространстве $L^1$ и $L^2$ определён *оператор условного математического ожидания* отвечающий измеримому разбиению $\xi$ — т.е. проектор $P_\xi$ (ортогональный в $L^2$) на подпространство функций, постоянных на элементах разбиения $\xi$, это оператор усреднения по элементам разбиения, снабженный условными мерами.

С альтернативной точки зрения теорема об условных мерах есть просто теорема об интегральном представлении оператора условного ожидания:

$$(P_\xi f)(C) = \int_C f(x) d\mu^C(x).$$

Левую часть можно понимать на функцию на фактор-пространстве, но можно и как функцию на $X$, принадлежащую подалгебре функций, постоянных на элементах разбиения.

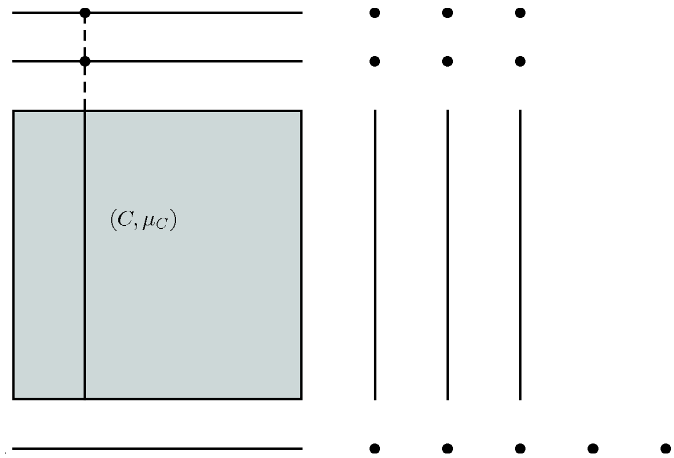



Figure 1: Измеримое разбиение

Проектор на эту подалгебру определен корректно, и его доказательство его интегрального представления обычно проводят, следующим образом, сначала снабжают пространство $X$ компактной топологией или даже метрикой и затем, рассмотривают проектор на непрерывных функциях и затем, аппроксимируя ими функции из $L^1(X, \mu)$.

Частичное упорядочение измеримых разбиений $mod0$ превращает совокупность разбиений в решетку, в которой отношение больше $\xi \succ \xi'$ означает, что элементы разбиения $\xi$ мельче элементов разбиения $\xi'$, или, что элемент разбиения $\xi'$ составлен из элементов разбиения $\xi$; именно такое упорядочение согласовано с упорядочением пространств измеримых функций, ассоциированных с разбиениями по включению. Наибольшее разбиение есть разбиение $mod0$ на отдельные точки, а наименьшее – это тривиальное разбиение пространства (на одно непустое множество). Заметим, что это упорядочение в точности противоположно принятому в комбинаторике, где наибольшее пвзбиение тривиально, а наименьшее — разбиение на отдельные точки.

## 2.3 Классификация измеримых разбиений

Цель ближайших пунктов — описать метрические инварианты разбиений, т.е. дать классификацию разбиений, а затем конечной фильтрации, т.е. конечной убывающей последовательности измеримых разбиений. Случай одного разбиения разобран в известной статье [83], и мы лишь для удобства дальнейших обобщений немного изменим его формулировку. Зпметим, что это едва ли не главный оригинальный результат [83].

**Теорема 3.** ([83]) *Метрический инвариант измеримого разбиения $\xi$ в непрерывном пространстве Лебега $(X, \mu)$ есть метрический инвариант отображения:*

$$V_\xi : (X/\xi, \mu_\xi) \to \Sigma,$$

*где $(X/\xi, \mu_\xi)$ -фактор-пространство, $\mu_\xi)$ — фактор-мера меры $\mu$ при проекции $X \to X/\xi$ по разбиению $\xi$, а отображение $V_\xi$ сопоставляет каждому элементу разбиения $C \in \xi$ упорядоченную последовательность мер атомов $m_1(C) \geq m_2(C) \dots$ как точку симплекса $\Sigma$ всех упорядоченных рядов неотрицательных чисел с суммой не больше единицы.*

Таким образом два измеримых разбиения пространств Лебега изоморфны, т.е. переводятся одно в другое изоморфизмом пространств с мерой, тогда и только тогда, когда соответствующие им отображения $V$ если метрически изоморфны.

Но можно пойти дальше и спросить, каковы же метрические варианты отображения $V_\xi$? Ответ следующий: это $V_\xi$-образ меры $\mu_\xi$, т.е. борелевская мера на симплексе $\Sigma$, и так называемые кратности, которые нам не понадобятся, поэтому отсылаю интересующегося к работе [14], в которой подробно описаны инварианты измеримых отображений, обобщающие работу В.А.Рохлина [82] о классификации функций.

Выражаясь не совсем точно, можно сказать, что измеримое разбиение есть случайное пространство с мерой, все реализации которого рассматриваются как непересекающиеся подмножества внутри одного пространства.

Прежде, чем перейти к случаю нескольких разбиений, приведем ряд классов и примеров разбиений.

1. *Разбиения, допускающие независимое дополнения.* Если почти все элементы $C \in \xi$ разбиения $\xi$ изоморфны как пространства с условными мерам $\mu^C$, т.е. отображение $V_\xi$-образ меры $\mu_\xi$ есть дельта-мера в точке симплекса $\Sigma$, отвечающей (единственному) типу условной меры $\mu^C$ в этом разбиении. В этом и только в этом случае, разбиение $\xi$ допускает *независимое дополнение* $\xi^-$ а пространство допускает разложение в прямое произведение пространств с мерой:

$$(X, \mu) = (X/\xi, \mu_\xi) \times (X/\xi^-, \mu_{\xi^-}),$$

где $\xi^-$ есть единственное с точностью до изоморфизма (но не единственное геометрически) независимое разбиение (дополнение). Почти каждый элемент разбиения $\xi$ пересекается с почти каждым элементом разбиения $\xi^-$ и выполнено условие независимости:$\mu(A \cap B) = \mu_\xi(A) \cdot \mu_{\xi^-}(B)$, для множеств $A, B$ измеримых соотвтственно относительно разбиений $\xi$ и $\xi^-$.

**Следствие 1.** *(Рохлин [83]) В пространстве Лебега с непрерывной мерой существует единственное точностью до изоморфизма разбиение, с непрерывными условными мерами.*

Это разбиение квадрата $[0, 1]^2$ с лебеговой мерой на вертикальные отрезки. Независимое дополнение (не единственное) -разбиение на горзонтальные отрезки.

2. *Конечные разбиения.* Разбиения с конечным числом элементов (блоков) называются конечными их полный инвариант в случае, когда $(X, \mu)$ — непрерывное пространство с мерой, — набор мер элементов, $V_\xi \mu = \delta_0$, где $0\Sigma$ - нулевая последовательность.

3. *Атомические разбиения.* Пусть разбиение $\xi$ таково, что почти все элементы его конечны, а точнее почти все меры $\mu^C$ атомические с конечным числом атомов, назовем такие разбиения дискретными (а надо бы "коконечными"). Назовем измеримое разбиения $\xi$ пространства Лебега с непрерывной мерой $(X, \mu)$ **атомическим**, если число метрических типов условных мер конечно, Иначе говоря, $V_\xi$-образ меры $\mu_\xi$ есть мера на $\Sigma$ с конечным числом атомов.

4. *Полуоднородным разбиением* называется атомическое разбиение с конечным блоками и равномерными условным мерами на почти каждом блоке. Инвариантом полуоднородного разбиения является набор натуральных чисел равных числам точек в блоках и мер множеств всех элементов с данным чслом точек. *Однородным называется разбиение* с постоянным множеством точек во всех блоках (диадическое, триадическое и т.д.)$V$-образ это дельта-мера в точке симплекса $(1/n, \ldots (n) \ldots 1/n) \in \Sigma$.

## 2.4 Классификация конечных фильтраций

Изучение и классификация наборов (конечных или бесконечных) сигма-подалгебр или эквивалентно - измеримых разбиений - в пространствах Лебега с непрерывной мерой — есть, возможно, самая общая и трудная геометрическая задача теории меры и теории вероятностей. Уже случай двух измеримых разбиений, находящихся в общем положении представляет большой интерес и связан с комбинаторными и алгебраическими трудностями. Мы рассмотрим его в другом месте.

В этом пункте мы расклассифицируем сначала конечные монотонные последовательности измеримых разбиений, т.е. конечные фильтрации Их классификация довольно проста. Основная тема статьи - анализ бесконечных фильтраций.

Изучению конечных фильтраций в пространстве с непрерывной мерой, нужно предварить их изучение в конечном пространства с мерой — $(C, m)$, $C = \{c_1, c_2 \dots c_k\}, m(c_i) = m_i, i = 1 \dots k$. Фильтрация длины $n$ на конечном пространстве есть *иерархия*: разбиение $\xi_0$ есть разбиение $(C, m)$ на отдельные точки; $\xi_1$ некоторое разбиение $C$; $\xi_2$ — объединяет некоторые блоки разбиения $\xi_1$ в бОльшие блоки и т.д. последнее разбиение $\xi_{n-1}$ состоит из одного блока— всего $C$. Удобно себе представлять иерархию в виде дерева с мерой ранга $n$ то есть с $n$ этажами (см. рис с унок).

Для $n = 1$ дерево состоит их двух этажей — вершин нулевого этажа и одной вершины первого этажа. Вершины нулевого этажа линейно упорядочены значениями мер точек (см. выше).

В общем случае вершины дерева, лежащие на этаже $r$ есть элементы разбиения $\xi_r, r = 0, 1, \dots n-1$, и ребро, соединяющее вершину этажа $r-1$ с вершиной этажа $r$ означает, включение соответствующих элемнтов разбиений. Вершины нулевого этажа т.е. точки самого пространства $C$ есть "листья" дерева. Они снабжаются мерами $m_i, i = 1 \dots k$; условимся о частично линейной упорядоченности листьев, входящие в один и тот же элемент разбиения $\xi_1$ по по величинам их мер (с точностью до произвольного порядка на листьях равной меры). По этим мерам можно восстановить простым суммированием условные меры на вершинах дерева первого этажа— т.е. на элементах разбиения $\xi_1$, и далее также на элементах $\xi_2, \dots \xi_{n-1}$ следующих этажей.

**Определение 1.** Пространство $Tree_n$ это пространство конечных однокоренных деревьев ранга $n$, т.е. деревьев с $n$ этажами, нумеруемыми числами от $0, 1, \dots n-1$, корнем дерева как единственной вершиной последнего этажа, — и снабженных строго положительной вероятностной мерой на листьях т.е. на вершинах нулевого этажа и, следовательно на вершинах всех этажей, с индуцированном мерой линейным упорядочением вершин как описано выше.

Можно сказать, что $Tree_n$ есть пространство конечных фильтраций длины $n$ на конечных пространствах с мерой.

В дальнейшем мы дополним деревья еще одной важной стуктурой — метрикой, что сдедает категорию деревьев с мерой и метрикой мощным средством в решении наших задач.

Теперь мы готовы описать полную систему инвариантов конечной фильтрации произвольного пространства Лебега. Мы рассматриваем лишь фильтрации, в которых все измеримые разбиения являются атомическими.

$$\{\xi_0 \succ \xi_1 \succ \xi_2 \dots \xi_n\} = \{\xi_k\}_{k=1}^n,$$

$\xi_0 = \varepsilon$ – разбиение $mod0$ на отдельные точки.

Убывание означает, что почти любой элемент последнего разбиения $C_n \in \xi_n$ конечен и составлен из конечного числа элементов разбиения $\xi_{n-1}, C_n = \cup C^i_{n-1}, C^i_{n-1} \in \xi_{n-1}$, а элементы $C^i_{n-1}$ есть объединения элементов разбиения $\xi_{n-2}$ и т.д.

Иначе говоря, почти любой элемент $C_n \in \xi_n$ несет на себе иерархию т.е. конечную фильтрацию с мерой. Поэтому, мы имеем гомоморфизм

$$t_n : X/\xi_n \to Tree_n,$$

сопоставляющий элементу почти каждому элементу $C_n \in \xi_n$, снабженному условными мерами его точек, дерево с мерой, соотвествующее конечной фильтрации, индуцированной фильтрацией на всем пространстве на этом элементе. Обозначим $t_n$-образ меры $\mu_{\xi_n}$ на $X/\xi_n$ через $\omega_\tau$.

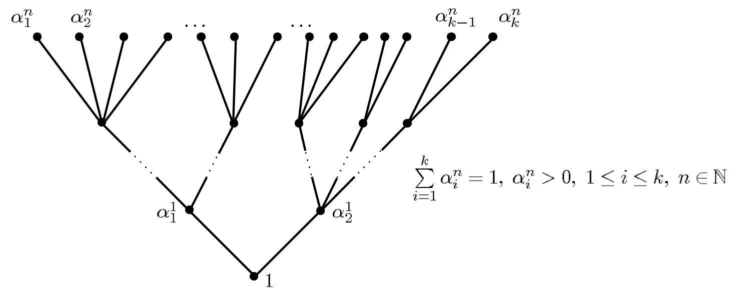



Figure 2: Конечная фильтрация конечного пространства с мерой

**Теорема 4.** *Полная система инвариантов изоморфизма конечной фильтрации $\tau \equiv \{\xi_k\}_{k=0}^n$ атомических разбиений пространства Лебега с непрерывной мерой совпадает с инвариантами гомомофизма $t_n$ в пространство деревьев с мерой $Tree_n$, т.е. состоящими из меры $\omega_\tau$ на пространстве $Tree_n$, являющейся $t_n$-образом меры $\mu_{\xi_n}$ на $X/\xi_n$ и функцией кратностей. Если фильтрация имеет конечное число типов условных мер, то ее полный инвариант есть лишь атомическая мера $\omega_\tau$ на множестве деревьев $Tree_{n+1}$ ранга $n+1$. (все кратности континуальны).*

*В случае $n = 1$ (одного атомического разбиения $\xi_1$) это есть мера на упорядоченных вероятностных векторах, что совпадает с формулировкой предыдущей теоремы.*

Доказательство инвариантности очевидно, так как построение использовало лишь инварианты разбиений — систему условных мер. Полнота следует из того, что две неизоморфные фильтрации должны различаться на некотором множестве положительной меры, измеримом относительно разбиения$\xi_n$, и поэтому иметь несовпадающие образы мер на $Tree_{n+1}$. Можно, повторяя сказанное об одном разбиении, сравнить инварант конечной фильтрации со случайным деревом с мерой.

Никаких сложностей обобщение этой процедуры для классификации конечных фильтраций с совершенно произвольными измеримыми разбиениями (т.е не только с атомическими) не возникает, — нужно лишь перейти от конечных к счетным или даже континуальным деревьям, и мерам на них общего вида.

Классификация конечных фильтраций рассматривалась ранее в других терминах (см., например,[86]), предложенный выше язык деревьев или иерархий не использовался. Сама по себе эта классификация не слишком интресна, она могла бы быть полезной если её можно было бы использовать для классификации бесконечных фильтраций. Но просто построить индуктивный предел из пространств $Tree_n$ деревьев с мерой с естественными вложениями, и рассматривать меры на нем, как инварианты фильтраций, невозможно, и прямая попытка перейти к пределу ничего не дает для классификации бесконечных фильтраций. Причина этого в том, что при переходе к пределу теряется единственность фильтрации. Действительно, полезная для классификации бесконечных фильтраций информация, связанная с конечными фильтрациями несколько иная: классифицировать нужно не просто сами конечные фрагменты фильтрации, как это делалось выше, а вместе с какими-либ функциями или метриками, как это будет сделано далее.

## 2.5 Какие фильтрации мы рассматриваеми, и как их задавать

### 2.5.1 Классы и свойства фильтраций

Упомянем прежде всего наиболее интересный класс фильтраций, подробное рассмотрение которого будет сделано в другой статье. Это класс фильтраций в котором все входящие в него разбиения имеют чисто непрерывные условные меры. Этот класс очень важен для теории случайных процессов и теории $C^*$-алгебр, но он не связан с комбинаторными задачами.

Фундаментальное понятие — эргодичность фильтрации, которую называют также колмогоровостью, регулярностью и др.

Фильтрация

$$\tau = \{\mathfrak{A}_n\} \sim \{\xi_n\} \sim \{L^\infty(\xi_n)\}$$

— эргодична,

если пересечение сигма алгебр

$$\cap_n \mathfrak{A}_n = \mathfrak{N}$$

есть тривиальная сигма-алгебра,

или, если измеримое пересечение разбиений

$$\bigwedge_n \xi_n = \nu$$

есть тривиальное разбиение;

или, если пересечение алгебр функций постоянных на элементах разбиений $\xi_n$ по всем $n$ есть состоит из констант:

$$\bigcap_n L^\infty(X/\xi_n) = \{\mathrm{Const}\}$$

Наши дальнейшие рассмотрения будут относиться к фильтрациям, все разбиения которых имеют атомические условные меры без непрерывных компонент, оставляя фильтрации с непрерывными условными мерами до другого раза.

Мы выделяем следующие классы фильтраций:

*локально конечных фильтраций, однородных и полуоднородных фильтраций*:

**Определение 2.** Фильтрация $\tau\{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ пространства Лебега $(X, \mu)$ с непрерывной мерой $\mu$ называется **локально-конечной**, если все разбиения $\xi_n, n = 0\ldots$ -атомические — т.е. почти все условные меры на элементах разбиения которых есть атомические меры и число типов условных мер конечно, в частности конечно для каждого $n$ число атомов в почти всех элементах разбиения $\xi_n$, но их число, возможно зависит от $n$.

2) Локально-конечная фильтрация называется **полуоднородной**, если условные меры почти всех элементов всех разбиений $\xi_n, n = 0, \dots$ есть равномерные распределения (меры всех точек данного элемента разбиения — равны). [1]

3) Локально-конечная фильтрация называется **однородной**, если для каждого $n$ условные меры почти каждого элемента разбиения равномерны и одинаковы. Если они для номера $n$ равны $r_n$, то фильтрация называется $\{r_n\}_n$-адической, при $r_n \equiv 2$ — диадической, $r_n \equiv 3$ адической и т.д.

Снятие ограничения конечности в определении локальной конечности, допущение, например, счетного числа атомов или произвольного число типов условных мер не приводит к новым серьезным трудностям, и существенно новым эффектам в теории фильтраций, и поэтому мы ограничиваемся только локально-конечными фильтрациями.

Выделим, также следующие конкретные классы:

**Определение 3.** Будем называть фильтрацию $\tau$

a) **бернуллиевской**, если она является хвостовой для произвольной последовательности независимых случайных величин, иначе говоря, если существует такая последовательность независимых разбиений $\eta_n, n = 1, \dots,$ в пространстве Лебега с непрерывной мерой, что

$$\xi_n = \bigvee_{k=n}^{\infty} \eta_k, n = 0, 1 \dots .$$

b) более общо**марковской**, если она является хвостовой для некоторой односторонней марковской цепи, с дискретным временем и произвольным множеством состояний.

Остановимся на следующем важном классе марковских фильтраций, обобщающих случайные процессы с независимми приращениями.

Рассмотрим группу $G$ и вероятностную меру $m$ на $G$ с конечным носителем. Марковская цепь $y_n, n = 0, 1 \dots$ отвечающая случайному блужданию, например левому) на группе $G$ и переходной вероятностью $m$ порождает марковскую фильтрацию. Ее эргодичность равносильна тривиальности границы Пуассона-Фюрстенберга. Критерием тривиальности границы является равенстов нулю энтропии (см. [62]).

Более общим образом, предположим, что группа $G$ действует на некотором пространстве Лебега $(Z, \nu)$ с непрерывной инваринтной мерой $\nu : \forall g, T_g \nu = \nu$ (или даже с сигма-конечной инвариантной мерой). Тогда возникает односторонний марковский процесс $\{z_n\}_n$ с пространством состояний $(Z, \nu)$ и переходными вероятностями $P(z|u) = m(g)$, где $z = T_g u$, и соответствующая фильтрация, которая будет рассматриваться далее. Если мера $m$ есть равномерная мера на образующих группы то фильтрация -однродна. Заметим, что пространство состояний этого процесса –континуально, но фильтрация локально конечна.

Как мы увидим в следующем пункте, в этом случае фильтрация может быть задана с помощью последовательности конечных разбиений $\eta_n; n = 1, 2 \dots \quad \bigwedge_n \eta_n = \epsilon$ ($\epsilon$ - разбиения на отдельные точки). Фильтрация $\{\xi_n\}_n$ определяется, как

$$\xi_n = \bigvee_{n+1}^{\infty} \eta_k, n = 0, 1 \dots .$$

[1] при этом условные меры элементов фактор-разбиений $\xi_n/\xi_{n-1}$ могут не быть равномерными.

### 2.5.2 Базисный способ задания фильтраций

Наиболее эффективный способ задания фильтраций, как в пространствах с мерой, так и в борелевских пространствах состоит в том, чтобы сначала определить возрастающую последовательность конечных разбиений (базис), а затем фильтрацию как последоватльность произведений "хвостов". Этот метод задания фильтраций назовем "базисным".

Рассмотрим последовательность конечных разбиений (базис):

$$\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}; \qquad \bigwedge_n \eta_n = \epsilon$$

($\epsilon$-разбиения на отдельные точки) пространства $X$ с мерой $\mu$, или борелевского пространства. Фильтрация $\{\xi)n\}_n$ определяется, как

$$\xi_n = \bigvee_{k=n+1}^{\infty} \eta_k, \quad n = 0, 1 \ldots.$$

Базисный способ задания фильтраций естественно возникает в связи со случайными процессами со временем $\mathbb{Z}_+$, и в других вероятностных ситуациях, ($\eta_n$ — разбиение соответствующее сигма-алгебре множеств, определяемых сотоянием процесса в момент $n$ ит.д.) Мы будем систематически использовать его в следующем параграфе про определении хвостовых фильтраций на пространстве путей графов.

Подчеркнем, что геометрически одна и та же фильтрация может быть задана с помощью различных базисов и проблема изоморфизма (метрического или борелевского) фильтраций, заданных базисным образом весьма нетривиальна. Более того, определение условных мер разбиений $\xi_n$ (т.е.оснащения — см. далее) в случае пространств с мерой может быть произведено только с помощью перехода к пределу.

Соотношение между двумя последовательностями разбиений — возрастаюшей (базисной):

$$\{\zeta_n\}_n : \zeta_n = \bigvee_{k=1}^{n} \eta_k, \quad n = 1, \ldots$$

и убывающей (фильтрации):

$$\{\xi_n\}_n : \xi_n = \bigvee_{n+1}^{\infty} \eta_k, \quad n = 0, 1 \ldots,$$

выглядящими, как двойственные объекты, далеко не симметрично: теория фильтраций гораздо глубже теории возрастающих последовательностей, и самое существнное различие — в асимптотическом поведении. А именно, переход к пределу в теории фильтраций много тоньше чем в случае возрастающих последовательностей. В приложении дан пример на эту тему из работы А.Н,Колмогорова и комментария В.А.Рохлина, показывающий отсутствие непрерывности произведения относительно перехода к пределу в фильтрации. Это обстоятельство отличает фильтрации подалгебр функций, от фильтрации подпространств, в гильбертовом пространстве, где есть полная симметрия между возрастанием и убыванием цепочек. Причина, разумеется, в том, что в решетке подалгебр (разбиений) в отличии от решетки подпространств нет канонической инволюции, аналогичной переходу к ортогональному дополнению, переводящей возрастающие цепочки в убывающие, и наоборот.

## 2.6 Отношение эквивалентности, ассоциированное с фильтрацией, коцикл и смежные меры

Наряду с каноническим пересечением сигма-алгебр , которое оказывается тривиальным для эргодических фильтраций, имеется еще одно теоретико-монжественное пересечение и связанное с ним корректно определённое отношение эквивалентности на самом прстранстве с мерой. Пусть задана локально конечная фильтрация (и даже всего лишь фильтрация с дискретными элементами) $\tau = \{\xi_n\}_n$. Рассмотрим монотонный предел измеримых разбиений $\xi_n$ и обозначим его $\bigcap_n \xi_n = \bar{\xi}_\tau$ (в отличие от измеримого пересечения $\bigwedge \xi_n$).

**Предложение 1.** *Разбиение $\bigcap_n \xi_n$ корректно определено как монотонный предел убывающей последовательности разбиений $\{\xi_n\}_n$. Это разбиение не является измеримым, в эргодическом случае нет измермых функций отличны от констант, постоянных на элементах этого разбиения. Тем не менее, есть канонический объект, отвечающий ему в функцональном пространстве (например в $L^2(X,\mu)$:*

$$\mathfrak{C} = \{f \in L^2(X,\mu) : \exists n, \int_{C \in \xi_n} f(x) d\mu^C = 0\},$$

*для почти всех $C$ — элементов разбиения $\xi_n$, снабженных условной мерой $\mu^C$. Ясно, что условие выполнено для всех $m > n$. Линейное пространство $\mathfrak{C} \subset L^2(X,\mu)$ незамкнуто, его замыкание есть орогональное дополнение к пересечению $\bigcap_n L^\infty(X/\xi_n, \mu_{\xi_n})$ (в эргодическом случае замыкание есть пространство всех функций с нулевым интгралом).*

*Proof.* 1. Если изменить на множестве меры нуль все разбиения $\xi_n, n = 1\dots$, то и $\bar{\xi}_\tau$ изменится тоже только на множестве меры нуль. (здсь важно, что разбиения $\xi_n$ убывают и их элементы конечны).

2. Пространство $\mathfrak{C}$ однозначно определено по фильтрации и переходит в себя при авоморфзимах фильтрации. □

Пространство $\mathfrak{C}$ можно расширить так, чтобы оно стало инвариантным функциональным аналогом самого пересечения $\bar{\xi}_\tau$, а не фильтрации. Для этого в определении $\mathfrak{C}$ надо брать в качестве функций $f$ функции, для которых условие выполнено для почти всех элементов $C$ любых измеримых разбиений, бОльших, чем пересечение: $\xi \succ \bar{\xi}_\tau$. Это условие уже не зависит от замены фильтрацию на другую, но с тем же пересечением разбиений. Оно есть функциональный аналог ручного разбиения. [2]

Наиболее важное свойство пересечения разбиений в том, что на его (счетных) элементах есть проективная условная мера, а именно, для почти всех пар точек $x, y$ его элементов отношение условных мер $\frac{\mu^C(x)}{\mu^C(y)}$, где $C$ — элемент произвольного измеримого разбиения $\xi \succ \bar{\xi}$, — не зависит от выбора $\xi$. Это отношение есть корректно определённый коцикл, о котором подробнее см. в следующим параграфе. Этот коцикл называется коциклом Радона-Никодима в случае, когда разбиение есть траекторное разбиение для преобразования с квазиивариантой мерой (или для аменабельной группы). См. также [42]

[2]Это наблюдение сделано автором в [28]. Понятно, что классификация ручных разбиений эквивалентна классификации таких подпространств относительно автоморфизмов — унтарных вещественных мультипликативных операторов.

Парадоксальная роль коцикла, заданного на пересечении измеримых рабзиений (на хвостовом отношении эквивалентности) и построенном по данной мере $\mu$ на $X$ (в следующем параграфе она строится на путях графа), состоит в том, что он одновременно может являться коциклом и для других мер, сингулярных с данной мерой $\mu$. Тем самым, он оказывается связанным с другим понятием $mod0$ и, следовательно с другими классами $mod0$ совпадающих функций. По-другому этот парадокс можно сформулировать так:пусть $\tau = \{\xi_n\}_n$, фильтрация, тогда фиксация только условных мер разбиений $\xi_n$ при всех $n$, — еще не определяет однозначно меру $\mu$, могут существовать еще *смежные меры*, сингулярные с $\mu$, но относительно которых разбиения $\xi_n$ имеют те же условные меры.

Коцикл и задача о нахождении мер с заданным коциклом возникали — в теории марковских процессов -в работах Е.Б.Дынкина [54, 55, 56], К.Шмидта [52] в эргодической теории, в теории градуированных графов в работах автора и С.В.Керова [35] и их последователей. Задача о построении мер с данным коциклом далеко обощает традиционный вопрос об инвариантных мерах для действий групп. Подробнее об этом в п. [23] и в параграфе 6.

# 3 ХВОСТОВЫЕ ФИЛЬТРАЦИИ В ГРАДУИРОВАННЫХ ГРАФАХ И МАРКОВСКИХ ЦЕПЯХ

В этом параграфе мы вводим в рассмотрение новый круг понятий, который привносит в теорию фильтраций существенно иную точку зрения на основные понятия, и снабжает ее огромным запасом примеров.

## 3.1 Пространства путей градуированного графа (диаграммы Браттели) и марковские компакты

Рассматрим локально конечный, бесконечный $\mathbb{N}$-градуированный граф $\Gamma$ (иначе — диаграмму Браттели). Множество вершин, соответствующих градуировке $n, n = 0, 1 \dots$ обозначим через $\Gamma_n$ и назовем $n$-м *этажом* графа;

$$\Gamma = \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Gamma_n,$$

$\Gamma_0$ состоит из единственной начальной вершины $\{\emptyset\}$. Мы считаем, что каждая вершина имеет хотя бы одну последующую, и все, кроме начальной, хотя бы одну предыдущую вершину. В дальнейшем предполагается также, что ребра графа $\Gamma$ простые. [3]

Градуированному графу $\Gamma$ канонически сопоставляется локально полупростая алгебра $A(\Gamma)$, над $\mathbb{C}$, однако здесь мы не рассматриваем ни эту алгебру, ни связи вводимых понятий с ней и ее представлениями.

Путем называется последовательность (конечная или бесконечная) смежных ребер графа, (для графов без кратных ребер это тоже самое, что конечная или бесконечная последовательность смежных вершин). Число путей, ведущих из начальной вершины в

[3]Включение в рассмотрение мультиграфов, т.е. графов с кратными ребрами, для наших целей вообще говоря не дает ничего нового, поскольку вводимые далее копереходные вероятности (оснащения) заменяют и обобщают понятие кратности ребер. Однако мы используем язык мультиграфов в дальнейшем для упрощения некоторых формулировок

данную вершину — конечно, что и означает локальную конечность графа. Пространство всех бесконечных путей в графе $\Gamma$ обозначается $T(\Gamma)$, оно в естественном смысле есть обратный предел пространств конечных путей $T_n(\Gamma)$ - от начальной вершины, до вершин $n$-го этажа. Таким образом, $T(\Gamma)$ есть канторовский компакт.

Цилиндрические множества в пространстве $T(\Gamma)$ это множества, определяемые в терминах условий на начальный отрезок путей до этажа $n$, они открыто-замкнуты и задают базу топологии. На $T(\Gamma)$ естественно определяется понятие *хвостового отношения эквивалентности* $\tau_\Gamma$: два бесконечных пути эквивалентны, если они совпадают, начиная с некоторого этажа; также, что эти два пути принадлежат одному блоку хвостового разбиения.

*Хвостовая фильтрация* (пока борелевская — без меры) $\Xi(\Gamma) = \{\mathfrak{A}_0 \supset \mathfrak{A}_1 \supset \dots\}$ — это убывающая последовательность сигма-алгебр борелевских множеств, где сигма-алгебра $\mathfrak{A}_n, n \in \mathbb{N}$ состоит из всех борелевских подмножеств пространства $T(\Gamma)$, которые вместе с некоторым путем $\gamma$ содержат все пути, которые совпадают с $\gamma$ до этажа с номером $n$. Сигма-алгебра $\mathfrak{A}_n$ в понятном смысле дополнительна к конечной сигма-алгебре цилиндрических множеств порядка $n$.

## 3.2 Деревья путей

Сделаем общее замечание о пространстве путей градуированного графа: пространство путей, соединяющих данную вершину с начальной образуют дерево, корень которой есть данная вершина, и каждый путь (лист дерева)снабжен мерой.

Связь деревьев, построенных путям графа и по измеримому разбиению очевидна.

**Определение 4.** Каждая вершина $n$-го этажа градуированного графа естественно определяет дерево ранга $n$ составленного из путей ведущих из начальной вершины в данную вершину, эти деревья согласованы в естественном смысле: дерево, отвечающее вершине $u$ вкладывается как поддерево в дерево, отвечающее вершине $v$, если $v$ за $u$. Листья дерева отвечают путям в графе.

**Предложение 2.** *Деревья с мерой, построенные в 2.3. по конечным фрагментам бесконечной фильтрации $\tau$, есть в точности деревья, построенные по вершинам графа $\Gamma(\tau)$. Возможность их объединения в индуктивный предел, задающий тип фильтрации с точностью до финитного изоморизма — описан выше. Однако, в нем нет необходимости, так как этот тип определяет сама минимальная модель.*

Таким образом, с бесконечным путём в градуированном графе, ассоциирован индуктивный предел последовательности вложенных деревьев, каждое из которых отвечает последовательным вершинам этого пути. Последовательность корней этих деревьев не имеет предела, а возрастающая последовательность вложенных множеств листьев деревьев образует множество всех бесконечных путей в графе, конфинальных с данным их число, как и число вершин на любом этаже деревьев, стремится к бесконечности. Предела мер на листьях не существует, но возникает коцикл отношений значения мер. Тем самым, мы получили бескоренное дерево, все этажи которого бесконечны. Проще смотреть на это дерево как на бесконечную последовательность иерархий на бесконечном множестве его листьев (см.рис), на которых задан коцикл отношений условных мер.

Разумеется, конструкция зависит от выбора бесконечного пути. Здесь необходимо принимать в рассчет эргодчность или не эргодичность фильтрации, но нам исследование этого вопроса здесь не понадобится.

В то же время очевидно, что применить это построение к продолжению классификации конечных фильтраций из п. 2.3, в направлении к классификации фильтраций невозможно, так как оно учитывает только финитные инварианты фильтрации, которых недостаточно для классификации. В то же время для классификации с точностью до *финитного изоморфизма* этих данных достаточно, что означает сущестование полной системы борелевских инвариантов такой классификации. (см.далее).

## 3.3 Оснащение мультиграфа и копереходные вероятности

Мы вводим дополнительную структуру на (мульти)графе — *систему копереходных вероятностей или оснащение*

$$\Lambda = \{\lambda = \lambda_v^u; u \in \Gamma_n, v \in \Gamma_{n+1}, (u,v) \in \mathrm{edge}(\Gamma_n, \Gamma_{n+1}), n = 0, 1 \dots\},$$

сопоставляя каждой вершине графа $v \in \Gamma_n$ вероятностный вектор: координата которого $\lambda_v^u$ есть вероятность ребра $u \prec v$, входящего в вершину $v$ из предыдущего этажа; $\sum_{u: u \prec v} \lambda_v^u = 1; \lambda_v^u \geq 0$. В случае мультиграфа вероятности приписаны каждому ребру из множества ребер, соединяющих вершины $u \prec v$.

**Определение 5.** Оснащённым (мульти)графом будем называть пары $(\Gamma, \Lambda)$, состоящие из (мульти)графа и системы $\Lambda$ копереходных вероятностей на ребрах (мульти)графа. Оснащение позволяет определить вероятности на множестве путей, ведущих из $\emptyset$в данную вершину — как произведение по всем ребрам, входящим в путь.

Наиболее важный частный случай оснащения, т.е. системы $\Lambda$ копереходных вероятностей, называемый каноническим или центральным, и изучаемый в комбинаторике, теории представлений, и в алгебраических ситуациях, таков:

$$\lambda_v^u = \frac{\dim(u)}{\sum_{u: u \prec v} \dim(u)},$$

где $\dim(u)$ — число путей, ведущих из начальной вершины $\emptyset$ в вершину $u$ (в терминах теории представлений это размерность представления алгебры $A(\Gamma)$, отвечающего вершине $u$).

Легко видеть, что для центрального оснащения мера на множестве путей, ведущих из $\emptyset$ в данную вершину — равномерная. а копереходная вероятность попасть в вершину $v$ из предшествующей вершины $u$ пропорциональна доле тех путей, из числа всех, которые ведут из начала $\emptyset$ в вершину $v$, которые проходят через вершину $u$ в вершину $u$.

Каноничность данной системы копереходных вероятностей в том, что она определяется только самим графом. Соответствующие ей марковские меры на пространстве путей $T(\Gamma)$ называются *центральными мерами*; до сих пор их рассмотрениями ограничивались в литературе по диаграммам Браттели. В терминологии теории $C^*$-алгебр центральные меры есть следы на алгебре $A(\Gamma)$, а эргодические центральные меры — неразложимые следы. Подробнее о случае центральных мер см. [19], параграф 7 и многочисленную библиографию 80-2000-х гг.

Меры на пространстве путей графа, согласованные с каноническим оснащением, называются центральными,а в теории марковских стационарных цепей мерами с максимальной энтропией.

### 3.4 Марковский компакт путей

Термин "копереходные вероятности" заимствован из теории марковских цепей ([54]): если рассматривать граф, повернутый на $90^0$ градусов, как множество состояний марковской цепи, начинающейся с состояния $\emptyset$ момент $t = 0$, а номера этажей, как моменты времени, то систему $\Lambda = \{\lambda_v^u\}$ следует считать системой копереходных вероятностей для марковской цепи:

$$\mathrm{Prob}\{x_t = u | x_{t+1} = v\} = \lambda_v^u.$$

Напомним определение марковского компакта в нужной нам общности.

**Определение 6.** Рассмотрим последовательность конечных множеств $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ снабженное последовательностью "мультиребер", т.е. набором матриц $M_n$, порядки которых равны $|X_n| = d_n \times d_{n+1} = |X_{n+1}$, а элемент $m_{u,v}, u \in X_n, v \in X_{n+1}$. есть неотрицательное целое число, равное числу ребер соединяющих $u$ и $v$, каждое такое ребро имеет ненулевой номер.

Путем (траекторией) называется последовательность ребер смежных вершин. В случае, если все кратности $m_{u,v}$ равны нули или единице, то путь это последовательность смежных вершин.

Пространство всех путей (траекторий), снабженное естественной топологией обратного спектра конечных путей называется марковским (топологическим) компактом. Марковский компакт называется стационарным, если пространства состояний матрицы не зависят от $n$:

$$X_n \equiv X_1, n = 1, \ldots; \quad M_n \quad \text{не зависит от } n,$$

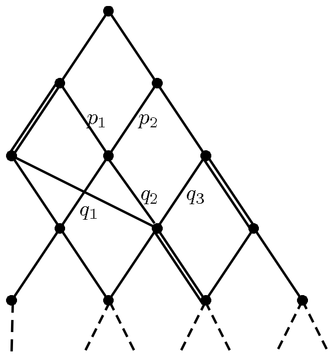
в этом случае можно рассматривать не только односторонний, но и двусторонний марковский компакт.

Марковским компактом с оснащением (или с копереходами) называется марковский компакт в смысле данного определения, в котором элементы матрицы $M_n$ — $m(u, v)$ есть векторы, координаты которых есть положительные числа, не превосходящие 1, отвечающие вероятностям ребер, выходящим из $u \in X_n$ в $v \in X_{n+1}$, так что сумма всех вероятностей по столбцу (по всем ребрам входящим в $v$) равна 1.

Иногда марковский компакт (с оснащением или без) мы называем марковской цепью. Мы будем рассматривать на марковском компакте (как правило - нестационарном) марковские меры.

Из определения видно, что пространство путей градуированного (мульти)графа образует марковский компакт и оснащение графа, определённое выше, есть оснащение марковского компакта. В дальнейшем мы не различаем эти два языка -язык марковских компактов и язык пространств путей в градуированных (мульти)графах. Начнем с того, что эти две, казалось бы совершенно разные области математики — теория марковских процессов и теория аппроксимативно конечномерных алгебр и её комбинаторная подкладка — анализ градуированных мультирафов, являются по сути версиями одной и той же теорией, и мультиграф, отвечающий марковской цепи, есть в точности диаграмма Браттели. Различны, однако постановки задач — алгебраические в одном случае, и вероятностные во втором, а также и традиции того, как рисовать этот граф.

Различие этих двух на первый взгляд, непохожих теорий казалось бы мгновенно снимается поворотом картинки на $90^0$. Однако, важно преодолеть это различие по существу, и понять насколько обогащаются обе области - теории градуированных графов



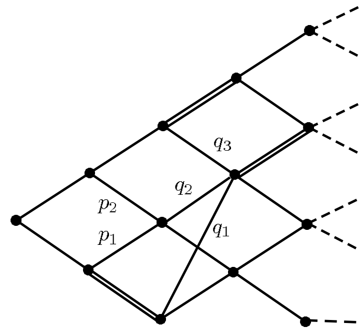




Figure 3: Граф путей и марковская цепь: повороте на $90^0$

и $AF$-алгебр, с одной стороны, и теории марковских цепей, — с другой, если они будут обмениваться своими непохожими задачами, и присущими каждой области методами.

Например, я давно ставил, возможно, парадоксальные вопросы о $K$-функторе марковской цепи и об эргодической $K$-теории, или о теоремах Шенноновского типа для $AF$-алгебр (см. [36]).

Отметим, что анализ асимптотических свойств последовательности матриц $M_n$, введенных выше, представляют большой интерес и сам по себе с технической точки зрения. Можно сказать, что вся рассматриваемая здесь теория марковских компактов или путей в градуированных графах есть часть важной самой по себе, асимптотической теории бесконечных произведений марковских матриц. Она связана и с теорией инваринтных мер, фазовых преъодов и др.

## 3.5 Коцикл графа с оснащением

Понятие оснащения связано с понятием коцикла на пространстве путей. Рассмотрим функцию $c(.,.)$ на множестве пар конфинальных (т.е. совпадающих с некоторого места) путей графа и принимающей значениями в множестве неотрицательных вещественных чисел. Предположим, что $c(t,s)c(s,t) = 1; c(t,s) = c(t,z)c(z,s), c(t,t) = 1$ для пар конфинальных путей. Назовем такую функцию 2-коциклом (или просто коциклом) на хвостовом (или на произвольном) отношении эквивалентности. Коцикл тривиален (или когомологичен 1), если существует такая неотрицательная функция на путях - $g$ - что

$$c(t,s) = g(t) \cdot g(s)^{-1}.$$

Простой пример: для измеримого разбиения некоторого пространства функция $c(t,s) = \frac{\mu^C(t)}{\mu^C(s)}$ — отношение условных мер точек, лежащих в одном элементе разбиения есть тривиальный коцикл.

**Лемма 1.** *Для всякой локально-конечной фильтрация в пространстве Лебега с непрерывной мерой, корректно определён коцикл на хвостовом отношении эквивалентности.*

*Proof.* Рассмотрим две точки $s, t$, лежащие в одном элементе разбиения $\xi_n$, и определим $c(t,s)$ как отношение их условных мер (см. выше). Условные меры как это следует из определения обладают свойством транзитивности, т.е. отношение не изменится, если рассмотреть условные меры разбиения $\xi_m, m > n$. $\square$

Пусть задано оснащение градуированного графа $\Gamma$ (или марковского компакта); коцикл, соответствующий оснащению определяется следующим образом для двух путей $t = (t_1, t_2, \dots t_n, \dots), s = (s_1, s_2, \dots s_n \dots)$, совпадающих начиная с места $n+1$ значение коцикла

$$c(t,s) = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_{t_{i+1}}^{t_i}}{\lambda_{s_{i+1}^{s_i}}}.$$

Такой коцикл назовем *марковским.* Разумеется, существуют коциклы, не являющиеся марковскими коциклы.

*Всякая вероятностная борелевская мера, заданная на пространстве путей графа (траекторий марковской цепи) определяет систему копереходных вероятностей — как систему условных мер измеримых разбиений $\xi_n$. Мера называется согласованной с данной системой $\Lambda$ копереходных вероятностей (с данным коциклом), если совокупность ее копереходных вероятности (для всех вершин) совпадают с этой системой.*

**Лемма 2.** *Если хвостовая фильтрация на пространстве путей оснащенного графа эргодична относительно заданной меры, (или просто мера эргодична) то коцикл, построенный по оснащению, нетривиален.*

Действительно, тривиальность коцикла означала бы сущестование измеримых функций, постоянных на классах хвостовой эквивалентности, что противоречит эргодичности.

Каноническому оснащению отвечает коцикл тождественно равный единице, и меры согласованные с ним есть центральные или инвариантные меры.

Марковость центральных мер на произвольном градуированном графе автоматически следует из их определения, это отмечалась в наших старых работах [35, 66].

Напомним, что система копереходных вероятностей, вообще говоря, не позволяет однозначно задать систему переходных вероятностей,

$$\mathrm{Prob}\{x_{t+1} = v | x_t = u\},$$

иначе говоря, эта система не задает однозначно марковскую цепь, вообще говоря. Точно также переходные вероятности задают однозначно марковскую цепь, если задано начальное распределение. Аналогом начального распределния для копереходных вероятностей служит финальное распределение, т.е. мера на границе (см. ниже), каковой является совокупность всех эргодических мер с заданными копереходами.

Меру на пространстве путей графа назовем *эргодической мерой*, если хвостовая сигма-алгебра (т.е. пересечение сигма-алгебр хвостовой фильтрации) — тривиальна $mod 0$.

*Одной из наших задач, является перечисление всех эргодических марковских мер, имеющих заданную систему копереходных вероятностей. Список таких мер мы назваем абсолютной границей или абсолютом марковского компакта с оснащением или абсолютом градуированного мультиграфа. Это — топологическая граница и, как мы увидим, есть граница Шоке некоторого симплекса (проективного предела конечномерных симплексов).*

## 3.6 Примеры градуированных графов и марковских компактов

В списке градуированных графов и мультиграфов есть серия классических примеров — граф Паскаля (известный еще китайским математикам древности), который есть градуированная вдоль диагонали решётка $\mathbb{Z}_+^2$ и его многомерный обобщения $\mathbb{Z}_+^d, d > 2$, граф Эйлера, граф Юнга, и более общо — графы, являющиеся диаграммами Хассе решеток, в первую очередь, дистрибутивных решеток. К более новым примерам относятся -граф неупорядоченных пар или башня диадических мер ([23], см. параграф 7), граф упорядоченных пар ([27]) и др., которые появились в связи с теорией фильтраций и адической реализацией эргодических автоморфизмов [24, 24, 32].

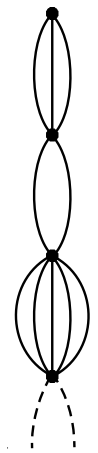


Figure 4: Граф Глимма: бусы

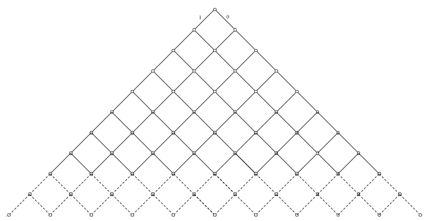


Figure 5: Граф Паскаля

Графом диадического типа называется граф, в котором число путей, ведущих из начальной вершины в любую вершину $n$-го этажа равно $2^n$ при всех $n = 1, \dots$. Таковы графы упорядоченных и неупорядоченных пар, и минимальный диадический граф (см. рис.)

Еще раз подчеркнем, что пространства путей во всех графах может рассматриваться как пространство траекторий топологических (вообще говоря нестационарных) марковских цепей. На этом пространстве (путей или тректорий) как борелевском пространстве задана хвостовая (остаточная) фильтрация. Граф (цепь) может быть снабжен оснащением. А если задана борелевская мера (не обязательно марковская) на пространстве путей (траекторий), то мы имеем *локально-конечную* фильтрацию на этом пространстве с мерой. Локальная-конечность фильтрации вытекает из локальной конечности графа.

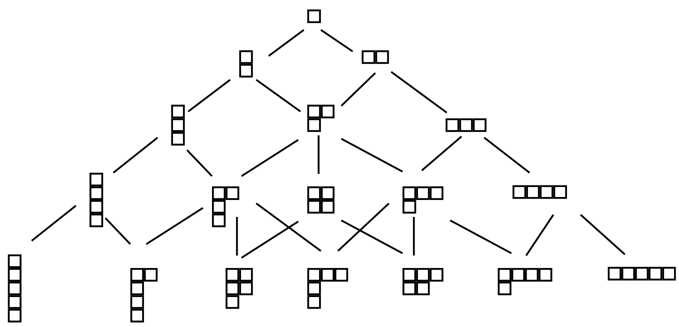


Figure 6: Граф Юнга

# 4 МАРЕКОВСКАЯ РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ЛОКАЛЬНО КОНЕЧНЫХ ФИЛЬТРАЦИЙ.

Мы подошли к одной из основных теорем работы, связывающую теорию фильтраций с комбинаторикой марковских цепей и градуированных графов.

## 4.1 Теорема о марковской реализации

**Теорема 5.** *Всякая локально конечная фильтрация изоморфна хвостовой (= остаточной) фильтрации марковской цепи или хвостовой фильтрации пространства путей градуированного графа.* [4]

*Proof.* Пусть $\tau = \{\mathfrak{A}\}_{n=0}^{\infty} \sim \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — локально-конечная фильтрация в некотором пространстве Лебега $(X, \mathfrak{A}_0, \mu)$ с непрерывной мерой $\mu$. Построим, отправляясь от фильтрации $\tau$, марковскую цепь с конечными множествами состояний, хвостовая фильтрация которой изоморфна $\tau$.

Конечные разбиения, которые будут вводиться ниже, будут маркированными, т.е. их элементы будут снабжены метками (например, натуральными числами. Произведение (упорядоченное) двух или нескольких маркированных разбиений есть снова такое же разбиение, и метки элементов которого есть упорядоченные наборы меток сомножителей. Удобно считать в дальнейшем, что, у конечных разбиений $\eta \succ \eta'$, метки бOльшего разбиения $\eta$ включают метки меньшего разбиения $\eta'$.

Обозначим через $\phi = \{\xi_n\}_n$ последовательность измеримых разбиений, соответствующих фильтрации сигма-алгебр $\mathfrak{F}$. Выберем некоторый базис сигма-алгебры $\mathfrak{A}_0$ т.е. произвольную возрастающую последовательность конечных маркированных разбиений $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$, стремящуюся к разбиению на отдельные точки пространства $(X, \mu)$.

Начнем индукционное построение с базы — с определения первого пространства состояний будущей марковской цепи. Для этого сначала выберем произвольное разбиение, *дополнительное к разбиению* $\xi_1$, т.е. такое маркированное измеримое разбиение $\zeta_1$, почти каждый элемент которого пересекается с почти каждым элементом разби-

[4] Мы чаще связываем здесь тематику фильтраций с марковскими цепями, а не с градуированными графами, поскольку термин "марковость" и язык марковских цепей более известен и распространен, чем равнообъемный с ним язык градуированных графов. Популяризировать их эквивалетнность и сообщить то новое, что вносят градуированные графы сами по себе — одна из целей обзора."

ения $\xi_1$ не более, чем по одной точке: это возможно, так как элементы разбиения $\xi_1$ конечны, и, следовательно, разбиение $\zeta_1$ можно выбрать конечным. [5]

Рассмотрим произведение разбиений $\sigma_1 = \eta_1 \vee \zeta_1$ — это конечное разбиение, совокупность его элементов т.е. фактор-пространство $Y_1 = X/\sigma_1$ как пространство с мерой, объявим множеством маркированных состояний марковской цепи в начальный момент времени $t = 1$.

Индукционный переход будет состоять в построении множества $Y_n$ — состояний в момент $t = n$, если уже построена марковская конечная цепь длины $n-1$ как фактор-пространство пространства $(X, \mu)$ по конечному разбиению $\vee_{i=1}^{n-1}\sigma_i$ Построим разбиение $\sigma_n$. Рассмотрим фактор-пространство фильтрации — $X/\xi_{n-1}$, и определим в нем конечное маркированное разбиение $\zeta_n$, дополнительное (в смысле, указанном выше) к разбиению $\xi_n/\xi_{n-1}$ в пространстве $X/\xi_{n-1}$.

Заметим, что, если пересечение элемента разбиения $\zeta_n$ с элементом $C \in \xi_n/\xi_{n-1}$ разбиения $\xi_n/\xi_{n-1}$ –непусто, то оно одноточечно, и поэтому каждая точка из $C$ получает однозначно определённую метку некоторого элемента $D \in$D$\zeta_n$. То же самое верно, если заменить разбиение $\zeta_n$ на его конечное подразбиение, как будет сделано ниже.

Обозначим через $\pi_n$ — каноническую проекцию на фактор пространство:

$$\pi_n : X \to X/\xi_n.$$

Определим конечное разбиение $\sigma_n$ пространства $X/\xi_{n-1}$, как подразбиение разбиения $\zeta_n$, $(\sigma_n \succ \zeta_n)$, таким правилом:

$(*)$ две точки $y_1$ и $y_2$ элемента разбиения $D \in \zeta_n$ по определению входят в один и тот же элемент разбиения $\sigma_n$, тогда и только тогда, когда выполнено условие: элементы $C_1 = \pi_n^{-1}(y_1)$ и $C_2 = \pi_n^{-1}(y_2)$, снабженные условными мерами разбиения $\xi_{n-1}$, изоморфны, как конечные деревья с мерой, точки которого маркированы метками элементов разбиений $\sigma_i, i = 1, 2 \ldots n-1; \eta_n$ ограничения на элементы $C_1$ и $C_2$ каждого из конечных разбиений $\sigma_i, \eta_i, i = 1 \ldots n-1$. Заметим, что, как объяснялось выше, изоморфизм между двумя элементами $C_1$ и $C_2$, если он существует, единственнен.

Теперь мы можем определить $n$-ое пространство состояний $Y_n$, как фактор-пространство $\{X/\xi_1\}/\sigma_n$, а пространство путей $n$-членной марковской цепи, как фактор-пространство $\{X/\xi_1\}/\vee_1^n \sigma_i$; обозначим эти пространства через $(\mathcal{M}_n, \nu_n)$.

Свойство марковости следует непосредственно из построения: элементы разбиения содержит точки с обинаковыми условными мерами.

Как это следует из конструкции, эти пространства в естественном смысле образуют обратный спектр пространств, т.е.

$$(\mathcal{M}_n, \nu_n) \leftarrow (\mathcal{M}_{n+1}, \nu_{n+1}),$$

причем проекция сохраняет марковскую структуру — добавляется новое пространство, а также сохраняет меру. Поэтому можно рассмотреть обратный предел, этх пространств, который является уже пространством бесконечных траекторй односторонней марковской цепи; обозначим это пространство, снабженное предельной мерой через $(\mathcal{M}_\infty, \nu_\infty)$.

[5]Выбор разбиения $\zeta_1$, дополнительного к данному, элементы которого конечны или счетны, есть стандартная процедура, разработанная в [83]: она состоит в последовательном построении однослойных к данному разбиению множеств максимальной меры. В этом состоит основной шаг в классификации измеримых разбиений.

Мы построили гомоморфизм пространства Лебега с фильтрацией $(X, \mu, \mathfrak{F})$ на пространство $(\mathcal{M}_\infty, \nu_\infty), \mathfrak{T}$, где $\mathfrak{T}$ -остаточная (хвостовая) фильтрация марковской цепи.

По построению $\sigma_n \succ \eta_n$, при всех $n$, следовательно $\bigvee_n \sigma_n \succ \bigvee \eta_n = \epsilon$, т.е. предельный гомоморфизм $X \to \mathcal{M}$ есть изоморфизм пространств с мерой $(X, \mu)$ и $(\mathcal{M}, \nu)$, где $\nu$ есть образ меры (фактор-мера). Обозначим $n$-ое координатное разбиение пространства $\mathcal{M}$, т.е. разбиение на классы траекторий, сопадающих с $n+1$-го места, через $\theta_n$. Хвостовой фильтрации $\mathfrak{T}$ и соответствует последовательность разбиений $\{\theta_n\}_n$.

Покажем, что изоморфизм переводит фильтрацию $\mathfrak{F}$ в фильтрацию $\mathfrak{T}$. Для этого достаточно заметить, что наше построение по той же причине, что и выше, отображает пространство $X/\xi_1$ изоморфно на фактор-пространство пространства $(\mathcal{M}, \nu)$ по разбиению на классы по первой координате, и вообще, пространство $X/\xi_n$ — по $n$-ой координате. Поэтому базы соответствующих разбиений переводятся изоморфно, и вместе со сделанным выбором разбиений $\zeta_n$, (дополнительных к разбиениям $\xi_n$), которые переходят в разбиения на классы по совпадению координат с номерами, большими $n$ это дает нужный изоморфизм фильтраций. □

## 4.2 Замечания о марковских моделях.

1) Напомним,что в теории меры есть несколько подобных теорем о марковской реализации объектов. Например: всякое преобразование с инвариантной или квазиинвариантной мерой имеет адическую реализации на пространстве путей некоторого градуированного графа с марковской мерой.[6]

2) Другой пример доставляет теория ручных (гиперконечных) разбиений, см[9]. Всякое дискретное ручное разбиение (в категории пространств с квазиинвариантной мерой) изоморфно хвоствому разбиению траекторий стационарной марковской цепи с конечными пространствами состояний и квазиинвариантной относительно сдвига мерой.

3) Приведем следствие из доказанной теоремы.

**Следствие 2.** *Для произвольной локально конечной фильтрации коцикл, отвечающий хвостовому отношению эквивалентности (см. определения выше) изоморфен коциклу марковской цепи с конечными множествами состояний. В частности, всякое гиперконечное (ручное) разбиение со счетными элементами в пространстве Лебега изоморфно хвостовому разбиению марковской цепи. По-другому, всякое гиперконечное отношение эквивалентности изоморфно хвостовому отношению марковской цепи; это также следствие доказанной теоремы о марковости локально конечной фильтрации. (Последнее обстоятельство давно известно (см* [6]*).*

4) Построенная в теореме модель, разумеется, далеко не единственна, — имеется много градуированных графов с мерой, хвостовые фильтрации которых изоморфны. Несмотря на это, язык градуированных графов и их хвостовых фильтраций на пространстве путей или траекторий марковских цепей — чрезвычайно удобен. Заметим, однако, что при переходе от исходной фильтрации (даже марковской) мы можем потерять некоторые дополнительные (неинвариантные) свойства задания фильтраций,

[6]Адическое преобразование [24, 25] определено в графах, в которых для любой вершины опредлен линейный порядок входящих в нее ребер; с помощью этих порядков естественно определяется лексикографический порядок на множествах конфинальных путей; тогда адический автоморфизм переводит путь в путь, следующий за ним в смысле этого порядка, если он определен, а определён он на множестве полной меры.

например, стационарность аппроксимации: исходная марковская цепь могла быть задана, как стационарная, но аппроксимация цепи, сконстируированной в доказательстве редко бывает стационарной. Как видно из дальнейших примеров, эта потеря компенсируется простотой анализа аппроксимаций. Доказательство теоремы содержит метод построения графа, на пространстве путей которого реализуется заданная фильтрация. Мы получаем класс весьма непростых задач на построение градуированных оснащенных графов, для которых хвостовая фильтрация на путях изоморфна заданной фильтраци. Приведем важный пример.

5) Рассмотрим **диадическую фильтрацию** — все разбиения

$$\xi_1, \xi_2/\xi_1, \dots \xi_n/\xi_{n-1}, \dots$$

имеют двухточечные элементы с мерами $(1/2, 1/2)$. Наша конструкция доказывает изоморфизм любой такой фильтрации с хвостовой фильтрацией некоторого диадического градуированного графам и центральным мерам на нем, все вершины всех этажей, кроме начальной вершины, в такой графе имеют две предшествующих с равными копереходами.

Таким образом, задача метрической классификации диадических фильтраций сводится к по существу комбинаторной задаче классификации диадических градуированных графов, точнее, — их пространств путей, снабженных центральными мерами. Результаты, достигнутые в 70-90-х гг., так и недавние факты и теоремы, пересказанные в этих, по существу комбинаторных, терминах, позволяют по-новому взглянуть на проблему. Критерий стандартности для диадических фильтраций пересказывается, как критерий возможности приведения диадического графа с центральной мерой к простейшему диадическому графу Глимма ("бусы"). см. рис. Более подробно мы рассмотрим конкретные марковские модели фильтрации в параграфе 6, посвящном нестандартным фильтрациям.

# 5 СТАНДАРТНОСТЬ, КРИТЕРИИ, ФИНИТНЫЙ ИЗОМОРФИЗМ

## 5.1 Определение минимальной модели фильтрации.

В этом параграфе каждой бесконечной локально конечной фильтрации $\tau = \{\xi_k\}, k = 1, 2 \dots$ произвольного пространства Лебега $(X, \mu)$ с непрерывной мерой $\mu$ сопоставляется каноническая реализация в виде хвостовой фильтрации некоторого оснащенного градуированного мультиграфа, или, эквивалентным образом, некоторой марковской цепи. *В отличие от результата предыдущей теоремы, построенная фильтрация не будет, вообще говоря, изоморфна исходной фильтрации, а только лишь финитно изоморфна ей.*

Как мы увидим, это построение приводит к особому классу градуированных мультиграфов с оснащением, мы называем их минимальными. Саму модель фильтрации мы называем *канонической минимальной моделью* фильтрации. [7]

Заметим, что финитный изоморфизм, не сохраняет даже эргодичности фильтрации, что очевидно на примерах диадических фильтраций, поэтому мы добавляем тре-

[7]Другие естественные названия минимальных фильтраций — конечно-определённые, поскольку они полностью определяются своими финитными инвариантами; тем же термином "конечно-определённые" следовало бы назвать стандартные фильтрации, см следующий параграф).

бование эргодичности рассматриваемых фильтраций везде, где соотносим финитный и истинный изоморфизмы.

*По заданной эргодической фильтрации* $\tau = \{\xi_k\}, k = 1, 2\ldots$ *на пространстве Лебега* $(X, \mu)$ *построим оснащенный градуированный мультиграф* $\Gamma(\tau)$ *с мерой* $\nu$ *на пространстве путей* $T(\Gamma(\tau))$*, согласованной с оснащением.*

Построение как и предыдущее, является индукционным: мы последовательно строим поэтажно мультиграф, его оснащение и меру на его этажах, которая определит меру на всем пространстве путей.

Начнем с вершины $\emptyset$ нулевого этажа, которая сопоставляется всему пространству, а точнее фактор-пространству $(X, \mu)$ по тривиальному разбиению. Рассмотрим первое разбиение $\xi_1$ и конечное (в силу локальной конечности фильтрации) разбиение $\delta_1$ фактор-пространства $X/\xi_1$ на множества $A_1, A_2 \ldots A_{k_1}$, обладающее свойством любые две точки $C, D \in X/\xi_1$ как элементы разбиения $\xi_1$ имеют изоморфные условные меры тогда и только тогда, когда лежат в одном элементе разбиения $\delta_1$. Сопоставим элементам разбиения $\delta_1$ пространства $X/\xi_1$, т.е. множествам $A_i, i = 1 \ldots k_1$ вершины первого этажа графа $\Gamma$. Иначе говоря, вершины первого этажа $\Gamma_1$ — соответствуют типам условных мер разбиения $\xi_1$. Число ребер, идущих из каждой вершины в вершину $\emptyset$ равно числу точек в соответствующем элементе разбиения $\xi_1$, а копереходные вероятности и есть условные меры точек в этом элементе. Наконец, меры самих вершин равны мерам $\mu_{\xi_1}$ множеств $A_i, i = 1, \ldots$.

Дальнейший ход построения полностью аналогичен. Проще всего сказать, что построение вершин, ребер и копереходных вероятностей этаж $\Gamma_{m+1}$, если уже имеется предыдущий этаж $\Gamma_m$ производится также, как и выше с заменой исходной фильтрации на фильтрацию $\{\xi_{m+s}/\xi_m,\}_{s=1}^{\infty}$

Последовательность разбиений $\delta_1, \delta_2, \ldots$ пространств $X/\xi_1, X/\xi_2 \ldots$ соответственно, отвечает разбиению вершин графа $\Gamma(\tau)$ на этажи, а элементы каждого из разбиений $\delta_n$ — вершинам $n$-го этажа.

Таким образом, по инвариантным данным фильтрации $\tau$ построен мультиграф $\Gamma(\tau)$, с оснащением и согласованной с ним марковской мерой на цилиндрических множествах, и, тем самым, марковской мерой $\mu_{\Gamma(\tau)}$; на пространстве $T(\Gamma_\tau)$ бесконечных путей мультиграфа. Построенный оснащенный локально-конечный градуированный мультиграф $\Gamma(\tau)$, назовем его **минимальным**, а хвостовую фильтрацию, отвечающую ему $\bar{\tau}$ назовем **минимальной моделью исходной фильтрации** $\tau$, обладает характеритическим свойством, очевидно вытекающим из его построения:

**Предложение 3.** *(Теорема-определение минимального графа)*

*Мультиграф с оснащением является минимальной моделью, для некоторой локально-конечной фильтрации на пространстве Лебега с непрерывной мерой тогда и только тогда, когда для любых двух различных вершин* $u, v$ *произвольного этажа, деревья (с мерой) путей от* $\emptyset$ *с корнями в вершинах* $u, v$ *— неизоморфны, как деревья с мерой, т.е. не существует изоморфизма этих двух деревьев, сохраняющего меру.*

Фильтрация $\tau$ финитно изоморфна фильтрации $\bar{\tau}$, что очевидно из построения, но, вообще говоря, не изоморфна ей.

Очевидно, что проведённое построение можно применить к хвостовой фильтрации произвольного мультиграфа с оснащением и получить в рзультате новый мультиграф с оснащением и мерой. Если оснащение исходного графа было каноническим, (т.е. фильтрация полуоднородна), то и его стандартная модель будет полуоднородной фильтрацией, так как образ канонического оснащения очевидно будет также каноническим. Таким образом, наше построение задает в частности, некоторую операцию на градуированных графах, сопоставляя произвольному мультиграфу **минимальный мультиграф**. Очевидно, что минимальная модель минимальной модели совпадает с ней. Иначе говоря, эта операция есть проекция в пространстве всех градуированных мультиграфов на пространство минимальных мультиграфов.

Подчеркнем, что во всяком базисном задании фильтрации базисом алгебры всех измеримых множеств в пространстве путей построенного мультиграфа $\Gamma(\tau)$ служит алгебра цилиндрических множеств, т.е. множеств путей, задаваемых условиями какими-то на конечные отрезки путей. Но при отображении хвостовой фильтрации одного мультиграфа на хвостовую фильтрацию другого, прообраз сигма-алгебры всех измермых множеств второго графа не совпадает вообще говоря в исходном пространстве фильтрации с сигма-алгеброй всех измермых множеств первого. Иначе говоря, мы полчаем гомоморфизмы а не изоморфзимы пространств $X/\xi_n$, в отличие от построения теоремы предыдущего параграфа, где построение было нацелено на получение изоморфизма. А именно, в её доказательстве для этого, нам потребовалось подразбивать пространства $X/\xi_n$ и вводить дополнительные вершины графов, которые отвечали одним и тем же условным мерам на пространстве путей дерева исходного графа. В новом построении мы отождествляли такие вершины — склеивали вместе.

**ПРИМЕР** 1. Стандартная модель любой эргодической диадической фильтрации есть хвостовая фильтрация мультиграфа "бусы" (см. рис); этот граф является минимальным, а пространство путей в нем есть диадический компакт $\{0,1\}^\infty$, с обычным хвостовым отношением эквивалентности. Заметим, что в этом примере имеется единственная центральная мера - бернуллиевская с вероятностями $(1/2, 1/2)$. Для краткости в дальнейшем мы будем называть фильтрации, финитно изоморфные бернуллиевским фильтрациям, финитно бернуллиевскими.

2. Граф Паскаля, не является минимальным, потому, что симметричные вершины в графе имеют изоморфные деревья. Более того, если на пространстве путей определить эргодическую симметричную центральную меру (это лебеговская мера на путхя, как последовательностях нулей и единиц), то окажется, что множество путей проходящих через одну из двух первых вершин, не удовлетворяет условим теоремы. Следовательно фильтрация на пространстве путей, снабженном этой мерой не является стандартной. Другой пример неоднородной нестандартной марковской цепи дан в следующем пункте.

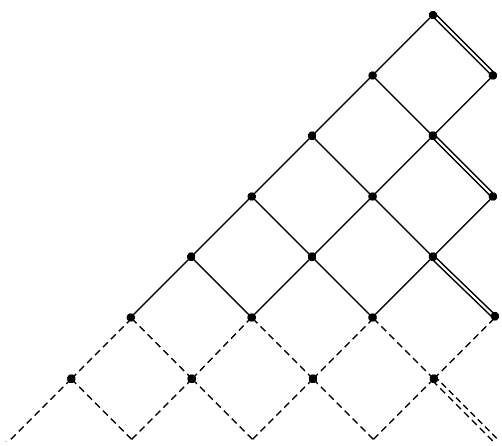


Figure 7: Минимальный граф — половина графа Паскаля

Повторим основные выводы:

**Предложение 4.** *1. Любая локально конечная фильтрация $\tau$ финитно изоморфна своей минимальной модели $\bar{\tau}$, т.е. хвостовой фильтрации на минимальном мультиграфе $\Gamma(\tau)$, но вообще говоря, не изоморфна ей.*

*2. Минимальная модель, как оснащенный граф с мерой на пространстве путей, есть полный инвариант финитного типа фильтрации, т.е. две фильтрации финитно изоморфны тогда и только тогда, когда их минимальные модели совпадают.*

*3. Минимальная модель $r_n$-адической и более общо, финитно бернуллиевской фильтрации есть бернуллиевская фильтрация. Таким образом, примером минимальной эргодической фильтрациии служит любая бернуллиевская фильтрация.*

*Proof.* Действительно, любой конечный фрагмент фильтрации изоморфно с сохранением меры переводился на конечный фрагмент графа. И поскольку мы *использовали только условные меры всех разбиений и меры множеств с фиксированным типом условных мер, то финитно изоморфные фильтрации приводят к одной и той же стандартной модели.* Наоборот, если две фильтрации $\tau = \{\xi_n\}$ и $\tau' = \{\xi'_n\}$ не являются финитно изоморфными, то при некотором $n$ не будут изоморфными разбиения $\xi_n$ и $\xi'_n$, и, следовательно будут различными их инварианты, которые содержатся в стандартной модели.

Из предыдущего очевидно, что для любой марковской цепи с конечными пространствами состояний существует единственная минимальная марковская цепь, порождающая (как хвостовую) фильтрацию, финитно изоморфную данной. □

*Мы видим, что задача финитной классификации локально конечных фильтраций равносильна задаче построения пространства минимальных градуированных оснащенных графов с согласованной с оснащением мерой на пространстве путей есть пространство полных инвариантов таких фильтраций (о пространстве фильтраций см.далее).*

К сожалению,перход к минимальным моделям и минимальным фильтрациям не упрощает задачи их изучения, поскольку любая фильтрация может быть в естественном смысле произвольно близко аппроксимирована минимальной. Однако минимальность приближает нас к фундаментальному понятию - стандартности.

## 5.2 Минимальность графов, стандартность и общий критерий стандартности

Следующее важное определение будет часто использоваться в дальнейшем.

**Определение 7.** Локально конечная эргодическая фильтрация называется стандартной, если она изоморфна некоторой минимальной фильтрации.[8]

Например, $p$-адическая фильтрация стандартна, если она изоморфна бернуллиевской, т.е. в классе фильтраций финитно изоморфных бернуллиевской только сама бернуллиевская и изоморфные ей стандартны.

Проблема состоит в том, что фильтрация, изоморфная минимальной (т.е. стандартная), может быть не быть минимальной, иначе говоря,— не быть хвостовой для минимального мультиграфа (или минимальной марковской цепи). Тем самым, *свойство минимальности фильтрации не является инвариантным относительно изморфизма, а "инвариантная оболочка" этого свойства и есть "стандартность".*

[8] см. предыдушую сноску о термине "конечная определённость"

Поэтому ставится вопрос, как описать стандартные фильтрации в инвариантных (внутренних) терминах, т.е. как проверить, что данная фильтрация изоморфна вполне стандартной.

В следующей теореме приводится инвариантная характеристика стандартной фильтрации ("критерий стандартности")

Пусть $\tau = \{\xi_n\}_n$ эргодическая локально конечная фильтрация и пусть $\eta_n$— конечное разбиение пространства $X/\xi_n$ на максимальные классы элементов $C \in \xi_n$, на которых ограничения конечной фильтрации $\{\xi_k\}_1^{n-1}$ на них $C$ изоморфны (эквивалентно - соответствующие деревья с мерой изоморфны). Зафиксируем произвольный изоморфизм этих элементов с каким нибудь одним типовым элементом $\bar{C}$, рассматриваемым, как дерево с мерой. Очевидно, что тогда всякий элемент $D_i, i = 1, ..., r_n$ разбиения $\eta_n$ есть прямое произведение $D_i \sim \bar{C} \times (D_i/\xi_n) \quad D_i \in \eta$. Тем самым, мы определили независимое дополнение $\xi_{n,i}^-$ к ограничению разбиения $\xi_n$ на элемент $D_i$, Это — конечное разбиение элемента $D_i$

**Теорема 6.** *Локально конечная эргодическая фильтрация $\tau = \{\xi_n\}_n$ пространства Лебега $(X, \mu)$ с непрерывной мерой стандартна тогда и только тогда, когда в приведённых выше обозначениях для всякого $\varepsilon > 0$ и измеримого множества $A$, существует такие $n$ и множество $A'$, $\quad \mu(A \bigtriangleup A') < \varepsilon$, что $A' = \bigcup A'_i, i = 1 \dots r_n$ и множество $A'_i$ измеримо относительно независимого дополнения $\xi_{n,i}^-$.*

Условие теоремы состоит в том, что всякое измеримое подмножество в $X$ с точностью до изменения малой меры и для достаточно большого $n$ распадается в объединение множеств, каждое из которых измеримо относительно максимально возможного независимого дополнения к ограничениям разбиения $\xi_n$. Здесь важна максимальность ограничений разбиений $\xi_n$, для которых такое дополнение существует. Однако, выбор этих независимых дополнений есть предмет дополнительных рассмотрений.

Для фильтраций финитно изоморфных бернуллиевским (например для диадических) сами разбиения $\xi_n$ дополняемы, поэтому этот критерий состоит в проверке возможности построения согласованных независимых дополнений образующих базис пространства.

В этом смысле условие теоремы лишь сводит ситуацию к однородной фильтрации, где оно тавтологично.

*Proof.* Достаточность условия равносильна утверждению, что разбиения на цилиндры в пространстве путей графа, фигурирующего в определении стандартности модели, образуют базис сигма-алгебры измеримых множеств. Необходимость вытекает из того, что базис из цилиндров есть в точности базис независимых дополнений к указанным (максимальным) ограничениям разбиениям фильтрации. □

Условие теоремы показывает, что стандартность фильтрации есть свойство в некотором смысле разложимости её на бернуллиевские компоненты. Для финитно бернуллиевских фильтраций это в точности бернуллиевость то есть независимость. Поэтому понятие стандартности есть обобщение понятия независимости.

В следующем пункте мы сформулируем конкретный критерий стандартности, который использует и обобщает критерий для финитно бернуллиевских фильтраций предложенный автором в 1970 г. ([5]).

Из рассмотрения условия теоремы следует, что препятствием к стандартности может быть наличие специальной группы симметрий, сохраняющих меру в пространстве путей графа. Вот один из примеров.

## 5.3 Комбинаторный критерий стандартности

Общий критерий стандартности, приведенный выше, требует проверки измеримости множеств относительно системы независимых дополнений, но не показывает, как эту осуществить такую проверку. В этом пункте мы приводим более конструктивный, фактически комбинаторный способ проверки стандартности.

### 5.3.1 Комбинаторный критерий в терминах разбиений или метрик

Мы начнем с критерия стандартности для финитно бернуллиевских фильтраций; как мы увидим, общий случай будет их "смесью". Приводимый критерий для финитно бернуллиевских фильтраций отличается от критерия стандарности, предложенного автором в 1970 г. для диадических последовательностей только более унверсальной формулировкой. Заметим, что в приводимой форме этот критерий выполнен и для фильтраций с непрерывными условными мерами.

Пусть $\tau = \{\xi_n\}$ — локально конечная фильтрация пространства Лебега $(X, \mu)$ с непрерывной мерой, финитно изоморфная бернулиевской, т.е. такая, что для любого $n$ фактор-разбиение $\xi_n/\xi_{n-1}, n = 1/\dots$ изоморфно разбиению, все элементы которого конечны, а условные меры одинаковы с рспределением — конечным вероятностным вектором $p^{(n)}$, $n = 1, 2 \dots$ возмодно разным для разных $n$. Ведущим частным случаем является диадический: $p^{(n)} \equiv (1/2, 1/2)$ при всех $n$).

Элемент $C$ разбиения $\xi_n$ как конечное множество с условной вероятностной мерой имеет в нашем случае структуру прямого произведения конечных пространств с мерой $\Pi_{k=1}^{n} p_k$, но нам удобней представлять его в однородного дерева ранга $n$ с продакт мерой на листьях.

Предположим, что на пространстве $(X, \mu)$ задана некоторая измеримая ограниченная функция $f$ с вещественными значениями или задана метрика или полуметрика $\rho$; тогда на пространстве $X/\xi_n$ можно ввести расстояние $d_f^n(.,.)(d_\rho^n)$, которое надо трактовать как расстояние между элементами $C_1, C_2$ разбиения $\xi_n$, как деревьями с мерой. Это вводимое расстояние есть вариант метрики Канторовича для вероятностных мер в метрическом пространстве, но в нашем случае — с дополнительным условием.

А именно, введем, так называемые каплинги $\psi$, т.е меры на прямом произведении пространств $C_1 \times C_2$ с заданными маргинальными проекциями $\mu^{C_1}$ и $\mu^{C_2}$ -условными мерами. Дополнительное условие состоит в том, что эти каплинги есть не просто меры, а должны быть еще каплингами деревьев, т.е. сосредоточенная на некотором дереве, как подмножестве в $C_1 \times C_2$, и проекции которого на каждую из координат есть $C_1$ и $C_2$ как деревья. Каплингом дервьев является например график изоморфизма одного дерева на другое, сораняющий меру.

Тогда расстояние $d_f^n(d_\rho^n)$определяется по формуле:

$$d_f^n(C_1, C_2) = min_{\psi \in \Psi} \sum_{x \in C_1; y \in C_2} |f(x) - f(y)| \psi(x, y),$$

(в случае метрик надо заменить $|f(x) - f(y)|$ на $\rho(x, y)$)

Меры $\psi(.,.)$ называются *каплингами или транспортными планами*, множество все каплингов обозначим $\Psi_{C_1, C_2}$ [9]

[9]Метрика или полуметрика $d_\rho^n$ и есть метрика Канторовича на множестве вероятностных мер (полу)метрического пространства $Y, \rho)$; в нашем случае в качестве $\rho$ на $Y = C_1 \cup C_2$ взята полуметрика $\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

**Теорема 7.** *Для того, чтобы эргодическая фильтрация финитно изоморфная бернуллиевской была бы стандартной, т.е. изоморфна бернуллиевской, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:*

*либо*

*a)для любой измеримой функции $f$ на пространстве $(X,\mu)$;*

*либо*

*b) для любой допустимой метрики $\rho(.,.)$ на пространстве $(X,\mu)$;*

*либо*

*c) для любой разрезной полуметрики,* [10]

*верно следующее:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{X/\xi_n\times X/\xi_n} d_f^n(C_1,C_2)d\mu_{\xi_n}d\mu_{\xi_n}=0$$

Для дальнейшего удобно дать эквивалентную $\varepsilon$-форму условию теоремы:

$$\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N:\exists D_n\subset X/\xi_n\quad \mu_{\xi_n}(D_n)>1-\varepsilon,$$

при этом

$$\sup_{C_1,C_2\in D_n} d_f^n(C_1,C_2)<\varepsilon.$$

Особенно прозрачно выглядит условие теоремы для диадических фильтраций разрезных метрик относительно разбиений на $k$ подмножеств: в этом случае существенное упрощение условия в том, что каплинги можно выбирать графики изоморфизмов деревьев, т. е. на множестве вершин куба $\mathbf{k}^{2^n}$ можно взять метрику Хэмминга, а затем (вместо каплингов $\psi$) взять расстояние между орбитами действия группы автоморфзимов двоичного дерева на этом кубе. Иначе говоря, *критерий стандартности сводится к тому, что пространство орбит действия группы автоморфизмов дерева на кубе $\boldsymbol{k}^{2^n}$ стягивается в смысле этой метрики к одноточечному пространству.* см [5, 13].

Доказательство критерия для однородных фильтраций т.е. для $\{r_n\}_n$ -адических, буквально совпадает с доказательством для диадических фильтраций ($r_n\equiv 2$) и было предложено в [11, 13]. Позже оно неоднократно переизлагалось, например в [46, 57, 58] и др. Схема доказательства полностью сохраняется и для фильтраций, финитно бернуллиевских, и для непрерывных фильтраций. (все условные меры всех разбиений $\xi_n/\xi_{n-1}, n=1/\ldots$ -непрерывны).

Мы поясним лишь главную идею доказательства, подробности см в [13]. Прежде всего необходимость условия сразу вытекает из того, что для бернуллиевской фильтрации по определению существует последовательность независимых разбиений $\{\eta_n\}_n$, образующих базис пространства, для которых

$$\xi_n=\bigvee_n^\infty \eta_k, n=0,1\ldots.$$

отсюда вытекает, что для всех конечных разбиений $\bigvee_{k=1}^n\eta_k$ условие теоремы вытекает из их независимости с соответствующими разбиениями $\xi_n$. С другой стороны

[10] т.е. $\rho(x,y)$, равной 1 если $x,y$ лежат в разных элементах некоторого конечного разбиения пространства $(X,\mu)$, и равной 0, если в одном и том же элементе

совокупность разбиений $\{\eta_n\}_n$ образует базис и потому условие выполнено для любых конечных разбиений.

Достаточность условия доказывается более кропотливо — надо доказать, что из условия теоремы следует существование последовательности независимых разбиений $\{\eta_n\}_n$, связанных с $\{\xi_n\}$ указанным образом, и являющейся базисом пространства с мерой. Это делается опять-таки по индукции и главная лемма состоит в том, что условие теоремы переносится на фактор-фильтрации $\forall k : \{\xi_{n+k}/\xi_k\}_{n=0}^{\infty}$, поэтому можно строить базис $\{\eta_n\}_n$ последовательно переходя к фактор-пространствам, и аппроксимируя некоторый, заранее выбранный базис. Впервые эта схема применялась в доказательстве теоремы о лакунарном изоморфизме диадических последовательностей [4].

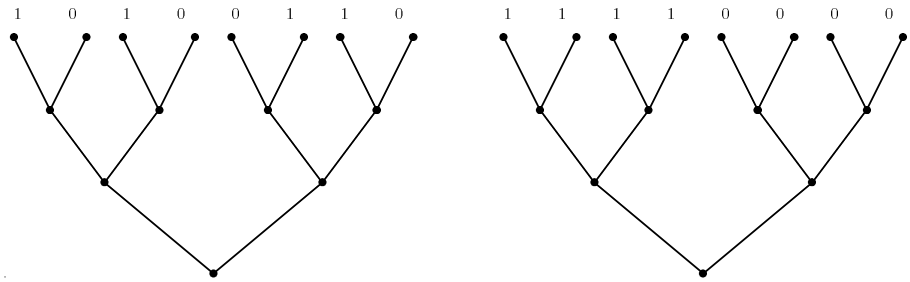



Figure 8: Неизоморфизм слов относительно группы симметрий дерева

### 5.3.2 Комментарии к критерию

В формулировке предыдущей теремы фигурировало понятие допустимой метрики (см. [44]). Напомним, что допустимой метрикой пространстве Лебега называется метрика, определённая на некотором множестве полной меры как измеримая функция двух переменных и такая, что сигма-алгебра порожденная всеми шарами положительного радиуса в этой метрике порождает всю сигма-алгебру измеримых множеств. См. [16]. Если функция двух переменных удовлетворяет условиям на метрику (неотрицательность, симметричность, неравенство треугольника) как условиям $mod0$ на классы метрик, и приведенному условию на сигма-алгебру шаров, то в классе такой функции найдется допустимая метрика (см.[7]).

**Теорема 8.** *Пусть $\rho$ произвольная допустимая метрика на пространстве Лебега с непрерывной мерой. Для того, чтобы эргодическая фильтрация финитно изоморфная бернуллиевской была бы стандартной, т.е. изоморфна бернуллиевской, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное $N$, что для любого $n > N$ и некоторого множества*

$$A_n \subset X/\xi_n, \quad \mu_{\xi_n}(A_n) > 1 - \varepsilon$$

*расстояние Канторовича между условными мерами на произвольных элементах $C_1, C_2 \subset A_n$ разбиения $\xi_n$, в $(X, \rho)$, как метрическом пространстве, не превосходит $\varepsilon$. Выполнение или невыполнение этого условия не зависит от выбора метрики $\rho$.*

Заметим, что если в качестве метрики в условии последней теоремы взять разрезную полуметрику, соответствующую разбиению то мы получим условие теоремы для функций с конечным числом значений. Поэтому заключение теоремы для разрезных полуметрик следует из заключения для функций. С другой стороны, любая метрика есть предел сумм разрезных метрик, поэтому из заключения теоремы для функций следует заключение для плотного семейства полуметрик. Наконец, нетрудно проверить, что сближение элементов разбиения с условными мерами по введенной метрике остается справедливым при предельном переходе по метрикам на пространстве.[11] Отметим попутно, что идея варьирования метрик и допустимой метрики при фиксированой мере в пространстве была высказана автором в 80-х гг. и неоднократно использовалась, например, при определении масштабированной энтропии, см.[44, 23]

Заключение теоремы можно эквивалентным образом формулировать и как стремление расстояний к нулю по мере и т.п.

## 5.4 Критерий стандартности для произвольной фильтрации.

Как надо изменить условие теоремы, чтобы получить критерий стандартности для произвольной локально конечной фильтрации? Фактически, условие для общий случай сводится к смеси условий на каждую финитно бернуллиевскую компоненту фильтрации.

Нам понадбятся конечные разбиения $\delta_n$ на пространствах $(X/\xi_n, \mu_{\xi_n})$, введенные при определении минимальности. Напомним, что два элемента разбиения $\xi_n$ — $(C_1, C_2)$ лежат в одном элементе разбиения $\delta_n$, если конечная фильтрация $\{\xi_k\}_{k=1}^{n-1}$ индуцирует на элементах $(C_1, C_2$ изоморфные конечные фильтрации, или эквивалентным образом, эти элементы $(C_1, C_2)$ как деревья с условной мерой — изоморфны. Важно, что разбиение $\delta_n$ определяется только условными мерами. Для однородных фильтраций — это тривиальное разбиение пространства $X/\xi_n$, а для минимальных графов это разбиение на отдельные точки на каждом этаже.

Тогда критерий с использованием $\varepsilon$-формулировки выглядит так:

**Теорема 9.** *Пусть $\tau = \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ произвольная эргодическая локально конечная фильтрация в пространстве Лебега $(X, \mu$ с непрерывной мерой. Для того, чтобы она была изоморфна стандартной фильтрации необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N, \quad \forall n > N,$$

*разбиение фактор-пространства $X/\xi_n$ на типы элементов разбиения $\xi_n$, изоморфных между собой по отношению к предыдущему фрагменту фильтрации:*

$$X/\xi_n = \bigcup_{i=1}^{k_n} A_i^n; \quad \{A_i^n\}_i = \delta_n$$

*обладало свойством:*

$$\exists D, D \subset X/\xi_n; \mu_{\xi_n}(D) > 1 - \varepsilon,$$

*что*

$$sup_{C_1, C_2 \in A_i^n \cap D} d_f(C_1, C_2) < \varepsilon,$$

*Иначе говоря, внутри каждого элемента разбиения $\delta$ расстояния между большинством элемнтов разбиения $\xi_n$ в смысле метрики $d_f$ или $d_\rho$ =мало.*

[11] Более точно, метрика Канторовича на пространстве вероятностных мер данного борелевского пространства непрерывна относительно слабой топологии в пространстве допустимых метрик (как функций двух переменных) Отсюда же вытекает независимость заключения теоремы от выбора метрик.

Из этой формулировки должно быть ясно, в каком смысле стандартность есть обобщение независимости.

Собственно, отличие от теоремы предыдущего пункта (т.е. теоремы для финитно бернуллиевского случая) только в том, что попарные расстояния должны быть малы только для большинства пар изоморфных элементов, а не для всех. Отсюда ясно, что и доказательство достаточности — главной части утверждения теоремы, — ничем не отличается от предыдущего. Однако, проверка условия, конечно, не проста.

Имеет смысл выделить необходимость критерия:

**Предложение 5.** *1. Фильтрации, удовлетворяющие критерию образуют инвариантный класс, т.е. фильтрация изоморфная фильтрации, удовлетвряющей критерию стандартности, также ему удовлетворяют.*

*2. Минимальная фильтрация удовлетворяет критерию стандартности.*

*Proof.* Первый пункт прямо вытекает из фомулировки критерия. Доказательство второго пункта разбивается на два случая. В первом (очевидном) случае допустим, что минимальный мультиграф является графом, т.е. не содержит кратных ребер. Тогда, разбиение на типы элементов разбиений $\xi_n$ в условии теоремы совпадает с разбиением на цилиндрические множества, и сигма-алгебра, порожденная всеми дополнениями совпадает с полной сигма-алгеброй. Во втором случае разбиение на типы сводится к бернуллиевским компонентам, для которых достаточность критерия проверена.

Второй пункт есть фактически тавтология, из-за тривиальности разбиений $\delta$ для минимальных графов. □

Критерий стандартности представляет интерес в случае графов существнно отличных от минимальных. Для канонических оснащений т.е. центральных мер критерий может быть несколько упрощен и в таком виде он формулировался в наших прежних работах, но для не полуоднородных фильтраций упрощенная формулировка не эквивалетна общей, которая дан выше, и термин "стандартность" употреблется именно в этом смысле. К этому вопросу мы вернемся в связи с так называемой внутренней метрикой (см.[23, 21, 20, 22] и параграф 7).

## 5.5 Критерий стандартности в мартингальной форме и промежуточные условия.

Естественно спросить, как по данному марковскому или даже произвольному одностороннему случайному процессу определить, является ли его хвостовая фильтрация стандартной. Вопрос в том, как критерий стандартности сформулировать в терминах процесса.

Ответ на этот вопрос, как и на другие вопросы о трактовке ослабления условий независимости в теории случайных процессов, в наиболее естественной форме выглядит, как усиление теорем о сходимости мартингалов. Классическая теорема в нужной нам форме для случайного процесса $\{x_n\}_{n \le 0}$ выглядит так:

Если хвостовая фильтрация процесса (т.е. пересечение сигма-алгебр прошлого — тривиальна: $\bigcap_n \mathfrak{A}_n = \mathfrak{N}$,

то для любого вещественного функционала от $k$ координат этого процесса предел его условных распределений при условии фиксации прошлого (от $-n < k$):

$$\lim_n P(F(x_0, x_{-1}, \dots x_{-k}) \ge t | x_{-n-1}, \dots) = P(F(x_0, x_{-1}, \dots x_{-k}) \ge t), t \in \mathbb{R}$$

почти всюду стремится к безусловному распределению этого функционала; иначе говоря, условные меры на $k$ координатах процесса при стрмлении момента условия к бесконечности, слабо сходятся почти всюду (или по мере) к соответствующим безусловным мерам. Здесь существенно, что $k$ - фиксировано, а $n \to \infty$. Нельзя ли разрешить стремление к бесконечности $k$ вместе с $n$? Буквально это не имеет смысла, поскольку предел условных мер с растущим $k$ не определён, но можно говорить о *о сближении условных мер при стремлении $n \to \infty$*. Для этого надо определить ту или иную метрику в пространстве условных мер при данном $k$ и требовать, например, сходимость к нулю математического ожидания расстояний между условным мерами при разных условиях. Роль выбора метрики здесь принципиальна, и классы процессов, которые удовлетворяют подобным требованиям существенно зависят от этого выбора. Но безусловно, выполнение требований этого типа свидетельствуют о том или ином сходстве процесса с последовательностью независимых.

Повторим определение метрики на пространстве условных мер, т.е. на пространстве деревьев с мерой, которое позволит сформулировать "мартингальное" определение стандартных случайных поцессов.

**Теорема 10.** *(Мартингальный критерий стандартности) Рассмотрим произвольный (не обязательно марковский) случайный процесс $\{x_n\}, n < 0$ со значениями из $[0,1]$ (или в произвольном борелевском пространстве). Рассмотрим его хвостовую фильтрацию $\mathfrak{A}_n, n = 0,1,\dots,$ где сигма-алгебра $\mathfrak{A}_n$ порождена случайными величинами $x_k, k \le -n, n = 0,1\dots$ Предположим, что фильтрация эргодична, т.е. выполнен закон 0-1 для пересечения: $\bigcap_{n=0}^{\infty} \mathfrak{A}_n = \mathfrak{N}$.*

*Возьмем либо*

*произвольную цилиндрическую функцию $f$ на пространстве траекторий процесса*

*либо произвольную метрику $\rho$ на пространстве траекторий процесса*

*Зафиксируем две траектории $C_1, C_2$ процесса от $-\infty$ до момента $-n$ с изоморфными условными мерами $\mu^{C_1}, \mu^{C_2}$ на конечных отрезках процесса $(x_0, x_{-1}, x{-}2\dots x_{-n}|C_1)$ и*

*$(x_0, x_{-1}, x{-}2\dots x_{-n}|C_2)$, (т.е. две точки фактор-пространства $X/\xi_n$, лежащие в одном элементе разбиения $\delta_n$ - см.критерий стандартности);*

*рассмотрим деревья траекторий, отвечающие элементам $C_1$ и $C_2$ с условными мерами на листьях; тогда стандартность фильтрации равносильна условию*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{X/\xi_n} \int_{X/\xi_n} d_f(\mu^{C_1}, \mu^{C_2}) d\mu_{\xi_n} d\mu_{\xi_n} = 0$$

*(вместо $d_f$ в случае метрики надо взять $d_\rho$)*

*для всех измеримых функций $f$ на пространстве траекторий процесса (достаточно только для цилиндрических с конечным числом значний), соответственно для всех допустимых метрик (фактически, достаточно только для одной метрики).*

Приведенная формулровка есть буквальный пересказ критерия стандартности, но он приводит к важному выводу: *между обычной теоремой о сходимости мартингалов, справедливой для всех процессов, определяющих эргодическую фильтрацию (т.е. регулярных процессов)с одной стороны, и критерием, который имеет много меньшую область справедливости, с другой — естественно возникает спектр промежуточных условий на процесс.* Они определяются соотношением между $n < 0$, — моментом, фиксируюшим условие в прошлом, и $k(n) > n$ — моментом, до которого мы сравниваем условные меры на деревьях ранга $|k(n)|$. Если $k(n)$ не зависит от $n$ и $n \to \infty$

это обычная теорема о мартингалах, а, если $k(n) = n$ - то это критерий стандартности. Поэтому стандартность есть максимально возможное усиление закона $0 - 1$. О промежуточных случаях, которые можно назвать "высшими законами $0 - 1$", автору ничего неизвестно, но, можно предположить, что процессы, для которых условия выполняются для различных промежуточных ростов последовательности $k(n)$ отличаются между собой по своим свойствам.

Наиболее интересную часть теории составляет изучение фильтраций финитно бернуллиевских, но не изоморфных бернуллиевским. Нарушение критерия стандартности измеряется различными инвариантами-энтропией фильтраций (см. далее), шкалой и др. Мы вернемся в следующем параграфе к этому вопросу.

Простейший пример неоднородной финитно изоморфной бернуллиевской нестандарной фильтрации: марковская цепь с двумя состояниями и матрицей переходов

$$\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix},$$

где $p \neq q, p+q = 1, p, q > 0$ (см [23]; для цилиндричесого множества $\{x = \{x_n\} : x_1 = 0\}$ критерий стандартности не выполнен. Эта фильтрация есть двулистное накрытие бернуллиевской фильтрации с вероятностями $(p, q)$.

Наоборот, марковская цепь Фибоначчи, не являющаяся локально бернуллиевской

$$\begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda^2 + \lambda = 1$

задает стандартную хвостовую неоднородную фильтрацию, так как разбиения $\delta_n, n = 1 \dots.$ есть разбиения на точки каждого этаже графа.

## 5.6 Пространства фильтраций, марковских компактов, и градуированных мультиграфов

Теорема о марковости фильтраций позволяет принять в качестве пространства всех локально конечных фильтраций в пространстве Лебега— пространство оснащенных градуированных мультиграфов или, что то же самое, марковских компактов с марковскими мерами. Иначе говоря, определим пространства следующим образом

**Определение 8.** Пространство локально конечных фильтраций пространстве Лебега с непрерывной мерой отождествляется с пространство оснащенных градуированных мультиграфов (соотв. пространство марковских цепей с копереходными вероятностями) и фиксированной непрерывной мерой, согласованной с оснащением (соотв. с копереходами).

При этом соответствии фильтрация отождествляется с хвостовой фильтрацией пространства путей мультиграфа (соотв. с пространством траекторий марковской цепи). Подчеркнем, что в соглашении об отождествлении совокупности фильтраций в пространствах с мерой и совокупностью градуированых оснащенных мультграфов существенную роль играет мера на пространстве путей, согласованная с оснащением — сам оснащенный граф не определяет, напримр эродичность фильтрации — ее наличие ил отсутствие опредлятся мерой.

Для определённости, будет говорить о мультграфах, пересказ утверждений для марковских цепей ничего нового не вносит.

Задать мультиграф с оснащением можно, как мы видели с помощью последовательности конечных матриц, ненулевые элементы которых есть вероятности копереходов смежных вершин. Каждая такая последовательность задает градуированный мультиграф с оснащением Г. Пространства путей обозначим $T(\Gamma)$. Кроме того, для данного мультиграфа Г введём симплекс $\Sigma_\Gamma$ всех вероятностных мер на пространстве путей $T(\Gamma)$, согласованных с оснащением.

*Обозначим через* $\mathfrak{F}$ *пространство всех пар* $(\Gamma, \Sigma_\Gamma)$ *где* Г *пробегает множество всех бесконечных, градуированных локально конечных мультиграфов с оснащением, а* $\Sigma_\Gamma$ *— соответствующие симплексы мер.* Это пространство можно рассматривать еще и, как пространство всех локально конечных фильтраций непрерывного пространства Лебега, и одновременно как пространство всех локально-конечных марковских компактов с марковскоими мерами. Снабдим это пространство слабой топологией, т.е. топологией обратного спектра.

В этом пространстве можно рассматривать важные подпространства:

0.*Подпространства эргодических мультиграфов*, т.е. таких, для которых существует хотя бы одна непрерывная эргодическая мера на пространстве путей, согласованная с оснащением. В этот класс не входят, например, деревья и другие разложимые мультиграфы. Для нужд теории фильтраций и эргодической теории этот класс наиболее интресен. Комбинаторная структура таких мультиграфов должна быть описана полностью. Фактически речь идет гиперконечных отношениях эквивалентности стандартного борелевского пространства (пространства путей) с фиксированным коциклом мер (ср.[53][**?**]).

1.*Подпространства мультиграфов с каноническими оснащениями*; хвостовая фильтрация в этом случае является однородной, т.е. условные меры на элементах $\xi_n, n = 1, \dots,$ — равномерны. Геометрия проективного предела симплексов и предельный симплекс центральных мер $\mathfrak{F}_0$ весьма специальна, — в диадическом случае это симплекс неупорядоченных пар, или так называемая "башня двоичных мер." (см рис.). На языке марковских цепей (в стационарном случае) — центральные меры это меры с максимальной энтропией. Каноническое оснащение задается самой структурой графа, поэтому это пространство особенно интересно.

2.Пространства стационарных фильтраций $\mathfrak{F}_s t$, т.е. фильтраций, инвариантных отностельно сдвига т.е. операции факторизации по первому разбиению

$$\tau \equiv \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty} \approx \{\xi_n/\xi_1\}_{n=1}^{\infty} \equiv \tau'.$$

или, эквивалентно, пространства стационарных мультиграфов, т.е. мультиграфов с постоянными матрицами копереходов. с дополнительной симметрией и т.д., Анализ этого пространства особенно важен для эргодческой теории (одного автоморфизма).

3. Кроме того, во всех случаях, можно отказаться от рассмотрения мер на пространстве путей, и перейти к борелевской теории графов и фильтраций. Это означает, что мы изучаем только пространство $\mathcal{G}$, не фиксируя вторую компоненту в парах $(\Gamma, \Sigma_\Gamma)$, т.е. симплекса мер $\Sigma_\Gamma$), и рассматривая лишь копереходы. (См. параграф о прективных пределах.)

Более принципиальным является анализ пространства $\mathfrak{F}$ с точки зрения проблемы финитного и общего изоморфзимов. Выделим в пространстве $\mathfrak{F}$ фильтрации, соответствующие минимальным мультиграфам (минимальным марковским цепям) с оснащением и мерой на путях. На основании предыдущего анализа это подпространство пространства $\mathfrak{F}$ состоящее из минимальных локально конечных фильтраций. Обозначим его $\mathfrak{F}^{st}$ и на основании теоремы предущего параграфа это есть *пространство полных инвариантов фильтраций с точностью до финитного изоморфизма: любые* *две различные стандартные фильтрации не являтся финитно изоморфными и любая фильтрация финитно изоморфна стандартной.*

Из наших определений непосредственно следует утверждения:

**Предложение 6.** *1.Пространство всех градуированных оснащенных мультиграфов (соотв. пространство всех марковских компактов с копереходами) расслоено над пространством минимальных графов с оснащением (над пространством минимальных марковских компактов с копереходами). Тем самым, пространство всех фильтраций расслоено над пространством минимальных фильтраций Пространство минимальных графов с оснащением всюду плотно в пространстве фильтраций.* [12]

*2.Множество стандартных эргодических фильтраций всюду плотно в пространстве всех фильтраций.*

По существу пространство всех минимальных мультиграфов (марковских цепей) — это пространство всех локально конечных типов фильтраций.

Поэтому в противоположность проблеме финитного изоморфизма проблема изоморфизма локально конечных фильтраций является дикой: факторизиция пространства $\mathfrak{F}$ по классам изоморфных фильтраций не приводит к пространству с сепарабельной) борелевской структурой. Более того, это утверждение остается верным даже, если мы поставим задачу об изоморфзиме эргодических диадических фильтраций, т.е. проблемы изоморфизма в одном (на самом деле произвольном нетривиальном) классе финитного изоморфизма. Ситуация аналогична многим проблемам изоморфзима в алгебре и анализе, например, проблеме изоморфизма действий бесконечных групп с инвариантной мерой, или проблеме классификации неприводимых унитарных представлений бесконечной симметрческой группы, и т.д. Такой вопрос возникает в теории динамичесих систем, теории представлений, асимптотической комбинаторике и др. Дикость классификационной задачи следует из того, что классификация включает типовую дикую задачу, к чему мы вернемся в другом месте.

Далее мы предлагаем с одной стороны рассматривать проблему изоморфизма для некотороых классов фильтраций, близких к стандартным, а с другой, предлагаются типы инвариантов для фильтраций общего типа, существенно отличных от стандартных.

# 6 НЕСТАНДАРТНОСТЬ: ПРИМЕРЫ И ПРОЕКТ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ.

Наиболее трудные вопросы теории фильтраций связаны с нестандартными фильтрациями. Но, как следует из критерия стандартности, причины нестандартности для неоднородных фильтраций могут быть разными. Напомним, что минимальная фильтрация однозначно определяется своим финитным типом. Стандартность фильтрации означает, что она не очень сильно отличается от своего финитного типа, грубо говоря, ее однородные части должны быть стандартными, т.е. бернуллиевскими.

Поэтому природа настоящей нестандарности проявляется уже в однородных более того,даже в диадических фильтрациях. Как уже отмечалось, группа симметрий самой фильтрации и ее факторов по разбиениям $\xi_n$ со сколь угодно большим номером $n$,

[12]в то же время, если рассмотреть, например, пространство диадических эргодическх фильтраций, то есть лишь одна минимальная эргодическая фильтрация и лишь один минимальный граф.Вообще можно ввести более сложную топологию в которой множество минимальных фильтраций будет замкнутым.

должна быть бесконечной, в противном случае фильтрация не может иметь сложную структуру на бесконечности.

В этом параграфе мы продолжаем построение марковских цепей и графов для нестандартных диадических фильтраций. Фактически, эти цепи с конечными множествами состояний, т.е. пространства путей градуированого мультиграфа следует рассматривать как аппроксимацию или, точнее, как простую модель континуальных и более сложно устроенных марковских цепей. Но пожалуй, самое поучительное в этих построениях то, что графы, получаемые из этих аппроксимаций, интересны сами по себе и, возможно, даже являются более важными, чем сама аппроксимация. Это обстоятельство стоит подчеркнуть, потому что градуированные графы как диаграммы Браттели, представляют важные $C^*$-алгебры, которые, повидимому еще никогда не изучались в литературе. Например, алгебры, порожденные графом слов для абелевой группы $\mathbb{Z}^d$ — см. ниже, выглядят загадочными.

Метод доказательства нестандартности, который содержится в критерии, становится более понятным, если ему придать комбинторный смысл. Именно это делается ниже на нескольких примерах. Фактически, задача сводится к анализу меры на орбитах действия группы автоморфимов дерева на некоторых подмножествах конфигураций. Наиболее прозрачный случай — действие этой группы на множестве вершин куба $2^{2^n}$ с равномерной мерой, или с произвольной продакт мерой с одинаковыми сомножителями. Критерий стандартости требует, чтобы все мера концентрировалась (по метрике Хэмминга) в окрестности одной орбиты, и нужны продвинутые методы доказательства этого факта. К сожаления, така ясность еще не достигнута в примерах, приводимых далее

## 6.1 Графы случайных блужданий на орбитах групп, графы слов.

Построение марковской аппроксимации, существование которой вытекает из теоремы параграфа 3, как марковской цепи с конечными множествами состояний, является богатым источником новых градуированных графов. С другой стороны, эти построения позволяют изучать фильтрации, заданные априори, как марковские с континуальным множеством состояний. Конкретизируя доказательство упомянутой теоремы, мы даём явную конструкцию, марковской цепи с конечными множествами состояний и получим "графическую" интерпретацию фильтрации. Мы имеем в виду модели случайных блужданий по орбитам действия счетной группы в пространстве с непрерывной инвариантной мерой и хвостовую фильтрацию соответствующей марковской цепи. Эта тема иногда называется теорией **случайных блужданий в случайной среде - RWRS =Random Walk in Random Scenary** и является дальнейшим шагом в теории случайных блужданий на группах, которой сейчас посвящеы сотни работ. Следует сказать проблемы в этой, относительно, новой области носят иной характер: например, вопросы о границе блужданий, энтропии и т.д. (см. проблематику, например, в [62]) заменяются на вопросы о связи между действием группы и свойствами фильтраций (см.[19]).

Вопрос о том, когда соответствующие фильтрации (даже диадические) стандартны, изучен недостаточно. Известно лишь, что фильтрация марковского процесса $T, T^{-1}$ — простого блуждания по орбитам автоморфизма $T$ — нестандартна, если энтропия положительна: $h(T) > 0$ (см.[96]).

Для автоморфимов $T$ с дискретным спектром эта фильтрация предположительно стандартна. Для поворота окружности $T_\lambda$ это доказано автором для хорошо аппроксимируемых $\lambda$ (неопубликовно) и во всей общности доказано W.Parry (неопубликовно).

Но это лишь первые примеры случайных блужданий по орбитам действий; непростые блуждания (т.е. не только по образующим) дают горадо больше возможностей. Можно надеяться что техника графов даст новые средства для исследования подобных задач.

Начнем построение со следующего общего примера: пусть $G$ -группа и $S : |S| = s < \infty$— множество её образующих; $X = \mathbf{k}^G$; $\quad \mathbf{k} = \{0, 1 \dots k-1\}$, $\mu$ - мера Бернулли на $X$, т.е. прямое произведение $\prod_G p$, где $\{p_g\}; g \in S; \sum_g p_g = 1, \quad p_g \geq 0$ — вероятностный вектор размерности $s$, тогда $M$ есть марковская мера на марковском компакте $\mathcal{X}$. Пусть задано ее свободное действие на пространстве Лебега $(X, \mu)$ с непрерывной инвариантной мерой. Рассмотрим (односторонний) марковский процесс $y_{n n \leq 0}$, пространство состояний которого, есть пространство $X$, а вероятностями переходов (которые в силу того, что рассматривается отрицательные моменты времени) есть в дальнейшем вероятности копереходов:

$$P(y|x) = p_g, \text{if} \quad y = T_g x, g \in S; \quad P(y|x) = 0 \quad \text{otherwise};$$

мера $\mu$ есть инвариантная начальная мера марковского процесса; также определены и задана марковская мера $M$ на пространстве $\mathcal{X}$ всех траекторий процесса.

Расссмотрим на пространстве $(\mathcal{X}, M)$ хвостовую фильтрацию $\tau = \mathfrak{A}_{n=0}^{\infty}$, определяемую этим стационарным марковским процессом. Она, очевидно, локально конечна в силу конечности $S$, но марковский процесс имеет континуальное множество состяний. Однако, по теореме, соответствующая фильтрация может быть задана как хвостовая фильтрация в пространстве путей некоторого градуированного графа, или как хвостовая фильтрация для марковской цепи с *конечными множествами состояний.* Эта цепь уже не будет, конечно, стационарной марковской цепью,например потому, что мощность пространства состояний, т.е. число вершин на этажах графа, растет. Но, разумеется, сама фильтрация остаётся стационарной, просто аппроксимация не инвариантна относительно сдвига. Эта цепь, разумеется, не единственна и, как было отмечено, вообще говоря, канонического выбора такой цепи нет.

Мы дадим пример лишь модельного типа конкретного построения такого графа.

Пусть $B_n$ множество всех элементов группы $G$, которые записываются как слова длины меньшей или равной $n$ в образующих $S$, $B_1 = S$ Заметим, что $gB_{n-1} \subset B_n$, если $g \in S$ Введем серию градуированных графов $\Gamma_{G,S} \equiv \Gamma$: Выберем монотонную последовательность $n_k \geq k, k = 1, \dots$, стремящуюся к бесконечности Множество $\Gamma_k$ вершин $k$-ого этажа графа $\Gamma$, $k \geq 1$ есть всевозможные функции на шаре $B_{n_k}$ со значениями в $\mathbf{k}$; ребро соединяет вершину $v \in \Gamma_k$ с вершиной $u \in \Gamma_{k-1}$, если $u$, как функция на $B_{n_{k-1}}$, есть ограничение $v$, как функции на $B_{n_k}$, на $B_{n_{k-1}} \subset B_{n_k}$, а оснащение на ребре $(u, v)$ задается в этом случае, как произведение чисел $p_g$ соответствующее произведением образующих, для получания слова $u$ из слова $v$.

Тем самым, построен градуированный оснащенный граф $\Gamma_{G,S}$. Назовем его **графом слов данной группы с образующими:** $(G, S)$. Простейший случай графа слов для последовательности $n_k = k, k = 1, 2 \dots$.

Определим гомоморфизм пространства $\mathcal{X}$ на пространство путей $T(\Gamma_{G,S}$ построенного графа следующим образом: траектория процесса есть последовательность конфигураций на группе $\{\phi_n\}_n; n < 0$,. Сопоставим:

$$\Phi : \{\phi_n\}_n \to \{\phi_n | B_n\}_n.$$

**Теорема 11.** 1. *Образ пространства $\mathcal{X}$ при гомоморфизме $\Phi$ есть пространство путей в графе слов $\Gamma_{G,S}$;*

2. *Гомоморфизм $\Phi$ согласован с оснащением, т.е.параметры марковской цепи — переходные вероятности совпадают с в копереходными вероятностями на пространстве путей; Поэтому гомоморфизм $\Phi$ отображает меру $M$ на некоторую меру, на пространстве путей,согласованную с оснащением.*

3. *Гомоморфизм $\Phi$ пространства $\mathcal{X}$ на пространство путей $T(\Gamma_{G,S}$ задает гомоморфизм пространства конфигураций, т.е. траекторий марковской цепи, на пространство путей графа и фильтрация гомоморфно отображается на хвостовую фильтрацию пространства путей с сохранением меры.*

*Proof.* Справедливость утверждений непосредственно следует из наших определений графа и его структуры. □

Ответ на важный вопрос о том, *когда этот гомоморфизм будет изморфизмом*, зависит от группы, от выбора последовательности $\{n_k\}_k$ и от переходных вероятностей, более точно, от того покрывают ли при случайном блуждании сдвиги шаров всю группу. В общем случае следует увеличивать размер шаров с чеми связан выбор последовательность $\{n_k\}$. Мы вернемся к этому вопросу позже, а сейчас рассмотрим конкретные примеры.

Полезно заметить, что это построение можно использовать и для полугрупп, например, взяв в качестве $S$ образующие без обратных степеней. Получающийся граф отвечает фильтрации подпроцесса к построенному по образующим, но более прост, и его анализ подчас достаточен для изучения самого процесса.

Ниже приводятся примеры этой схемы.

## 6.2 Блуждания по орбитам свободной группы

В исторически первом примере нестандартной диадической фильтрации [5] мы рассматривали свободную группу $G = F_2$ с двумя образующими $(a, b)$ и пространство $X = 2^{F_2}$, снабженное бернуллиевской мерой (бесконечным произведением мер $(1/2, 1/2)$). Рассматривалось случайное блуждание по траекториям бернуллиевского действия свободной полугруппы с двумя образующими и блуждание по её орбитам, т.е. марковский процесс с переходами $y(g) \to y(ag)$ и $y(g) \to y(bg)$ с вероятностями $(1/2, 1/2)$.

Приведем сноску из работы [5]

*Построенный марковский процесс обладает следующим парадоксальным свойством, которое в вольном изложении выглядит так: предположим, что процесс развития математики таков же, как построенный марковский процесс; если РЖМ* [13] *каждый год, начиная от $-\infty$, выпускает том "Итогов Науки", содержащий все существенно новое (т.е. независимое от предыдущего), открытое в данном году, то прочтение всех этих томов не позволяет полностью восстановить картину математики на любой данный год.Подразумевается, конечно, что никаких открытий в $-\infty$ не происходило.*

К этому замечанию добавим, что сказанное верно для любого способа написания томов, т.е. для любого выбора независимого дополнениякк предыдущему. Инчае говоря, имеются существенные (т.е. имеющее положительную меру) события, произошедшее в данном году, которые не является измеримыми относительно какрй бы то ни было системы независимых дополнений к разбиениям этой диадической фильтрации.

Построение графа, данное выше для общего случая, задаёт аппроксимацию этого процесса конечными марковскими цепями. Один из соответствующих мультиграфов

[13] Реферативный журнал "Математика", к сожалению, не сохранившийся до наших дней

выглядит так: число вершин $n$-го этажа равно $2^{2^n}$, что соответствует множеству всех функций на всех словах длин $n$ со значениями в $0, 1$. Каждая функция-вершина $v$ соединена ребром с двумя функциями-вершинами предыдущего этажа — $u$ и $u'$, в том случае если $u$ (соотв. $u'$) есть функция на словах длины $n-1$, получаемая из функции $v$, если её рассмотреть на индексах, начинающихся с $(0, *, *, ....*)$, соотв.— с $(1, *, *, ....*)$. Но в силу произвольности функций, это означает, что множество вершин $n$-го этажа это множество всех пар вершин $(n-1)$-го этажа. Иначе говоря, граф слов в этом случае есть **граф упорядоченных пар** см. [23, 27]. [14] Уже отсюда следует, нетрудно вывести, что соответствующая фильтрация нестандартна (см. далее) и получить целый ряд других её свойств.

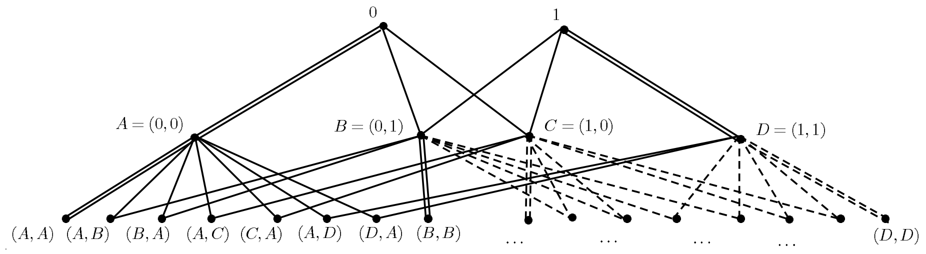



Figure 9: Граф упорядоченных пар

В точности тот же численный анализ использовался в [5] для доказательства нестандартности фильтраций, возникающих при изучении действий локально конечных групп, например, бернуллиевского действия группы корней степеней вида $2^n$ из единицы или прямой суммы групп второго порядка. Основной аргумент, доказывающий нестандартность фильтрации состоял в том, что порядок орбит групп автоморфизмов двоичного дерева в этих примерах были существенно меньше, того порядка, который достаточен для концентрации меры около одной орбиты. Этот агумент был использован для введения автором понятия энтропии диадической фильтрации (см далее). Как было замечено в [90] уже после появления работы [5], для той же цели можно использовать энтропию действия бесконечной суммы групп второго порядка группы. В [11, 10, 13] приведена оценка на рост порядков групп при котором энтропия действия совпадает с энтропией фильтрации. Дальнейшие исследования [96] показали точность этой оценки (см. ниже о шкале). Однако энтропия фильтрации в смысле [8, 13] имеет гораздо более общую природу.

Добавим еще, что дерево путей $T_u$, с корнем в данной вершине $u$ этажа $n$ вместе с последовательностью нулей и единиц на листьях дерева, отвечающих тому в какой из двух вершин $a, b$ первого этажа кончается данный путь, и есть то, что названо в [5] **универсальным проектором** цилиндрического множества $\xi_a$ или $\xi_b$ вершин первого этажа на начальный фрагмент фильтрации -на первые $n$ разбиений. Тот факт, что универсальный проектор не стабилизируется, т.е. что для различных вершин $u$ этажа $n$ не происходит сближения деревьев по мере — и означает, в силу критерия, нестандартность фильтрации.

В заключении этого примера отметим, что хотя, в силу теоремы о марковской реализации, можно фильтрации, порожденные различными действиям типа $RWRS$ представить как фильтрации марковских цепей с конечным множеством состояний,

[14] Использование этого графа для случайных блужданий на свободной полугруппе и соответствующих фильтраций не было отмечено в [27], эта связь будет рассмотрена особо.

явный вид этой реалзации известн лишь в небольшом числе примеров. Это относится и к адической реализации соответстующих групп и полугрупп. Даже для не для всех абелевых групп, о чем говорится далее, такая реализация известна.

## 6.3 Блуждания по орбитам свободных абелевых групп.

Более простой в одном и более сложный в другом отношении пример фильтрации связан с блужданием по орбитам бесконечных абелевых групп. Мы рассмотрим также модельный пример.

Если $G = \mathbb{Z}^d, S = (e_1, e_2 \dots e_d)$, где $e_i$ - орты, то соответствующий граф выглядит так: Множество вершин $n$-го этажа есть множество всех $0-1$ функций на целочисленном симплексе

$$\Sigma_d^n = \{\{r_1, r_2 \dots r_d\} : \sum_i r_i = n, r_i \in \mathbb{Z}_+\},$$

а ребра соединяют вершину-функцию с вершинами-функциями предшествующего этажа, которые есть ограничения первой на подсимплексы, в которых удалена одна из граней.

Рассмотрим случай $d = 1 : G = \mathbb{Z}S = \{-1, +1\}$, соответствующий граф — *графом слов для* $\mathbb{Z}$. Вершины $n$-го этажа графа есть $0-1$ слова длины $n$: $(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_n)$,

а ребра ведут к двум словам:

$(\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1})$

$(\epsilon_2, \dots, \epsilon_{n-1}, \epsilon_n), n = 2, 3 \dots$

Граф слов для $\mathbb{Z}$ является абелевым аналогом графа упорядоченных пар. Это — диадический (мульти)граф, $n$-й этаж графа слов имеет $2^n$ вершин, каждая из которых имеет две предшествующие и четыре последующие вершины. Естествнная центральная мера есть равномерная мера на вершинах этажа.

(см. рис.)

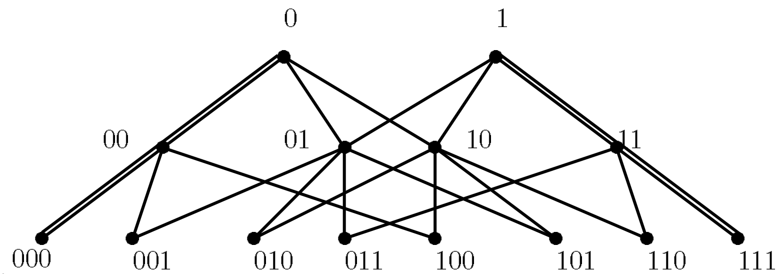



Figure 10: граф слов группы $(\mathbb{Z}, (+1, -1)$

Адический сдвиг на этом графе весьма интересен, он несколько напоминает $(T, T^{-1})$-преобразовании, (где $T$—автоморфизм Бернулли). В хорошо известной работе [63] доказана небернуллиевость и даже отсутствие слабой бернуллиевости этого преобразования. Но мы интересуемся здесь свойствами фильтрации; их связь с эргодическими характеристиками преобразований изучена недостаточно. Нестандартность фильтрации для $(T, T^{-1})$ была предположена мной, и впервые доказана в [**?**], см. также [26]. Развитие результатов [63] на группы $\mathbb{Z}^d$, было предпринято в [98]. Нестандартность фильтраций для всех свободных абелевых групп при $d \geq 1$, и для нильпотентных групп доказана в [26], там же доказана зависимость скейлинговой энтропии этих фильтраций от $d$, мы вернемся к этим графам и их обобщениям на другие группы в другом месте.

## 6.4 Лакунарность

Теорема о лакунарном изоморфизме [4] утверждает, что всякая диадическая эргодическая фильтрация $\{\xi_n\}_n$ лакунарно стандартна, т.е. можно найти такую подпоследовательность такую растущую последовтельность натуральных чисел, что фильтрация $\{\xi_{n_k}\}_k$ является $\{2^{n_k-n_{k-1}} \equiv r_k\}$-адической стандартной фильтрацией. Запас тех последовательностей $n_k$, для которых это верно составляет так называемую *шкалу* -инвариант исходной диадической фильтрации. Шкала стандартной диадической последовательности состоит из всех последовательностй и называется полной. Разумеется, шкала содержит с любой последовательностью все конфинальные с ней (т.е. отличающиеся в конечном числе мест) и является монотонной, поскольку подпоследовательность стандартной фильтрации очевидно стандартна. Повидимому, эти два условия исчерпывает условия на шкалу. В [13, **?**] построены нестандартные диадические последовательности со шкалой разнообразного вида. Например, $\{\xi_{2k}\}$ может быть стандартной 4-адической, в то время, как $\{\xi_k\}_k$ –нестандартна. ит.д.

Тем же методом можно доказать общую теорему для произвольных неоднородных фильтраций, даже не локально конечных(см. [23])

**Теорема 12.** *Всякая эргодическая фильтрация лакунарно стандартна.*

Поскольку стандартность может нарушаться вдоль произвольных последовательностей, классификация фильтраций вряд ли может быть эффективной.

Однако роль лакунарных теорем в другом — они измеряют степень близости фильтрации к стандартной фильтрации.

В работе [10] было введено понятие авторморфизма с полной (диадической) шкалой, т.е в терминах настящей работы, такого автоморфизма, у которого существует диадическая реализация со стандартной хвостовой фильтрацией (относительно данной меры). [15]. Позже А.Каток в статье [64] ввёл и изучил понятие стандартного автоморфизма, как автоморфзима монотонно эквивалентного автоморфизму с универсальным дискретным спектром. Интересно было бы проверить совпадают ли эти понятия.

## 6.5 Масштабированная и вторичная энтропии

Другой мерой близости к стандартности служит масштабированная энтропия фильтрации (и её аналог — масштабированная энтропия действия групп).

Напомним, что критерий стандартности состоял в том, что метрика $d^n_\rho$ на пространстве деревьев с мерой стремилась по мере к вырожденной метрике.

**Предложение 7.** *Если фильтрация эргодична, то последовательность метрик $d^n_\rho$ либо сходится по мере к вырожденной метрике, либо не имеет предела.*

Причина этого простого но важного факта в том, что существование предела, не сводящегося к одноточечному пространству противоречит эргодичности, так как иначе возникнут нетривиальные предельные функционалы.

[15] В работе [10] была сделана попытка применить результаты о диадических фильтрациях (стандартность, шкала и др.) к изучению эргодических свойств автоморфизмов. Но, в отличие от таких применений к действиям локально конечных групп, требование диадичности или однородной периодичности аппроксимаций в духе леммы Рохлина, для не локально конечных групп, усложняет все построения. Как показало последующее развитие темы, от однородных фильтраций следует перейти к полуоднородным; адические реализации действий групп строятся как раз таким образом и понятие стандартности и полной шкалы становится более естественным.

Таким образом, в случае нестандартной фильтрации возникает последовательность метрических пространств, не имеющих предельного метрческого пространства, но можно следить за эпсилон-энтропией этого метрического пространства как функции от $n$. Оказывается асимптотика этой последовательности при некоторой нормировке не зависит от выбора метрики, и ее класс есть, тем самым, инвариант фильтрации. Именно так она была определена в [11, 5] для случая дидаической фильтрации с экспоненциальной (колмогоровской) нормировкой. В [**?**, **?**] был определен общий случай и назван вторичной энтропией по причинам, связанным со стационарным случаем. В смысле этого определения и корректной нормровки вторичная энтропия фильтрации, связанной с преобразованием $(T, T^{-1})$ по теореме [97] равна энтропии $h(T)$. В [**?**] доказано, что масштабированная энтропия адического автоморфизма для некоторых мер на графе упорядочнных мер равна энтропийной (масштабирующщей) последовательности (относительно той же меры) хвостовой фильтрации. Эти теоремы должны быть обобщены на прозвольные группы.

## 6.6 Проект классификации нестандартных фильтраций

Колмогоровский закон $(0-1)$ (о тривиальности сигма-алгебры пересечения сигма-алгебр фильтраций) есть самое простое условие на поведение фильтрации на бесконечности. Стандартность или бернуллиевость есть, наоборот, самое сильное условие на поведение фильтрации на бесконечности: оно дает гарантию того, что никакой сложности на бесконечности — нет, поскольку все условные распределения сближаются в самом сильном смысле. При этом, в отличие от традиционного измерения близости процесса к процессу независимых, эта близость выражается не в скорости стремления к нулю коэффициентов корреляции или других показателей, а в малости различия между условными мерами (в той или иной метрике) древесных структуре этих условных мер. Таким образом,можно говорить о "высших законах (0-1)", как об утверждениях о сближении в той или иной метрике условных распределений, промежуточных между обычным законом $(0-1)$ и стандартностью (или бернулливостью).

Как отмечалось в предыдущем параграфе, такая шкала условий, видимо, существует.

Условие Орнштейна ($VWB$ -very weak Bernoulli) есть тоже закон такого типа, но оно не совпадает с условием стандартности, как показыают примеры: в [94] приведен пример небернуллиевского процесса со стандартной эргодической диадической фильтрацией, а наш примеры нестандартности показывают, что у бернуллиевских автоморфзимов может быть марковская образующая, относительно которой прошлое нестандартно. Другой пример в [97]. Однако это лишь примеры и более полный анализ ситуации еще не был проведен. Заметим еще, что условия могут зависеть от того, какую метрику на деревьях с мерой мы выбираем.

Напомним, что в схеме критерия стандартности мы рассматриваем функции на $X/\xi_n$ со значениями в пространстве деревьев ранга $n$ с мерой, и этот критерий состоял в том, что в смысле метрики на пространстве деревьев значения функции, при достаточно большом $n$ сближаются, т.е. функции по мере стремятся к константе. Иначе говоря, образы мер на пространствах деревьев стремятся к дельта мере. Удобно рассматривать вместо функций на фактор-пространстве $(X/\xi_n, \mu_\xi)$, их поднятие на само пространство $(X, \mu)$, и тогда на $(X, \mu)$ мы получаем полуметрики $\rho_n$ в которых расстояние между точками есть расстояние между образами — значениями функций, т.е. соответствующими деревьями.

Критерий стандартности состоял в том, что последовательность этих метрик стягивалась к точке, и при его выполнении две финитно изоморфные фильтрации — изоморфны. Если стандартности нет, т.е функции не сходятся по мере к константе и это значит, что последовательность $(X, \mu, \rho_n), n = 1, \ldots,$ где $\rho_n$ последовательность полуметрик не сходится, и предельной метрики на $(X, \mu$ не существует.

По каким критерям можно судить об изоморфизме фильтраций? Необходимыми условиями будут одинаковость энтропийног инварианта, совпадения шкалы и т.д. Но можно ли формулировать достаточные условия изоморфзима? Для этого надо понять, что такое асимптотический изоморфизм двух последовательностей (полу)метрических пространств, у которых нет предельного пространства.

Нижеследующая гипотеза, состоит в том, что иногда финитный изоморфизм вместе с таким асимптотическим изоморфизмом также влекут изоморфзим. Она подразумевает включение всех инвариантов нестандартной фильтрации (типа энтропии и др.)в единый контекст.

Чтобы точно сформулировать эту гипотезу, напомним следующую общую идею об асимптотическом изоморфзиме, высказанную в [23],

Рассмотрим так называемую метрическую или допустимую тройку $\theta = (X, \mu, \rho)$ — пространство $X$ с мерой $\mu$ и с метрикой $\rho$, и условием их согласования: метрика $\rho$ измерима, как функция двух аргументов на пространстве $(X, \mu)$, пространство $(X, \rho)$ -сепарабельно, как метрическое пространство, а $\mu$ есть борелевская вероятностная мера на этом метрческом пространстве $(X, \rho)$. Попутно отметим, что в отличие от традиционного фиксирования метрики и рассмотрения различных борелевских мер на пространстве, автор неоднократно защищал полезность другого подхода: фиксации меры и варьирования метрик на пространстве с мерой [44].

В работах [14] и [15] доказана теорема о полном инварианте метрических троек относительно их эквивалентности, определяемой изометриями сохраняющими меру.

**Определение 9.** Матричным распределением $D_\theta$ метрической тройки $\theta = (X, \mu, \rho)$ называется мера в пространстве бесконечных вещественных матриц, которая определяется как образ меры Бернулли $\mu^\infty$ на $X^\infty$, с помощью отображения:

$$M_\theta : (X^\infty, \mu^\infty \to (\mathbb{M}_{\mathbf{N}}(R_+), D_\theta) :$$

$$M_\theta(\{x_n\}_n) = \{\rho(x_i, x_j)\}_{(i,j)}.$$

**Теорема 13.** ([44, 33, 15]) *Две метрические тройки $\theta = (X, \mu, \rho), \theta' = (X', \mu', \rho')$ с невырожденными мерами ( $\mu(U) > 0, \mu(U') > 0$ если $U, U'$ непустые открытые множества в $X, X'$) изоморфны относительно указанной эквивалентности, (т.е. существует обратимая изометрия $T : X \to X'$,сохраняющая меру: $T\mu = \mu'$), тогда и только тогда, когда их матричные распределения равны $D_\theta = D_{\theta'}$.*

**Определение 10.** Предположим, что для последовательности допустимых метрических троек на одном и том же пространстве с мерой $(X, \rho_n, \mu)$ существует слабый предел матричных распределений $\lim_n D_{\theta_n}$ (как мер на пространстве матриц $\mathbb{M}_{\mathbf{N}}(R_+)$ с обычной слабой топологией). Будем называть этот предел виртуальным матричным распределением последовательности метрических троек. Он является инвариантом относительно последовательности изометрий $I_n, n = 1, \ldots$.

Заметим, если метрические тройки не сходятся ни к какой метрической тройке, то предел матричных распределений, если он существует, не есть матричное распределение какой-либо метрической тройки. С другой стороны множество всех матричных распределений метрических троек не является слабо замкнутым множеством, и поэтому имеется возможность использовать виртуальные матричные распределения для классификации некоторых расходящихся последовательностей метрических пространств.

Теперь можно сформулировать гипотезу об изоморфзиме фильтраций.

**Гипотеза 1.** *Рассмотрим две финитно изоморфные эргодические фильтрации $\tau, \tau'$ и предположим, что*

*1) обе они нестандартны;*

*2) у обеих существуют виртуальные матричные распределения последовательностей (полу)метрических троек.*

*Если эти матричные распределения сопадают, то фильтрации изоморфны.*

Справедливость гипотезы вместе с критерием стандартности была бы основанием считать осуществлённой классификацию нестандартных фильтраций в указанных терминах и сделанных предположениях о выполнении условия 2) для произвольной нестандартной фильтрации. Ответ состоял бы в том, что виртуальное матричное распределение вместе с финитными инвариантами исчерпывали все инварианты эргодических локально конечных фильтраций. Однако, условие 2), точнее существование виртуальные матричного распределения вряд ли всегда имеет место.

Поэтому основной вопрос состоит в нахождении полной системы инвариантов для расходящейся последовательности метрик на пространстве мерой. Для диадического случая, достаточно рассмотреть инварианты последовательностей метрик, возникающих из итераций метрик на графе неупорядоченных пар, о котором речь идет в следующем параграфе.

Но в примере марковской цепи с нестандартной фильтрацией из предыдущего параграфа, виртуальное матричное распределение существует. А именно, последовательность матричных распределений троек на двухточечном пространстве: $\rho_n(a,b) = 0, \quad n \equiv 0(2); \quad \rho_n(a,b) = 1, \quad n \equiv 1(2)$ сходится по Чезаро к виртуальному матричному распределению этой последовательности, которое есть мера на множестве бесконечных симметричных $0-1$-матрицах с нулями на диагонали и независимыми координатами $r_{i,j}, i > j$, принимающими с равной вероятностью значения 0 и 1.

# 7 ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕДЕЛЫ СИМПЛЕКСОВ, ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ И АБСОЛЮТ ГРАФА

Этот парагаф посвящен теории фильтраций в борелевских пространствах— в этом случае мера априори отсутствует, но задано оснащение, т.е. условные меры. Основной вопрос состоит в том, как описать все борелевские вероятностные меры, согласованные с оснащением.

Мы описываем четвертый язык теории локально конечных фильтраций,— язык проективных пределов конечномерных симплексов. Можно сказать, что категория проективных пределов конечномерных симплексов эквивалентна категории локально конечных фильтраций в борелевских пространствах, или категории мультиграфов с оснащениями, или марковсемх компактов с копереходными вероятностями. Хотя это в высшей степени естественная связь, насколько известно автору до последнего времени в литературе связь с выпуклой геометрией проективных предлов симплексов в этом контексте почти не обсуждалась. Мы используем некоторые определения и факты из недавней работы автора [20] см. также (см. [72, 51, 39, 52] ). Анализ теории, локально конечных фильтраций в борелевских пространствах, равно как теории центральных и инвариантых мер на пространстве путей мультиграфа, или теории марковских мер с заданными копереходами, показывает, что адекватный и геометричный язык проективных пределов конечомерных симплексов, является наболее подходящим для всех перечисленных теорий. Ниже соответствие будет описано, но мы отметим только некоторые из вопросов, возникающих здесь.

## 7.1 Проективный предел симлексов, экстремальные точки.

Сначала мы покажем, как по паре $(\Gamma, \Lambda)$, т.е. по оснащенному градуированному графу, канонически определить проективный предел конечномерных симплексов. Затем, увидим, что есть и обратный переход от проективных пределов к оснащенным графам.

Обозначим через $\Sigma_n$ конечномерный симплекс (формальных выпуклых комбинаций вершин $n$-го этажа $v \in \Gamma_n$). Симплекс естественно понимать, как множество всех вероятностных мер на множестве вершин этажа $\Gamma_n$. Зададим аффинные проекции $\pi_{n,n-1} : \Sigma_n \to \Sigma_{n-1}$, которые достаточно определить для каждой вершине $v \in \Gamma_n$. Очевидно, что эти проекции можно рассматривать, как систему копереходных мер $\Lambda$, а образы вершин $v$ есть точки предыдущего симплекса, то есть вероятностные векторы:

$$\pi_{n,n-1}(\delta_v) = \sum_{u:u \prec v} \lambda_v^u \delta_u;$$

отображение по линейности продолжается на весь симплекс $\Gamma_n$. Вершине $\emptyset$ соответствует нульмерный симплекс, состоящий из одной точки. Вырождения допускаются (т.е. вершины могут склеиваться при проекции). Определим проекции симплексов с произвольными номерами $\pi_{n,m} : \Sigma_n \to \Sigma_m; m < n; \pi_{n,m} = \prod_{i=m}^{n+1} \pi_{i,i-1}, m > n, m, n \in \mathbb{N}$. Система данных $\{\Sigma_n, \pi_{n,m}\}$ позволяет с одной стороны определить проективный предел, а с другой восстановить граф: вершины симплекса $\Sigma_n$ есть вершины графа $\Gamma_n$, а ребра, а затем и пути в графе) определяются по ненулевым координатам векторов $\pi_{n,n-1}, n \in N$.

Обозначим $\mathcal{M} = \prod_{n=0}^{\infty} \Sigma_n$ —- прямое произведение симплексов $\Sigma_n, n \in \mathbb{N}$, снабженное продакт-топологией.

**Определение 11.** Пространством проективного предела семейства $\{\Sigma_n\}_n$ симплексов относительно системы проекций $\{\pi_{n,m}\}$ называется подмножество прямого произведения $\mathcal{M}$:

$$\lim_{n\to\infty}(\Sigma_n, \pi_{n,m}) \equiv \{\{x_n\}_n; \pi_{n,n-1}(x_n) = x_{n-1}; n = 1 \dots\} \equiv \Sigma_\infty, \Lambda) \subset \prod_{n=0}^{\infty} \Sigma_n = \mathcal{M}$$

**Предложение 8.** *Пространство проективного предела $\Sigma_\infty$ всегда есть непустое, выпуклое, замкнутое, и потому компактное подмножество в прямом произведении $\mathcal{M}$, являющееся симплексом Шоке, возможно бесконечномерным.*

Аффинная структура прямого произведения $\mathcal{M}$ определяет аффинную структуру предельного пространства; непустота и замкнутость очевидны. Остается проверить лишь, что есть единственность разложения произвольной точки предела по его границе Шоке. см. далее.

Мы отличаем пространство проективного предела и "структуру проективного предела", имея в виду что для нас существенно не только само предельное пространство т.е. некоторый бесконечномерный симплекс, но и структура допредельных симплексов и их проекции. Иначе говоря, мы рассматриваем категорию проективных пределов симплексов, где объект категории не предельный симплекс, а сама последовательность конечномерных симплексов.

Покажем, что по системе данных проективного предела симплексов можно восстановить граф, пространство путей и систему копереходных вероятностей; и при этом отвечающий этой системе проективный предел, построенный по только что изложенному правилу, совпадает с исходным. Этим будет устанавлена тавтологическая связь между двумя языками: с одной стороны -язык пар диаграмма Браттели, система копереходов а с другой — язык проективных пределов конечномерных симплексов.

Действительно, пусть задан проективны предел конечномерных симплексов $\{\Sigma_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ и согласованная аффинных система проекций

$$\{\pi_{n,m}\}\pi_{n,m}\Sigma_n \to \Sigma_m, n \geq m, n, m \in \mathbb{N}$$

. Примем вершины симплекса $\Sigma_n$ за вершины $n$-го этажа графа $\Gamma$, при этом вершина $u$ этажа $n$ предшествует вершине этажа $n+1$, если проекция $\pi_{n+1,n}$ переводит вершину $v$ в точку симплекса $\Sigma_n$, у которой положительна барицентрическая координата относительно вершины $u$. А в качестве системы переходных вероятностей возьмем систему векторов $\{\lambda_v^u\}$, связанных с проекциями $\pi_{n+1,n}$, как указано выше.

В дальнейшем мы, имея проективный предел симплексов, будем использовать канонически связанный с ним граф (вершин всех симплексов), пространство путей в нем и т.д. и точно также, будем говорить о проекциях симплексов, канонически связанных с оснащенным графом.

Расмотрим произвольный проективный предел конечномерных симплексов.

$$\Sigma_1 \leftarrow \Sigma_2 \leftarrow \cdots \leftarrow \Sigma_n \leftarrow \Sigma_{n+1} \leftarrow \ldots \Sigma_\infty \equiv \Sigma(\Gamma, \Lambda).$$

Прежде всего определим предельные проекции $\pi_{\infty,m} : \Sigma_\infty \to \Sigma_m$, как пределы $\lim_n \pi_{n,m}$ при каждом $m$: очевидно, что образы $\pi_{n,m}\Sigma_n$, как подмножества в симплексах $\Sigma_m$, монотонно убывают при растущем $n$ и их пересечения есть некоторые множества, обозначаемые $\Omega_m = \bigcap_{n:n>m} \pi_{n,m}\Sigma_n$; это выпуклые замкнутые подмножества конечномерных симплексов $\Sigma_m, m = 1\ldots$, и предельнst проекций эпиморфно отображают предельный компакт $\Sigma_\infty$ на эти множества:

$$\pi_{\infty,m} : \Sigma_\infty \to \Omega_m$$

.

Более экономно было бы рассматривать и сам проективный предел

$$\Omega_1 \leftarrow \Omega_2 \leftarrow \ldots \Omega_n \leftarrow \ldots \Omega_\infty = \Sigma(\Gamma, \Lambda)$$

с эпиморфными проекциями $\pi_{n,m}$, ограниченными на подмножества $\Omega_n$ и — по определению — с тем же предельным пространством. Однако явное нахождение множеств $\Omega_n$ — интересная и непростая задача, равносильная основной задаче нахождения всех инвариантных мер.[16]

Любая точка предельного компакта, т.е последовательность:

$$\{x_m\} : x_m \in \Sigma_m, \pi_{m,m-1}x_m = x_{m-1}$$

определяет для всякого $m$ последовательность мер $\{\nu_n^m\}_n$ на симплексе $\Sigma_m$, а именно $\nu_n^m = \pi_{n,m}(\mu_n)$ где мера $\mu_n$ есть (единственное) разложение точки $x_n$ по крайним токам в симплексе $\Sigma_n$. Разумеется барицентры каждой из мер $\nu_n^m$ в $\Sigma_m$ есть $x_m$, а сама эта последовательность мер в понятном смысле укрупняется и слабо сходится в $\Sigma_m$ при $n \to \infty$ к некоторой мере $\nu_{x_m}$, сосредоточенной на $\Omega_m \subset \Sigma_m$. Очевидно, так

[16]В частности, явный вид компактов $\Omega_n$ найден в очень немногих случаях, даже среди тех, где центральные меры известны. Уже для графа Паскаля получаются любопытные и довольно сложные выпуклые компакты, а, например, для графа Юнга их вид с той же степенью четкости, как для для графа Паскаля, автору неизвестен.

получаются все точки преелбноо компакта, т.е. все меры с данными копереходными вероятностями.

Точка произвольного выпуклого компакта называется *экстремальной*, если не существует нетривиальной выпуклой комбинции, представляющей эту точку, совокупность экстремальных точек называется границей Шоке компакта и обозначается $\mathrm{ex}K$. Точка называется *почти экстремальной* если она лежит в замыкании границы Шоке — $\bar{ex}(K)$. Напомним, что аффинный компакт в котором всякая точка имеет единственное разложение по экстремальным точкам (по границе Шоке), называют симплексом Шоке.

Приведем общий критерий экстремальности, почти экстремальности точек проективного предела симплексов.

**Предложение 9.** *1.Точка $\{x_n\}$ -проективного предела симплексов является экстремальной тогда и только тогда, когда для любого $m$ слабый предел мер $\nu_{x_m}$ в симплексе $\Sigma_m$ есть дельта-мера в точке $x_m$: $\lim_n \nu_n^m \equiv \nu_{x_m} = \delta_{x_m}$.*

*2. Точка $\{x_n\}$ почти экстремальна, если для любого $m$ и любой окрестности $V(x_m)$ точки $x_m \in \Sigma_m$ существует экстремальная точка $\{y_n\}$ предельного компакта, для которой $y_m \in V(x_m)$.*

*3. Для каждой точки $\{x_n\}$ предельного компакта симплексов существует единственное разложение по экстремальным точкам (разложение Шоке), определяемое с помощью мер $\nu_{x_m}$.*

**Следствие 3.** *Предельный компакт проективного предела конечномерных симплексов есть (вообще говоря бесконечномерный) симплекс Шоке.*

В дитературе (см.[39]) обуждался вопрос, почему предел симплексов есть симплекс; даже в конечномерном случае это не вполне очевидно, его ставил А.Н.Колмогоров. Правильнее всего сослаться на формально гораздо более общий, но по сути эквивалентный факт, (см. напр.[?]) — о единственности разложения мер с заданным коциклом на эргодические компоненты. Т.е. использовать вероятностную трактовку симплексов.

Легко доказать, что верно и обратное: всякий сепарабельный симплекс Шоке может быть представлен, как проективный предел конечномерных симплексов но, разумеется, такое представление далеко не единственно.

Несколько в сторону, но полезно отметить, что симплекс инвариантных мер относительно действия некоторой неаменабельной группы на компакте -сепарабелен, хотя его возможная аппроксимация не порождена конечными аппроксимациями действия; поэтому возникает нетраекторная конечномерная аппроксимация действия, которая видимо, никем не рассмативалась.

Замечание. Возможно, первые два пункта утверждения распространяется на проективные пределы произвольных выпуклых компактов.

Напомним, что среди сепарабельных симплексов Шоке можно выделить *симплексы Полсена*, для которых множество экстремальных точек всюду плотно, такой симплекс единственнен с точностью до аффинного изоморфизма, и универсален классе всех аффинных сепарабельных симплексов. (См. [33] и литературу)

**Предложение 10.** *Рассмотрим проективный предел симплексов со следующим свойством: для любого $m$ объединение проекций*

$$\bigcup_{n;t}\{\pi_{n,m}(t); t \in ex(\Sigma_n), n = m, m+1\dots\}$$

*по всем вершинам симплексов $\Sigma_n$ и всем $n > m$ —всюду плотно в симплексе $\Sigma_m$. Тогда предельный симплекс есть симплекс Полсена.*

Ясно, такое построение можно провести по индукции и из критерия с очевидностью следует, что в этом случае экстремальные точки всюду плотны. При таком произволе в его построении единственность кажется удивительной. Тем не менее, проверка полсеновости данного проективного предела не столь проста и сходна с задачами о фильтрациях.

Симплексы с замкнутой границей Шоке называются *симплексами Бауэра.* Имеется много промежуточных типов симплексов между симплексами Бауэра и Полсена. В литературе по выпуклой геометрии и по теории инвариантых мер эта тема многократно обсуждалась. Однако, рассмотрения этих и аналогичных свойств бесконечномерных симплексов применительно к проективным пределам и к теории градуированных графов и соответствующий алгебр, повидимому, в литературе не было. Каждое из этих свойств имеет свою интересную интерпретацию в рамках этих теорий. Автор считает полезным в приложениях следующий класс симплексов (или даже выпуклых компактов): *почти бауэровским симплексом назывется симплекс, у которого граница Шоке открыта в своём замыкании.*

Параллелизм в рассмотрениях пар $(\Gamma, \Lambda)$ -градуированный граф и его оснащение, с одной стороны и проективных пределов симплексов,— с другой, означает, что последний имеет свою вероятностную интерпретацию. Полезно описать эту интерпретацию, непосредственно. Напомним, что путь в контексте проективных пределов есть последовательность $\{t_n\}_n$ вершин симплексов $t_n \in \mathrm{ex}\Sigma_n$, согласованная с проекциями следующим способом при всех $n \in \mathbb{N}: \quad \pi_{n,n-1}t_n$ имеет ненулевую барицентрическую координату относительно вершины $t_{n-1}$. Прежде всего всякая точка предельного симплекса $x_\infty \in \Sigma_\infty$ есть согласованная относительно проекций последовательность точек симплексов $\{x_n\} : \pi_{n,n-1}x_n = x_{n-1}, n \in \mathbb{N}$. Как элемент симплекса $x_n$ определяет меру на вершинах симплекса, и поскольку все они соглсованы относительно проекций, то $x_\infty$ определяет некоторую меру на пространстве путей $\mu_x$ с фиксированными копереходными вероятностями. Наоборот, всякая такая мера определяет последовательность проекций. Таким образом, предельный симплекс есть симплекс всех мер на пространстве путей с заданными копереходами.

Экстремальность точки $\mu \in \mathrm{ex}(\Sigma_\infty)$ означает эргодичность меры $\mu$, т.е. тривиальность хвостовой сигма-алгебры относительно меры $\mu$ на пространстве путей.

Заключим этот пункт следующим выводом:

*теория оснащенных градуированных мультиграфов и теория марковских компактов с системами копереходов идентичны теории симплексов Шоке, рассматриваемых как проективный предел конечномерных симплексов. Все три теории могут рассматриваться как теории локально конечных фильтраций в фиксированном базисном представлении*

## 7.2 Фундаментальная задача: описание абсолюта

Основная проблема. Предполжим задан проективный предел конечномерных симплексов

-найти границу Шоке предельного симплекса.

Нам удобно называть эту границу в контексте задач о границах, —- абсолютом проективного предела, соответственно, абсолютом марковской цепи, градуированного графа и т.д.. Иногда он состоит из одной точки, в этом случае абсолют тривиален, но это бывает крайне редко.

В силу сказанного этот вопрос равносилен вопросу

-для данного марковского компакта с заданной системой копереходов описать все эргодические меры, согласованные с ними.

или

Для данного градуированного графа с оснащением описать все эргодические меры на пространстве его путей, согласованные с оснащением

и, наконец

Для данной фильтрации на борелевском пространстве описать эргодические борелевские меры, согласованные с коциклом фильтрации (см. параграф 3).

На самом деле все эти задачи, как мы видели, тавтологично эквивалентны, но все же относятся к разным областям математики. Формулировка о марковских цепях фактически принадлежит Дынкину (см. [56])[17]

Для графов, снабженных каноническим оснащением, это задача о центральных мерах, или следах $AF$-алгебр, или о характерах локально конечных групп, кроме того, это еще и задача об инвариантных мерах для действий счетных групп, если выбрана их адическая аппроксимация. Это — колоссальный круг задач, охватывающий значительную часть асимптотичекой теории представлений, комбинаторики, алгебры и, конечно, теории динамических систем.

В случае с фильтрациями, фиксация какой-либо одной эргодической меры, позволяет рассматривать фильтрацию уже, как фильтрацию пространства с мерой (а не просто борелевского пространства) со всеми вытекающими и рассмотренными выше проблемами. Но абсолют как бы объединяет разные меры относительно которых можно рассматривать фильтрации, отношения эквивалентности, адические действия и т.д. Поэтому вопрос не только в описании абсолюта. Вот перечень естественных важных дополнительных вопросов Мы приведем их в терминах градуированных графов

Постановка вопроса может быть такова: - на каких оснащенных графах всякая мера из абсолюта задает стандартную хвостовую фильтрацию на пространстве путей с мерой? Такие графы естественно назвать стандартными.

- на каких графах существуют мера из абсолюта со стандартной хвостовой фильтрацией;

- на каких графах нет нетривиальных мер в абсолюте, задающих стандартную хвостовую фильтрацию?

и т.д.

Такую же серию вопросов можно задать в связи с энтропией и другими инвариантам фильтраций. С точки зрения метрической теории фильтраций и теории марковских цепей эти вопросы выглядят особенно нетрадиционными, покольку речь идет о том, насколько непохожими являются меры с одними и теми же условными (копереходными) мерами.

## 7.3 Несколько примеров. Связь с теорией локально конечных фильтраций.

Мы выберем несколько примеров задач о вычислении абсолюта.

1. Абсолют групп. Рассмотрим счетную конечн порожденную группу $G$ выберем симметричеую систему образующих $S = S^{-1}$. it Динамическим графом Кэли назовем граф, вершины $n$-го этажа которого, есть все элементы группы, представлимые в виде слов длины $n$, а дуги отвечают умножению справа на образующие. Оснащение каноническое, т.е. множесто всех представлений данного элемента в виде слов снажено равномерной мерой. Вопрос об абсолюте, т.е. о множестве эргодических центральных мер есть существенное расширение вопроса о границе Пуассона-Фюрстенберга (ПФ)

[17] В [56] использовлись названия— граница выход, граница-вход и т.д. Заметим, что граница Мартина также легко определяется в нашем контексте -см. [20]

случайного блуждания. В то время граница (ПФ) одноточечна для многих групп, абсолют очень редко бывает одноточечным; он имеет структуру обобщенного расслоения над границей (ПФ). Для свободной группы абсолют вычислен в [34]. При этом обнаружен естественный фазовый переход от эргодичности меры к неэргодичности. В настоящее время, исследуется абсолют нильпотентных групп. Весьма полезным здесь оказывается обобщение эргодического метода (см.[23]), сводящего нахождение центральных мер к установлению свойств их дополнительной инвариантности. В этом смысле поиски абсолюта можно рассматривать как поиском далеких обобщений теоремы Де Финетти о мерах, инвариантных относительно групп подстановок. Во всех найденных групповых примерах, фильтрации оказываются стандартными, т.е динамический граф может быть назван стандартным.

2. Наоборот, графы, возникающие в теории аппоксимации динамических систем (т.е. графы доставляющие адические реализации автомофизмов с инвариантной мерой, часто бывают нестандартными.

**Гипотеза 2.** *Граф, доставляющий адическую реализацию автоморфизма с положительной энтропией не является стандартным. Соответствующий предельный симплекс -полсеновский.*

Граф упорядоченных пар (см. параграф 4) имеет много центральных мер, относительно которых хвостовая фильтрация нестандартна. (см. [27]).

Другой, более интересный пример такого типа —граф "башня мер"

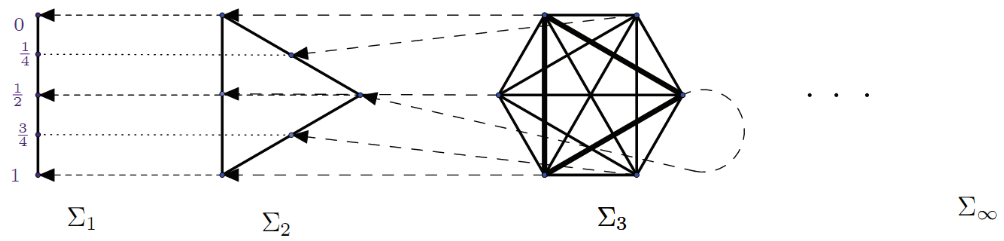



Figure 11: Начало башни мер

Это граф неупорядоченных пар, который возник в 1969 году, как башня двоичных мер. Проще всего определить его, как проективный предел симплексов, в котором каждый множество вершин следующего симплекса множество всех вершин и середин всех ребер предыдущего симплекса, начальный симплекс - отрезок $[0, 1]$. На предельном симплексе башни мер хорошо интерпретируются инварианты множеств относительно нестандартных диадических фильтраций. Более того, поводом определения башни мер послужила интерпретация критерия стандартности (точнее интерпретация значений универсального проектора множества) для нестандартных ситуаций. Конструкция башни мер прекликается с конструкциями универсальных пространств в теоретико множественной и алгебраической топологии.

3. Огромный запас градуированных графов и, следовательно абсолютов, фильтраций и их инвариантов дает теория представлений $AF$-алгебр и локально конечных

групп. Каждый из этих объектов порождает свою диаграмму Браттели, и каноническое оснащение задает проективный предел симплексов и предельный симплекс центральных мер и т.д. Эти связи зучались, но без учета роли фильтраций как то борелевских или тем более хвостовых фильтраций относительно центральных мер. упомянем лишь, что вычисление абсолюта, т.е. вычисление следов и характеров выглядит обособленным в каждом конкретном случае; до сих пор для этого нет достаточно общих методов. Такая попытка была сделана в [19, 21, 23] и в настоящей работе с целью хотя бы отделить случаи, когда описание возможно от тех, когда обозримого решения нет. Именно с этим связано привлечение понятия стандартности фильтрации к этим вопросам. В этих работах (см.[23]) введена, так называемая, внутренняя метрика на путях графа, назначение которой разделить оисанные случаи. Мы отклажываем дальнейший разбор этих связей из-за недостатка места.

# 8 ИСТОРИЧЕСКИЙ КОММЕНТАРИЙ

Полезно добавить в заключение обзора несколько замечаний об истории вопроса и некоторых работах, примерах и контрпримерх, полезных при изучении фильтраций.

1. В 1958 году была опубликована знаменитая работа А.Н.Колмогорова [69] с определением энтропии, как инварианта метрической теории динамических систем. В ней автор определял энтропия в духе шенноновской концепции передачи информациии и опирался на часто рассматривавшуюся им ранее фильтрацию (в прежних терминах — "последовательность сигма-алгебр прошлого"), при этом отмечая существенность используемой им теории разбиений Рохлина. Как можно понять из воспоминаний разых лиц, в предшествующем курсе лекций, читавшемся А.Н.в 1957 году и к сожалению, не сохранившимся, неизоморфзим схем Бернулли с разной энтропией доказывался с помощью комбинаторного и менее технического способа определения энтропии, которое, благодаря последующему определению энтропии Синаем стало в дальнейшем основным. Тем более, что это определение сразу было легко обобщено на произвольные группы. [18] Определение Колмогорова в первой заметке было гораздо ближе к традиционной теории стационарых процессов. Но небольшая ошибка в этой работе заставила А.Н. написать вторую работу (с. [70]). Вот выдержка и сноска из этой второй работы об энтропии, в которой была исправлена ошибка первой работы [19],

"В.А.Рохлин указал мне, что доказательство теоремы 2 моей заметки (1) молчаливо использует такое допущение. Из

$$\mathfrak{A}_1 \supseteq \mathfrak{A}_2 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{A}_n \supseteq \dots, \quad \bigcap_n \mathfrak{A}_n = \mathfrak{N}$$

вытекает

$$\bigcap_n (\mathfrak{B} \bigvee \mathfrak{A}_n) = \mathfrak{B}.$$

"С любезного согласия В.А.Рохлина привожу здесь этот пример. Пусть $\mathfrak{G}^m$— аддитивная группа чисел $\alpha m^{-\beta}$ ($m$ —натуральное, $\alpha$ — целое, $\beta$—неотрицательное целое

[18] Здесь необходимо отметить дипломную работу Д.Арова, упоминаемую А.Н. в его второй заметке [70] , и лишь недавно опубликованную (см.[2]), в которой был определен комбинаторно инвариант автоморфзима, фактически близкий к колмогоровской-синайской энтропии; полный анализ сравнения энтропий Арова и обычной сделан Б.М.Гуревичем [43]

[19] Почему-то издатели Собрания Сочинений А.Н. решили не печатать эту работу полностью, а объединить небольшую её часть с первой работой

число). Обозначим через $U$ автоморфизм группы $\mathfrak{G}^6$, состоящий в делении на 6, через $M$ -группу характеров группы $\mathfrak{G}^6$ и через $T$ — автоморфизм группы $M$, сопряженный с $U$. Подгруппы $\mathfrak{G}^2, \mathfrak{G}^3$ группы $\mathfrak{G}^6$ удовлетворяют очевидным соотношениям:

$$\mathfrak{G}^2 \subset U\mathfrak{G}^2, \quad \bigvee_n U^n \mathfrak{G}^2 = \mathfrak{G}^6, \quad \bigcap_n U^n \mathfrak{G}^2 = 0,$$

$$\mathfrak{G}^3 \subset U\mathfrak{G}^3, \quad \bigvee_n U^n \mathfrak{G}^3 = \mathfrak{G}^6, \quad \bigcap_n U^n \mathfrak{G}^3 = 0.$$

Следовательно, определяемые ими подалгебры $\mathfrak{S}^2, \mathfrak{S}^3$ алгебры $\mathfrak{S}$ измеримых множеств пространства $M$ удовлетворяет условиям казирегулярности. Между тем $\mathfrak{G}^2$ имеет в $U\mathfrak{G}^2$ индекс 3, а $\mathfrak{S}^3$ имеет в $U\mathfrak{S}^3$ индекс 2, так что

$$MH(T\mathfrak{S}^2|\mathfrak{S}^2) = lg3, \qquad MH(T\mathfrak{S}^3|\mathfrak{S}^3) = lg2.$$

Здесь как раз

$$\bigcap_n (\mathfrak{S}^2 \bigvee T^n \mathfrak{S}^3) \neq \mathfrak{S}^2, \qquad \bigcap_n (\mathfrak{S}^3 \bigvee T^n \mathfrak{S}^2) \neq \mathfrak{S}^3.$$

Этот пример показывает насколько сложнее теория убывающих последовательностей сигма-алгебр (фильтрации) по сравннию с теорией возрастающих последовательностей: отсутствует непрерывность перехода к супремуму и др. Я упоминаю об этом еще и потому, что глубокая теория инвариантных разбиений (в наших терминах, теория стационарных фильтраций) стала после этого предметом внимания Рохлина, Синая и многих последующих авторов: [84]. Но как почеркивалось ранее, область применений теории фильтраций много шире стационарного случая, который представлял интерес для теории случайных процессов и эргодической теории.

2. Вопрос о том, существует ли эргодическая фильтрация финитно изоморфная, но не изоморфная бернуллиевской, оказывается возникал еще в 50-х гг. В книге Н.Винера "Нелинейные задачи в теории случайных процессов"([40], в несколько иных терминах этот вопрос обсуждался в главах "Кодирование" и "Декодирование". Фактически во второй их них он приводится отрицательный ответ на этот вопрос, снабженный длинными вычислениями. Точнее, утверждается, что если некоторая стационарная гауссовская случайная последовательность $\alpha_n, n < 0$ обладает тем свойством что при каждом $n$ для сигма-алгебры, $\mathfrak{A}_n$, порожденной величинами с номерами $< n$ существует $|n|$ независимых между собой и независимых от $\mathfrak{A}_n$ гауссовсих случайных величин, порождающих вместе с $\mathfrak{A}_n$ сигма-алгебру всех измеримых множеств, то исходная стационарная последовательность определяет (изоморфна) бернуллиевскому одностороннему сдвигу. Это неверно, так как существуют нестандартные (тем самым неизоморные бернуллиевской) стационарные фильтрации.

Должен сказать, что в моей первой работе а эту тему о лакунарном изоморфзиме ([4]) я также утверждал (для диадических фильтраций), что нестандартных фильтраций не существует (не приводя никаких рассуждений или вычислений в поддержку этого), но вкоре после этого ([5]) исправил эту ошибку и дал первую серию примеров нестандартных диадических последовательностей вместе с критерием стандартности. Тем самым, классификация фильтраций стала содержательной задачей.

3. Говоря о предистории теории фильтраций, следует начать с того, что вопрос об устройстве стационарных односторонних фильтраций поднимался в 60-х гг. В.А.Рохлиным, как средство изучения эндоморфизмов (необратимых преобразований,

сохраняющих меру) — в этой области ему принадлежит много важных реультатов (см. [85]). Он привлек к этому Б.Винокурова и его учеников из Ташкента (Б.Рубштейн, Н.Ганиходжаев и др.), которые выполнили ряд интересных работ на эту тему. [41, 42, 87, 88] С другой стороны прямая необходимость изучать однородные (например, диадические) фильтрации, появилась позже в связи с задачей траекторного изоморфизма автомофизмов, также поставленной Рохлиным вне связи с фильтрциями. Ею успешно занималась Р.Белинская. Положительный ответ на вопрос о траекторном изоморфзиме всех эргодических преобразований с инвариантной мерой на самом деле был к тому времени решен Г.Даем [45], о чем стало известно участникам семинара лишь позже, когда я доказал теорему о лакунарном изоморфизме, из которой теорема Дая непосредственно следовала. Техника доказательства в [45] была основана на теории $W^*$-алгебр,что контрастировало с аппроксимационным, по существу комбинаторным доказательством в [4, 3]. доказательством. Много позже такой же результат был доказан для всех действий аменабельных групп с инвариантной мерой [80, 71]. Траекторная теория в связи с теорией факторов интересовала меня и до этого и некоторые результаты уже для квазиинвариантых мер был получены одновременно с результатами В.Кригера и А.Конна. Я называл теоретико-множественные пересечения фильтраций локально-измеримыми разбиениями, В.А.Рохлин предложил название —"ручные", общепринятое название "гиперконечные разбиения.

4. Близкие вопросы ставились и в самой теории вероятности с давних пор, и многократно. Например вопрос, какие стационарные процессы могут быть получены кодированием схем Бернуллли изучали M.Rosenblatt, K.Ito [83] и многие другие. Наиболее четкая постановка вопроса сложилась в рамках теории информации и эргодической теории: Какие автоморфизмы или эндоморфизмы являются факторами бернуллиевских? Вопрос об автоморфизмах решен в замечательной работе Д.Орнштейна [78], доказавшего необходимость и достаточность условия неудачно названного VWB (Very Weak Bernoulli); правильнее было бы назвать его "условием Орнштейна". Вопрос об эндоморфизмах до конца еще не решен. Условие Орнштейна по своему характеру похоже на условие стандарности, которое появилось по другому поводу приблизительно в то же время ([5]). Сходство их в том, что оба являются требованиями к поведению набора условных мер конечных отрезков процесса при фиксации прошлого начиная с некоторого момента, а именно их сближения, когда этот момент уходит на минус бесконечность. Очевидно, что любое понимание того, что такое ослабление независимости, может быть выражено именно в таких терминах, но все-таки этот способ отличается от разнообразных условий слабой зависимости, существовавших до этого, в традиционных схемах теории случайных процессов (условия Колмогорова, Розенблатта, Ибрагимова и др), и формулируемых обычно в терминах убывания коэффициентов корреляций, плотностей мер и т.д. Здесь же на первый план выступают условные меры, и метрика, в которой должны сближаться между собой. В условии Орнштейна это метрика Канторовича (переоткрытая им специально для этого случая) отностельно метрики Хэмминга на самих траекториях. В случае стандартности это модифицированная метрика Канторовича, учитывающая (древесную) структуру условных мер. Различие между ними существенно, но и задачи и классы процессов различны: условие Орнштейна относится к стационарным процессам на $\mathbb{Z}$ (хотя условие формулируется для его ограничения на $\mathbb{Z}_+$. и трактует свойства двустороннего процесса, а стандартность характеризует свойства односторонней фильтрации. [20].

[20] В дальнейшем Д.Орнштейн и Б.Вейсс, Д.Рудольф и другие перенесли эту теорию с группы $\mathbb{Z}$ на действия произвольных амнабельных групп с инвариантной мерой, но это обобщение не имеет параллели с теорией фильтраций, в том виде как она используется для группы

Стоит заметить, что вместо метрики Хэмминга (на траекториях) рассматривались и другие метрики, а метрику Канторовича на мерах, построенную по метрике на траекориях, также можно заменить на другие, — здесь есть большой простор для экспериментирования и выяснния асимптотических свойств процессов и фильтраций в зависимости от метрик.

Наиболее важным представляется идея измерения степени "небернуллиевости" и "нестандартности", с помощью того, что названо выше "вторичной энтропией" и высшими законами $0-1$.

# 9 БЛАГОДАРНОСТИ

Автор должен вспомнить и поблагодарить тех, с кем обсуждал тему данной статьи много лет назад. Это в первую очередь В.А.Рохлин — один из моих учителей, которому принадлежит ряд стимулрующих вопросов на близкие темы, и который очень внимательно и одобрительно отнесся к моим идеям на эту тему (см. [84, 85]), А.Н.Колмогоров, интересовавшийся темой фильтрациий и представивший в "Доклады АН" несколько моих заметок на эту тему, Р.Белинская, которая задала мне один из первых конкретных вопросов о диадических фильтрациях, С.Юзвинский проявивший активный интерес к теме и написавший важную работу по применению шкалы автоморфзима ([99]).

Полезными были в те годы были непростые дискуссии с Я.Синаем, Б.Гуревичем, В.Алексеевым, А.Катком, А.Степиным, В.Винокуровым, Б.Рубштейном, Л.Абрамовым, М.Гординым, И.Ибрагимовым др, а также с А.Кирилловым, давшим верное сравнение этой тематики с некоторыми работами прошлого.

В дальнейшем после длительного перерыва интерес к теме был возобновлен зарубежом; вопрос М.Йора о фильтрациях, связанных с броуновским двжением получил частичное решение в работе [46] в которой был переоткрыт мой критерий стандартности. Особенная активность в теории фильтраций наблюдалась в конце 90-х во время семестра в Иерусалимском институте Advanced Study: Х.Фюрстенберг, Б.Вейсс, Х. Дж.Фельдман, Д.Рудольф, Д.Хофман, Д.Хелекен, Ж.-П.Тувено выполнили ряд работ или участвовали в дискуссиях на эти темы. Уже в 2000-х гг. М Эмери, сделавший доклад на семинаре Бурбаки [47] об этой и близкой тематике, его ученики, а также В.Шахермайер, и др. также занимались теорией фильтраций.

В самое последнее время и особенно после объединения этой тематики с теорией градуированных графов, большой интерес проявили и получили много, новых упомянутых здесь, результатов, — Ш.Лоран [73, 74, 75], Де ла Рю [59] и др.. Наконец, в настоящее время эта тема обсуждается мною с моими учениками А.Горбульским, Ф.Петровым, П.Затицким и другими, что, надеюсь, привЕдет к новым фактам и новому пониманию этой интересной и важной тематики. Автор благодарит всех упомянутых лиц и тех, кого он, возможно, забыл упомянуть. Особая благодарность А.А.Лодкину за помощь в оформлении библиографии и А.М.Минабутдинову за рисунки в тексте.

$\mathbb{Z}$ (наличие понятия "прошлого"). Однако, фильтрации, которые возникают как средство траекторной аппроксимации (см. начало статьи) несомненно связаны и с условием Орнштейна для общих групп.

# References


[1] S. Adams, J. E. Steif. An application of the very weak Bernoulli condition for amenable groups // Pacific J. Math. 1993. V. 159.  1. P. 1-17.

[2] Д. З. Аров. К истории возникновения понятия $\varepsilon$-энтропии автоморфизма пространства Лебега и понятия $(\varepsilon, T)$-энтропии динамической системы с непрерывным временем // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 436. С. 76-100.

[3] Р. М. Белинская, Разбиения пространства Лебега на траектории, определяемые эргодическими автоморфизмами // Функц. анализ и его прил. 1968. Т. 2.  3. С. 4-16.

[4] А. М. Вершик. Теорема о лакунарном изоморфизме монотонных последовательностей разбиений // Функц. анализ и его прил. 1968. Т. 2.  3. С. 17-21.

[5] А. М. Вершик. Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения // ДАН СССР. 1970. Т. 193.  4. С. 748-751.

[6] А. М. Вершик. Неизмеримые разбиения, траекторная теория, алгебры операторов // ДАН СССР. 1971. Т. 199. С. 1004-1007.

[7] P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov. Correction of metrics.// Journal of Mathematical Sciences, 181, 6, pp. 867-870 (2012).

[8] А. М. Вершик. Континуум попарно неизоморфных диадических последовательностей // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5  3. С. 16-18.

[9] А. М. Вершик. Устройство ручных разбиений // УМН. 1972. Т. 27.  3. С. 195-196.

[10] А. М. Вершик. Четыре определения шкалы автоморфизма // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7.  3. С. 1-17.

[11] А. М. Вершик. Аппроксимация в теории меры // Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Ленинград, 1973.

[12] А. М. Вершик. О работах Д. Орнштейна, условиях слабой зависимости и о классах стационарных мер // Теор. вероятн. и ее прим. 1976. Т. 21.  3. С. 673-675.

[13] А. М. Вершик. Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6.  4. С. 1-68.

[14] А. М. Вершик. Классификация измеримых функций нескольких аргументов и инвариантно распределенные случайные матрицы // Функц. анализ и его прил. 2002. Т. 36.  2. С. 12-27.

[15] M.Gromov. Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Progress in Mathematics, 152. Birkhauser Boston, Inc., Boston, MA, 1999. xx+585 pp.

[16] A. M. Vershik, P. B. Zatitskiy, F. V. Petrov. Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces. Cent.Eur.J.Math.11 (2013),no.3, 379-400.

[17] А. М. Вершик, П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров. Виртуальная непрерывность измеримых функций и её приложения// Успехи Мат наук, 69, .6, 81-114 (2014).

[18] А. М. Вершик. О классификации измеримых функций нескольких переменных // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2012. Т. 403. С. 35-57.

[19] А. М. Вершик. Задача о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48. 4. С. 26-46.

[20] А. М. Вершик. Оснащенные градуированные графы, проективные пределы симплексов и их границы // Зап. научн.сем. ПОМИ. 2015. Т. 432. С. 83-104.

[21] А. М. Вершик. Стандартность как инвариантная формулировка независимости // Функц. анализ и его прил. 2015. Т. 49. 4. С. 18-32.

[22] A. M. Vershik Smoothness and standardness in the theory of AF-algebras and in the problem on invariant measures // Probability and Statistical Physics in St. Petersburg. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. V. 91. Amer. Math. Soc. (2016). P. 430-443.

[23] A. M. Vershik. Asymptotic theory of path spaces of graded graphs and its applications // Japanese J. Math. 2016. V. 11. 2. P. 151-218.

[24] А. М. Вершик. Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.// ДАН СССР т.259, .3, 526-529 (1981).

[25] А. М. Вершик. Теорема о периодической марковской аппроксимации в эргодической теории.// Записки научн. Сем. ЛОМИ 115, 72-82 (1982)

[26] А. М. Вершик, А. Д. Горбульский. Масштабированная энтропия фильтраций $\sigma$-алгебр // Теория вероятн. и ее примен. 2007. Т. 52. 3. С. 446-467.

[27] А. М. Вершик, П. Б. Затицкий. Универсальная адическая аппроксимация, инвариантные меры и масштабированная энтропия // Препринт ПОМИ 16/2016 (2016). Принята в Изв.РАН сер. мат. 2017.

[28] А. М. Вершик, И. П. Корнфельд. Общая эргодическая теория групп преобразований с инвариантной мерой. Гл. 4. Периодические аппроксимации и их приложения. Эргодические теоремы, спектральная и энтропийная теория для действий общих групп // Динамические системы - 2, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. Т. 2. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 70-89.

[29] А. М. Вершик. Информация,Энтропия, Динамика.// Математика XX века: Взгляд из Петербурга. МЦМНО, Москва (2010), с. 47-76.

[30] А. М. Вершик. Вполне несвободные действия счетных групп и их характеры.// Зап. научн. сем ПОМИ т.378, 5-16 (2010)

[31] A. M. Vershik. Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotics invariants. Markov Processes and Related Fields 16, No. 1, 169-185 (2010).

[32] A. M. Vershik, A.N.Livshits. Adic models of ergodic transformations, spectral theory, substitutions, and related topics // Representation theory and dynamical systems. Adv. Soviet Math., 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992. P. 185-204.

[33] А. М. Вершик, Случайные метрические пространства и универсальность.// Успехи Математических наук, т.59 2(356), 65-104 (2004).

[34] А. М. Вершик, А. В. Малютин. Фазовый переход в задаче о границе-выход для случайных блужданий на группах // Функц. анализ и его прил. 2015. Т. 49. 2. С. 7-20.

[35] А. М. Вершик, С. В. Керов. Локально полупростые алгебры Комбинаторная теория и K-функтор. // "Итоги науки и Техники, серия Современные Проблемы Математики" т 26, 3-56. ВИНИТИ, Москва, 1985.

[36] А. М. Вершик, С. В. Керов. Асимптотика максимальной и типичной размерности неприводимых представлений симметрической группы. Функц. анал. и его прил. т.19, .1, 25-36 (1985).

[37] А. М. Вершик, А. Л. Фёдоров. Траекторная теория // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж. Т. 26. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 171-211.

[38] A. M. Vershik, U. Haböck. On the classification problem of measurable functions in several variables and on matrix distributions // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 441. С. 119-143.

[39] G. Winkler. Choquet order and simplices with applications in probabilistic models // Lecture Notes in Mathematics, 1145. Springer-Verlag, Berlin, 1985. vi+143 pp.

[40] Н. Винер. Нелинейные задачи в теории случайных процессов // М.: ИЛ, 1961. См. также переиздание: М.: Книга по Требованию, 2012.

[41] В. Г. Винокуров, Б. А. Рубштейн. Расширения убывающих последовательностей измеримых разбиений пространства Лебега // В сб.: Случайные процессы и смежные вопросы. Вып. 2. Ташкент: Фан, 1972. С. 49-61.

[42] В. Г. Винокуров, Н. Н. Ганиходжаев. Условные функции в траекторной теории динамических систем // Изв. АН СССР. 1978. Сер. матем. Т. 42. 5. С. 928-964.

[43] Б. М. Гуревич. К истории динамической энтропии: сравнение двух определений. Зап. науч. сем. ПОМИ. 2015. Т. 436. С. 101-111.

[44] A. M. Vershik, Random and universal metric spaces. In "Fundamental Mathematics Today" (S.K.Lando and O.K.Sheinman, eds.), Independent University of Moscow, 2003, pp.54-88.

[45] H.Dye. On groups of meaure preserving transformation. Amer.J.Math, 81 (1959) 119-159.

[46] L. Dubins, J. Feldman, M. Smorodinsky, B. Tsirelson. Decreasing sequences of $\sigma$-fields and a measure change for Brownian motion // Ann. Probab. 1996. V. 24. 2. P. 882-904.

[47] М. Эмери. Вероятностные пространства с фильтрацией: от теории Вершика к броуновскому движению через идеи Цирельсона // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 307. С. 236-265. (Русский перевод: Espace probabilites filtres: de la theorie de Vershikau mouvement brownien, via les idees de Tsirelson. Seminaire Bourbaki, 53 annee 2000-2001, no 882 Novembre 2000.)

[48] П. Б. Затицкий. О масштабирующей энтропийной последовательности динамической системы // Функц. анализ и его прил. 2014. Т. 48 4. С. 70-74.

[49] П. Б. Затицкий. Масштабирующая энтропийная последовательность: инвариантность и примеры // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2015. Т. 432. С. 128-161.

[50] F. M. Goodman, P. de la Harpe, V. F. R. Jones. Coxeter graphs and towers of algebras // MSRI Publications 14, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1989.

[51] R. L. Dobrushin. Perturbation methods of the theory of Gibbsian fields // Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1994), Lecture Notes in Math. Springer, Berlin, 1996. V. 1648. P. 1-66.

[52] K. Schmidt. A probabilistic proof of ergodic decomposition. Sankhia:The Indian Journal of Statisitcs. 1978. v 40 ser.A,10-18.

[53] R. Dougherty, S. Jackson, A. S. Kechris. The structure of hyperfinite Borel equivalence relations // Trans. Amer. Math. Soc. 1994. V. 341. . 1. P. 193-225.

[54] Е. Б. Дынкин. Граничная теория марковских процессов (дискретный случай) // УМН. 1969. Т. 24. 2(146). С. 3-42.

[55] Е. Б. Дынкин. Пространство выходов марковского процесса // УМН. 1969. Т. 24. 4(148). С. 89-152.

[56] E. B. Dynkin. Entrance and exit spaces for a Markov Process, Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970) Tome2 // Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 507-512.

[57] M. Émery, W. Schachermayer. Brownian filtrations are not stable under equivalent time-changes // Seminaire de Probabilites XXXIII, Springer Lecture Notes in Mathematics. 1999. V. 1709. P. 267-276.

[58] M. Émery, W. Schachermayer. On Vershik's Standardness Criterion and Tsirelson's Notion of Cosiness // In: Seminaire de Probabilites XXXV, Springer Lecture Notes in Mathematics. 2001. V. 1755. P. 265-305.

[59] É. Janvresse, T. de la Rue, and Y. Velenik. Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation. // Stoch. Dyn. 2005. V. 5. 1. P 1-25.

[60] É. Janvresse, S. Laurent, T. de la Rue. Standardness of monotonic Markov filtrations // Preprint. 2015.

[61] M. Yor. An infinite-dimensional analogue of the Lebesgue measure and distinguished properties of the gamma process // J. Funct. Anal. 2001. V. 185. 1. P. 274-296.

[62] V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik. Random walks on discrete groups: Boundary and entropy // Ann. Prob. 1983. V. 11. 3. P. 457-490.

[63] S. A. Kalikow. $T, T^{-1}$ transformation is not loosely Bernoulli // Ann. of Math. (2). 1982. V. 115. 2. P. 393-409.

[64] А. Б. Каток. Монотонная эквивалентность в эргодической теории // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. 1. С. 104-157.

[65] А. Б. Каток, Б. Хасселблат. Введение в современную теорию динамических систем // М.: Факториал, 1999.

[66] С. В. Керов, Комбинаторные примеры в теории AF-алгебр // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1989. Т. 172. С. 55-67.

[67] S. V. Kerov. Generalized Hall-Littlewood symmetric functions and orthogonal polynomials // Advances in Sov. Math., V. 9 (1992) 67-94.

[68] А. Н. Колмогоров. Основные понятия теории вероятностей (3-е изд.) // М.: ФАЗИС, 1998.

[69] А. Н. Колмогоров. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространства Лебега // ДАН СССР. 1958. Т. 119. С. 861-864,

[70] А. Н. Колмогоров. Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов // ДАН СССР. 1959. Т. 124, С. 754-755.

[71] A. Connes, D. Feldman, B. Weiss. An amenable equivalence reltion is generated by single transformation. Erg.Theor.Dyn.Syst. v.1 (1981) No 4 431-450.

[72] R. Kotecký, D. Press. The use of projective limits in classical statistical mechanics and Euclidean quantum field theory // Czechoslovak J. Phys. B. 1980. V.30. 1. P. 23-32.

[73] S. Laurent. On standardness and I-cosiness // Séminaire de Probabilités XLIII, Springer Lecture Notes in Mathematics. 2010. V. 2006. P. 127-186.

[74] S. Laurent. On Vershikian and I-cosy random variables and filtrations // Теория вероятн. и ее примен. 2010. Т. 55. 1. С. 104-132.

[75] S. Laurent. Standardness and nonstandardness of next-jump time filtrations // Electronic Communications in Probability. 2013. V. 18. 56. P. 1-11.

[76] X. Méla, K. Petersen. Dynamical properties of the Pascal adic transformation // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2005. V. 25. 1. P. 227-256.

[77] J. von Neumann. Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik // Ann. of Math. (2). 1932. V. 33. 3. P. 587-642.

[78] Д. Орнстейн. Эргодическая теория, случайность и динамические системы // Новое в зарубежной науке. Математика. Выпуск 8. М.: Мир, 1978.

[79] D. S. Ornstein, B. Weiss. Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups // J. Analyse Math. 1987. V. 48. P.1-141.

[80] D. S. Ornstein, B. Weiss. Ergodic theory of amenable actions. Rohklin Lemma.// DFMS (1980) No.1, 161-164.

[81] M. Rosenblatt. Markov Processes: Structure and Asymptotic Behavior // Springer Verlag, 1971.

[82] В. А. Рохлин. Метрическая классификация измеримых функций // УМН. 1957. Т. 12(74). 2. С. 169-174.

[83] В. А. Рохлин. Об основных понятиях теории меры // Матем. сб. 1949. Т. 25(67). 1. С. 107-150.

[84] В. А. Рохлин. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1967. Т. 22(137). 5. С. 3-56.

[85] В. А. Рохлин. Избранные работы. Воспоминания о В. А. Рохлине, материалы к биографии (2-е изд.) // МЦНМО, 2010.

[86] О. В. Гусева. Классификация последовательностей измеримых разбиений // Вестн. ЛГУ. 1965. Т. 20. 1. С. 14-23.

[87] Б. А. Рубштейн. Об убывающих последовательностях измеримых разбиений // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, 3. С. 526-530.

[88] B.-Z. Rubshtein. Lacunary isomorphism of decreasing sequences of measurable partitions // Israel J. Math. 1997. V 97. P. 317-345.

[89] Я. Г. Синай. О понятии энтропии динамической системы // ДАН СССР. 1959. Т. 124. 4. С. 768-771.

[90] А. М. Степин. Об энтропийном инварианте убывающих последовательностей измеримых разбиений // Функц. анализ и его прил. 1971. Т. 5. 3. С. 80-84.

[91] R. Stanley. Ordered structures and partitions // Memoirs Amer. Math. Soc. 1972. 119.

[92] Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции // М.:Мир, 2005.

[93] J. Feldman, C. C. Moore. Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neumann algebras // Bull. Amer. Math. Soc. 1975. V. 81. 5. P. 921-924.

[94] J. Feldman, D. J. Rudolph. Standardness of sequences of $\sigma$-fields given by certain endomorphisms. Dedicated to the memory of Wieslaw Szlenk // Fund. Math. 1998. V. 157. 2-3. P. 175-189.

[95] J. Feldman, B. Tsirelson. Decreasing sequences of sigma-fields and a measure change for Brownian motion. II // Annals of Probability. 1966. V. 24. 2. P. 905-911.

[96] D. Heicklen, C. Hoffman, D. J. Rudolph. Entropy and dyadic equivalence of random walks on a random scenery // AdV. Math. 2000. V. 156. 2. P. 157-179.

[97] C. Hoffman, D. J. Rudolph. A dyadic endomorphism which is Bernoulli but not standard // Israel J. Math. 2002. V. 130. P. 365-379.

[98] F. den Hollander, J. E. Steif. Random walk in random scenery: a survey of some recent results // Dynamics & Stochastics, IMS Lecture Notes Monogr. Ser., 48. Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2006. P. 53-65.

[99] С. А. Юзвинский. Различение $K$-автоморфизмов шкалой // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7. 4. С. 70-75.