

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

**Небольшое количество сомножителей
из эйлерова произведения
достаточно для вычисления
дзета-функции с большой точностью**

Ю. В. МАТИЯСЕВИЧ¹

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской Академии наук

yumat@pdmi.ras.ru

15 декабря 2016

Аннотация

На численных примерах продемонстрирован нетрадиционный способ нахождения с большой точностью значений дзета-функции Римана внутри критической полосы. Для этого используются функциональное уравнение и сомножители из эйлерова произведения, соответствующие очень небольшому количеству простых чисел. Пример: три первых простых числа позволяют вычислить более 50 десятичных знаков $\zeta(1/4 + 10i)$.

Ключевые слова: Дзета-функция Римана, функциональное уравнение, эйлерово произведение.

¹Работа была поддержана программой фундаментальных исследований Отделения математических наук РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St.Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics
of Russian Academy of Sciences

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик,
М. А. Всемирнов, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина,
Г. В. Кузьмина, Б. Б. Лурье,
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин, О. М. Фоменко

1 Введение

Дзета-функция Римана может быть определена посредством ряда Дирихле

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (1.1)$$

Л. ЭЙЛЕР дал другое определение, известное ныне как *эйлерово произведение*:

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prime}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad (1.2)$$

И ряд (1.1), и произведение (1.2) сходятся только при $\operatorname{Re}(s) > 1$, но определяемая ими функция может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость за исключением точки $s = 1$. Известно (открыто Л. ЭЙЛЕРОМ и доказано Б. РИМАНОМ), что дзета-функция удовлетворяет *функциональному уравнению*

$$\xi(s) = \xi(1 - s), \quad (1.3)$$

где

$$\xi(s) = g(s)\zeta(s), \quad (1.4)$$

$$g(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right). \quad (1.5)$$

Уже Л. ЭЙЛЕР знал, что $\zeta(s)$ обращается в ноль при чётных отрицательных значениях s , сейчас эти числа называют *тривиальными нулями* дзета-функции. В. RIEMANN доказал, что все остальные, *нетривиальные нули* этой функции лежат в *критической полосе* $0 \leq \operatorname{Re}(s) \leq 1$, а знаменитая *гипотеза Римана* предсказывает, что, более того, все нетривиальные нули лежат на *критической прямой* $\operatorname{Re}(s) = 1/2$. По традиции эти нули будут ниже обозначаться как $\rho_{\pm 1} = 1/2 \pm i\gamma_1$, $\rho_{\pm 2} = 1/2 \pm i\gamma_2, \dots$ где $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots$.

Вполне естественно попытаться получить информацию о поведении дзета-функции внутри критической полосы, изучая начальные фрагменты бесконечного ряда (1.1) и бесконечного произведения (1.2) несмотря на то, что они расходятся при $\operatorname{Re}(s) < 1$. Исследования соответствующих конечных рядов Дирихле весьма многочисленны, но в этой работе мы будем иметь дело с конечными эйлеровыми произведениями. Похоже, что им посвящено не так много работ, некоторые из которых упомянуты ниже.

Первое доказательство *теоремы Воронина об универсальности дзета-функции Римана* [1] в качестве промежуточного шага использовало универсальность (варианта) конечного эйлерова произведения (начало подобного метода исследования дзета-функции положил Н. ВОНН).

S. M. GONEK, C. P. HUGHES, и J. P. KEATING рассмотрели в [4] *гибридное приближение* к дзета-функции, имеющее вид произведения (варианта) конечного эйлерова произведения и (варианта) *произведения Адамара* по нулям дзета-функции. Используя это приближение S. M. GONEK [3] установил, что дзета-функция может быть хорошо приближена посредством (другого варианта) конечного эйлерова произведения.

В [5] S. M. GONEK и J. P. KEATING оценили среднюю величину эйлерова произведения общего вида и предположили, что сомножители в некотором смысле независимы.

2 Регуляризация эйлерова произведения

Известно много методов ускорить сходимость ряда и даже преобразовать расходящийся ряд в другой ряд, сходящийся к “правильному” значению. То, что описано ниже, касается возможного расширения области и ускорения сходимости произведения. Численные примеры показывают, что такой трюк, по-видимому, работает в случае дзета-функции Римана (рассматриваемом в этой работе), а также для *L-функций Дирихле* и *L-функции Рамануджана* (которые будут рассмотрены в дальнейших публикациях), однако автор не установил никаких строгих общих оценок.

Пусть

$$\mathfrak{P} = \{p_1, \dots, p_m\} \quad (2.1)$$

– это конечное множество различных простых чисел (в случае, когда оно состоит из всех простых чисел, не превосходящих n , это множество будет обозначаться как $\mathfrak{P}_{\leq n}$). *Конечное эйлерово произведение* $\zeta_{\mathfrak{P}}(s)$ получается выбором в (1.2) соответствующих *эйлеровых сомножителей*:

$$\zeta_{\mathfrak{P}}(s) = \frac{1}{1 - p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1 - p_2^{-s}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{1 - p_m^{-s}}. \quad (2.2)$$

Имеюся два препятствия к тому, чтобы конечное эйлерово произведение $\zeta_{\mathfrak{P}}(s)$ служило хорошим приближением к $\zeta(s)$ на всей комплексной плоскости:

(i) *конечная кси-функция* $\xi_{\mathfrak{P}}(s)$, определяемая по аналогии с (1.4) как

$$\xi_{\mathfrak{P}}(s) = g(s)\zeta_{\mathfrak{P}}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}(s-1)\Gamma(\frac{s}{2}+1)\zeta_{\mathfrak{P}}(s), \quad (2.3)$$

не обязана удовлетворять, даже приближённо, соответствующему аналогу функционального уравнения (1.3);

- (ii) у $\zeta(s)$ имеется единственный полюс в точке $s = 1$, в то время как $\zeta_{\mathfrak{P}}(s)$ имеет бесконечно много полюсов, все они лежат на прямой $\text{Re}(s) = 0$.

Чтобы обойти препятствие (i) мы будем работать с *симметризованной конечной кси-функцией*

$$\xi_{\mathfrak{P}}^{\bar{}}(s) = \xi_{\mathfrak{P}}(s) + \xi_{\mathfrak{P}}(1-s) = \xi_{\mathfrak{P}}^{\bar{}}(1-s) \quad (2.4)$$

(подобный трюк формальной симметризации *отдельных* слагаемых в представлении кси-функции в виде ряда был успешно использован автором в [2]). Равенство (2.4) напоминает *приближённое функциональное уравнение*, однако имеется одно существенное отличие. А именно, мы не увязываем значение m , равное количеству сомножителей в (2.2), со значением s в (2.4), в то время как в приближённом функциональном уравнении количество слагаемых должно коррелировать с величиной мнимой части s .

По аналогии с (2.3) функцию $\xi_{\mathfrak{P}}^{\bar{}}(s)$ можно также определить как

$$\xi_{\mathfrak{P}}^{\bar{}}(s) = g(s)\zeta_{\mathfrak{P}}^{\bar{}}(s), \quad (2.5)$$

где

$$\zeta_{\mathfrak{P}}^{\bar{}}(s) = \zeta_{\mathfrak{P}}(s) + \frac{g(1-s)}{g(s)}\zeta_{\mathfrak{P}}(1-s) \quad (2.6)$$

– *симметризованное конечное эйлерово произведение*².

Чтобы преодолеть препятствие (ii) мы “удалим” полюса функции $\xi_{\mathfrak{P}}^{\bar{}}(s)$.

Эйлеров сомножитель $(1-p^{-s})^{-1}$ имеет полюса в точках

$$\frac{2i\pi}{\ln(p)}n \quad (2.7)$$

при $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Мы будем называть их *призрачными полюсами дзета-функции* — формально, они присутствуют в правой части равенства (1.2), но отсутствуют в его левой части³.

Два различных эйлеровых сомножителя имеют только один общий полюс, а именно, $s = 0$. Таким образом, все полюса функции $\xi_{\mathfrak{P}}(s)$ являются

²Похожую функцию $P_X(s) + g(1-s)/g(s)P_X(1-s)$ (где $P_X(s)$ — это “сглаженный” вариант $\zeta_{\mathfrak{P}_{\leq X^2}}(s)$, рассматривал S. M. GONEK в [3], но он нашёл, что эта функция не даёт хорошего приближения к $\zeta(s)$ и стал работать с функцией $P_X(s) + g(1-s)/g(s)P_X(\bar{s})$, которая не является аналитической.

³Интересную связь призрачных полюсов с нулями дзета-функции обнаружил R. PÉREZ MARCO в [6], а именно, полюса “отталкивают” нули.

простыми за исключением полюса $s = 0$, который имеет порядок m . Соответственно, $\xi_{\mathfrak{p}}^{\overline{\cdot}}(s)$ имеет полюса того же порядка в точках $s = 0$ и $s = 1$. Чтобы упростить дальнейшие формулы, мы избавимся от этих полюсов функции $\xi_{\mathfrak{p}}^{\overline{\cdot}}(s)$. А именно, мы будем работать с кратной ей *модифицированной симметризованной конечной кси-функцией*

$$\xi_{\mathfrak{p}}^{\overline{\cdot}}(s) = s^m(1-s)^m \xi_{\mathfrak{p}}^{\overline{\cdot}}(s) = \xi_{\mathfrak{p}}^{\overline{\cdot}}(1-s). \quad (2.8)$$

Эта функция также может быть названа *симметризованной модифицированной конечной кси-функцией* и определена как сумма

$$\xi_{\mathfrak{p}}^{\overline{\cdot}}(s) = \xi_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(s) + \xi_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(1-s), \quad (2.9)$$

где

$$\xi_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(s) = s^m(1-s)^m \xi_{\mathfrak{p}}(s) \quad (2.10)$$

– это *модифицированная конечная кси-функция*. Она может быть определена также как

$$\xi_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(s) = g(s) \zeta_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}(s-1) \Gamma(\frac{s}{2} + 1) \zeta_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(s), \quad (2.11)$$

где

$$\zeta_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(s) = s^m(1-s)^m \zeta_{\mathfrak{p}}(s) \quad (2.12)$$

– это *модифицированное конечное эйлерово произведение*.

Функция $\xi_{\mathfrak{p}}^{\cdot}(s)$ имеет полюса двух типов: простые полюса вида (2.7) при $p = p_1, \dots, p_m$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, и простые полюса в точках

$$-2, -4, \dots, -2n, \dots \quad (2.13)$$

вызванные Γ -сомножителем в (2.3) (в (1.4) эти полюса гасятся тривиальными нулями $\zeta(s)$, но $\zeta_{\mathfrak{p}}(s)$ там не обнуляется).

Вычет эйлерова сомножителя $(1-p^{-s})^{-1}$ в полюсе (2.7) равен

$$\frac{1}{\ln(p)}, \quad (2.14)$$

а вычет Γ -сомножителя из (2.3) в полюсе $s = -2n$ равен

$$-\frac{2(-1)^n}{\Gamma(n)}. \quad (2.15)$$

Соответственно, *главная часть модифицированной конечной кси-функции* равна

$$\xi_{\mathfrak{P}}^{\text{pp}}(s) = \sum_{j=1}^m \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\frac{2i\pi n}{\ln(p_j)} \left(1 - \frac{2i\pi n}{\ln(p_j)}\right) \xi_{\mathfrak{P} \setminus \{p_j\}}^{\text{i}} \left(\frac{2i\pi n}{\ln(p_j)}\right)}{\ln(p_j) \left(s - \frac{2i\pi n}{\ln(p_j)}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\pi^n (2n+1) \zeta_{\mathfrak{P}}^{\text{i}}(-2n)}{\Gamma(n)(s+2n)}. \quad (2.16)$$

Для нас интерес представляет *регулярная часть модифицированной конечной кси-функции*, то есть целая функция

$$\xi_{\mathfrak{P}}^{\text{reg}}(s) = \xi_{\mathfrak{P}}^{\text{i}}(s) - \xi_{\mathfrak{P}}^{\text{pp}}(s), \quad (2.17)$$

конкретнее, *симметризованная регулярная часть модифицированной конечной кси-функции*

$$\xi_{\mathfrak{P}}^{\text{reg}=\!}(s) = \xi_{\mathfrak{P}}^{\text{reg}}(s) + \xi_{\mathfrak{P}}^{\text{reg}}(1-s). \quad (2.18)$$

Произведя “демодификацию”, мы получаем *регуляризованную конечную кси-функцию*,

$$\xi_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s) = \frac{\xi_{\mathfrak{P}}^{\text{reg}=\!}(s)}{s^m(1-s)^m} \quad (2.19)$$

(строго говоря, мы должны бы назвать её *конечной кси-функцией, регуляризованной посредством $s^m(1-s)^m$* , но поскольку в этой работе другие возможные *модификаторы* не рассматриваются, мы будем употреблять краткое название).

Удивительным образом функция $\xi_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s)$ даёт очень хорошие приближения к $\xi(s)$, так что соответствующее *регуляризованное конечное эйлерово произведение* позволяет нам вычислять $\zeta(s)$ с большой точностью:

$$\zeta_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s) = \frac{\xi_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s)}{g(s)} \approx \frac{\xi(s)}{g(s)} = \zeta(s). \quad (2.20)$$

3 Численные примеры

Ниже приведены примеры, показывающие точность приближения значений и нулей функции $\zeta(s)$ посредством $\zeta_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s)$. Соответствующие программы для системы МАТНЕМАТИКА доступны на [7].

Одиночный эйлеров сомножитель. Мы начнём с простейшего случая, когда $\mathfrak{P} = \{2\}$. Сколь много информации о дзета-функции можно получить,

исходя из всего одного эйлерова сомножителя $(1 - 2^{-s})^{-1}$? Неожиданно, весьма много.

Рисунки 1–2 показывают графики вещественной и мнимой частей функций $\zeta(1/2 + it)$ (в красном цвете) и $\zeta_{\{2\}}^{\sim}(1/2 + it)$ (в синем). Зрительно, при $|t| < 30$ графики обеих функций совпадают, давая фиолетовый цвет. Действительно, при $|t| \leq 19$ эти функции различаются не более, чем на 10^{-5} (см. Табл. 1).

Табл. 2 представляет нули функции $\zeta_{\{2\}}^{\sim}(s)$, лежащие на критической прямой в верхней полуплоскости. Мы видим, что уже один эйлеров сомножитель, $(1 - 2^{-s})^{-1}$, позволяет вычислить первый нетривиальный нуль дзета функции с 7 верными десятичными знаками.

Рис. 5 показывает синим и жёлтым цветами кривые на комплексной s -плоскости, на которых в нуль обращаются соответственно вещественная и мнимая части $\zeta_{\{2\}}^{\sim}(s)$.

Второй эйлеров сомножитель из (1.2), $(1 - 3^{-s})^{-1}$, порождает менее точные приближения и в меньшей области (см. Рис. 3–4). Рис. 6 показывает кривые, на которых в нуль обращаются соответственно вещественная и мнимая части $\zeta_{\{3\}}^{\sim}(s)$.

Замена числа 3 на какое-либо большее число зрительно не изменяет графики с Рис. 3–4, более того, численные данные подсказывают существование предела

$$\zeta_{\text{single}}(s) = \lim_{p \rightarrow \infty} \zeta_{\{p\}}^{\sim}(s) \quad (3.1)$$

(понятно, что p здесь не обязано быть простым числом). Таблица 3 демонстрирует скорость сходимости. Природа функции $\zeta_{\text{single}}(s)$ не ясна.

Несколько эйлеровых сомножителей. Первые два эйлерова сомножителя, используемые вместе, позволяют достичь гораздо более точного приближения к $\zeta(s)$ (и в большей области значений s), чем когда они использовались по отдельности. На Рис. 7–8 графики функций $\zeta(1/2 + it)$ и $\zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(1/2 + it)$ визуально неразличимы при $|t| < 95$. Действительно, при $|t| < 60$ эти две функции отличаются друг от друга не более, чем на 10^{-11} (см. Табл. 4), а нули дзета-функции приближаются нулями $\zeta_{\{2,3\}}^{\sim}$ по крайней мере с 14 правильными десятичными знаками (см. Табл. 5). Использование ещё и третьего эйлерова сомножителя приводит к дальнейшему улучшению качества аппроксимации (см. Рис. 7–8 и Табл. 6–8).

Таблица 9 показывает точность приближения, которую даёт $\zeta_{\mathfrak{F}}^{\sim}(s)$ для различных \mathfrak{F} и s (см. также выделенные полужирным шрифтом строки в Табл. 10). Видно, что добавление очередного эйлерова сомножителя существенно увеличивает количество верных десятичных знаков.

Численные данные подсказывают, что справедливо следующее

Предположение. Для каждого s

$$\xi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{\mathfrak{P}_{\leq n}}^{\approx}(s), \quad (3.2)$$

более того, для каждого k

$$\frac{d^k}{ds^k} \xi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^k}{ds^k} \xi_{\mathfrak{P}_{\leq n}}^{\approx}(s). \quad (3.3)$$

Представляется важным брать брать эйлеровы сомножители без пропусков. Рисунки 12–13 показывают, что приближения, даваемые двумя простыми числами, 3 и 5, хуже, чем приближения, даваемые одним числом 3.

4 Эйлеровы сомножители при составном p

Давайте отбросим требование, что p_1, \dots, p_m в (2.1) должны быть простыми числами. Это надо делать с определённой осторожностью, а именно, логарифмы этих чисел по-прежнему должны быть попарно линейно независимы над \mathbb{Q} (в противном случае надо модифицировать определение (2.16) с учётом кратных полюсов $\zeta_{\mathfrak{P}}(s)$).

Довольно удивительно, что $\xi_{\mathfrak{P}}^{\approx}(s)$ хорошо приближает $\zeta(s)$ даже если \mathfrak{P} содержит составные числа (см. примеры в Табл. 10). Это не укладывается в схему рассуждений в Разделе 2, основанной на функциональном уравнении (1.3), которое не выполняется, если мы включим в (1.2) эйлеров сомножитель с составным p .

Тем не мене, похоже, что составные элементы в \mathfrak{P} в общем случае ухудшают качество аппроксимации, и это наблюдение подсказывает следующий (пока не доказанный) нестандартный метод порождения простых чисел.

Решето эйлера произведения

- *Выбрать достаточно маленькое по абсолютной величине число s_0 ;*
- *вычислить $\xi(s_0)$;*
- *объявить 2 первым простым числом;*
- *когда найдены начальные простые числа p_1, \dots, p_k , вычислить разность*

$$\delta_{\{p_1, \dots, p_k\}} = \xi_{\{p_1, \dots, p_k\}}^{\sim}(s_0) - \xi(s_0);$$

- *следующим простым числом будет наименьшее q , которое*
 - *больше, чем p_1, \dots, p_k и отлично от степеней этих чисел,*
 - *и такое, что*

$$\left| \xi_{\{p_1, \dots, p_k, q\}}^{\sim}(s_0) - \xi(s_0) \right| < \left| \delta_{\{p_1, \dots, p_k\}} \right|. \quad (*)$$

В Табл. 10 приведён пример такого порождения простых чисел для случая $s_0 = 1/2$. Полужирным шрифтом выделены те строки, где очередная разность по абсолютной величине меньше всех предыдущих, то есть найдено очередное простое число.

5 Дальнейшие наблюдения и предположения

Сформулированные ниже предположения согласуются со всеми проделанными автором вычислениями, но их объём пока не очень велик и вполне возможно, что некоторые из предположений ошибочны.

Конечность количества нулей на критической прямой. Рисунки 5 и 9 позволяют предположить, что функции $\xi_{\{2\}}^{\sim}(s)$ и $\xi_{\{2,3\}}^{\sim}(s)$ имеют лишь конечное число нулей, лежащих на критической прямой; возможно, что это справедливо для всех функций вида $\xi_{\mathfrak{P} \leq n}^{\sim}(s)$ и даже для $\xi_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s)$ при любом \mathfrak{P} .

Таблицы 2, 5 и 7–8 предположительно содержат все нули функций $\xi_{\{2\}}^{\sim}(s)$, $\xi_{\{2,3\}}^{\sim}(s)$ и $\xi_{\{2,3,5\}}^{\sim}(s)$, лежащие в верхней полуплоскости на критической прямой.

Если $\operatorname{Re}(\xi(1/2 + it))$ достигает экстремума в некоторой точке $t = t_0$, то $\operatorname{Im}(\xi'(1/2 + it_0)) = 0$. Таким образом, между любыми соседними нулями $\xi(s)$ на критической прямой лежит по крайней мере один нуль $\operatorname{Im}(\xi(s))$ не менее, чем второго порядка. То же самое верно и для $\operatorname{Im}(\xi_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s))$ при любом \mathfrak{P} , но Рис. 9 показывает, что $\operatorname{Im}(\xi_{\{2,3\}}^{\sim}(s))$ кроме того имеет три двукратных нуля, расположенных на критической прямой выше всех лежащих там нулей функции $\xi_{\{2,3\}}^{\sim}(s)$. Можно ожидать, что при любом n количество кратных нулей у $\operatorname{Im}(\xi_{\mathfrak{P}_{\leq n}}^{\sim}(s))$ конечно, все они лежат на критической прямой, являются двукратными и расположены аналогичным образом.

Предельное поведение. Вполне возможно, что аналогично пределу (3.1), подсказываемому Табл. 3, для любого m существует предел

$$\zeta_{[m]}(s) = \lim_{\min(p_1, \dots, p_m) \rightarrow \infty} \zeta_{\{p_1, \dots, p_m\}}^{\sim}(s). \quad (5.1)$$

Чередование знаков. Как видно из Табл. 2, 5 и 7–8, нули $\zeta_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s)$ на критической прямой лежат поочередно то выше, то ниже нулей дзета-функции с такими же номерами. Естественнo предположить, что также ведут себя нули $\zeta_{\mathfrak{P}_{\leq n}}^{\sim}(s)$ при любом n .

Возможно, что такое предполагаемое расположение нулей $\zeta_{\mathfrak{P}_{\leq n}}^{\sim}(s)$ является проявлением более общей закономерности. В Табл. 10 знак разности $\xi_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s) - \xi(s)$ при $s = 1/2$ и $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_{\leq n}$ равен $(-1)^m$, где m – количество элементов в \mathfrak{P} . Будет ли это верно

A1. при всех значениях n и $s = 1/2$?

A2. при всех значениях n и произвольном значении s , лежащем на критической прямой?

Геометрически, справедливость A2 означает, что графики $\xi_{\mathfrak{P}_{\leq n}}(1/2 + it)$ поочередно лежат над и под графиком $\xi(1/2 + it)$.

Кроме того, в Табл. 10 знак разности $\xi_{\mathfrak{P}_{\leq n}}^{\sim}(s) - \xi(s)$ сохраняется при расширении $\mathfrak{P}_{\leq n}$ на одно составное число, меньшее, чем $m + 1$ -ое простое число. Можно задать аналогичные вопросы – будет ли это верно

A3. при всех значениях n и $s = 1/2$?

A4. при всех значениях n и произвольном значении s , лежащем на критической прямой?

В случае положительного ответа условие (*) в решетке эйлерова произведения можно будет заменить на такое:

$$\delta_{\{p_1, \dots, p_k\}}(\xi_{\{p_1, \dots, p_k, q\}}^{\approx}(s_0) - \xi(s_0)) < 0. \quad (**)$$

Список литературы

- [1] С. М. Воронин. Теорема об “универсальности” дзета-функции Римана. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 39:475–486, 1975. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=im&paperid=2037&option_lang=eng.
- [2] Ю. В. Матиясевич. Дзета-функция Римана и конечные ряды Дирихле. *Алгебра и анализ*, 27(6):174–198, 2015. http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=aa&paperid=1472&option_lang=eng.
- [3] S. M. Gonek. Finite Euler products and the Riemann hypothesis. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(4):2157–2191, 2012.
- [4] S. M. Gonek, C. P. Hughes, and J. P. Keating. A hybrid Euler-Hadamard product for the Riemann zeta function. *Duke Math. J.*, 136(3):507–549, 2007.
- [5] S. M. Gonek and J. P. Keating. Mean values of finite Euler products. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 82(3):763–786, 2010.
- [6] R. Pérez Marco, Statistics on Riemann zeros, <https://arxiv.org/abs/1112.0346>.
- [7] Yu. Matiyasevich. WWW personal journal, <http://logic.pdmi.ras.ru/~yumat/personaljournal/eulereverywhere>.

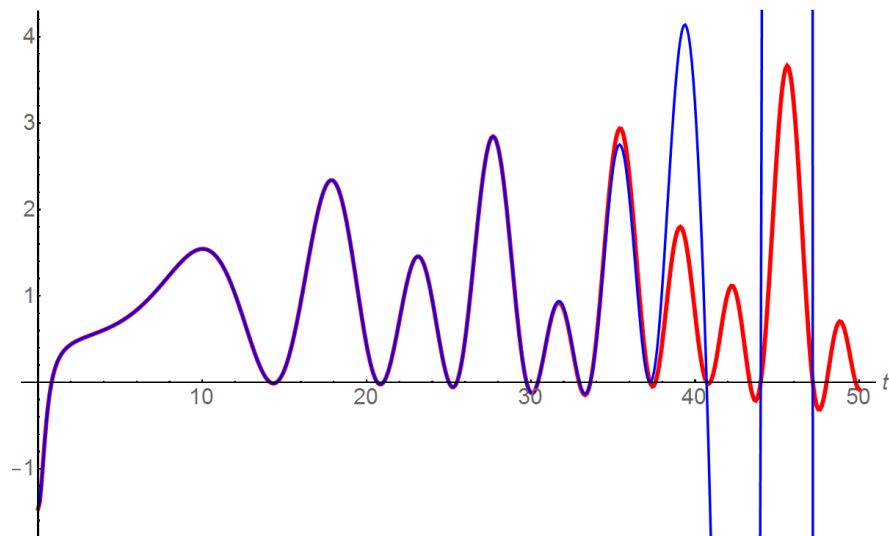


Рис. 1: Вещественные части $\xi(1/2 + it)$ (в красном цвете) и $\xi_{\{2\}}^{\approx}(1/2 + it)$ (в синем цвете)

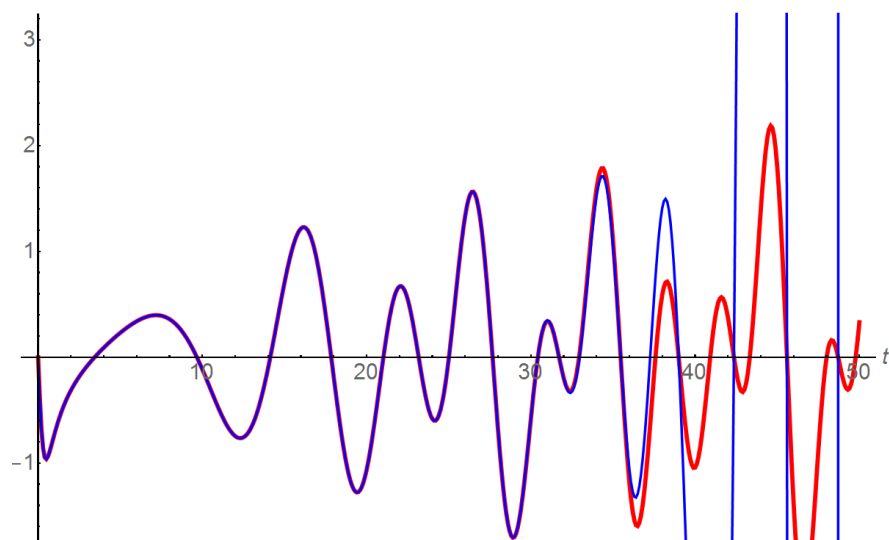


Рис. 2: Мнимые части $\xi(1/2 + it)$ (в красном цвете) и $\xi_{\{2\}}^{\approx}(1/2 + it)$ (в синем цвете)

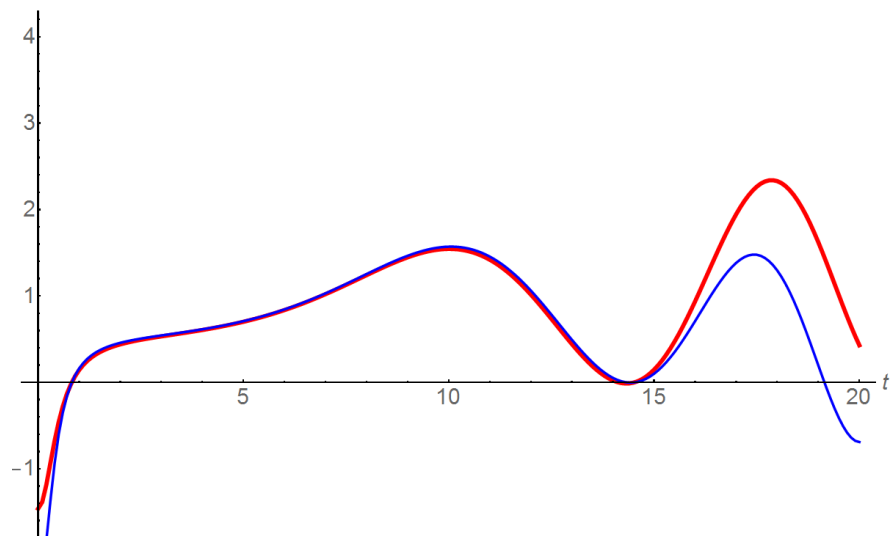


Рис. 3: Вещественные части $\zeta(1/2 + it)$ (в красном цвете) и $\zeta_{\{3\}}^{\approx}(1/2 + it)$ (в синем цвете)

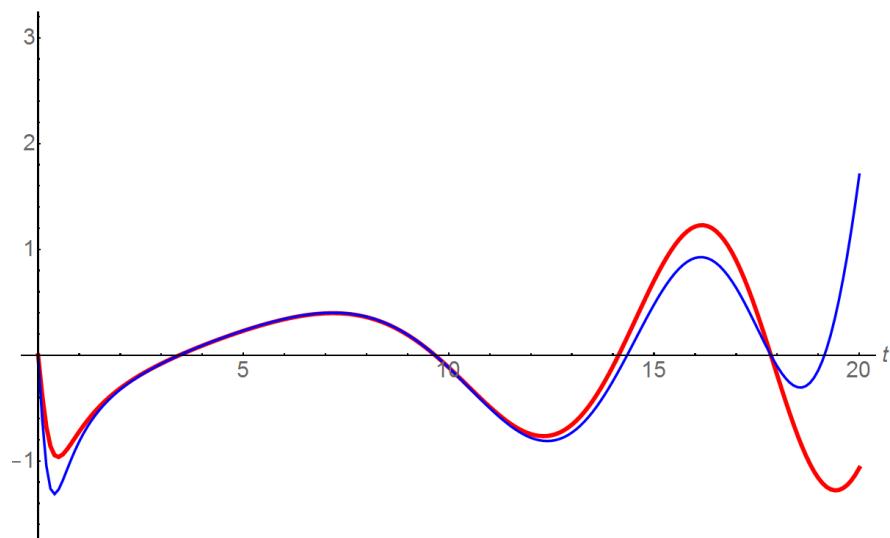


Рис. 4: Мнимые части $\zeta(1/2 + it)$ (в красном цвете) и $\zeta_{\{3\}}^{\approx}(1/2 + it)$ (в синем цвете)

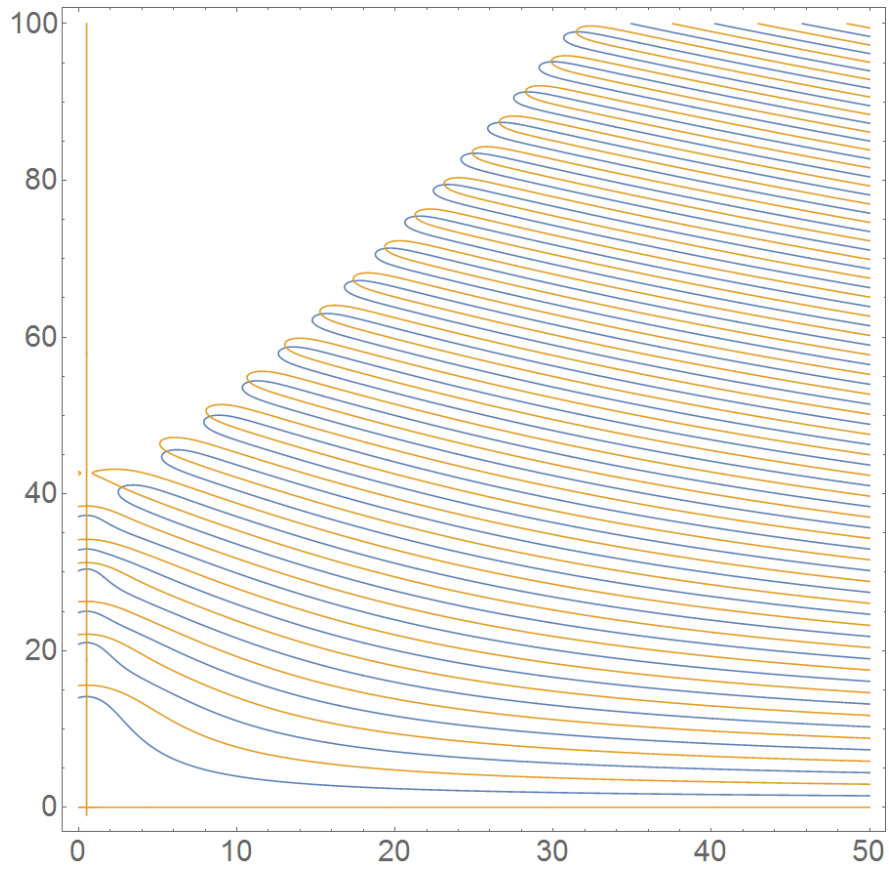


Рис. 5: Вещественная и мнимая части $\xi_{\{2\}}^{\approx}(s)$ обращаются в ноль соответственно на кривых синего и жёлтого цветов

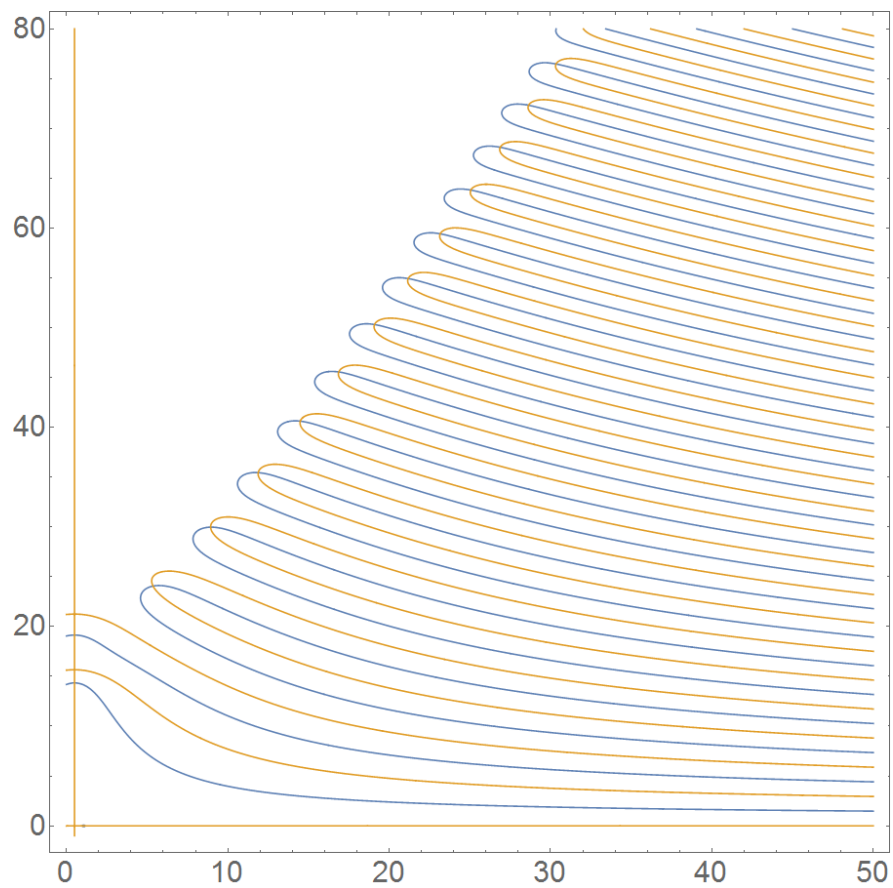


Рис. 6: Вещественная и мнимая части $\xi_{\{3\}}^{\approx}(s)$ обращаются в ноль соответственно на кривых синего и жёлтого цветов

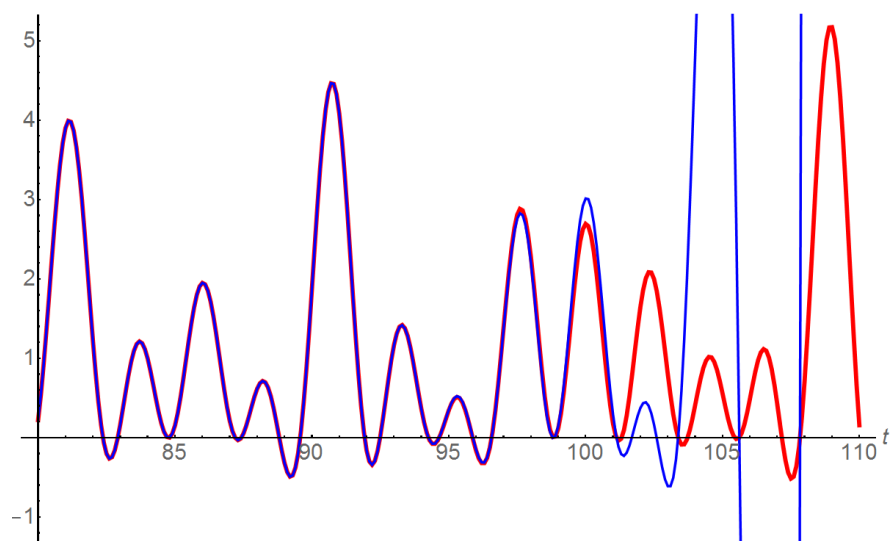


Рис. 7: Вещественные части $\zeta(1/2 + it)$ (в красном цвете) и $\zeta_{\{2,3\}}^{\approx}(1/2 + it)$ (в синем цвете)

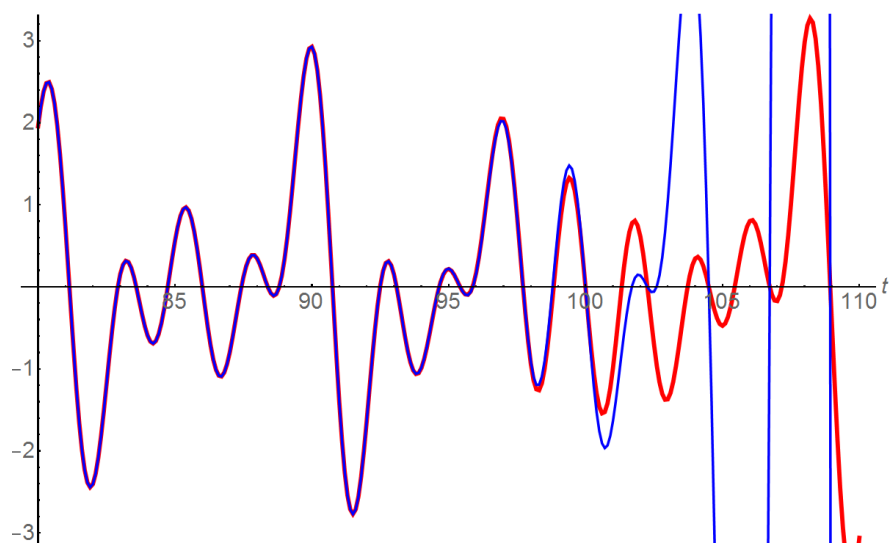


Рис. 8: Мнимые части $\zeta(1/2 + it)$ (в красном цвете) и $\zeta_{\{2,3\}}^{\approx}(1/2 + it)$ (в синем цвете)

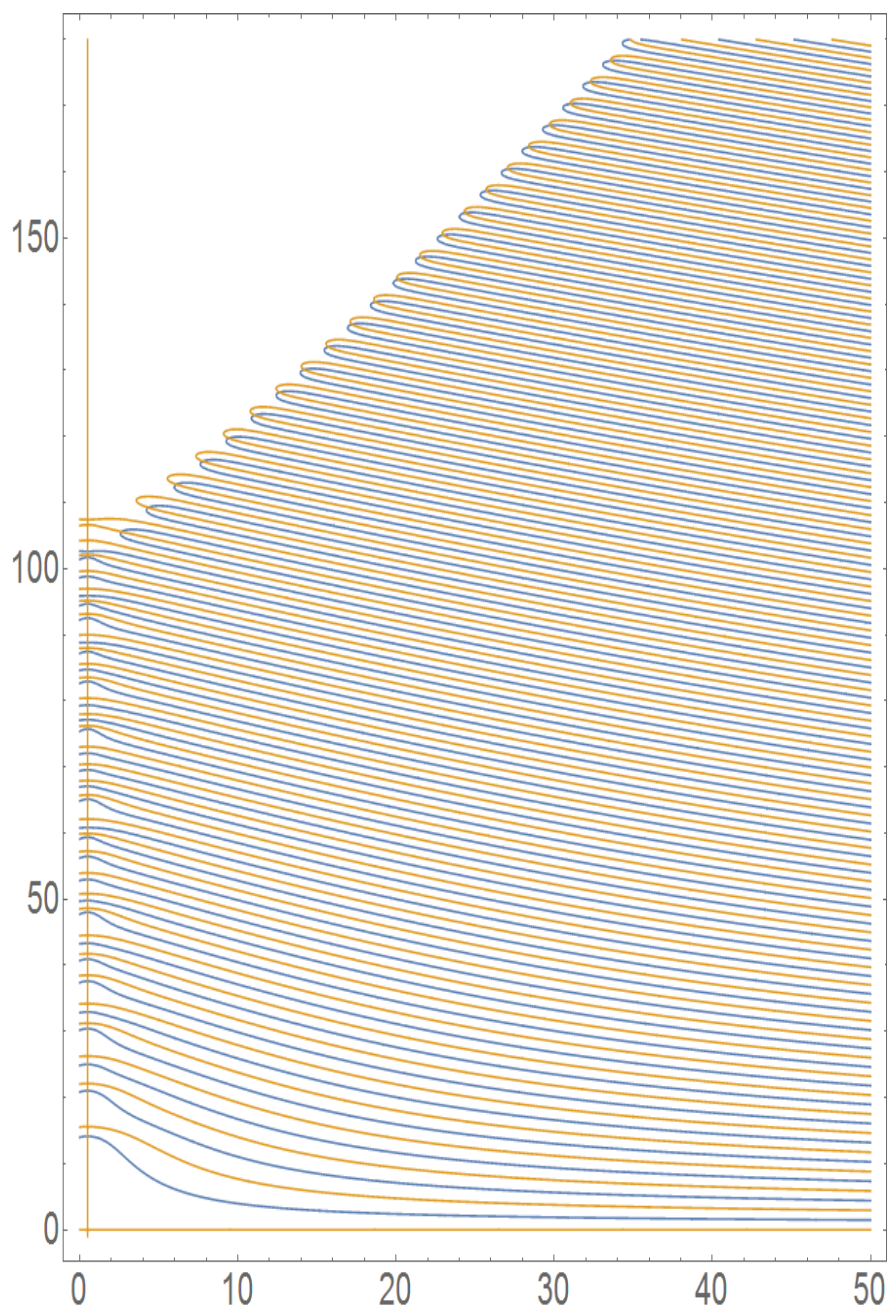


Рис. 9: Вещественная и мнимая части $\xi_{\{2,3\}}^{\approx}(s)$ обращаются в ноль соответственно на кривых синего и жёлтого цветов

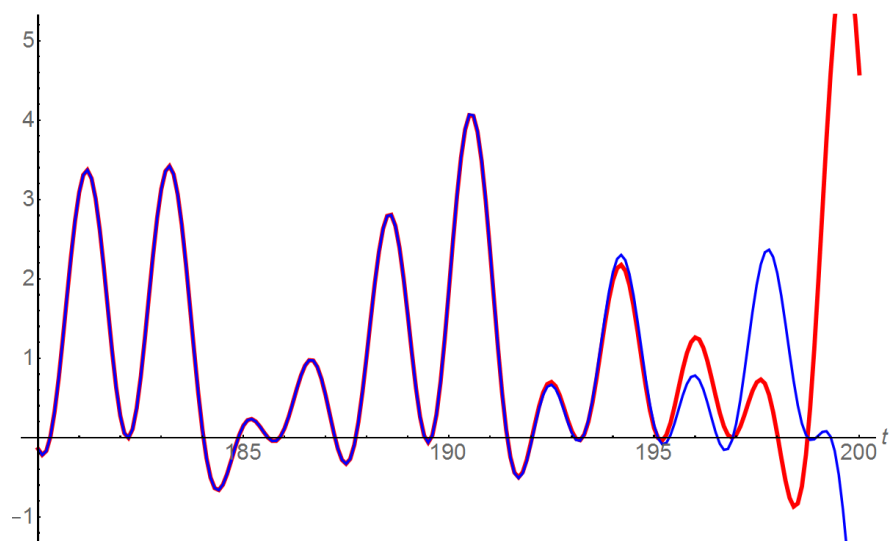


Рис. 10: Вещественные части $\zeta(1/2 + it)$ (в красном цвете) и $\zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(1/2 + it)$ (в синем цвете)

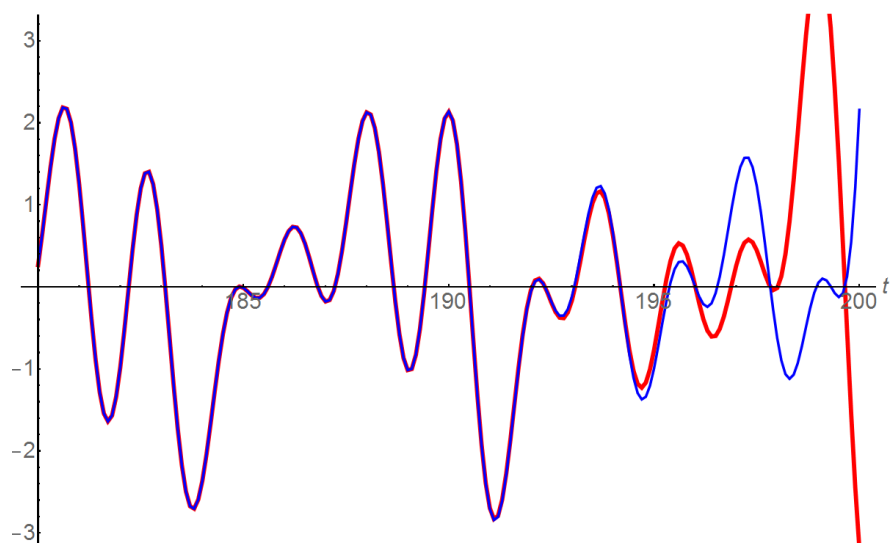


Рис. 11: Мнимые части $\zeta(1/2 + it)$ (в красном цвете) и $\zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(1/2 + it)$ (в синем цвете)

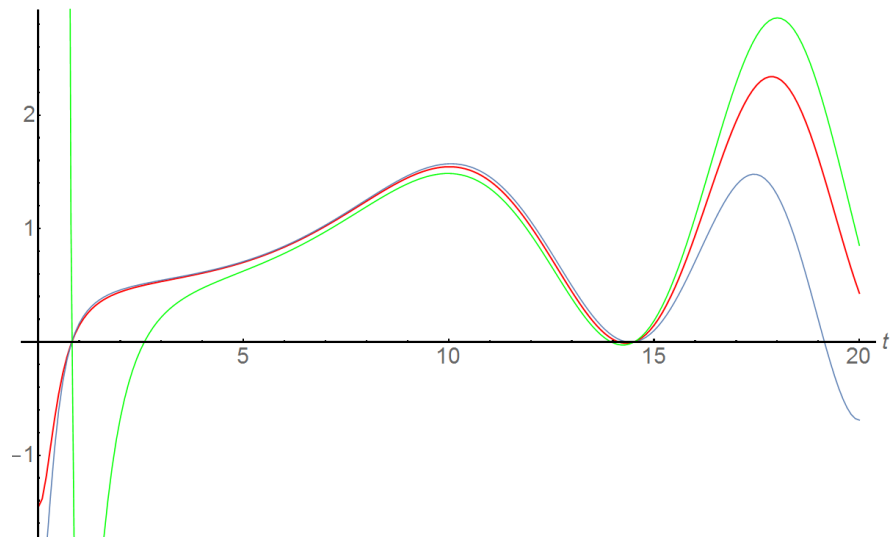


Рис. 12: Вещественные части $\zeta(1/2 + it)$ (в красном цвете), $\zeta_{\{3\}}^{\sim}(1/2 + it)$ (в синем цвете) и $\zeta_{\{3,5\}}^{\sim}(1/2 + it)$ (в зелёном цвете)

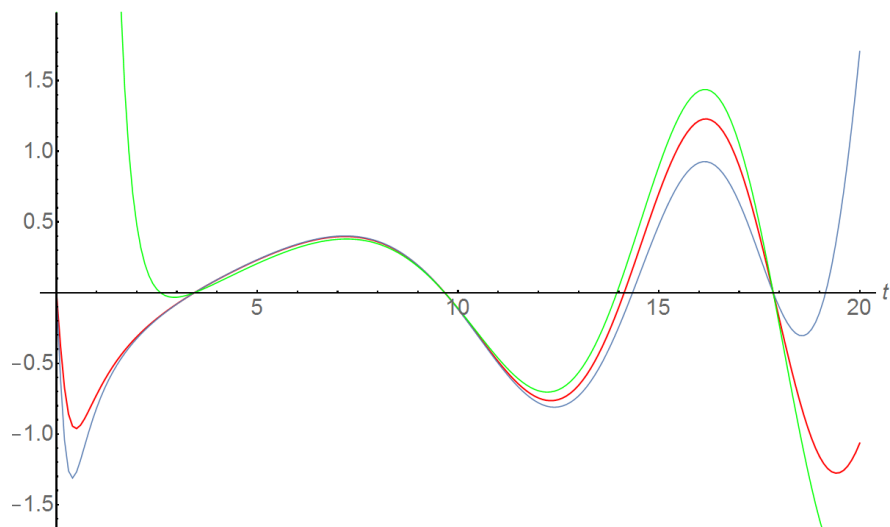


Рис. 13: Мнимые части $\zeta(1/2 + it)$ (в красном цвете), $\zeta_{\{3\}}^{\sim}(1/2 + it)$ (в синем цвете), и $\zeta_{\{3,5\}}^{\sim}(1/2 + it)$ (в зелёном цвете)

s	$ \zeta_{\{2\}}^{\sim}(s) - \zeta(s) $	$ \zeta_{\{2\}}^{\sim}(s)/\zeta(s) - 1 $
$1/2 + 0i$	$1.94225 \dots \cdot 10^{-6}$	$1.32998 \dots \cdot 10^{-6}$
$1/2 + 2i$	$4.62536 \dots \cdot 10^{-8}$	$8.57131 \dots \cdot 10^{-8}$
$1/2 + 4i$	$1.81570 \dots \cdot 10^{-8}$	$2.95916 \dots \cdot 10^{-8}$
$1/2 + 6i$	$1.93096 \dots \cdot 10^{-8}$	$2.13671 \dots \cdot 10^{-8}$
$1/2 + 8i$	$3.14745 \dots \cdot 10^{-8}$	$2.43467 \dots \cdot 10^{-8}$
$1/2 + 10i$	$6.49494 \dots \cdot 10^{-8}$	$4.19246 \dots \cdot 10^{-8}$
$1/2 + 12i$	$1.55574 \dots \cdot 10^{-7}$	$1.23482 \dots \cdot 10^{-7}$
$1/2 + 14i$	$4.12853 \dots \cdot 10^{-7}$	$3.90862 \dots \cdot 10^{-6}$
$1/2 + 16i$	$1.18039 \dots \cdot 10^{-6}$	$7.68213 \dots \cdot 10^{-7}$
$1/2 + 18i$	$3.57113 \dots \cdot 10^{-6}$	$1.52821 \dots \cdot 10^{-6}$
$1/2 + 20i$	$1.12929 \dots \cdot 10^{-5}$	$9.83842 \dots \cdot 10^{-6}$
$1/2 + 22i$	$3.70036 \dots \cdot 10^{-5}$	$3.76085 \dots \cdot 10^{-5}$
$1/2 + 24i$	$1.24835 \dots \cdot 10^{-4}$	$1.11950 \dots \cdot 10^{-4}$
$1/2 + 26i$	$4.31507 \dots \cdot 10^{-4}$	$3.02550 \dots \cdot 10^{-4}$
$1/2 + 28i$	$1.52258 \dots \cdot 10^{-3}$	$5.42051 \dots \cdot 10^{-4}$
$1/2 + 30i$	$5.46833 \dots \cdot 10^{-3}$	$9.17461 \dots \cdot 10^{-3}$
$1/2 + 32i$	$1.99431 \dots \cdot 10^{-2}$	$2.30077 \dots \cdot 10^{-2}$
$1/2 + 34i$	$7.37204 \dots \cdot 10^{-2}$	$4.39096 \dots \cdot 10^{-2}$
$1/2 + 36i$	$2.75783 \dots \cdot 10^{-1}$	$1.03710 \dots \cdot 10^{-1}$
$1/2 + 38i$	$1.04276 \dots \cdot 10^0$	$1.38626 \dots \cdot 10^0$
$1/2 + 40i$	$3.98095 \dots \cdot 10^0$	$3.04148 \dots \cdot 10^0$

Таблица 1: Приближение $\zeta(s)$ посредством $\zeta_{\{2\}}^{\sim}(s)$ на критической прямой

$$\begin{aligned}
0 &= \zeta_{\{2\}}^{\sim}(\rho_1 + 5.57515 \dots \cdot 10^{-7}i) \\
0 &= \zeta_{\{2\}}^{\sim}(\rho_2 - 1.81454 \dots \cdot 10^{-5}i) \\
0 &= \zeta_{\{2\}}^{\sim}(\rho_3 + 1.69882 \dots \cdot 10^{-4}i) \\
0 &= \zeta_{\{2\}}^{\sim}(\rho_4 - 5.48743 \dots \cdot 10^{-3}i) \\
0 &= \zeta_{\{2\}}^{\sim}(\rho_5 + 2.68272 \dots \cdot 10^{-2}i) \\
0 &= \zeta_{\{2\}}^{\sim}(\rho_6 - 3.23137 \dots \cdot 10^{-1}i)
\end{aligned}$$

Таблица 2: Нули $\zeta_{\{2\}}^{\sim}(s)$ в сравнении с нулями $\zeta(s)$

k	$ \zeta_{\{k\}}^{\approx}(s)/\zeta_{\text{single}}(s) - 1 $		
	$s = 1/2 + 10i$	$s = 1/2 + 100i$	$s = 1/2 + 1000i$
2	$1.65699 \dots \cdot 10^{-2}$	$9.99984 \dots \cdot 10^{-1}$	$9.99981 \dots \cdot 10^{-1}$
3	$4.12299 \dots \cdot 10^{-8}$	$1.55567 \dots \cdot 10^{-5}$	$1.85033 \dots \cdot 10^{-5}$
4	$7.11572 \dots \cdot 10^{-17}$	$6.29978 \dots \cdot 10^{-14}$	$1.12936 \dots \cdot 10^{-13}$
5	$1.47663 \dots \cdot 10^{-28}$	$1.91706 \dots \cdot 10^{-25}$	$5.96061 \dots \cdot 10^{-25}$
6	$4.40266 \dots \cdot 10^{-43}$	$6.78378 \dots \cdot 10^{-40}$	$3.70401 \dots \cdot 10^{-39}$
7	$2.05501 \dots \cdot 10^{-60}$	$3.43369 \dots \cdot 10^{-57}$	$3.13447 \dots \cdot 10^{-56}$
8	$1.57701 \dots \cdot 10^{-80}$	$2.74585 \dots \cdot 10^{-77}$	$3.91672 \dots \cdot 10^{-76}$
9	$2.05200 \dots \cdot 10^{-103}$	$3.65399 \dots \cdot 10^{-100}$	$7.59983 \dots \cdot 10^{-99}$
10	$4.62230 \dots \cdot 10^{-129}$	$8.33850 \dots \cdot 10^{-126}$	$2.37019 \dots \cdot 10^{-124}$
11	$1.82917 \dots \cdot 10^{-157}$	$3.32595 \dots \cdot 10^{-154}$	$1.21925 \dots \cdot 10^{-152}$
12	$1.28540 \dots \cdot 10^{-188}$	$2.34901 \dots \cdot 10^{-185}$	$1.05623 \dots \cdot 10^{-183}$
13	$1.61716 \dots \cdot 10^{-222}$	$2.96509 \dots \cdot 10^{-219}$	$1.56792 \dots \cdot 10^{-217}$
14	$3.66552 \dots \cdot 10^{-259}$	$6.73596 \dots \cdot 10^{-256}$	$4.04713 \dots \cdot 10^{-254}$
15	$1.50435 \dots \cdot 10^{-298}$	$2.76885 \dots \cdot 10^{-295}$	$1.83884 \dots \cdot 10^{-293}$
16	$1.12238 \dots \cdot 10^{-340}$	$2.06814 \dots \cdot 10^{-337}$	$1.48558 \dots \cdot 10^{-335}$
17	$1.52732 \dots \cdot 10^{-385}$	$2.81662 \dots \cdot 10^{-382}$	$2.15165 \dots \cdot 10^{-380}$
18	$3.80098 \dots \cdot 10^{-433}$	$7.01394 \dots \cdot 10^{-430}$	$5.62389 \dots \cdot 10^{-428}$
19	$1.73390 \dots \cdot 10^{-483}$	$3.20105 \dots \cdot 10^{-480}$	$2.66683 \dots \cdot 10^{-478}$
20	$1.45260 \dots \cdot 10^{-536}$	$2.68269 \dots \cdot 10^{-533}$	$2.30407 \dots \cdot 10^{-531}$
21	$2.23858 \dots \cdot 10^{-592}$	$4.13541 \dots \cdot 10^{-589}$	$3.63936 \dots \cdot 10^{-587}$
22	$6.35501 \dots \cdot 10^{-651}$	$1.17424 \dots \cdot 10^{-647}$	$1.05386 \dots \cdot 10^{-645}$
23	$3.32739 \dots \cdot 10^{-712}$	$6.14921 \dots \cdot 10^{-709}$	$5.60730 \dots \cdot 10^{-707}$
24	$3.21659 \dots \cdot 10^{-776}$	$5.94529 \dots \cdot 10^{-773}$	$5.49217 \dots \cdot 10^{-771}$

Таблица 3: Скорость стремления $\zeta_{\{k\}}^{\approx}(s)$ к пределу

s	$ \zeta_{\{2,3\}}^{\approx}(s) - \zeta(s) $	$ \zeta_{\{2,3\}}^{\approx}(s)/\zeta(s) - 1 $
$1/2 + 0i$	$6.02377 \dots \cdot 10^{-22}$	$4.12487 \dots \cdot 10^{-22}$
$1/2 + 5i$	$5.38402 \dots \cdot 10^{-26}$	$7.28690 \dots \cdot 10^{-26}$
$1/2 + 10i$	$5.18003 \dots \cdot 10^{-26}$	$3.34369 \dots \cdot 10^{-26}$
$1/2 + 15i$	$2.55120 \dots \cdot 10^{-25}$	$3.54362 \dots \cdot 10^{-25}$
$1/2 + 20i$	$2.46102 \dots \cdot 10^{-24}$	$2.14404 \dots \cdot 10^{-24}$
$1/2 + 25i$	$3.43060 \dots \cdot 10^{-23}$	$2.30668 \dots \cdot 10^{-21}$
$1/2 + 30i$	$6.03289 \dots \cdot 10^{-22}$	$1.01218 \dots \cdot 10^{-21}$
$1/2 + 35i$	$1.24477 \dots \cdot 10^{-20}$	$4.40396 \dots \cdot 10^{-21}$
$1/2 + 40i$	$2.88582 \dots \cdot 10^{-19}$	$2.20480 \dots \cdot 10^{-19}$
$1/2 + 45i$	$7.31064 \dots \cdot 10^{-18}$	$2.24508 \dots \cdot 10^{-18}$
$1/2 + 50i$	$1.98558 \dots \cdot 10^{-16}$	$5.82734 \dots \cdot 10^{-16}$
$1/2 + 55i$	$5.70413 \dots \cdot 10^{-15}$	$2.03480 \dots \cdot 10^{-15}$
$1/2 + 60i$	$1.71606 \dots \cdot 10^{-13}$	$2.92370 \dots \cdot 10^{-13}$
$1/2 + 65i$	$5.36597 \dots \cdot 10^{-12}$	$2.00290 \dots \cdot 10^{-11}$
$1/2 + 70i$	$1.73379 \dots \cdot 10^{-10}$	$1.76567 \dots \cdot 10^{-10}$
$1/2 + 75i$	$5.76208 \dots \cdot 10^{-9}$	$3.54233 \dots \cdot 10^{-9}$
$1/2 + 80i$	$1.96242 \dots \cdot 10^{-7}$	$9.96221 \dots \cdot 10^{-8}$
$1/2 + 85i$	$6.82866 \dots \cdot 10^{-6}$	$1.17520 \dots \cdot 10^{-5}$
$1/2 + 90i$	$2.42176 \dots \cdot 10^{-4}$	$6.98098 \dots \cdot 10^{-5}$
$1/2 + 95i$	$8.73556 \dots \cdot 10^{-3}$	$2.14919 \dots \cdot 10^{-2}$
$1/2 + 100i$	$3.19933 \dots \cdot 10^{-1}$	$1.18815 \dots \cdot 10^{-1}$

Таблица 4: Приближение $\zeta(s)$ посредством $\zeta_{\{2,3\}}^{\approx}(s)$ на критической прямой

$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_1 - 2.29568 \dots \cdot 10^{-25}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{17} - 5.77864 \dots \cdot 10^{-11}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_2 + 3.62117 \dots \cdot 10^{-24}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{18} + 2.48156 \dots \cdot 10^{-10}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_3 - 2.51602 \dots \cdot 10^{-23}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{19} - 5.31623 \dots \cdot 10^{-9}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_4 + 5.95114 \dots \cdot 10^{-22}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{20} + 1.79064 \dots \cdot 10^{-8}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_5 - 2.53882 \dots \cdot 10^{-21}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{21} - 4.65499 \dots \cdot 10^{-8}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_6 + 3.22663 \dots \cdot 10^{-20}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{22} + 5.88286 \dots \cdot 10^{-7}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_7 - 3.48515 \dots \cdot 10^{-19}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{23} - 2.61673 \dots \cdot 10^{-6}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_8 + 1.34061 \dots \cdot 10^{-18}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{24} + 2.13663 \dots \cdot 10^{-5}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_9 - 3.36688 \dots \cdot 10^{-17}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{25} - 4.74847 \dots \cdot 10^{-5}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{10} + 1.20365 \dots \cdot 10^{-16}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{26} + 4.80492 \dots \cdot 10^{-4}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{11} - 5.97840 \dots \cdot 10^{-16}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{27} - 4.57151 \dots \cdot 10^{-3}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{12} + 6.41995 \dots \cdot 10^{-15}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{28} + 9.64810 \dots \cdot 10^{-3}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{13} - 7.88649 \dots \cdot 10^{-14}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{29} - 3.80965 \dots \cdot 10^{-2}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{14} + 1.83482 \dots \cdot 10^{-13}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{30} + 3.69269 \dots \cdot 10^{-1}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{15} - 2.53547 \dots \cdot 10^{-12}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{31} - 1.13154 \dots \cdot 10^0i)$
$0 = \zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(\rho_{16} + 1.27228 \dots \cdot 10^{-11}i)$	

Таблица 5: Сравнение нулей $\zeta_{\{2,3\}}^{\sim}(s)$ и $\zeta(s)$

s	$ \zeta_{\{2,3,5\}}^{\approx}(s) - \zeta(s) $	$\zeta_{\{2,3,5\}}^{\approx}(s)/\zeta(s)$
$1/2 + 0i$	$1.18430 \dots \cdot 10^{-47}$	$1 + 8.10969 \dots \cdot 10^{-48}$
$1/2 + 10i$	$2.54817 \dots \cdot 10^{-54}$	$1 + 1.64483 \dots \cdot 10^{-54}$
$1/2 + 20i$	$3.06239 \dots \cdot 10^{-53}$	$1 - 2.66795 \dots \cdot 10^{-53}$
$1/2 + 30i$	$3.39201 \dots \cdot 10^{-51}$	$1 - 5.69102 \dots \cdot 10^{-51}$
$1/2 + 40i$	$9.33086 \dots \cdot 10^{-49}$	$1 + 7.12888 \dots \cdot 10^{-49}$
$1/2 + 50i$	$4.22232 \dots \cdot 10^{-46}$	$1 + 1.23918 \dots \cdot 10^{-45}$
$1/2 + 60i$	$2.61589 \dots \cdot 10^{-43}$	$1 - 4.45676 \dots \cdot 10^{-43}$
$1/2 + 70i$	$2.01188 \dots \cdot 10^{-40}$	$1 - 2.04888 \dots \cdot 10^{-40}$
$1/2 + 80i$	$1.81188 \dots \cdot 10^{-37}$	$1 - 9.19796 \dots \cdot 10^{-38}$
$1/2 + 90i$	$1.84013 \dots \cdot 10^{-34}$	$1 - 5.30436 \dots \cdot 10^{-35}$
$1/2 + 100i$	$2.05406 \dots \cdot 10^{-31}$	$1 - 7.62827 \dots \cdot 10^{-32}$
$1/2 + 110i$	$2.47448 \dots \cdot 10^{-28}$	$1 - 8.07755 \dots \cdot 10^{-29}$
$1/2 + 120i$	$3.17406 \dots \cdot 10^{-25}$	$1 + 1.12881 \dots \cdot 10^{-25}$
$1/2 + 130i$	$4.29117 \dots \cdot 10^{-22}$	$1 - 5.43068 \dots \cdot 10^{-22}$
$1/2 + 140i$	$6.06647 \dots \cdot 10^{-19}$	$1 + 1.41525 \dots \cdot 10^{-18}$
$1/2 + 150i$	$8.91220 \dots \cdot 10^{-16}$	$1 + 9.79245 \dots \cdot 10^{-15}$
$1/2 + 160i$	$1.35377 \dots \cdot 10^{-12}$	$1 + 5.61115 \dots \cdot 10^{-13}$

Таблица 6: Приближение $\zeta(s)$ посредством $\zeta_{\{2,3,5\}}^{\approx}(s)$ на критической прямой

$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_1 + 5.67820 \dots \cdot 10^{-54}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{21} + 4.35851 \dots \cdot 10^{-38}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_2 - 4.08437 \dots \cdot 10^{-53}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{22} - 5.11620 \dots \cdot 10^{-37}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_3 + 2.01719 \dots \cdot 10^{-52}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{23} + 2.19491 \dots \cdot 10^{-36}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_4 - 3.25594 \dots \cdot 10^{-51}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{24} - 1.70223 \dots \cdot 10^{-35}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_5 + 1.19140 \dots \cdot 10^{-50}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{25} + 3.68719 \dots \cdot 10^{-35}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_6 - 1.17471 \dots \cdot 10^{-49}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{26} - 3.49123 \dots \cdot 10^{-34}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_7 + 1.07931 \dots \cdot 10^{-48}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{27} + 3.21972 \dots \cdot 10^{-33}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_8 - 3.72612 \dots \cdot 10^{-48}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{28} - 6.62019 \dots \cdot 10^{-33}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_9 + 7.72201 \dots \cdot 10^{-47}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{29} + 2.56171 \dots \cdot 10^{-32}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{10} - 2.58114 \dots \cdot 10^{-46}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{30} - 1.65167 \dots \cdot 10^{-31}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{11} + 1.14295 \dots \cdot 10^{-45}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{31} + 1.32112 \dots \cdot 10^{-30}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{12} - 1.09281 \dots \cdot 10^{-44}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{32} - 5.17915 \dots \cdot 10^{-30}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{13} + 1.22608 \dots \cdot 10^{-43}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{33} + 1.10560 \dots \cdot 10^{-29}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{14} - 2.72864 \dots \cdot 10^{-43}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{34} - 3.24097 \dots \cdot 10^{-28}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{15} + 3.34054 \dots \cdot 10^{-42}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{35} + 6.92342 \dots \cdot 10^{-28}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{16} - 1.59057 \dots \cdot 10^{-41}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{36} - 2.12472 \dots \cdot 10^{-27}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{17} + 6.78187 \dots \cdot 10^{-41}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{37} + 6.79057 \dots \cdot 10^{-27}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{18} - 2.73787 \dots \cdot 10^{-40}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{38} - 3.42610 \dots \cdot 10^{-26}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{19} + 5.38962 \dots \cdot 10^{-39}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{39} + 3.70306 \dots \cdot 10^{-25}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{20} - 1.75803 \dots \cdot 10^{-38}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{40} - 1.69498 \dots \cdot 10^{-24}i)$

Таблица 7: Сравнение нулей $\zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(s)$ и $\zeta(s)$

$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{41} + 2.93163 \dots \cdot 10^{-24}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{61} + 2.33360 \dots \cdot 10^{-11}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{42} - 1.81053 \dots \cdot 10^{-23}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{62} - 1.08401 \dots \cdot 10^{-10}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{43} + 1.34992 \dots \cdot 10^{-22}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{63} + 7.07475 \dots \cdot 10^{-10}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{44} - 4.06376 \dots \cdot 10^{-22}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{64} - 1.00287 \dots \cdot 10^{-9}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{45} + 2.35905 \dots \cdot 10^{-21}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{65} + 7.51378 \dots \cdot 10^{-9}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{46} - 4.77463 \dots \cdot 10^{-21}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{66} - 2.99595 \dots \cdot 10^{-8}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{47} + 4.87993 \dots \cdot 10^{-20}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{67} + 9.22097 \dots \cdot 10^{-8}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{48} - 2.77954 \dots \cdot 10^{-19}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{68} - 3.63279 \dots \cdot 10^{-7}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{49} + 6.80893 \dots \cdot 10^{-19}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{69} + 9.11538 \dots \cdot 10^{-7}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{50} - 1.55880 \dots \cdot 10^{-18}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{70} - 3.47076 \dots \cdot 10^{-6}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{51} + 1.47916 \dots \cdot 10^{-17}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{71} + 8.38148 \dots \cdot 10^{-5}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{52} - 4.81368 \dots \cdot 10^{-17}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{72} - 1.73623 \dots \cdot 10^{-4}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{53} + 5.72027 \dots \cdot 10^{-16}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{73} + 2.52584 \dots \cdot 10^{-4}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{54} - 1.10793 \dots \cdot 10^{-15}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{74} - 7.17553 \dots \cdot 10^{-4}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{55} + 1.91999 \dots \cdot 10^{-15}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{75} + 9.19814 \dots \cdot 10^{-3}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{56} - 2.52625 \dots \cdot 10^{-14}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{76} - 2.28411 \dots \cdot 10^{-2}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{57} + 1.33245 \dots \cdot 10^{-13}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{77} + 1.09313 \dots \cdot 10^{-1}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{58} - 2.72538 \dots \cdot 10^{-13}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{78} - 3.34574 \dots \cdot 10^{-1}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{59} + 9.02654 \dots \cdot 10^{-13}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{79} + 9.36406 \dots \cdot 10^{-1}i)$
$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{60} - 3.04834 \dots \cdot 10^{-12}i)$	$0 = \zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(\rho_{80} - 1.95617 \dots \cdot 10^0i)$

Таблица 8: Сравнение нулей $\zeta_{\{2,3,5\}}^{\sim}(s)$ и $\zeta(s)$ (продолжение)

\mathfrak{P}	s	$ \zeta_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s)/\zeta(s) - 1 $
$\{2, 3, 5, 7\}$	$1/2 + 50i$	$1.00455 \dots \cdot 10^{-138}$
$\{2, 3, 5, 7\}$	$1/2 + 200i$	$1.12956 \dots \cdot 10^{-94}$
$\{2, 3, 5, 7\}$	$1/2 + 300i$	$1.86001 \dots \cdot 10^{-61}$
$\{2, 3, 5, 7\}$	$1/2 + 400i$	$1.02695 \dots \cdot 10^{-27}$
$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	$1/2 + 60i$	$5.16925 \dots \cdot 10^{-198}$
$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	$1/2 + 500i$	$3.07117 \dots \cdot 10^{-59}$
$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	$1/2 + 600i$	$2.36132 \dots \cdot 10^{-26}$
$\{2, 3, 5, 7, 11\}$	$1/2 + 650i$	$6.33362 \dots \cdot 10^{-9}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$	$1/2 + 600i$	$1.81960 \dots \cdot 10^{-186}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$	$1/2 + 900i$	$1.11201 \dots \cdot 10^{-85}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$	$1/2 + 1100i$	$1.29321 \dots \cdot 10^{-115}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$	$1/2 + 1300i$	$1.49327 \dots \cdot 10^{-48}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$	$1/2 + 2000i$	$3.58823 \dots \cdot 10^{-460}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$	$1/2 + 2400i$	$3.66150 \dots \cdot 10^{-325}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$	$1/2 + 2700i$	$8.55652 \dots \cdot 10^{-224}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$	$1/2 + 3200i$	$1.02893 \dots \cdot 10^{-55}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$	$1/2 + 3200i$	$9.24265 \dots \cdot 10^{-218}$
$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$	$1/2 + 3600i$	$6.39952 \dots \cdot 10^{-82}$

Таблица 9: Приближение $\zeta(s)$ посредством $\zeta_{\mathfrak{P}}^{\sim}(s)$ на критической прямой

\mathfrak{P}	$\xi_{\mathfrak{P}}^{\approx}(1/2) - \xi(1/2)$
$\{2\}$	$6.6116 \dots \cdot 10^{-7}$
$\mathfrak{P}_{\leq 2} \cup \{3\}$	$-2.0505 \dots \cdot 10^{-22}$
$\mathfrak{P}_{\leq 3} \cup \{5\}$	$4.0314 \dots \cdot 10^{-48}$
$\mathfrak{P}_{\leq 5} \cup \{6\}$	$4.24270 \dots \cdot 10^{-26}$
$\mathfrak{P}_{\leq 5} \cup \{7\}$	$-3.1921 \dots \cdot 10^{-137}$
$\mathfrak{P}_{\leq 7} \cup \{10\}$	$-3.73319 \dots \cdot 10^{-103}$
$\mathfrak{P}_{\leq 7} \cup \{11\}$	$9.3457 \dots \cdot 10^{-195}$
$\mathfrak{P}_{\leq 11} \cup \{12\}$	$6.29249 \dots \cdot 10^{-155}$
$\mathfrak{P}_{\leq 11} \cup \{13\}$	$-8.6580 \dots \cdot 10^{-349}$
$\mathfrak{P}_{\leq 13} \cup \{14\}$	$-2.37863 \dots \cdot 10^{-217}$
$\mathfrak{P}_{\leq 13} \cup \{15\}$	$-5.22982 \dots \cdot 10^{-256}$
$\mathfrak{P}_{\leq 13} \cup \{17\}$	$1.8573 \dots \cdot 10^{-438}$
$\mathfrak{P}_{\leq 17} \cup \{18\}$	$1.76772 \dots \cdot 10^{-381}$
$\mathfrak{P}_{\leq 17} \cup \{19\}$	$-1.5607 \dots \cdot 10^{-657}$
$\mathfrak{P}_{\leq 19} \cup \{20\}$	$-3.25279 \dots \cdot 10^{-476}$
$\mathfrak{P}_{\leq 19} \cup \{21\}$	$-2.41975 \dots \cdot 10^{-531}$
$\mathfrak{P}_{\leq 19} \cup \{22\}$	$-3.07818 \dots \cdot 10^{-589}$
$\mathfrak{P}_{\leq 19} \cup \{23\}$	$9.6956 \dots \cdot 10^{-1072}$
$\mathfrak{P}_{\leq 23} \cup \{24\}$	$1.31659 \dots \cdot 10^{-705}$
$\mathfrak{P}_{\leq 23} \cup \{26\}$	$1.41115 \dots \cdot 10^{-840}$
$\mathfrak{P}_{\leq 23} \cup \{28\}$	$1.42830 \dots \cdot 10^{-986}$
$\mathfrak{P}_{\leq 23} \cup \{29\}$	$-3.3405 \dots \cdot 10^{-1226}$
$\mathfrak{P}_{\leq 29} \cup \{30\}$	$-1.78128 \dots \cdot 10^{-1135}$
$\mathfrak{P}_{\leq 29} \cup \{31\}$	$3.6446 \dots \cdot 10^{-1771}$
$\mathfrak{P}_{\leq 31} \cup \{33\}$	$3.63944 \dots \cdot 10^{-1383}$
$\mathfrak{P}_{\leq 31} \cup \{34\}$	$6.28553 \dots \cdot 10^{-1474}$
$\mathfrak{P}_{\leq 31} \cup \{35\}$	$1.94048 \dots \cdot 10^{-1567}$
$\mathfrak{P}_{\leq 31} \cup \{36\}$	$1.07354 \dots \cdot 10^{-1663}$

Таблица 10: Решето эйлерова произведения