

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

# Распределение точек в компактных метрических пространствах, III. Двухточечно-однородные пространства

М. М. Скриганов

Санкт-Петербургское отделение  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

E-mail: maksim88138813@mail.ru

Мы продолжаем исследование, начатое в [28, 29], распределений конечных точечных подмножеств в компактных метрических пространствах. В настоящей работе рассматриваются точечные распределения в компактных связанных двухточечно-однородных пространствах. Все такие пространства известны. Это сферы, вещественные, комплексные и кватернионные проективные пространства и октонионная проективная плоскость.

Используя анализ Фурье и теорию сферических функций на таких пространствах, мы получаем предельно точные оценки для квадратичных уклонений точечных распределений и для сумм расстояний между точками распределений.

Используя особенности геометрии двухточечно-однородных пространств, мы показываем, что известный для сфер принцип инвариантности Столлярского обобщается на все проективные пространства.

Рассмотрены приложения к  $t$ -дизайнам и ядрам Леви–Шчнберга на двухточечно-однородных пространствах.

**Ключевые слова:** геометрия расстояний, равномерные распределения,  $t$ -дизайны, двухточечно-однородные пространства

ПРЕПРИНТЫ  
Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

PREPRINTS  
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР  
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Г. В. Кузьмина,  
Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецеваев, С. И. Репин,  
Г. А. Серегин, О. М. Фоменко

# Содержание

## **A. Основные результаты**

1. Уклонения и метрики
2. Сильный принцип инвариантности и точные оценки уклонений и сумм расстояний
3. Приложения к  $t$ -дизайнам
4. Замечания о ядрах Леви–Шнберга

## **B. Геометрия двухточечно-однородных пространств и сильный принцип инвариантности**

5. Модели проективных пространств и хордовые расстояния
6. Доказательство Теоремы 2.1
7. Доказательство Леммы 2.1

## **C. Анализ Фурье на двухточечно-однородных пространствах и точные оценки уклонений и сумм расстояний**

8. Коммутативные пространства и сферические функции
9. Разложения по сферическим функциям уклонений и метрик
10. Оценки коэффициентов Фурье–Якоби
11. Доказательства Теорем 2.2 и 3.1

Список литературы

## **A. Основные результаты**

### **1. Уклонения и метрики**

Пусть  $\mathcal{M}$  компактное связное метрическое пространство с фиксированными метрикой  $\theta$  и конечной борелевской мерой  $\mu$ , нормированными условиями

$$\text{diam}(\theta, \mathcal{M}) = \pi, \quad \mu(\mathcal{M}) = 1, \tag{1.1}$$

мы обозначаем через

$$\text{diam}(\rho, \mathcal{E}) = \sup\{\rho(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathcal{E}\} \tag{1.2}$$

диаметр подмножества  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}$  относительно метрики  $\rho$ .

Обозначим через  $B_r(y) = \{x : \theta(x, y) < r\}$  шар радиуса  $r \in [0, \pi]$  с центром  $y \in \mathcal{M}$  и объемом  $v_r(y) = \mu(B_r(y))$ . Поскольку, пространство

$\mathcal{M}$  связано, мы имеем  $\mathcal{R} = [0, \pi]$ , где  $\mathcal{R} = \{r = \rho(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathcal{M}\}$  множество всевозможных радиусов.

Пусть  $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{M}$  – конечное подмножество, состоящее из  $N$  точек (необязательно различных). *Локальное уклонение* подмножества  $\mathcal{D}_N$  в шаре  $B_r(y)$  определяется формулой

$$\begin{aligned}\Lambda[B_r(y), \mathcal{D}_N] &= \#\{B_r(y) \cap \mathcal{D}_N\} - Nv_r(y) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{D}_N} \Lambda(B_r(y), x),\end{aligned}\tag{1.3}$$

где

$$\Lambda(B_r(y), x) = \chi(B_r(y), x) - v_r(y),\tag{1.4}$$

и  $\chi(\mathcal{E}, x)$  обозначает характеристическую функцию подмножества  $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ .

*Квадратичные уклонения* определяются формулами

$$\lambda_r[\mathcal{D}_N] = \int_{\mathcal{M}} \Lambda[B_r(y), \mathcal{D}_N]^2 d\mu(y) = \sum_{x_1, x_2 \in \mathcal{D}_N} \lambda_r(x_1, x_2),\tag{1.5}$$

где

$$\lambda_r(x_1, x_2) = \int_{\mathcal{M}} \Lambda(B_r(y), x_1) \Lambda(B_r(y), x_2) d\mu(y)\tag{1.6}$$

и, если  $\eta(r)$ ,  $r \in [0, \pi]$  – неотрицательная весовая функция, то

$$\lambda[\eta, \mathcal{D}_N] = \int_0^\pi \lambda_r[\mathcal{D}_N] \eta(r) dr = \sum_{x_1, x_2 \in \mathcal{D}_N} \lambda(\eta, x_1, x_2),\tag{1.7}$$

где

$$\lambda(\eta, x_1, x_2) = \int_0^\pi \lambda_r(x_1, x_2) \eta(r) dr.\tag{1.8}$$

Величины  $\lambda_r[\mathcal{D}_N]^{1/2}$  и  $\lambda[\eta, \mathcal{D}_N]^{1/2}$  известны как  $L_2$ -уклонения. Нам удобнее иметь дело непосредственно с квадратичными уклонениями (1.5) и (1.7).

Введем следующую экстремальную величину

$$\lambda_N(\eta) = \inf_{\mathcal{D}_N} \lambda[\eta, \mathcal{D}_N],\tag{1.9}$$

где инфимум вычисляется по всем  $N$ -точечным подмножествам  $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{M}$ .

Для любой метрики  $\rho$  на  $\mathcal{M}$  положим

$$\rho[\mathcal{D}_N] = \sum_{x_1, x_2 \in \mathcal{D}_N} \rho(x_1, x_2) \quad (1.10)$$

и введем еще одну экстремальную величину

$$\rho_N = \sup_{\mathcal{D}_N} \rho[\mathcal{D}_N], \quad (1.11)$$

где супремум вычисляется по всем  $N$ -точечным подмножествам  $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{M}$ .

Обозначим через  $\langle \rho \rangle$  среднее значение метрики  $\rho$ ,

$$\langle \rho \rangle = \iint_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \rho(y_1, y_2) d\mu(y_1) d\mu(y_2). \quad (1.12)$$

Введем следующие *метрики симметричной разности* на пространстве  $\mathcal{M}$

$$\theta^\Delta(\eta, y_1, y_2) = \int_0^\pi \theta_r^\Delta(y_1, y_2) \eta(r) dr, \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_r^\Delta(y_1, y_2) &= \frac{1}{2} \mu(B_r(y_1) \Delta B_r(y_2)) \\ &= \frac{1}{2} \left( v_r(y_1) + v_r(y_2) - 2\mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2)) \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Здесь

$$B_r(y_1) \Delta B_r(y_2) = B_r(y_1) \cup B_r(y_2) \setminus B_r(y_1) \cap B_r(y_2) \quad (1.15)$$

– симметричная разность шаров  $B_r(y_1)$  и  $B_r(y_2)$ .

Метрику (1.14) удобно также записывать в терминах характеристических функций шаров. Из симметрии метрики  $\theta$  получаем следующую полезную формулу

$$\chi(B_r(y), x) = \chi(B_r(x), y) = \chi(r - \theta(x, y)) = \chi_r(\theta(x, y)) \quad (1.16)$$

где  $\chi(z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$  – характеристическая функция полуоси  $[0, \infty)$ , а  $\chi_r(\cdot)$  – характеристическая функция интервала  $[0, r]$ ,  $0 \leq r \leq \pi$ . Пользуясь (1.14), (1.15), (1.16), получаем

$$\begin{aligned} \theta_r^\Delta(y_1, y_2) &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \chi(B_r(y_1) \Delta B_r(y_2)) d\mu(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} [\chi(B_r(y_1), y) + \chi(B_r(y_2), y) - 2\chi(B_r(y_1), y)\chi(B_r(y_2), y)] d\mu(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |\chi(B_r(y_1), y) - \chi(B_r(y_2), y)| d\mu(y) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Для средних значений (1.12) метрик (1.14) и (1.13), находим

$$\langle \theta^\Delta(\eta) \rangle = \int_0^\pi \langle \theta_r^\Delta \rangle \eta^{(r)} dr, \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \langle \theta_r^\Delta \rangle &= \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \theta_r^\Delta(y_1, y_2) d\mu(y_1) d\mu(y_2) \\ &= \int_{\mathcal{M}} (v_r(y) - v_r(y)^2) d\mu(y) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Легко проверить, что симметричная разность любых двух подмножеств совпадает с симметричной разностью их дополнений. Поэтому метрику (1.14) можно также записать в виде

$$\begin{aligned} \theta_r^\Delta(y_1, y_2) &= \frac{1}{2} \mu(B'_r(y_1) \Delta B'_r(y_2)) \\ &= \frac{1}{2} \left( v'_r(y_1) + v'_r(y_2) - 2\mu(B'_r(y_1) \cap B'_r(y_2)) \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

где  $B'_r(y) = \mathcal{M} \setminus B_r(y)$  – дополнение шара  $B_r(y)$ , а

$$v'_r(y) = \mu(B'_r(y)) = 1 - v_r(y). \quad (1.21)$$

Формулу для среднего (1.19) можно записать в виде

$$\langle \theta_r^\Delta \rangle = \int_{\mathcal{M}} v_r(y) v'_r(y) d\mu(y) \quad (1.22)$$

В формуле (1.17) шары  $B_r(y)$  можно также заменять на их дополнения  $B'_r(y)$ .

Исследование экстремальных величин (1.9) и (1.11) является предметом теории равномерных распределений и, соответственно, геометрии расстояний, см. [?, 1, 2, 5, 6, 12, 27]. В нашей недавней работе [28] было показано, что нетривиальные результаты о величинах (1.9) и (1.11) могут быть получены для весьма общих метрических пространств. Приведем некоторые из результатов работы [28], которые понадобятся в настоящей работе.

Метрическое пространство  $\mathcal{M}$  называется *дистанционно-инвариантным*, если объем любого шара  $v_r = v_r(y)$  не зависит от  $y \in \mathcal{M}$ , см. [23].

Для таких пространств формулы для уклонений (1.5) и метрик симметричной разности (1.14) существенно упрощаются. Подставляя (1.14) в (1.6), получаем

$$\begin{aligned}\lambda_r(y_1, y_2) &= \int_{\mathcal{M}} \chi(B_r(y_1), y) \chi(B_r(y_2), y) d\mu(y) - v_r^2 \\ &= \mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2)) - v_r^2\end{aligned}\quad (1.23)$$

и, соответственно,

$$\lambda_r[\mathcal{D}_N] = \sum_{y_1, y_2 \in \mathcal{D}_N} \mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2)) - v_r^2 N^2. \quad (1.24)$$

Аналогично, формулы (1.14), (1.20) и (1.19), (1.22) приобретают вид

$$\begin{aligned}\theta_r^\Delta(y_1, y_2) &= v_r - \int_{\mathcal{M}} \chi(B_r(y_1), y) \chi(B_r(y_2), y) d\mu(y) \\ &= v_r - \mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2)), \\ &= v'_r - \mu(B'_r(y_1) \cap B'_r(y_2))\end{aligned}\quad (1.25)$$

и

$$\langle \theta_r^\Delta \rangle = v_r - v_r^2 = v_r v'_r \quad (1.26)$$

и, соответственно,

$$\theta_r^\Delta[\mathcal{D}_N] = v_r N^2 - \sum_{y_1, y_2 \in \mathcal{D}_N} \mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2)). \quad (1.27)$$

Интегрируя эти соотношения с весом  $\eta(r)$ ,  $r \in [0, \pi]$ , получим формулы для величин (1.7), (1.8), (1.13), (1.18), в случае дистанционно инвариантных пространств.

Типичными примерами дистанционно-инвариантных пространств являются однородные пространства  $\mathcal{M} = G/K$ , где  $G$  – компактная группа,  $K \subset G$  – замкнутая подгруппа, а  $\theta$  и  $\mu$  –  $G$ -инвариантные метрики и мера на  $\mathcal{M}$ . В этом случае величины (1.6), (1.8) и (1.13), (1.14) также, очевидно,  $G$ -инвариантны:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r(gy_1, gy_2) &= \lambda_r(y_1, y_2), \quad \lambda(\eta, gy_1, gy_2) = \lambda(\eta, y_1, y_2), \\ \theta_r^\Delta(gy_1, gy_2) &= \theta_r^\Delta(gy_1, gy_2), \quad \theta^\Delta(\eta, gy_1, gy_2) = \theta^\Delta(\eta, y_1, y_2), \\ \mu(B_r(gy_1) \cap B_r(gy_2)) &= \mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2)), \quad y_1, y_2 \in \mu, g \in G. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Сравнивая формулы (1.23)–(1.27), приходим к следующему утверждению.

**Теорема 1.1** (Слабый принцип инвариантности). *Пусть компактное метрическое пространство  $\mathcal{M}$  с метрикой  $\theta$  и мерой  $\mu$  является дистанционно-инвариантным. Тогда справедливы следующие равенства*

$$\lambda_r(y_1, y_2) + \theta_r^\Delta(y_1, y_2) = \langle \theta_r^\Delta \rangle, \quad (1.29)$$

$$\lambda(\eta, y_1, y_2) + \theta^\Delta(\eta, y_1, y_2) = \langle \theta^\Delta(\eta) \rangle, \quad (1.30)$$

$$\lambda(\eta, \mathcal{D}_N) + \theta^\Delta(\eta, \mathcal{D}_N) = \langle \theta^\Delta(\eta) \rangle N^2, \quad (1.31)$$

$$\lambda_N(\eta) + \theta_N^\Delta(\eta) = \langle \theta^\Delta(\eta) \rangle N^2. \quad (1.32)$$

Здесь  $r \in [0, \pi]$ , а  $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{M}$  – любое  $N$ -точечное подмножество. Равенства (1.30), (1.31) и (1.32) выполняются для любой весовой функции  $\eta$ , для которой сходятся интегралы (1.7), (1.8) и (1.13), (1.18).

Ясно что указанные интегралы сходятся для любой весовой функции  $\eta$  суммируемой на отрезке  $[0, \pi]$ . Далее в Лемме 2.1 (i) будут даны более общие условия сходимости этих интегралов для двухточечно-однородных пространств.

Указанная в Теореме 1.1 связь квадратичных уклонений и метрик симметричных разностей для дистанционно-инвариантных пространств была установлена в [28, Thm. 2.1]. Там же дано вероятностное обобщение принципа инвариантности на произвольные компактные метрические пространства, см. [28, Thm. 3.1], обсуждение этих результатов имеется также в [29].

В следующем разделе в Теореме 2.2 мы приведем сильный принцип инвариантности для двухточечно-однородных пространств. Наша терминология “слабый и сильный принцип инвариантности” будет объяснена в комментариях к Теореме 2.2.

Чтобы сформулировать следующий результат нам понадобится понятие  $d$ -спрямляемого метрического пространства  $\mathcal{M}$ , позволяющее сравнивать метрику и меру на  $\mathcal{M}$  с евклидовой метрикой и лебеговской мерой на  $\mathbb{R}^d$ , см. [26].

Компактное метрическое пространство  $\mathcal{M}$  с метрикой  $\theta$  и мерой  $\mu$  называется  $d$ -спрямляемым, если существуют мера  $\nu$  на  $d$ -мерном единичном кубе  $I^d = [0, 1]^d$  абсолютно непрерывная относительно  $d$ -мерной меры Лебега на  $I^d$ , измеримое подмножество  $\mathcal{O} \subset I^d$  и инъективное липшицевское отображение  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}$ , такие что  $\mu(\mathcal{M} \setminus f(\mathcal{O})) = 0$  и  $\mu(\mathcal{E}) = \nu(f^{-1}(\mathcal{E} \cap f(\mathcal{O})))$ .

Напомним, что отображение  $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}$  называется липшицевским, если

$$\theta(f(z_1), f(z_2)) \leq C\|z_1 - z_2\|, \quad z_1, z_2 \in \mathcal{O}, \quad (1.33)$$

с некоторой постоянной  $C$ , наименьшая такая постоянная называется липшицевской постоянной отображения  $f$  и обозначается  $\text{Lip}(f)$ ; в (1.33)  $\|\cdot\|$  – евклидово расстояние в  $\mathbb{R}^d$ .

Следующий результат был доказан в [28, Thm.4.2].

**Теорема 1.2.** *Пусть компактное метрическое пространство  $\mathcal{M}$  с метрикой  $\theta$  и мерой  $\mu$  является  $d$ -спрямляемым. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) *Если метрика  $\rho$  на  $\mu$  удовлетворяет неравенству*

$$\rho(y_1, y_2) \leq c_0\theta(y_1 y_2) \quad (1.34)$$

*с постоянной  $c_0 > 0$ , то справедлива оценка*

$$\rho_N \geq \langle \rho \rangle N^2 - c_0 C N^{1-\frac{1}{d}}. \quad (1.35)$$

(ii) *Если метрика  $\theta^\Delta(\eta)$  удовлетворяет неравенству*

$$\theta^\Delta(\eta, y_1, y_2) \leq c_0\theta(y_1, y_2) \quad (1.36)$$

*с постоянной  $c_0$ , то справедливы оценки*

$$\theta_N^\Delta(\eta) \geq \langle \theta^\Delta(\eta) \rangle N^2 - c_0 C N^{1-\frac{1}{d}} \quad (1.37)$$

*u*

$$\lambda_N(\eta) \leq c_0 C N^{1-\frac{1}{d}}. \quad (1.38)$$

*B* (1.35), (1.37) *u* (1.38) *постоянная*  $C = d2^{d-1} \text{Lip}(f)$ , *где*  $\text{Lip}(f)$  – *липшицевская постоянная отображения*  $f$  *в определении*  $d$ -*спрямляемого пространства*  $\mathcal{M}$ .

Любое гладкое (или кусочно-гладкое) компактное  $d$ -мерное многообразие является  $d$ -спрямляемым, если в локальных координатах соответствующая метрика удовлетворяет условию (1.33), а мера является абсолютно непрерывной относительно  $d$ -мерной меры Лебега. В частности, любое компактное  $d$ -мерное риманово многообразие с геодезическим расстоянием  $\theta$  и римановой мерой  $\mu$  является  $d$ -спрямляемым. В это случае известно, что условие (1.33) выполняется, см. [22, Chap. I, Proposition 9.10], а условие на меру очевидно, поскольку метрический тензор непрерывен.

Приведенная в Теорема 1.2 оценка (1.35) не является предельно точной в случае общих метрик даже для римановых многообразий. Соответствующий контрпример указан в следующем разделе, см. формулу (2.22).

В то же время, мы покажем в настоящей работе, что оценки (1.37) для метрик симметричной разности и оценки (1.38) для квадратичных уклонений являются предельно точными в случае компактных связанных двухточечно-однородных пространств (римановых симметричных многообразий ранга один).

Следует отметить, что Теорема 1.2 гарантирует существование хорошо распределенных точечных подмножеств на всех компактных спрямляемых пространствах. Явное построение таких точечных подмножеств является весьма нетривиальной и трудной проблемой. Для сфер явные конструкции равномерно распределенных точечных подмножеств даны в работе [25].

## 2. Принципы инвариантности и точные оценки уклонений и сумм расстояний

В этом разделе мы сформулируем и обсудим наши основные результаты о сильном принципе инвариантности и предельно точных оценках уклонений и сумм расстояний для двухточечно-однородных пространств.

Напомним сначала определение и некоторые факты о двухточечно-однородных пространствах нужные для формулировки наших результатов. Их подробное изложение можно найти в книгах [21, 22, 33, 34]. Дополнительные факты о геометрии и анализе Фурье на таких пространствах будут приведены в разделах 5 и 8, там же будут указаны дополнительные литературные ссылки.

Пусть  $G = G(\mathcal{M})$  – группа изометрий метрического пространства  $\mathcal{M}$  с метрикой  $\theta$ , т.е.  $\theta(gx_1, gx_2) = \theta(x_1, x_2)$  для всех  $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$  и  $g \in G$ . Пространство  $\mathcal{M}$  называется *двуточечно-однородным*, если для любых двух пар точек  $x_1, x_2$  и  $y_1, y_2$  с  $\theta(x_1, x_2) = \theta(y_1, y_2)$  существует изометрия  $g \in G$ , такая что  $y_1 = gx_1$ ,  $y_2 = gx_2$ . Очевидно, что в этом случае группа  $G$  транзитивна на  $\mathcal{M}$  и  $\mathcal{M} = G/K$  является однородным пространством, где подгруппа  $K \subset G$  – стабилизатор некоторой точки  $x_0 \in \mathcal{M}$ . Более того, однородное пространство  $\mathcal{M}$  симметрично, т.е. для любых двух точек  $y_1, y_2 \in \mathcal{M}$  существует изометрия  $g \in G$ , такая что  $gy_1 = y_2$ ,  $gy_2 = y_1$ .

Мы рассматриваем компактные связанные двухточечно-однородные пространства. Известно, что для таких пространств группы  $G$  и  $K \subset G$  являются группами Ли, а  $\mathcal{M} = G/K$  являются компактными римановыми симметричными многообразиями ранга один. Все такие пространства полностью классифицированы, см. [33, Sec. 8.12]. Вот их список:

- (i)  $d$ -мерные сферы  $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ,  $S^d = SO(d+1)/SO(d) \times \{1\}$ ,  $d \geq 2$ , и  $S^1 = O(2)/O(1) \times \{1\}$ .
- (ii) вещественные проективные пространства  $\mathbb{R}P^n = O(n+1)/O(n) \times O(1)$ ,
- (iii) комплексные проективные пространства  $\mathbb{C}P^n = U(n+1)/U(n) \times U(1)$ ,
- (iv) Кватернионные проективные пространства  $\mathbb{H}P^n = Sp(n+1)/SP(n) \times Sp(1)$ ,
- (v) октонионная проективная плоскость  $\mathbb{O}P^2 = F_4/\text{Spin}(9)$ .

Здесь используются стандартные обозначения теории групп Ли, в частности,  $F_4$  – одна из исключительных простых групп Ли в классификации Картана, см. [21, 22, 33, 34].

Вещественная размерность указанных выше проективных пространств определяется формулой

$$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}P^n = nd_0, \quad d_0 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}, \tag{2.1}$$

$d_0 = 1, 2, 4, 8$  для  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ , соответственно.

Для сфер  $S^d$  мы положим по определению  $d_0 = d$ . Проективные пространства размерности  $d_0$  (т.е.  $n = 1$ ) изоморфны  $d_0$ -мерным сферам. Удобно, поэтому, считать, что для проективных пространств  $d > d_0$  (т.е.  $n \geq 2$ ), а равенство  $d = d_0$  выполняется только для сфер. С учетом этого соглашения, размерности  $d = nd_0$  и  $d_0$  однозначно (с точностью до изоморфизма) определяют соответствующее двуточечно-однородное пространство, которое мы будем обозначать через  $Q = Q(d, d_0)$ . Через  $\theta$  обозначается геодезическое расстояние, а через  $\mu$  риманова мера на  $Q(d, d_0)$ . Метрика  $\theta$  и мера  $\mu$  инвариантны относительно действия соответствующей группы изометрий и нормированы условиями (1.1).

Любое пространство  $Q(d, d_0)$  является дистанционно-инвариантным и объем шара в таком пространстве определяется формулой

$$\left. \begin{aligned} v_r &= \kappa(d, d_0) \int_0^r w(d, d_0, u) du, \quad r \in [0, \pi], \\ \kappa(d, d_0, u) &= (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1}, \\ \kappa(d, d_0) &= B(d/2, d_0/2)^{-1} = \frac{\Gamma(d/2 + d_0/2)}{\Gamma(d/2)\Gamma(d_0/2)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Здесь  $B(\cdot, \cdot)$  и  $\Gamma(\cdot)$  – бэта и гамма функции. При такой нормировке  $v_\pi = \mu(Q(d, d_0)) = 1$ . Следует иметь в виду, что различные авторы записывают эту формулу по-разному, см. [?, pp. 165–168], [19, pp. 177–178], [23, pp. 508–510]. Эквивалентность этих записей легко проверяется.

Размерности  $d$  и  $d_0$  определяют, в частности, поведение объема шара  $B_r(y) \subset Q(d, d_0)$  в окрестностях точек  $r = 0$  и  $r = \pi$ . Из формулы (2.2) непосредственно следует

$$v_r \simeq r^d, \quad v'_r = 1 - v_r \simeq (\pi - r)^{d_0}, \quad r \in [0, \pi]. \quad (2.3)$$

Фактически, здесь имеют место асимптотики для  $v_r$  и  $v'_r$  при  $r \rightarrow 0$  и  $\pi$ , но для наших целей достаточно только двусторонних оценок (2.3).

Для упрощения обозначений мы будем иногда писать  $A \lesssim B$  и  $A \gtrsim B$  вместо  $A = O(B)$  и, соответственно,  $B = O(A)$ ; мы пишем  $A \simeq B$ , если одновременно  $A = O(B)$  и  $B = O(A)$ . Также мы обозначаем через  $C$  и  $c$  различные достаточно большие и, соответственно, достаточно малые положительные постоянные и указываем, при необходимости, их зависимость или независимость от дополнительных параметров.

Введем важное для нас понятие *хордовой метрики* на пространствах  $Q(d, d_0)$ . Положим

$$\tau(x_1, x_2) = \sin \frac{1}{2}\theta(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in Q(d, d_0). \quad (2.4)$$

Это метрика, поскольку функция  $\varphi(\theta) = \sin \theta/2$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , вогнутая; возрастающая и  $\varphi(0) = 0$ , что влечет неравенство треугольника.

Для сферы  $S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$  мы, очевидно, имеем

$$\begin{aligned} \cos \theta(x_1, x_2) &= (x_1, x_2), x_1, x_2 \in S^d \\ \tau(x_1, x_2) &= \sin \theta(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение, а  $\|\cdot\|$  – евклидово расстояние в  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

Проективные пространства  $\mathbb{F}P^n$  также допускают вложение в единичную сферу

$$\Pi : Q(d, d_0) \ni x \rightarrow \Pi(x) \in S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m, \quad m = \frac{1}{2}(n+1)(d+2), \quad (2.6)$$

при этом

$$\tau(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\|\Pi(x_1) - \Pi(x_2)\|, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{F}P^n, \quad (2.7)$$

где  $\|\cdot\|$  – евклидово расстояние в  $\mathbb{R}^{m+1}$ .

Таким образом,  $\tau(x_1, x_2)$  совпадает с евклидовой длиной хорды соединяющей соответствующие точки нормированной условием  $\text{diam}(\tau, Q(d, d_0)) = 1$ .

Вложение (2.6) будет описано в разделе 5.

Отметим, что для комплексных проективных пространств  $\mathbb{C}P^n$  хордовая метрика совпадает (с точностью до постоянного множителя) с метрикой Фубини–Штуди. В связи с исследованиями специальных точечных конфигураций в двухточечно-однородных пространствах хордовая метрика для проективных пространств обсуждается в работах [13, 14], см. также работу [15], где хордовая метрика определена для гравитационных многообразий.

Мы можем теперь сформулировать основные результаты настоящей работы.

Анализ вложений (2.6) приводит к следующему утверждению.

**Теорема 2.1.** Для любого пространства  $Q = Q(d, d_0)$  хордовая метрика (2.4) и метрика симметричной разности (1.13) связаны соотношением

$$\tau(x_1, x_2) = \gamma(Q)\theta^\Delta(\eta^\natural, x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in Q, \quad (2.8)$$

где  $\eta^\natural(r) = \sin r$ ,  $r \in [0, \pi]$ , и

$$\gamma(Q) = \frac{\langle \tau \rangle}{\langle \theta^\Delta(\eta^*) \rangle} = \frac{\text{diam}(\tau, Q)}{\text{diam}(\theta^\Delta(\eta^*), Q)}. \quad (2.9)$$

Теорема 2.1 будет доказана в разделе 6.

Отметим, что равенства (2.9) непосредственно вытекают из (2.8). Достаточно вычислить среднее (1.12) от обеих метрик в (2.8) чтобы получить первое равенство в (2.9) и записать равенство (2.8) для любой пары антиподальных точек  $x_1, x_2$ ,  $\theta(x_1, x_2) = \pi$ , чтобы получить второе равенство в (2.9).

Сравнивая Теоремы 1.1 и 2.1, приходим к следующему утверждению.

**Следствие 2.1** (Сильный принцип инвариантности). Для любого пространства  $Q = Q(d, d_0)$  справедливо соотношение

$$\gamma(Q)\lambda[\eta^\natural, \mathcal{D}_N] + \tau[\mathcal{D}_N] = \langle \tau \rangle N^2, \quad (2.10)$$

где  $\mathcal{D}_N \subset Q$  – произвольное  $N$ -точечное подмножество.

В частности, для любого  $N$  справедливо равенство

$$\gamma(Q)\lambda_N(\eta^\natural) + \tau_N = \langle \tau \rangle N^2. \quad (2.11)$$

Отметим, что для сферы  $S^d$  уклонение  $\lambda[\eta^\natural, \mathcal{D}_N]$  со специальной весовой функцией  $\eta^\natural(r) = \sin r$  может быть записано в виде

$$\lambda[\eta^\natural, \mathcal{D}_N] = \int_{-1}^1 dz \int_{\mathcal{M}} [\#\{B(y, z) \cap \mathcal{D}_N\} - N\mu(B(y, z))]^2 d\mu(y), \quad (2.12)$$

где  $\mu$  – стандартная нормализованная  $d$ -мерная мера на  $S^d$ , а

$$B(y, z) = \{x \in S^d : \cos \theta(x, y) \geq z\}, \quad y \in S^d, z \in [-1, 1], \quad (2.13)$$

– “сферическая шапочка”, при этом  $B(y, z) = B_r(y)$ ,  $z = \cos r$ .

Для сфер сильный принцип инвариантности (2.10) был установлен Столлярским [30], см. также работы [8, 11], где доказательство этого соотношения было существенно упрощено.

Следствие 2.1 является обобщением принципа инвариантности Столлярского на проективные пространства.

Напомним, что метрическое пространство  $\mathcal{M}$  с метрикой  $\rho$  называется изометрически  $L_q$ -вложимым, если существует отображение  $\varphi : \mathcal{M} \ni x \rightarrow \varphi(x) \in L_q$ , такое что  $\rho(x_1, x_2) = \|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\|_{L_q}$  для всех  $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ . Двумерно-однородное пространство  $Q$  является изометрически  $L_1$ -вложимым с любой метрикой  $\theta^\Delta(\eta)$ , см. (1.17), и  $L_2$ -вложимым с хордовой метрикой  $\tau$ , см. (2.5), (2.7). Известно, см. [17, Sec. 6.3], что  $L_2$ -вложимость сильнее и влечет  $L_1$ -вложимость. Это объясняет использованную нами терминологию.

Было бы весьма интересно выяснить, существуют ли весовые функции  $\eta \neq \eta^\sharp$  для которых пространства  $Q$  с метрикой  $\theta^\Delta(\eta)$  также являются  $L_2$ -вложимыми.

Теперь мы рассмотрим оценки для экстремальных величин (1.9) и (1.11). Сначала сформулируем в Лемме 2.1 важные вспомогательные результаты.

Введем следующие классы весовых функций  $\eta(r)$ ,  $r \in [0, \pi]$ ,

$$\left. \begin{aligned} W(a, b) &= \{\eta \geq 0 : \|\eta\|_{a,b} < \infty\}, \quad a \geq b \geq 1, \\ \|\eta\|_{a,b} &= \int_0^{\pi} (\sin \frac{1}{2}r)^{a-1} (\cos \frac{1}{2}r)^{b-1} \eta(r) dr. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Весовые функции в классах (2.14) могут иметь довольно большие сингулярности при  $r = 0$  и  $r = \pi$ .

**Лемма 2.1.** Для любого пространства  $Q(d, d_0)$  справедливы следующие утверждения:

(i) ядро (1.6) и метрика (1.14) удовлетворяют оценкам

$$\left. \begin{aligned} |\lambda_r(y_1, y_2)| &\leq C(\sin \frac{1}{2}r)^d (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0}, \\ \theta_r^\Delta(y_1, y_2) &\leq C(\sin \frac{1}{2}r)^d (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0}. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Если  $\eta \in W(d+1, d_0+1)$ , то ядро (1.8) и метрика (1.13) удовлетворяют

оценкам

$$\left. \begin{aligned} |\lambda(\eta, y_1, y_2)| &\leq C\|\eta\|_{d+1,d_0+1}, \\ \theta^\Delta(\eta, y_1, y_2) &\leq C\|\eta\|_{d+1,d_0+1}. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

(ii) Метрика (1.14) удовлетворяет оценке

$$\theta_r^\Delta(y_1, y_2) \leq C(\sin \frac{1}{2}r)^{d-1}(\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1}\theta(y_1, y_2). \quad (2.17)$$

Если  $\eta \in W(d, d_0)$ , то метрика (1.13) удовлетворяет оценке

$$\theta^\Delta(\eta, y_1, y_2) \leq C\|\eta\|_{d,d_0}\theta(y_1, y_2). \quad (2.18)$$

Постоянны в оценках (2.15), (2.16), (2.17) и (2.18) зависят только от  $d$  и  $d_0$ .

Лемма 2.1 доказана в разделе 7.

Из Леммы 2.1 следует, что слабые принципы инвариантности (1.30), (1.31) и (1.32) в Теореме 1.1 выполняются для всех весовых функций  $\eta \in W(d+1, d_0+1)$ .

Наш результат об оценках экстремальных величин (1.9) и (1.11) формулируется так

**Теорема 2.2.** Для любого пространства  $Q(d, d_0)$  справедливо следующее утверждение. Если  $\eta \in W(d, d_0)$ ,  $\eta \neq 0$ , то при любом  $N$  выполняются оценки

$$\langle \theta^\Delta(\eta) \rangle N^2 - c(\eta)N^{1-\frac{1}{d}} > \theta_N^\Delta(\eta) > \langle \theta^\Delta(\eta) \rangle N^2 - C(\eta)N^{1-\frac{1}{d}}, \quad (2.19)$$

$$c_1(\eta)N^{1-\frac{1}{d}} < \lambda_N(\eta) < C_1(\eta)N^{1-\frac{1}{d}} \quad (2.20)$$

с положительными постоянными независящими от  $N$ .

В частности, для хордовой метрики  $\tau$  на  $Q(d, d_0)$  выполняются оценки

$$\langle \tau \rangle N^2 - cN^{1-\frac{1}{d}} > \tau_N > \langle \tau \rangle N^2 - CN^{1-\frac{1}{d}} \quad (2.21)$$

с положительными постоянными  $c = c(\eta^\sharp)$  и  $C = C(\eta^\sharp)$ .

Теорема 2.2 будет доказана в разделе 11.

Правые оценки в (2.19) и (2.20) непосредственно вытекают из Теоремы 1.2 (ii) и Леммы 2.1 (ii). В разделе 11 мы докажем левую оценку в (2.20). Отсюда, в силу принципа инвариантности (1.32), следует и левая

оценка в (2.19). Доказательство левой оценки в (1.20) основано на анализе Фурье и теории сферических функций для однородных пространств  $Q(d, d_0)$ . Относящиеся сюда необходимые факты изложены в разделах 8 и 9.

Для хордовой метрики  $\tau$  на сфере  $S^d$  оценки (2.21) были известны ранее. Правая оценка в (2.21) была установлена Александром [1], а левая Беком [5], см. также [6]. В подходе Бека была доказана левая оценка в (2.20) для квадратичных уклонений на сфере со специальной весовой функцией  $\eta^\sharp$ , см. (2.12), что в сочетании с принципом инвариантности Столлярского влечет левую оценку в (2.21) для сферической хордовой метрики. Отметим, что в работах [5, 6] также используется анализ Фурье. Однако, благодаря простой геометрии сфер  $S^d$  как подмногообразий в  $\mathbb{R}^{d+1}$  было возможным ограничиться стандартным анализом Фурье на  $\mathbb{R}^{d+1}$ .

По Теореме 1.2 (i) оценка (1.35) является универсальной на пространствах  $Q$  для всех метрик  $\rho$  липшицевски непрерывных относительно геодезического расстояния  $\theta$ . Следует, однако, иметь в виду, что не все такие метрики удовлетворяют двусторонним оценкам типа (2.19). Например, для геодезического расстояния  $\theta$  на сферах  $S^d$  справедливо такое соотношение

$$\theta_N = \langle \theta \rangle N^2 - \varepsilon_N, \quad \langle \theta \rangle = \frac{1}{2}\pi, \quad (2.22)$$

где  $\varepsilon_N = 0$  для четных  $N$  и  $0 \leq \varepsilon_N \leq \pi/2$  для нечетных  $N$ . Как гипотеза это соотношение было сформулировано Феешем Тотом и доказано в [?] и [?], соответственно для четных и нечетных  $N$ .

В разделах 4 и 9 мы обсудим этот пример подробнее и дадим его очень простые доказательства, основанные на принципе инвариантности и разложении метрики  $\theta$  по сферическим функциям.

В заключение этого раздела обратим внимание на следующее. Некомпактные связанные двухточечно-однородные пространства  $Q = G/K$  также полностью классифицированы, см. [33, Sec. 8.12]. Разумеется, для таких пространств задачи исследования уклонений и сумм расстояний для конечных точечных подмножеств не являются корректно поставленными. Однако, можно рассмотреть пространства двойных классов смежности  $\mathcal{M} = \Gamma \setminus Q = \Gamma \setminus G/K$ , где  $\Gamma \subset G$  – дискретная подгруппа группы изометрий, такая что инвариантная мера  $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ . В этом случае экстремальные уклонения (1.9) и экстремальные суммы расстояний (1.11) для метрик симметричной разности (1.13), (1.14) определены

и их исследование является весьма интересной задачей. Особенно интересным оказывается случай некомпактных пространств  $\mathcal{M}$  с конечной инвариантной мерой  $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ . Подробное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

### 3. Приложения к $t$ -дизайнам

В литературе описаны различные специальные точечные конфигурации на сферах и других двухточечно-однородных пространствах, см., например, [12, 27] и приведенную там библиографию. Насколько равномерно распределены точки таких специальных конфигураций с соответствующими пространствах? Что можно сказать о квадратичных уклонениях (1.7) и суммах расстояний (1.10) для таких точечных подмножеств?

В настоящей работе мы рассмотрим эти вопросы для  $t$ -дизайнов. Напомним, что  $N$ -точечное подмножество  $\mathcal{D}_N \subset S^d$  называется *сферическим  $t$ -дизайном*, если точная квадратурная формула

$$\sum_{x \in \mathcal{D}_N} F(x) = N \int_{S^d} F(y) d\mu(y) \quad (3.1)$$

выполняется для всех однородных полиномов  $F(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^{d+1}$  степени, не превосходящей  $t$ . Обобщение этого понятия на компактные двухточечно-однородные пространства подробно обсуждается в обзорных работах [4, 23]. В этом случае  $N$ -точечное подмножество  $D_N \subset Q(d, d_0)$  называется  *$t$ -дизайном*, если точная квадратурная формула

$$\sum_{x_1, x_2 \in \mathcal{D}_N} f(\cos \theta(x_1, x_2)) = N^2 \iint_{Q \times Q} f(\cos \theta(t_1, y_2)) d\mu(y_1) d\mu(y_2) \quad (3.2)$$

выполняется для всех полиномов  $f(z)$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , степени не превосходящей  $t$ .

Условие (3.2) можно записать в различных эквивалентных формах, например, как точную квадратурную формулу

$$\sum_{x \in \mathcal{D}_N} f(\cos \theta(x, y_1)) = N \int_Q f(\cos \theta(y_1, y_2)) d\mu(y) \quad (3.3)$$

которая выполняется для всех  $y_1, y_2 \in Q$ . Можно сформулировать определение  $t$ -дизайнов и в терминах сферических функций на однородных пространствах  $Q(d, d_0)$ . Мы вернемся к этим вопросам в разделе 8, см. (8.35).

Интегралы в правых частях (3.2) и (3.3) равны. Это легко следует из определения двухточечно-однородных пространств. Будем писать для краткости

$$\langle f \rangle_Q = \int_Q f(\cos \theta(y, y_2)) d\mu(y) = \iint_{Q \times Q} f(\cos(y_1, y_2)) d\mu(y_1) d\mu(y_2). \quad (3.4)$$

Из (2.2) следует такая формула

$$\langle f \rangle_Q = B(d/2, d_0/2)^{-1} \int_0^\pi f(\cos \theta) (\sin \frac{1}{2}\theta)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}\theta)^{d_0-1} d\theta. \quad (3.5)$$

Для  $N$ -точечных  $t$ -дизайнов  $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$  известны так называемые универсальные оценки, см. [23, р. 520], из которых следует, что  $N \geq ct^d$  с постоянной  $c > 0$  не зависящей от  $N$  и  $t$ .

Назовем  $N$ -точечные  $t$ -дизайны  $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$  оптимальными, если

$$c_+ t^d \geq N \geq c_- t^d \quad (3.6)$$

с некоторыми положительными постоянными  $c_+$  и  $c_-$  независящими от  $N$ . Фактически рассматриваются последовательности точечных подмножеств  $\mathcal{D}_N$  с  $N \rightarrow \infty$ .

Для любого  $N$ -точечного подмножества  $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$  положим

$$\nu[\mathcal{D}_N, r] = \max_{y \in Q} \#\{B_r(y) \cap \mathcal{D}_N\}, \quad r \in [0, \pi], \quad (3.7)$$

удобно также считать, что  $\nu[\mathcal{D}_N, r] = N$  при  $r > \pi$ .

Наш результат о  $t$ -дизайнах формулируется так.

**Теорема 3.1.** *Пусть весовая функция  $\eta \in W(d, d_0)$ , тогда справедливы следующие оценки.*

(i) *Существует постоянная  $L \geq 1$ , зависящая только от  $d$  и  $d_0$ , такая что для любого  $N$ -точечного  $t$ -дизайна  $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$  с  $t \geq 2L/\pi$  справедлива оценка*

$$\lambda[\eta, \mathcal{D}_N] < Ct^{d-1}(\nu[\mathcal{D}_N, Lt^{-1}])^2. \quad (3.8)$$

(ii) Для оптимальных  $t$ -дизайнов  $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$  оценка (3.8) приобретает вид

$$\lambda[\eta, \mathcal{D}_N] < CN^{1-\frac{1}{d}}(\nu[\mathcal{D}_N, c_+^{-1/d}LN^{-1/d}])^2, \quad (3.9)$$

где  $c_+$  – постоянная из определения (3.6).

Постоянные  $C$  в оценках (3.8) и (3.9) зависят только от  $d, d_0$  и  $\eta$ .

Теорема 3.1 будет доказана в разделе 11. Ясно, что оценка (3.9) непосредственно вытекает из (3.8) и определения (3.6). Доказательство оценки (3.8) основано на анализе Фурье и теории сферических функций на пространствах  $Q(d, d_0)$ .

Для произвольного  $N$ -точечного подмножества  $\mathcal{D}_N \subset (d, d_0)$  положим

$$\delta[\mathcal{D}_N] = \frac{1}{2} \min\{\theta(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathcal{D}_N, x_1 \neq x_2\} \quad (3.10)$$

Таким образом, шары  $B_\delta(x), \delta = \delta[\mathcal{D}_N], x \in \mathcal{D}_N$ , не пересекаются и, следовательно,  $v_\delta N \leq 1$ . Ввиду (2.3), получаем  $\delta \lesssim N^{-1/d}$ .

$N$ -точечное подмножество  $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$  называется *хорошо разделенным*, если  $\delta[\mathcal{D}_N] \geq cN^{-1/d}$  с постоянной  $c > 0$  не зависящей от  $N$ .

Удобно считать, что шар  $B_r(y) = Q$  и  $v_r = 1$  при  $r > \pi$ .

**Лемма 3.1.** *Пусть  $N$  – точечное подмножество  $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$  является хорошо разделенным. Тогда для любой постоянной  $C$  выполняется оценка*

$$\nu[\mathcal{D}_N, CN^{-\frac{1}{d}}] \leq c_1 \quad (3.11)$$

с постоянной  $c_1$ , зависящей только от  $C, d$  и  $d_0$ .

*Доказательство.* Положим для краткости  $a = CN^{-\frac{1}{d}}$  и рассмотрим шар  $B_a(y)$  с произвольным центром  $y \in Q$ . Положим  $\mathcal{E} = B_a(y) \cap \mathcal{D}_N$  и  $K = \#\{\mathcal{E}\}$ . В силу (3.10) шары  $B_\delta(x), \delta = \delta[\mathcal{D}_N], x \in \mathcal{E}$ , не пересекаются и все они содержатся в шаре  $B_{a+\delta}(y)$ . Следовательно,  $v_\delta K \leq v_{a+\delta}$ . Пользуясь оценкой (2.9) и определением хорошо разделенного подмножества  $\mathcal{D}_N$ , получаем

$$K \leq \frac{v_{a+\delta}}{v_\delta} \simeq \left( \frac{C + c}{c} \right)^d,$$

что совпадает с (3.11), поскольку,  $y \in Q$  – произвольно.  $\square$

Сравнивая Теорему 3.1 и Лемму 3.1, приходим к следующему утверждению.

**Следствие 3.1.** Пусть весовая функция  $\eta \in W(d, d_0)$ ,  $\eta \neq 0$ , и пусть  $N$  – точечное подмножество  $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$  удовлетворяет двум условиям:

- (i)  $\mathcal{D}_N$  является оптимальным  $t$ -дизайном,
- (ii)  $\mathcal{D}_N$  является хорошо разделенным подмножеством.

Тогда для всех достаточно больших  $N$  выполняются оценки

$$\langle \theta^\Delta(\eta) \rangle N^2 - cN^{1-\frac{1}{d}} > \theta^\Delta[\eta, \mathcal{D}_N] > \langle \theta^\Delta(\eta) \rangle N^2 - CN^{1-\frac{1}{d}}, \quad (3.12)$$

$$cN^{1-\frac{1}{d}} < \lambda[\eta, \mathcal{D}_N] < CN^{1-\frac{1}{d}} \quad (3.13)$$

с положительными постоянными, зависящими только от  $d, d_0$  и  $\eta$ .

В частности, для хордовой метрики  $\tau$  на  $Q(d, d_0)$  выполняются оценки

$$\langle r \rangle N^2 - cN^{1-\frac{1}{d}} > \tau[\mathcal{D}_N] > \langle r \rangle N^2 - CN^{1-\frac{1}{d}} \quad (3.14)$$

с положительными постоянными, зависящими только от  $d$  и  $d_0$ .

Существование оптимальных  $t$ -дизайнов долгое время оставалось открытой проблемой (гипотеза Кореваара–Меера). Недавно проблема была решена для сферических  $t$ -дизайнов. В работах Бондаренко, Радченко и Виазовской [9, 10] было доказано существование оптимальных  $t$ -дизайнов  $\mathcal{D}_N \subset S^d$  для всех достаточно больших  $N$ . Более того, в работе [10] было показано, что такие оптимальные сферические  $t$ -дизайны можно выбрать как хорошо разделенные подмножества.

По Следствию 3.1 построенные в [10] сферические  $t$ -дизайны удовлетворяют предельно точным оценкам для квадратичных уклонений и сумм расстояний.

Используя сферические  $t$ -дизайны, нетрудно определить  $[t/2]$ -дизайны на вещественном проективном пространстве  $\mathbb{R}P^d = Q(d, 1)$ . Рассмотрим каноническую проекцию сферы  $S^d$  на вещественное проективное пространство  $\mathbb{R}P^d$

$$p : S^d \ni x \rightarrow p(x) \in \mathbb{R}P^d, \quad (3.15)$$

здесь  $p(x)$  обозначает одномерное подпространство в  $\mathbb{R}^{d+1}$  содержащее точку  $x \in S^d$ , при этом  $p(-x) = p(x)$ .

Удобно сейчас обозначить через  $\theta^0$  геодезическое расстояние на сфере  $S^d$ , а через  $\theta$  геодезическое расстояние на  $\mathbb{R}P^d$ . Оба расстояния нормированы условием (1.1). По определению,  $\theta^0(x_1, x_2)$  – угол между

векторами  $x_1, x_2 \in S^d$ , а  $\frac{1}{2}\theta(x_1, x_2)$  – угол между подпространствами  $p(x_1), p(x_2) \in \mathbb{R}P^d$ . Таким образом,  $\cos\theta^0(x_1, x_2) = \langle x_1, x_2 \rangle$ , см. (2.5), а  $\cos\frac{1}{2}\theta(x_1, x_2) = |\langle x_1, x_2 \rangle|$ , см. (5.6),  $x_1, x_2 \in S^d$ . Отсюда следуют такие соотношения

$$\cos\theta(x_1, x_2) = 2(\cos\theta^0(x_1, x_2))^2 - 1 \quad (3.16)$$

и

$$\theta(x_1, x_2) = 2 \min\{\theta^0(x_1, x_2), \pi - \theta^0(x_1, x_2)\}. \quad (3.17)$$

В частности,  $\theta = 2\theta^0$  при  $0 \leq \theta^0 \leq \pi/2$ .

Для любого  $N$ -точечного подмножества  $\mathcal{D}_N^0 \subset S^d$  положим

$$\mathcal{D}_N = p(\mathcal{D}_N^0) = \{p(x) : x \in \mathcal{D}_N^0\} \subset \mathbb{R}P^d, \quad (3.18)$$

т.е.  $\mathcal{D}_N$  является набором одномерных подпространств в  $\mathbb{R}^{d+1}$ , проходящих через точки  $x \in \mathcal{D}_N^0 \subset S^d$ .

Если  $\mathcal{D}_N^0$  содержит пары антиподальных точек  $x$  и  $-x$ , то соответствующие точки в  $\mathcal{D}_N$  совпадают и учитываются с кратностью 2. Подчеркнем, что если подмножество  $\mathcal{D}_N^0$  является хорошо разделенным, то, вообще говоря, подмножество  $\mathcal{D}_N$  не является хорошо разделенным.

**Лемма 3.2.** (i) *Если подмножество  $\mathcal{D}_N^0 \subset S^d$  является оптимальным  $t$ -дизайном, то подмножество  $\mathcal{D}_N = p(\mathcal{D}_N^0) \subset \mathbb{R}P^d$  является оптимальным  $[t/2]$ -дизайном.*

(ii) *Если подмножество  $\mathcal{D}_N^0 \subset S^d$  является хорошо разделенным, то подмножество  $\mathcal{D}_N = p(\mathcal{D}_N^0) \subset \mathbb{R}P^d$  удовлетворяет оценки (3.11) с произвольной постоянной  $C > 0$  и постоянной  $c_1$ , зависящей только от  $C$  и  $d$ .*

*Доказательство.* (i) Если  $f$  – полином степени  $m$ , то в силу (3.16)  $f(\cos\theta) = f(2\cos^2\theta^0 - 1) = f_1(\cos\theta^0)$ , где  $f_1$  – полином степени  $2m$ , удовлетворяющий соотношению  $f_1(z) = f_1(-z)$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \kappa(d, 1) \int_0^\pi f(\cos\theta)(\sin\frac{1}{2}\theta)^{d-1} d\theta \\ = \kappa(d, d) \int_0^\pi f_1(\cos\theta^0)(\sin\frac{1}{2}\theta^0)^{d-1} (\cos\frac{1}{2}\theta^0)^{d-1} d\theta^0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где мы учли известное тождество  $B(z, z) = 2^{1-2z}B(z, 1/2)$  для бэта функции. Из (3.5) и (3.19) следует, что

$$\langle f \rangle_{\mathbb{R}P^d} = \langle f_1 \rangle_{S^d}. \quad (3.20)$$

Если  $\mathcal{D}_N^0 \subset S^d$  – сферический оптимальный  $t$ -дизайн и  $2m \leq t$ , то из определения (3.3) получаем

$$\sum_{x \in \mathcal{D}_N} f(\cos \theta(x, y)) = \sum_{x \in \mathcal{D}_N^0} f_1(\cos \theta^0(x, y)) = \langle f_1 \rangle_{S^d} = \langle f \rangle_{\mathbb{R}P^d},$$

где мы учли (3.20). Таким образом,  $\mathcal{D}_N \subset \mathbb{R}P^d$  является  $[t/2]$ -дизайном.

(ii) Обозначим через  $B_r(y) \subset \mathbb{R}P^d$  шар радиуса  $r$  с центром в точке  $p(y)$ , а через  $B_r^0(y) \subset S^d$  шар радиуса  $r$  с центром в точке  $y \in S^d$ . Из (3.15) следует, что точка  $p(x) \in \mathbb{R}P^d$  принадлежит шару  $B_r(y)$  если и только если точка  $x \in S^d$  принадлежит либо шару  $B_{r/2}^0(y)$ , либо шару  $B_{r/2}^0(-y)$ . Поэтому

$$\#\{B_r(y) \cap \mathcal{D}_n\} = \#\{B_{r/2}^0(y) \cap \mathcal{D}_N^0\} + \#\{B_{r/2}^0(-y) \cap \mathcal{D}_N^0\}$$

Из этого равенства и определения (3.7) получаем оценку

$$\nu[\mathcal{D}_N, r] \leq 2\nu[\mathcal{D}_N^0, \frac{1}{2}r]. \quad (3.21)$$

Если подмножество  $\mathcal{D}_N^0 \subset S^d$  является хорошо разделенным, то по Лемма 3.1 для любой постоянной  $C$  выполняется оценка  $\nu[\mathcal{D}_N^0, CN^{-1/d}] \leq c_1^0$  с постоянной  $c_1^0 = c_1^0(C, d)$ . С учетом (3.21) отсюда следует, что для подмножества  $\mathcal{D}_N \subset \mathbb{R}P^d$  и любой постоянной  $c$  выполняется оценка (3.11) с постоянной  $c_1 = 2c_1^0(C/2, d)$ .  $\square$

Сравнивая Теорему 3.1 и Лемму 3.2, приходим к следующему утверждению.

**Следствие 3.2.** *Пусть весовая функция  $\eta \in W(d, 1)$ ,  $\eta \neq 0$ , и пусть  $N$ -точечное подмножество  $\mathcal{D}_N^0 \subset S^d$  удовлетворяет условиям (i) и (ii) Следствия 3.1.*

*Тогда для  $N$ -точечного подмножества  $\mathcal{D}_N = p(\mathcal{D}_N^0) \subset \mathbb{R}P^d$  выполняются оценки (3.12), (3.13) и (3.14) Следствия 3.1 для метрик и уклонений на вещественном проективном пространстве  $\mathbb{R}P^d$ .*

Соответствующие обобщения на остальные проективные пространства  $\mathbb{C}P^n$ ,  $\mathbb{H}P^n$  и  $\mathbb{Q}P^2$  не являются столь прямолинейными. Для этого требуется использовать нетривиальные методы цитированных работ [9, 10]. Обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящей работы.

## 4. Замечания о ядрах Леви–Шнберга

Ядра Леви–Шнберга возникают как ковариации многопараметрических случайных процессов (процессов Леви) с параметрами на однородных пространствах. Подробное изложение этих вопросов можно найти в работе Ганголи [19]. Здесь мы кратко коснемся только некоторых из этих вопросов, связанных с предметом настоящей работы.

Напомним определение. Пусть  $Q = G/K$ -компактное однородное пространство с  $G$ -инвариантными метрикой  $\theta$  и мерой  $\mu$ , нормированными условие.

Вещественная симметричная функция  $f(y_1, y_2)$ ,  $y_1, y_2 \in Q$ , называется *ядром Леви–Шнберга*, если выполняются следующие условия:

(i) существует точка  $y_0 \in Q$  такая, что  $f(y, y_0) = 0$  для всех  $y \in Q$ ,

(ii)  $f$  – положительно определена, т.е. для любых точек  $x_1, \dots, x_N \in Q$  и любых комплексных чисел  $z_1, \dots, z_N$

$$\sum_{1 \leq i, y \leq N} \bar{z}_i z_j f(x_i, x_j) \geq 0, \quad (4.1)$$

(iii) поляризация  $\rho(y_1, y_2)$  ядра  $f(y_1, y_2)$ , определенная формулой

$$\rho(y_1, y_2) = f(y_1, y_1) + f(y_2, y_2) - 2f(y_1, y_2) \quad (4.2)$$

является  $G$ -инвариантной, т.е.  $\rho(gy_1, gy_2) = \rho(y_1, y_2)$  для всех  $y_1, y_2 \in Q$  и  $g \in G$ .

Отметим, что ядро  $f$  восстанавливается по поляризации  $\rho$  по формуле

$$f(y_1, y_2) = \frac{1}{2}(\rho(y_1, y_0) + \rho(y_2, y_0) - \rho(y_1, y_2)) \quad (4.3)$$

Если ядро Леви–Шнберга  $f$  и его поляризация  $\rho$  заданы, то стандартные методы теории вероятностей позволяют построить соответствующий случайный процесс Леви как отображение

$$Y : Q \ni x \rightarrow Y_x = Y_x(\omega) \in L_2(\Omega, d\omega)$$

из  $Q$  в пространство  $L_2(\Omega, d\omega)$  вещественных случайных переменных на некотором вероятностном пространстве  $\Omega$  с мерой  $d\omega$ . При этом  $\mathbb{E}Y_x = 0$  для всех  $x \in Q$  и

$$\begin{aligned} \mathbb{E}Y_{x_1} Y_{x_2} &= f(x_1, x_2), \\ \mathbb{E}(Y_{x_1} - Y_{x_2})^2 &= \rho(x_1, x_2) \end{aligned}$$

для всех  $x_1, x_2 \in Q$ ; здесь  $\mathbb{E}$  обозначает математическое ожидание в  $L_2(\Omega, d\omega)$ .

Кроме того, если поляризация  $\rho$  гильдеровски непрерывна относительно метрики  $\theta$ , т.е.  $\rho(y_1, y_2) < c\theta(y_1, y_2)^\beta$  с некоторыми постоянными  $c$  и  $\beta > 0$ , то для почти всех  $\omega \in \Omega$  траектория процесса  $Y_x(\omega)$  является непрерывной функцией  $x \in Q$ .

В терминах настоящей работы нетрудно явно описать большое число ядер Леви–Шнберга на однородных пространствах. Для произвольно фиксированной точки  $y_0 \in Q$  рассмотрим ядро

$$f_r(y_1, y_2) = \int_Q F_r(y_1, y) F_r(y_2, y) d\mu(y), \quad r \in [0, \pi], \quad (4.4)$$

где

$$F_r(x, y) = \chi(B_r(x), y) - \chi(B_r(y_0), y) \quad (4.5)$$

и  $\chi(B_r(x), \cdot)$  – характеристическая функция шара  $B_r(x)$ . Положим также

$$f(\eta, y_1, y_2) = \int_0^\pi f_r(y_1, y_2) \eta(r) dr, \quad (4.6)$$

где  $\eta$  – весовая функция, для которой интеграл (4.6) сходится. Для  $Q = Q(d, d_0)$  интеграл (4.6) сходится для  $\eta \in W(d+1, d_0+1)$ , см. Лемму 2.1 (i).

**Теорема 4.1.** (i) Для любого компактного однородного пространства  $Q$  функции (4.4) и (4.6) являются ядрами Леви–Шнберга. Их поляризации  $\rho_r$  и  $\rho(\eta)$  имеют вид

$$\rho_r(y_1, y_2) = 2\theta_r^\Delta(y_1, y_2), \quad (4.7)$$

$$\rho(\eta, y_1, y_2) = 2\theta^\Delta(\eta, y_1, y_2), \quad (4.8)$$

где  $\theta_r^\Delta$  и  $\theta^\Delta(\eta)$  – метрики симметричной разности (1.14) и (1.13). Имеют место формулы обращения

$$\theta_r^\Delta(y_1, y_0) + \theta_r^\Delta(y_2, y_0) - \theta_r^\Delta(y_1, y_2) = 2f_r(y_1, y_2), \quad (4.9)$$

$$\theta^\Delta(\eta, y_1, y_0) + \theta^\Delta(\eta, y_2, y_0) - \theta^\Delta(\eta, y_1, y_2) = 2f(\eta, y_1, y_2), \quad (4.10)$$

(ii) Для двухточечно-однородных пространств  $Q = Q(d, d_0)$  поляризации (4.7) удовлетворяют оценкам

$$\rho_r(y_1, y_2) \leq C(\sin \frac{1}{2}r)^{d-1}(\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1}\theta(y_1, y_2), \quad (4.11)$$

$$\rho(\eta, y_1, y_2) \leq C\|\eta\|_{d, d_0}\theta(y_1, y_2), \quad (4.12)$$

с постоянными, зависящими только от  $d$  и  $d_0$ .

*Доказательство.* (i) Подставляя (4.5) в (4.4), получим

$$\begin{aligned} f_r(y_1, y_2) &= \mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2)) - \mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_0)) \\ &\quad - \mu(B_r(y_2) \cap B_r(y_0)) + v_r. \end{aligned}$$

Следовательно,  $f(y, y) = 2v_r - 2\mu(B_r(y) \cap B_r(y_0))$ .

Пользуясь этими формулами, находим для поляризации (4.2) такое выражение  $\rho(y_1, y_2) = 2v_r - 2\mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2))$ . Сравнивая это выражение с формулой (1.25), получаем (4.7). Интегрируя (4.7) по  $r$  с весом  $\eta(r)$  и сравнивая с (1.13), получим (4.8).

Подставляя (4.7) и (4.8) в (4.3), получим (4.9) и (4.10).

(ii) Оценки (4.11), (4.12) следуют из (4.7), (4.8) и Леммы 2.1 (ii).  $\square$

Исследование многопараметрических случайных процессов с ковариациями (4.4) и (4.6) выходит за рамки настоящей работы. Вместо этого мы рассмотрим некоторые простые, но любопытные факты, связанные с приведенными выше формулами.

Рассмотрим сферу  $S^d$  с метрикой большого круга  $\theta$  и стандартной нормализованной  $d$ -мерной мерой  $\mu$ . Справедлива следующая формула, см. [17, Sec. 6.4],

$$\theta(x_1, x_2) = \pi\mu(B_{\pi/2}(x_1)\Delta B_{\pi/2}(x_2)), \quad x_1, x_2 \in S^d, \quad (4.13)$$

где  $B_{\pi/2}(x) = \{y \in S^d : \theta(y, x) \leq \pi/2\} = \{y \in S^d : (y, x) \geq 0\}$  – полусфера с центром  $x$ . Пользуясь (1.14), можно записать формулу (4.13) в виде

$$\theta(x_1, x_2) = \pi(1 - 2\mu(B_{\pi/2}(x_1) \cap B_{\pi/2}(x_2))) \quad (4.14)$$

В такой форме это равенство почти очевидно – достаточно заметить, что мера пересечения двух полусфер в (4.14) является линейной функцией  $\theta(x_1, x_2)$ .

Сравнивая формулы (4.13) и (1.14), получаем

$$\theta(x_1, x_2) = 2\pi\theta_{\pi/2}^{\Delta}(x_1, x_2). \quad (4.15)$$

Иными словами, геодезическая метрика  $\theta$  на сфере  $S^d$  является метрикой симметричной разности.

Пользуясь формулами (4.15) и (4.5), получаем

$$\theta(x_1, x_0) + \theta(x_2, x_0) - \theta(x_1, x_2) = 4\pi \int_{S^d} F_{\pi/2}(x_1, y) F_{\pi/2}(x_2, y) d\mu(y), \quad (4.16)$$

где  $F_{\pi/2}(x, y) = \chi(B_{\pi/2}(x), y) - \chi(B_{\pi/2}(y_0), y)$ .

Из формул (4.16) сразу же следует, что ядро

$$f(x_1, x_2) = \theta(x_1, x_0) + \theta(x_2, x_0) - \theta(x_1, x_2) \quad (4.17)$$

является положительно определенным. Это известная теорема Леви. Первоначально ее доказательство было получено на основе интегралов “белого шума” при исследовании случайных процессов параметризованных точками сферы, см. [24, Chap. 8; Appen. Chap. 3]. Прямое доказательство этой теоремы было дано в [19, Sec. 4] на основе разложения метрики  $\theta$  по сферическим функциям на  $S^d$  (полиномам Гегенбауэра). Приведенное выше доказательство теоремы Леви на основе тождества (4.16) является, по видимому, наиболее простым.

Отметим, что геодезическая метрика  $\theta$  для проективных пространств  $\mathbb{R}P^n$ ,  $\mathbb{C}P^n$ ,  $\mathbb{H}P^n$ ,  $\mathbb{O}P^2$  не является метрикой симметричной разности и для нее не имеет места аналог теоремы Леви. Это следует из результатов работы [19, Sec. 4; pp. 225–226]. В тоже время, для хордовой метрики  $\tau(x_1, x_2) = \sin \theta(x_1, x_2)$  ядро

$$f(x_1, x_2) = \tau(x_1, x_0) + \tau(x_2, x_0) - \tau(x_1, x_2) \quad (4.18)$$

является положительно определенным для всех двух-точечно однородных пространств  $Q(d, d_0)$ . Это следует из Теорем 2.1 и 4.1.

В заключение мы объясним появление аномально малых остатков в формуле (2.22). Пользуясь формулой (4.15) и принципом инвариантности (1.29) для сферы  $S^d$ , получаем

$$\theta[\mathcal{D}_N] = \langle \theta \rangle N^2 - 2\pi\lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_N],$$

где

$$\lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_N] = \int_{S^d} \Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_N]^2 d\mu(y)$$

и

$$\Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_N] = \#\{B_{\pi/2}(y) \cap \mathcal{D}_N\} - Nv_{\pi/2}.$$

Поскольку  $v_{\pi/2} = 1/2$ , то пользуясь (1.26), находим что  $\langle \theta \rangle = \pi/2$ .

$N$ -точечное подмножество  $\mathcal{D}_N \subset S^d$  представим как объединение двух непересекающихся подмножеств

$$\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_{2a}^{(0)} \cup \mathcal{D}_b^{(1)}, \quad N = 2a + b,$$

$\mathcal{D}_{2a}^{(0)} = \{x \in \mathcal{D}_N : -x \in \mathcal{D}_N\}$ ,  $\mathcal{D}_b^{(1)} = \{x \in \mathcal{D}_N : -x \notin \mathcal{D}_N\}$ , тогда

$$\Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_N] = \Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_{2a}^{(0)}] + \Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_b^{(1)}].$$

Ясно, что  $\Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_{2a}^{(0)}] = 0$  для всех  $y \in S^d$  за исключением таких  $y$ , что  $\langle y, x \rangle = 0$ ,  $x \in \mathcal{D}_{2a}^{(0)}$ . Поэтому

$$\lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_N] = \lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_b^{(1)}]. \quad (4.19)$$

Пусть  $N = 2a$  – четное и  $\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_{2a}^{(0)}$ , тогда  $\lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_N] = 0$ . Пусть  $N = 2a+1$  – нечетное и  $\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_{2a}^{(0)} \cup \mathcal{D}_1^{(1)}$ , где  $\mathcal{D}_1^{(1)} = \{x_1\}$  – одноточечное подмножество. Простое вычисление показывает, что  $\lambda_{\pi/2}[\{x_1\}] = \pi/2$  и, в силу (4.19),  $\lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_N] = \pi/2$ . Из сказанного следует соотношение (2.22).

Соотношение (2.22) легко также получить из разложения метрики  $\theta$  по сферическим функциям, см. (9.22), (9.23).

## В. Геометрия двухточечно-однородных пространств и сильный принцип инвариантности

### 5. Модели проективных пространств и хордовые расстояния

В этом разделе дается определение хордовых метрик на проективных пространствах  $\mathbb{F}P^n$ ,  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ,  $n \geq 2$  и  $\mathbb{O}P^2$  в терминах специальных моделей этих пространств. Для удобства читателей мы достаточно

подробно опишем такие модели. Дальнейшее обсуждение относящихся сюда вопросов и детальные доказательства приводимых ниже фактов можно найти в литературе, см., например, книги [7, 20] и обзоры [3, 18].

Напомним сначала некоторые общие факты об алгебрах  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ . Алгебра октонионов  $\mathbb{O}$  является некоммутативной и неассоциативной алгеброй вещественной размерности 8 с базисом  $1, e_1, \dots, e_7$ , алгебра кватернионов  $\mathbb{H}$  является некоммутативной ассоциативной алгеброй вещественной размерности 4 с базисом  $1, e_1, \dots, e_3$ , а  $\mathbb{C}$  имеет базис  $1, e_1$ . Таким образом, имеет место естественное вложение

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H} \subset \mathbb{O}. \quad (5.1)$$

Строение алгебры октонионов подробно обсуждается в [3]. Из таблицы умножения для элементов базиса  $1, e_1, \dots, e_7$ , см. [3, р. 150], [7, р. 90], в частности, следует, что для любых  $i, j \geq 1, i \neq j$ , существует  $k \geq 1$ , такое что

$$e_i e_j = -e_j e_i = e_k, \quad i \neq j, \quad e_i^2 = -1. \quad (5.2)$$

Если  $a = \alpha_0 + \sum_{i=1}^7 \alpha_i e_i \in \mathbb{O}$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq i \leq 7$ , то мы пишем  $\operatorname{Re} a = \alpha_0$  для вещественной части,  $\bar{a} = \alpha_0 - \sum_{i=1}^7 \alpha_i e_i$  для сопряжения,  $|a| = (\alpha_0^2 + \sum_{i=1}^7 \alpha_i^2)^{1/2}$  для нормы. Пользуясь (5.2), легко проверить, что

$$\operatorname{Re} ab = \operatorname{Re} ba, \quad \overline{ab} = \overline{ba}, \quad |a|^2 = a\bar{a} = \bar{a}a, \quad |ab| = |a||b|.$$

Из последнего равенства следует, что все алгебры (5.1) не имеют делителей нуля. Полезно также иметь в виду, что любая подалгебра, порожденная двумя элементами в  $\mathbb{O}$  ассоциативна и изоморфна либо алгебре  $\mathbb{H}$ , либо  $\mathbb{C}$ , либо  $\mathbb{R}$  (теорема Артина).

Рассмотрим сначала стандартную модель проективных пространств  $\mathbb{F}P^n$  над ассоциативными алгебрами  $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ . Пусть  $\mathbb{F}^{n+1}$  – линейное пространство векторов  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n)$ ,  $a_i \in \mathbb{F}$ ,  $0 \leq i \leq n$  с правым умножением на скаляры, эрмитовым скалярным произведением

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=0}^n \bar{a}_i b_i, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{F}^{n+1}, \quad (5.3)$$

и нормой  $|\mathbf{a}|$ ,

$$|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = \sum_{i=0}^n |a_i|^2. \quad (5.4)$$

В этом случае проективное пространство  $\mathbb{F}P^n$  определяется как множество одномерных (над  $\mathbb{F}$ ) подпространств в  $\mathbb{F}^{n+1}$ :

$$\mathbb{F}P^n = \{p(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\mathbb{F} : \mathbf{a} \in \mathbb{F}^{n+1}, |\mathbf{a}| = 1\}. \quad (5.5)$$

Расстояние  $\theta$  на  $\mathbb{F}P^n$  определяется формулой

$$\cos \frac{1}{2}\theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |(\mathbf{a}, \mathbf{b})|, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{F}^{n+1}, \quad |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1, \quad 0 \leq \theta(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \pi, \quad (5.6)$$

т.е.  $\frac{1}{2}\theta(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  – угол между подпространствами  $p(\mathbf{a})$  и  $p(\mathbf{b})$ .

Транзитивная группа изометрий  $U(n+1, \mathbb{F})$  для метрики  $\theta$  состоит из обратимых линейных преобразований пространства  $\mathbb{F}^{n+1}$ , сохраняющих скалярное произведение (5.3), а стабилизатор некоторой точки изоморфен подгруппе  $U(n, \mathbb{F}) \times U(1, \mathbb{F})$ . Следовательно,

$$\mathbb{F}P^n = U(n+1, \mathbb{F}) / U(n, \mathbb{F}) \times U(1, \mathbb{F}). \quad (5.7)$$

Группы  $U(n+1, \mathbb{F})$  легко вычисляются и совпадают с ортогональной группой  $O(n+1)$  для  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ , унитарной группой  $U(n+1)$  для  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  и симплектической группой  $Sp(n+1)$  для  $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ , как и было указано в разделе 2 в списке двуточечечно-однородных пространств. На однородных пространствах (5.7) естественным образом определяется  $U(n+1, \mathbb{F})$ -инвариантная риманова структура соответствующая расстоянию  $\theta$

Существует другая модель, в которой проективные пространства  $\mathbb{F}P^n$  отождествляются с множеством ортогональных проекторов на одномерные подпространства в  $\mathbb{F}^{n+1}$ . Эта модель допускает обобщение на октаэдрическую проективную плоскость  $\mathbb{O}P^2$ . Более того, именно в терминах этой модели описывается хордовая метрика на всех проективных пространствах.

Обозначим через  $\mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1})$  множество эрмитовых матриц размера  $(n+1) \times (n+1)$  с элементами в алгебре  $\mathbb{F}$ ,

$$\mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1}) = \{A = ((a_{ij})) : a_{ij} = \overline{a_{ji}}, a_{ij} \in \mathbb{F}, 0 \leq i, j \leq n\}. \quad (5.8)$$

Очевидно, что  $\mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1})$  является линейным пространством над полем вещественных чисел размерности

$$m = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1}) = \frac{1}{2}(n+1)(d+2), \quad d = nd_0. \quad (5.9)$$

Пространство  $\mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1})$  снабжено симметричным вещественно-значым скалярным произведением

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(AB + BA) = \operatorname{Re} \operatorname{Tr} AB = \operatorname{Re} \sum_{i,j=0}^n a_{ij} \bar{b}_{ij} \quad (5.10)$$

и нормой

$$\|A\| = (\operatorname{Tr} A^2)^{1/2} = \left( \sum_{i,j=0}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \quad (5.11)$$

здесь  $\operatorname{Tr} A = \sum_{i=0}^n a_{ii}$  – след матрицы  $A$ .

Для соответствующего расстояния  $\|A - B\|$  между матрицами  $A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1})$  справедлива формула

$$\|A - B\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 - 2\langle A, B \rangle. \quad (5.12)$$

Таким образом,  $\mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1})$  можно рассматривать как  $m$ -мерное евклидово пространство.

Если алгебра ассоциативна,  $\mathbb{F} \neq \mathbb{O}$ , то ортогональный проектор  $\Pi_{\mathbf{a}} \in \mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1})$  на одномерное подпространство  $p(\mathbf{a}) = \mathbf{a}\mathbb{F}$ ,  $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{F}^{n+1}$ ,  $|\mathbf{a}| = 1$ , задается формулой  $\Pi_{\mathbf{a}} = \mathbf{a}(\mathbf{a}, \cdot)$  или в матричной форме  $\Pi_{\mathbf{a}} = ((a_i \bar{a}_j))$ ,  $0 \leq i, j \leq n$ . Следовательно, определение проективного пространства (5.5) можно записать в виде

$$\mathbb{F}P^n = \{\Pi \in \mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1}) : \Pi^2 = \Pi, \operatorname{Tr} \Pi = 1\}. \quad (5.13)$$

Определенная выше транзитивная группа изометрий  $U(n+1, \mathbb{F})$  действует на проекторы по формуле  $g(\Pi) = g\Pi g^{-1}$ ,  $g \in U(n+1, \mathbb{F})$ .

Для октонионной плоскости  $\mathbb{O}P^2$  известна модель, предложенная Фреденталем и Йорданом. Ещё подробное обсуждение можно найти в [3, 18, 20].

В этой модели полагают по определению

$$\mathbb{O}P^2 = \{\Pi \in \mathcal{H}(\mathbb{O}^3) : \Pi^2 = \Pi, \operatorname{Tr} \Pi = 1\}. \quad (5.14)$$

Формулы (5.13) и (5.14) вполне аналогичны. Матрицы  $\Pi_{\mathbf{a}} \in \mathbb{O}P^2$ ,  $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{O}^3$ , имеют вид  $\Pi_{\mathbf{a}} = ((a_i \bar{a}_j))$ ,  $0 \leq i, j \leq 2$ ,  $|\mathbf{a}|^2 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ , но удовлетворяют дополнительному условию

$(a_0a_1)a_2 = a_0(a_1a_2)$ , см. [20, Lemma 14.90]. Дополнительное условие означает, что подалгебра в  $\mathbb{O}$ , порожденная координатами  $a_0, a_1, a_2$ , ассоциативна. Отсюда легко следует, что  $\mathbb{O}P^2$  является 16-мерным компактным связанным подмногообразием в 27-мерном евклидовом пространстве  $\mathcal{H}(\mathbb{O}^3)$ , см. [20, р. 290].

Группа обратимых линейных преобразований  $g$  пространства  $\mathcal{H}(\mathbb{O}^3)$  сохраняющая квадраты  $g(A^2) = g(A)^2$ ,  $A \in \mathcal{H}(\mathbb{O}^3)$ , изоморфна 52-мерной исключительной группе Ли  $F_4$ . Эта группа сохраняет также след, скалярное произведение (5.10) и норму (5.11) матриц  $A \in \mathcal{H}(\mathbb{O}^3)$ . Группа  $F_4$  действует транзитивно на  $\mathbb{O}P^2$ , а стабилизатор некоторой точки изоморфен спинорной группе  $\text{Spin}(9)$ , см. [20, Lemma 14.96 и Theorem 14.99]. Таким образом,  $\mathbb{O}P^2 = F_4/\text{Spin}(9)$  является однородным пространством, как и было указано в разделе 2 в списке двуточечно-однородных пространств.

На  $\mathbb{O}P^2$  естественным образом определяется  $F_4$ -инвариантная риманова структура и соответствующее геодезическое расстояние  $\theta(\Pi_1, \Pi_2)$ ,  $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathbb{O}P^2$ .

В терминах моделей (5.13), (5.14) легко описать строение геодезических на проективных пространствах. Известно, см. [7, 21, 33], что все геодезические на двуточечно-однородных пространствах  $Q(d, d_0)$  замкнуты и гомеоморфны единичной окружности. Группа изометрий транзитивна на множестве геодезических, а стабилизатор некоторой точки транзитивен на множестве геодезических проходящих через эту точку. Поэтому все геодезические имеют одну и ту же длину  $2\pi$  (при нормировке (1.1) инвариантного риманового расстояния).

Вложения алгебр (5.1) индуцируют вложение соответствующих проективных пространств

$$\mathbb{F}_1 P^{n_1} \subseteq \mathbb{F} P^n, \quad \mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}, \quad n_1 \leq n, \quad (5.15)$$

причем, меньшее продпространство в (5.15) является геодезическим подмногообразием в большем, см. [7, Sec. 3.24]. В частности, вещественная проективная прямая  $\mathbb{R}P^1$  гомеоморфная единичной окружности  $S^1$  вкладывается как геодезическая во все пространства  $\mathbb{F} P^n$ ,

$$S^1 \approx \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{F} P^n, \quad (5.16)$$

см. [7, Proposition 3.32]. В формуле (5.16)  $n = 2$  при  $\mathbb{F} = \mathbb{O}$ .

Используя формулу (5.13), можно записать вещественную проективную прямую  $\mathbb{R}P^1$  как следующее множество матриц размера  $2 \times 2$ :

$$\mathbb{R}P^1 = \{\zeta(u), u \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\},$$

$$\zeta(u) = \begin{pmatrix} \cos^2 u & \sin u \cos u \\ \sin u \cos u & \sin^2 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & \cos u \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

При каждом  $u \in \mathbb{R}$  матрица  $\zeta(u)$  является ортогональным проектором на одномерное подпространство  $x\mathbb{R}$ ,  $x = (\cos u, \sin u) \in \mathbb{R}^2$ .

Вложение  $\mathbb{R}P^1$  в  $\mathbb{F}P^n$  можно записать как следующее множество матриц размера  $(n+1) \times (n+1)$ :

$$Z = \{Z(u), u \in \mathbb{R}/\pi\mathbb{Z}\} \subset \mathbb{F}P^n,$$

$$Z(u) = \begin{pmatrix} \zeta(u) & 0_{n-1,2} \\ 0_{2,n-1} & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

где  $0_{k,l}$  обозначает нулевую матрицу размера  $k \times l$ .

Параметр  $u$  связан с геодезическим расстоянием  $\theta$  на пространстве  $\mathbb{F}P^n$  формулой

$$\theta(Z(u), Z(0)) = 2|u|, \quad -\frac{1}{2}\pi < u \leq \frac{1}{2}\pi, \quad (5.19)$$

а на  $u \in \mathbb{R}$  эта формула продолжается по периодичности. В частности,

$$\theta(Z(u/2), Z(-u/2)) = \begin{cases} 2 \min\{u, \pi - u\} & \text{if } 0 \leq u \leq \pi, \\ 2u & \text{if } 0 \leq u \leq \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\theta(Z(v), Z(-v)) = 4v, \quad 0 \leq v \leq \pi/4. \quad (5.20)$$

Подмножество матриц (5.18) является геодезической в  $\mathbb{F}P^n$ . Все другие геодезические имеют вид  $g(Z)$ , где  $g \in G$  – изометрии пространства  $\mathbb{F}P^n$ .

Теперь мы определим хордовое расстояние для проективных пространств. Для любого  $\Pi \in \mathbb{F}P^n$  из формул (5.13), (5.14) и (5.11) следует, что

$$\|\Pi\|^2 = \text{Tr } \Pi^2 = \text{Tr } \Pi = 1. \quad (5.21)$$

Таким образом, проективные пространства  $\mathbb{F}P^n$ , определенные формулами (5.13) и (5.14), являются подмногообразиями единичной сферы

$$S^{m-1} = \{A \in \mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1}) : \|A\| = 1\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1}) \approx \mathbb{R}^m. \quad (5.22)$$

Это определяет для проективных пространств узанное в разделе 2 вложение (2.6) абстрактного двухточечно-однородного пространства  $Q(d, d_0)$  в единичную сферу  $S^{m-1}$ . Отметим, что фактически, имеет место вложение в  $(m-2)$ -мерную сферу, являющуюся пересечением сферы  $S^{m-1}$  с гиперплоскостью в  $\mathcal{H}(\mathbb{F}^{n+1})$  определенную уравнением  $\text{Tr } A = 1$ , см. (5.21).

*Хордовое расстояние*  $\tau(\Pi_1, \Pi_2)$  между двумя проекторами  $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathbb{F}P^n$  определяется как евклидово расстояние (5.12):

$$\tau(\Pi_1, \Pi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \|\Pi_1 - \Pi_2\| = (1 - \langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle)^{1/2}. \quad (5.23)$$

Множитель  $1/\sqrt{2}$  выбран здесь для удобства, при такой нормировке  $\text{diam}(\tau, \mathbb{F}P^n) = 1$ .

Очевидно, что  $\tau(g(\Pi_1), g(\Pi_2)) = \tau(\Pi_1, \Pi_2)$  для всех изометрий  $g \in G$  пространства  $\mathbb{F}P^n$ .

Поскольку  $\mathbb{F}P^n$  является двухточечно-однородным пространством, то для любых двух проекторов  $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathbb{F}P^n$  с  $\theta(\Pi_1, \Pi_2) = 2u$ ,  $0 \leq u \leq \frac{1}{2}\pi$ , существует изометрия  $g \in G$  такая, что  $g(\Pi_1) = Z(u)$ ,  $g(\Pi_2) = Z(0)$ . Из формул (5.23), (5.18) и (5.17), получаем

$$\tau(Z(u), Z(0)) = \sin u = \sin \frac{1}{2}\theta(\Pi(u), \Pi(0)).$$

Следовательно,

$$\tau(\Pi_1, \Pi_2) = \sin \frac{1}{2}\theta(\Pi_1, \Pi_2) \quad (5.24)$$

Из соотношений (5.23), (5.24) следует, что антиподальные точки  $\Pi_+, \Pi_- \in \mathbb{F}P^n$  можно охарактеризовать как пары взаимно ортогональных проекторов: условия  $\theta(\Pi_+, \Pi_-) = \pi$  и  $\tau(\Pi_+, \Pi_-) = 1$  равносильны соотношению  $\langle \Pi_+, \Pi_- \rangle = 0$ .

## 6. Доказательство Теоремы 2.1

Доказательство Теоремы 2.1 опирается на следующее специальное представление метрики симметричной разности (1.13) на пространстве  $\mathcal{M}$ ,

см. [28, Lemma 2.1]. Здесь мы приведем это представление в форме при-  
способлений для хордовой метрики (5.23) на пространстве  $Q(d, d_0)$ .

**Лемма 6.1.** *Пусть весовая функция  $\eta$  суммируема на отрезке  $[0, \pi]$ ,  
тогда справедливо равенство*

$$\theta^\Delta(\eta, y_1, y_2) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |\sigma(\theta(y_1, y)) - \sigma(\theta(y_2, y))| d\mu(y), \quad (6.1)$$

где

$$\sigma(r) = \int_r^\pi \eta(u) du. \quad (6.2)$$

В частности, если  $\mathcal{M}$  является двухточечно-однородным простран-  
ством  $Q = Q(d, d_0)$ , а весовая функция  $\eta^\natural(r) = \sin r$ , то справедливо  
равенство

$$\theta^\Delta(\eta^\natural, y_1, y_2) = \int_Q |\tau(y_1, y)^2 - \tau(y_2, y)^2| d\mu(y), \quad (6.3)$$

где  $\tau(\cdot, \cdot)$  – хордовая метрика на  $Q(d, d_0)$ , см. (5.23).

*Доказательство.* Положим для краткости  $\theta(y_1, y) = \theta_1$  и  $\theta(y_2, y) = \theta_2$ .  
Используя (1.13), (1.17) и (1.16), получим

$$\begin{aligned} & \theta^\Delta(\eta, y_1, y_2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left( \int_0^\pi (\chi(r - \theta_1) + \chi(r - \theta_2) - 2\chi(r - \theta_1)\chi(r - \theta_2))\eta(r) dr \right) d\mu(y) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} (\sigma(\theta_1) + \sigma(\theta_2) - 2\sigma(\max\{\theta_1, \theta_2\})) d\mu(y). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Поскольку  $\sigma$  является невозрастающей функцией, мы имеем

$$2\sigma(\max\{\theta_1, \theta_2\}) = 2 \min\{\sigma(\theta_1), \sigma(\theta_2)\} = \sigma(\theta_1) + \sigma(\theta_2) - |\sigma(\theta_1) - \sigma(\theta_2)|. \quad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.4), получим (6.1).

Если  $\eta^\natural(r) = \sin r$ , то  $\sigma^\natural(r) = 2 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}r$ . Подставляя это выражение  
в (6.1) и пользуясь (5.24), получим (6.3).  $\square$

Для полноты изложения мы приведем сначала доказательство Теоремы 2.1 для сфер. В этом случае наше доказательство схоже с доказательствами, предложенными в [8, 11].

*Доказательство Теоремы 2.1 для сфер.* Для сферы  $S^d$  хордовая метрика  $\tau$  определена в (2.5). Мы имеем

$$\begin{aligned}\tau(y_1, y)^2 - \tau(y_2, y) &= \frac{1}{4}(\|y_1 - y\|^2 - \|y_2 - y\|^2) \\ &= -\frac{1}{2}(y_1 - y_2, y) = -\tau(y_1, y_2)(x, y), \quad y_1, y_2 \in S^d,\end{aligned}\tag{6.6}$$

где  $x = \|y_1 - y_2\|^{-1}(y_1 - y_2) \in S^d$ . Подставляя (6.6) в (6.3), получим

$$\theta^\Delta(\eta^\natural, y_1, y_2) = \tau(y_1, y_2) \int_{S^d} |(x, y)| d\mu(y).\tag{6.7}$$

Очевидно, что интеграл в (6.7) не зависит от  $x \in S^d$ . Это доказывает равенство (2.8) для сфер  $S^d$  с постоянной

$$\gamma(S^d) = \left( \int_{S^d} |(x, y)| d\mu(y) \right)^{-1}.$$

□

*Доказательство Теоремы 2.1 для проективных пространств.* Мы пользуемся моделями проективных пространств (5.13) и (5.14) и пишем вместо точек  $y_1, y_2, y$  проекторы  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi$ . В таких обозначениях формула (6.3) имеет вид

$$\theta^\Delta(\eta^\natural, \Pi_1, \Pi_2) = \int_{\mathbb{F}P^n} |\tau(\Pi_1, \Pi)^2 - \tau(\Pi_2, \Pi)^2| d\mu(\Pi).\tag{6.8}$$

Поскольку  $\mathbb{F}P^n$  является двуточечно-однородным пространством, то для любых двух проекторов  $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathbb{F}P^n$  с  $\theta(\Pi_1, \Pi_2) = 4v$ ,  $0 \leq 4v \leq \pi/4$ , существует изометрия  $g \in G$ , такая, что  $g(\Pi_1) = Z(v)$ ,  $g(\Pi_2) = Z(-v)$ ,

см. (5.20). Кроме того, хордовая метрика  $\tau$  является  $G$ -инвариантной. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{F}P^n} |\tau(\Pi_1, \Pi)^2 - \tau(\Pi_2, \Pi)^2| d\mu(\Pi) \\ = \int_{\mathbb{F}P^n} |\tau(Z(v), \Pi)^2 - \tau(Z(-v), \Pi)^2| d\mu(\Pi). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Хордовая метрика  $\tau$  определена в (5.23). Мы имеем

$$\begin{aligned} \tau(Z(v), \Pi)^2 - \tau(Z(-v), \Pi)^2 &= \frac{1}{2} (\|Z(v) - \Pi\|^2 - \|Z(-v) - \Pi\|^2) \\ &= \langle Z(v) - Z(-v), \Pi \rangle. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Из формул (5.17) и (5.18) получаем

$$\begin{aligned} Z(v) - Z(-v) &= \begin{pmatrix} \zeta(v) - \zeta(-v) & 0_{n-1,2} \\ 0_{2,n-1} & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}, \\ \zeta(v) - \zeta(-v) &= \begin{pmatrix} 0 & \sin 2v \\ \sin 2v & 0 \end{pmatrix} = \sin 2v (\zeta_+ - \zeta_-), \end{aligned}$$

где

$$\zeta_+ = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \zeta_- = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$Z(v) - Z(-v) = \sin 2v (Z_+ - Z_-), \quad (6.11)$$

где

$$Z_\pm = \begin{pmatrix} \zeta_\pm & 0_{n-1,2} \\ 0_{2,n-1} & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяется, что  $Z_\pm^* = Z_\pm$ ,  $Z_\pm^2 = Z_\pm$ ,  $\text{Tr } Z_\pm = 1$ , т.е.  $Z_\pm \in \mathbb{F}P^n$ , кроме того,  $\langle Z_+, Z_- \rangle = 0$ , т.е.  $Z_+$ ,  $Z_-$  – антиподальные точки.

Поскольку хордовая метрика  $G$ -инвариантна, то пользуясь формулой (5.24), мы можем написать

$$\tau(\Pi_1, \Pi_2) = \tau(Z(v), Z(-v)) = \sin 2v$$

и формула (6.11) приобретает вид

$$Z(v) - Z(-v) = \tau(\Pi_1, \Pi_2)(Z_+ - Z_-). \quad (6.12)$$

С учетом (6.12) формулу (6.10) можно записать так

$$\tau(Z(v), \Pi)^2 - \tau(Z(-v), \Pi)^2 = \tau(\Pi_1, \Pi_2) \langle Z_+ - Z_-, \Pi \rangle. \quad (6.13)$$

Подставляя (6.13) в (6.9) и пользуясь (6.8), получаем

$$\theta^\Delta(\eta^\sharp, \Pi_1, \Pi_2) = \tau(\Pi_1, \Pi_2) \theta^\Delta(\eta^\sharp, Z_+, Z_-). \quad (6.14)$$

где

$$\theta^\Delta(\eta^\sharp, Z_+, Z_-) = \int_{\mathbb{F}P^n} |\langle Z_+ - Z_-, \Pi \rangle| d\mu(\Pi). \quad (6.15)$$

Очевидно, что интеграл (6.15) не зависит от  $\Pi_1, \Pi_2$ , а в качестве  $Z_+, Z_-$  можно взять любую пару антиподальных точек в  $\mathbb{F}P^n$ . Это доказывает равенство (2.8) для проективных пространств  $\mathbb{F}P^n$  с постоянной

$$\gamma(\mathbb{F}P^n) = \left( \int_{\mathbb{F}P^n} |\langle Z_+ - Z_-, \Pi \rangle| d\mu(\Pi) \right)^{-1}.$$

Теорема 2.1 полностью доказана.  $\square$

## 7. Доказательство Леммы 2.1

(i) Из формулы (1.23) непосредственно вытекает соотношение

$$\lambda_r(y, y) = v_r - v_r^2 = v_r v'_r. \quad (7.1)$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского к определению (1.6), получаем

$$|\lambda_r(y_1, y_2)| \leq (\lambda_r(y_1, y_2) \lambda_r(y_2, y_1))^{1/2} = v_r v'_r. \quad (7.2)$$

Пользуясь слабым принципом инвариантности (1.29), формулой (1.26) и оценкой (7.2), получаем

$$\theta_r^\Delta(y_1, y_2) \leq 2v_r v'_r. \quad (7.3)$$

Подставляя в (7.2) и (7.3) оценки (2.3) для объемов  $v_r$  и  $v'_r$ , получаем оценки (2.15). Интегрируя оценки (2.15) с весовой функцией  $\eta \in W(d + 1, d_0 + 1)$ , получаем оценки (2.16).

(ii) При  $r = 0$  и  $r = \pi$   $\theta_r^\Delta(y_1, y_2) = 0$  тождественно. Будем считать, что  $0 < r < \pi$ . Положим для краткости  $\delta = \theta(y_1, y_2)/2$ . Параметры  $r$  и  $\delta$  изменяются в области  $0 < r < \pi$ ,  $0 \leq \delta \leq \pi/2$ . Эту прямоугольную область представим в виде объединения трех непересекающихся треугольных областей:

- (A)  $0 < r < \delta$ ,  $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}\pi$ ,
- (B)  $\pi > r \geq \pi - \delta$ ,  $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}\pi$ ,
- (C)  $r > \delta$ ,  $0 < r < \pi - \delta$ ,  $0 \leq \delta < \frac{1}{2}\pi$ .

В каждой из этих областей мы докажем интересующую нас оценку (2.17).

Отметим, что при  $r \in [0, \pi]$  функция  $\sin \frac{1}{2}r$  – возрастающая, а функция  $\cos \frac{1}{2}r$  – убывающая, при этом

$$\sin \frac{1}{2}r \simeq r, \quad \cos \frac{1}{2}r \simeq \pi - r. \quad (7.4)$$

(A) Пользуясь формулой (1.25) и соотношениями (2.2), (2.3), (7.4), получим

$$\begin{aligned} \theta_r^\Delta(y_1, y_2) &\leq v_r \simeq \int_0^r (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} du \\ &\lesssim \int_0^r (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} du \simeq (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} r \\ &\lesssim (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1} \delta. \end{aligned} \quad (7.5)$$

(B) Аналогично, из формулы (1.25) и соотношений (2.2), (2.3), (7.4) получаем

$$\begin{aligned} \theta_r^\Delta(y_1, y_2) &\leq v'_r \simeq \int_r^\pi (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} du \\ &\lesssim \int_r^\pi (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} du \simeq (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1} (\pi - r) \\ &\lesssim (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1} \delta \end{aligned} \quad (7.6)$$

(C) Поскольку  $\theta(y_1, y_2) < \pi$ , то существует единственная геодезическая  $\gamma \subset Q(d, d_0)$  наименьшей длины  $\theta(y_1, y_2)$  соединяющая точки  $y_1, y_2$ , см. [21, Chap. VII, Sec. 10]. Обозначим через  $y_0$  её среднюю точку, т.е.  $y_0 \in \gamma$ ,  $\theta(y_1, y_0) = \theta(y_2, y_0) = \delta$ . Из неравенства треугольника для метрики  $\theta$  следует, что шар  $B_{r-\delta}(y_0)$  содержится в пересечении  $B_r(y_1) \cap B_r(y_2)$ . Поэтому,

$$\mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2)) \geq v_{r-\delta}. \quad (7.7)$$

Пользуясь формулой (1.25) и соотношениями (7.7), (2.2), (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \theta_r^\Delta(y_1, y_2) &\leq v_r - v_{r-\delta} \simeq \int_{r-\delta}^r (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} du \\ &\lesssim (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}(r-\delta))^{d_0-1} \simeq (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\pi - r + \delta)^{d_0-1} \\ &\simeq (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\pi - r)^{d_0-1} \left(1 + \frac{\delta}{\pi - r}\right)^{d_0-1} \lesssim (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\pi - r)^{d_0-1} \delta \\ &\simeq (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1} \delta. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Из оценок (7.6), (7.7), (7.8) следует оценка (2.17).

Интегрируя оценку (2.17) с весовой функцией  $\eta \in W(d, d_0)$ , получаем оценку (2.18).

Лемма 2.1 доказана.

## С. Анализ Фурье на двухточечно-однородных пространствах и точные оценки уклонений и сумм расстояний

## 8. Коммутативные пространства и сферические функции

В этом разделе кратко изложены основные сведения об анализе Фурье на компактных коммутативных пространствах. Интересующие нас двухточечно-однородные пространства  $Q(d, d_0)$  образуют важный подкласс коммутативных пространств.

Общая теория коммутативных пространств изложена в монографии [34], см. также [22, 32]. Для компактных пространств теория существенно упрощается.

Пусть  $G$  – компактная группа, а  $K \subset G$  – замкнутая подгруппа. Обозначим через  $L_q(G)$ ,  $q = 1, 2$ , пространство функций на  $G$  интегрируемых со степенью  $q$  относительно нормированной меры Хаара на  $G$ , а через  $L_q(G/K)$  и  $L_q(K \setminus G/K)$  подпространства функций, удовлетворяющих условиям  $f(gk) = f(g)$ ,  $k \in K$ , и, соответственно,  $f(k_1 g k_2) = f(g)$ ,  $k_1, k_2 \in K$ . Ясно, что функции в пространствах  $L_q(G/K)$  и  $L_q(K \setminus G/K)$  можно рассматривать как функции на однородном пространстве  $Q = G/K$ .

Мы обозначаем через  $\mu_G$  и  $\mu_K$  нормированные меры Хаара на группах  $G$  и  $K$ , соответственно,  $\mu_G(G) = \mu_K(K) = 1$ , как и ранее,  $\mu$  обозначает инвариантную нормированную меру на однородном пространстве  $Q = G/K$ , при этом  $\mu_G = \mu_K \times \mu$ .

Пространства  $L_1(K \setminus G/K) \subset L_1(G/K) \subset L_1(G)$  являются банаховыми алгебрами относительно умножения, определенного как свертка функций

$$f_1 * f_2(g) = \int_G f_1(gh^{-1})f_2(h) d\mu_G(h). \quad (8.1)$$

Эти алгебры ассоциативны, но, вообще говоря, некоммутативны. Например, алгебра  $L_1(G)$  коммутативна только если группа  $G$  коммутативна.

Если алгебра  $L_1(K \setminus G/K)$  коммутативна, то группы  $G$  и  $K$  называются парой Гельфанд, а соответствующее однородное пространство  $Q = G/K$  называется коммутативным пространством, см. [34].

Двумя обширными классами коммутативных пространств являются римановы симметричные многообразия и двухточечно-однородные пространства, см. [22, 34]. В частности, интересующие нас пространства  $Q(d, d_0)$  коммутативны; они принадлежат обоим указанным классам.

Рассмотрим следующее унитарное представление группы  $G$  в пространстве  $L_2(G/K)$

$$T(g)f(h) = f(g^{-1}h), \quad f \in L_2(G/K), \quad g, h \in G. \quad (8.2)$$

Представление (8.2) разлагается в ортогональную сумму

$$T = \widehat{\bigoplus_{l \geq 0}} T_l, \quad L_2(G/K) = \widehat{\bigoplus_{l \geq 0}} V_l \quad (8.3)$$

унитарных неприводимых представлений  $T_l$  в конечно-мерных пространствах  $V_l$ . Положим  $m_l = \dim V_l$ , а через  $(\cdot, \cdot)$  обозначим скалярное произведение в  $V_l$ .

Если  $Q = G/K$  коммутативное пространство, то представление  $T_l$  в разложении (8.3) попарно неэквивалентны. Более того, все  $T_l$  являются представлениями класса 1 относительно подгруппы  $K$ . Это означает, что в каждом пространстве представления  $V_l$  существует единственный единичный вектор  $\mathbf{e}^{(l)}$ , такой что  $T_l(k)\mathbf{e}^{(l)} = \mathbf{e}^{(l)}$  для всех  $k \in K$ .

Выберем ортонормированный базис  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{m_l}$  в пространстве  $V_l$ , такой что  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^{(l)}$  и рассмотрим матричные элементы  $t_{ij}^{(l)}(g) = (T_l(g)\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ . Очевидно, выполняются соотношения

$$\left. \begin{aligned} t_{ij}^{(l)}(g_1g_2) &= \sum_{p=1}^{m_l} t_{ip}^{(l)}(g_1)t_{pj}^{(l)}(g_2), \\ t_{ij}^{(l)}(g^{-1}) &= \overline{t_{ji}^{(l)}(g)} \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

и, кроме того, справедливы следующие соотношения ортогональности

$$\int_G t_{ij}^{(l)}(g) \overline{t_{ij}^{(l')}(g)} d\mu_G(g) = m_l^{-1} \delta_{ll'} \delta_{ii'} \delta_{jj'}. \quad (8.5)$$

Система функций  $\{m_l^{1/2} t_{1j}^{(l)}(g), j = 1, \dots, m_l, l \geq 0\}$  образует ортонормированный базис в  $L_2(G/K)$ , а система функций  $\{m_l^{1/2} t_{11}^{(l)}(g), l \geq 0\}$  образует ортонормированный базис в  $L_2(K \setminus G/K)$ , см. [32].

Матричные элементы  $\varphi_l(g) = t_{11}^{(l)}(g)$  называются зональными сферическими функциями, а  $t_{1j}^{(l)}(g), j = 2, \dots, m_l$  присоединенными сферическими функциями. Из определения и формул (8.4) следует, что зональные сферические функции непрерывны,  $\varphi_l(\mathbf{1}) = 1$ , здесь  $\mathbf{1}$  – единица группы  $G$ ,  $|\varphi_l(g)| \leq 1$  для всех  $g \in G$  и

$$\left. \begin{aligned} \varphi_l(g_1g_2^{-1}) &= \sum_{j=1}^{m_l} t_{1j}^{(l)}(g_1) \overline{t_{1j}^{(l)}(g_2)}, \\ \varphi_l(g) &= \overline{\varphi_l(g^{-1})}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

Из (8.6) следует, что  $\varphi_l$  – положительно-определенные функции, т.е.

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} \overline{c_i} c_j \varphi_l(g_i^{-1} g_j) \geq 0 \quad (8.7)$$

для любых элементов  $g_1, \dots, g_N \in G$  и любых комплексных чисел  $c_1, \dots, c_N$ . Из (8.1), (8.5) и (8.6) получаем

$$(\varphi_l * \varphi_{l'})(g) = \delta_{ll'} m_l^{-1} \varphi_l(g). \quad (8.8)$$

Разложим функцию  $f \in L_2(K \setminus G/K)$  по ортонормированному базису  $\{m_l^{1/2} \varphi_l, l \geq 0\}$ ,

$$f(g) \sim \sum_{l \geq 0} m_l c_l(f) \varphi_l(g) \quad (8.9)$$

с коэффициентами Фурье

$$c_l(f) = \int_G f(g) \overline{\varphi_l(g)} d\mu_G(g). \quad (8.10)$$

Здесь  $\sim$  обозначает сходимость ряда (8.9) по  $L_2$ -норме. Имеет место равенство Парсеваля

$$\int_G |f(g)|^2 d\mu_G(g) = \sum_{l \geq 0} m_l |c_l(f)|^2 \quad (8.11)$$

Для двух функций  $f_1, f_2 \in L_2(K \setminus G/K)$  запишем разложение (8.9) и подставим в формулу для свертки (8.1). Пользуясь формулой (8.8), получим

$$f_1 * f_2(g) = \sum_{l \geq 0} m_l c_l(f_1) c_l(f_2) \varphi_l(g). \quad (8.12)$$

Поскольку сферические функции  $\varphi_l$  непрерывны и  $|\varphi_l(g)| \leq 1$ , то пользуясь равенством Парсеваля (8.11) для функций  $f_1$  и  $f_2$  и неравенством Коши–Буняковского, заключаем, что ряд (8.12) сходится абсолютно и равномерно и свертка  $f_1 * f_2$  является непрерывной функцией.

Приведенные выше факты справедливы для всех компактных коммутативных пространств. Мы хотим специализировать разложения по сферическим функциям (8.9)–(8.12) для двухточечно-однородных пространств.

Пусть  $Q = G/K$  – компактное двухточечно-однородное пространство с  $G$ -инвариантной метрикой  $\theta$  и  $K$  – стабилизатор фиксированной точки  $y_0 \in Q$ . Из определения  $Q$ , см. раздел 2, следует, что подгруппа  $K$  транзитивна на каждой сфере  $\Sigma_r(y_0) = \{y : \theta(y, y_0) = r\} \subset Q$ ,  $r \in \mathcal{R}$ ,

здесь  $\mathcal{R} = \{\theta(y, y_0) : y \in Q\}$  – множество радиусов. С другой стороны, любая функция  $f \in L_q(K \setminus G/K)$  рассматривается как функция на  $Q$ , постоянна на сферах  $\Sigma_r(y_0)$  и, следовательно, может быть записана в виде

$$f(g) = F(\theta(gy_0, y_0)) \quad (8.13)$$

с некоторой функцией  $F(r)$ ,  $r \in \mathcal{R}$ . Другими словами, для двуточечно-однородных пространств двойные классы смежности  $K \setminus G/K$  параметризуются радиусами  $r \in \mathcal{R}$ .

Из  $G$ -инвариантности и симметричности метрики  $\theta$  следует, что

$$\left. \begin{aligned} \theta(gy_0, y_0) &= \theta(y_0, g^{-1}y_0) = \theta(g^{-1}y_0, y_0), \\ \theta(g_1y_0, g_2y_0) &= \theta(y_0, g_1^{-1}g_2y_0) = \theta(g_1^{-1}g_2y_0, y_0). \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Сравнивая (8.13) и (8.14), получаем

$$f(g) = f(g^{-1}). \quad (8.15)$$

Кроме того, для свертки (8.1) функций  $f_1, f_2 \in L_2(K \setminus G/K)$  из (8.13) получаем формулу

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(g_1^{-1}g_2) &= \int_G F_1(\theta(g_1y_0, gy_0))F_2(\theta(gy_0, g_2y_0)) d\mu(g) \\ &= \int_Q F_1(\theta(y_1, y))F_2(\theta(y, y_2)) d\mu(y), \end{aligned} \quad (8.16)$$

где  $y_1 = g_1y_0$ ,  $y_2 = g_2y_0$ . Стоит отметить, что из (8.16) следует коммутативность пространства  $Q$ , поскольку свертка (8.16) очевидно коммутативна.

Для интегралов от функций вида (8.13) имеет место формула

$$\int_G f(g) d\mu_G(g) = \int_Q F(\theta(y, y_0)) d\mu(y) = \int_{\mathcal{R}} F(r) dv_r, \quad (8.17)$$

где последний интеграл понимается как интеграл Стильеса с неубывающей функцией  $v_r = \mu(B_r(y_0))$ ,  $r \in \mathcal{R}$ , объемом шара  $B_r(y_0) \subset Q$ .

Из формул (8.13) и (8.17) следует, что отображение  $f \rightarrow F$  является изометрией пространства  $L_2(K/K)$  на пространство  $L_2(\mathcal{R}, v)$  функций

$F(r)$ ,  $r \in \mathcal{R}$ , с конечной нормой

$$\|F\| = \left( \int_{\mathcal{R}} |F(r)|^2 dv_r \right)^{1/2} \quad (8.18)$$

Поскольку зональные сферические функции  $\varphi_l \in L_2(K/K)$ , их можно записать в виде (8.13)

$$\varphi_l(g) = \Phi_l(\theta(gy_0, y_0)) \quad (8.19)$$

с некоторыми функциями  $\Phi_l \in L_2(\mathcal{R}, v)$ . Формулу (8.19) можно записать также в виде

$$\varphi_l(g_1^{-1}g_2) = \Phi_l(\theta(g_1y_0, g_2y_0)) = \Phi_l(\theta(y_1, y_2)), \quad (8.20)$$

где  $y_1 = g_1y_0$ ,  $y_2 = g_2y_0$ .

Из свойств функций  $\varphi_l$  следует, что  $\Phi_l$  непрерывны,  $\Phi_l(0) = 1$ ,  $|\Phi_l(r)| \leq 1$ , а из сравнения (8.6) и (8.15) следует, что  $\Phi_l$  – вещественно-значны. Кроме того, система функций  $\{m_l^{1/2}\Phi_l, l \geq 0\}$  образует ортонормированный базис в пространстве  $L_2(\mathcal{R}, v)$ . Для функции  $F \in L_2(\mathcal{R}, v)$  разложение (8.9) приобретает вид

$$F(r) \sim \sum_{l \geq 0} m_l c_l(F) \Phi_l(r) \quad (8.21)$$

с коэффициентами Фурье

$$c_l(F) = \int_{\mathcal{R}} F(r) \Phi_l(r) dv_r. \quad (8.22)$$

Сравнивая формулы (8.12), (8.16), (8.21), приходим к такому соотношению

$$\int_Q F_1(\theta(y_1, y)) F_2(\theta(y, y_2)) d\mu(y) = \sum_{l \geq 0} m_l c_l(F_1) c_l(F_2) \Phi_l(\theta(y_1, y_2)). \quad (8.23)$$

Для всех пространств  $Q = Q(d, d_0)$  зональные сферические функции известны, см. [16, Chp. 9, Sec. 2], [19, p. 178], [22, Chp. V, Thm. 4.5], [23,

pp. 514–512, 543–544], [34, Thm. 11.4.21]. Явное выражение для функций  $\Phi_l$  в (8.19) имеет вид

$$\Phi_l(r) = \Phi_l^{(\alpha, \beta)}(r) = \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos r)}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)}, \quad r \in [0, \pi] \quad (8.24)$$

где  $P_l^{(\alpha, \beta)}(z)$  – стандартные полиномы Якоби степени  $l$  нормированные условием

$$P_l^{(\alpha, \beta)}(1) = \binom{\alpha + l}{l} = \frac{(\alpha + 1) \dots (\alpha + l)}{l!} \simeq l^\alpha \quad (8.25)$$

Параметры  $\alpha, \beta$  связаны с размерностями  $d, d_0$  соотношениями

$$\alpha = \frac{d}{2} - 1, \quad \beta = \frac{d_0}{2} - 1 \quad (8.26)$$

Необходимые сведения о полиномах Якоби можно найти в монографии [31]. Далее в формулах и вычислениях мы будем использовать как размерности  $d, d_0$  так и параметры  $\alpha, \beta$ , предполагается, что они связаны соотношениями (8.26). Разумеется, приводимые результаты о полиномах Якоби справедливы в значительно больших областях параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Например,  $\max_{-1 \leq z \leq 1} |P_l^{(\alpha, \beta)}(z)| = P_l^{(\alpha, \beta)}(1)$  при  $\alpha \geq \beta \geq -1/2$ , см. [31, Thm. 7.32.1]. В силу (8.26) это условие выполнено, см. (2.1) и  $|\Phi_l(r)| \leq 1$ .

Имеют место следующие соотношения ортогональности для полиномов Якоби

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos u) P_{l'}^{(\alpha, \beta)}(\cos u) (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} du \\ &= (\frac{1}{2})^{\alpha+\beta+1} \int_{-1}^1 P_l^{(\alpha, \beta)}(z) P_{l'}^{(\alpha, \beta)}(z) (1-z)^\alpha (1+z)^\beta dz = M_l^{-1} \delta_{ll'}, \end{aligned} \quad (8.27)$$

где  $M_0 = \kappa(d, d_0)$ , а при  $l \geq 1$

$$M_l = (2l + \alpha + \beta + 1) \frac{\Gamma(l+1)\Gamma(l+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(l+\alpha+1)\Gamma(l+\beta+1)} \simeq l, \quad (8.28)$$

см. [31, Eq. (4.3.3)].

Сравнивая соотношение ортогональности (8.5) для зональных сферических функций (8.24) с (8.28), получаем явную формулу для размерностей  $m_l$  неприводимых представлений  $T_l$  в (8.3)

$$m_l = M_l B(d/2, d_0/2) \binom{\alpha + l}{l}^2 \simeq l^{d-1}. \quad (8.29)$$

Для любой функции  $F \in L_2([0, \pi], v)$  разложение (8.21) приобретает вид

$$F(r) \sim \sum_{l \geq 0} M_l C_l(F) P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos r), \quad (8.30)$$

где коэффициенты Фурье–Якоби

$$C_l(F) = \int_0^\pi F(u) P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos u) (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} du. \quad (8.31)$$

Коэффициенты Фурье (8.22) для зональных сферических функций (8.24) и коэффициенты Фурье–Якоби (8.31), очевидно, связаны соотношением

$$c_l(F) = C_l(F) \frac{\kappa(d, d_0)}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)}, \quad l \geq 0. \quad (8.32)$$

Пользуясь соотношениями (8.24), (8.31) и (8.32), запишем формулу (8.23) в виде

$$\begin{aligned} & \int_Q F_1(\theta(y_1, y)) F_2(\theta(y, y_2)) d\mu(y) \\ &= \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 0} M_l C_l(F_1) C_l(F_2) \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)} \end{aligned} \quad (8.33)$$

Эта формула будет использована в разделе 9 для разложения уклонений и метрик по зональным сферическим функциям.

Условие положительной определенности (8.7) для зональных сферических функций (8.24) будет использовано далее в разделе 11 в следующей специальной форме

$$\varphi_l[D_N] = \sum_{x_1, x_2 \in D_N} \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(x_1, x_2))}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)} \geq 0 \quad (8.34)$$

для любого  $N$ -точечного подмножества  $D_N \subset Q(d, d_0)$ .

Условия (3.2), (3.3), определяющие  $t$ -дизайн  $D_N \subset Q(d, d_0)$  очевидно эквивалентны следующим соотношениям, см. [4, 23],

$$\varphi_l[D_N] = 0, \quad l = 0, 1, \dots, t. \quad (8.35)$$

## 9. Разложения по сферическим функциям уклонений и метрик

В настоящем разделе мы получим явные формулы разложений по зональным сферическим функциям (8.24) для ядер (1.6), (1.8) и для метрик симметричной разности (1.33), (1.14) в пространствах  $Q(d, d_0)$ . В следующем разделе будут даны точные оценки коэффициентов этих разложений.

Нам понадобятся основные факты об асимптотическом поведении полиномов Якоби  $P_l^{(\alpha, \beta)}(z)$ ,  $z \in [-1, 1]$ ,  $\alpha \geq -1/2$ ,  $\beta \geq -1/2$ , при  $l \rightarrow \infty$ . Это поведение весьма неравномерно по  $z \in [-1, 1]$ . Во внутренних точках указанного интервала полиномы осциллируют и имеют величину порядка  $l^{-1/2}$ , а вблизи концов интервала  $z = 1$  и  $z = -1$  резко возрастают до величины порядка  $l^\alpha$  и  $l^\beta$ , соответственно. Такое поведение удобно описать в терминах весовых оценок. Положим

$$J_l^{(\alpha, \beta)}(r) = (\sin \frac{1}{2}r)^{\alpha+\frac{1}{2}} (\cos \frac{1}{2}r)^{\beta+\frac{1}{2}} P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos r), \quad r \in [0, \pi] \quad (9.1)$$

Для  $r \in [c_0 l^{-1}, \pi - c_0 l^{-1}]$ , где  $c_0 > 0$  – произвольная постоянная, справедлива асимптотическая формула

$$J_l^{(\alpha, \beta)}(r) = (\pi l)^{-1/2} \{ \cos[(l + l_0)r + r_0] + O((l \sin r)^{-1}) \}, \quad (9.2)$$

где  $l_0 = (\alpha + \beta + 1)/2$ ,  $r_0 = -\pi(2\alpha + 1)/4$ , см. [31, Thm. 8.21.3].

Для  $r \in [0, c_0 l^{-1}]$  и  $r \in [\pi - c_0 l^{-1}, \pi]$  справедлива оценка  $J_l^{(\alpha, \beta)}(r) = O(l^{-1/2})$ , см. [31, Thm. 7.32.2]. Из этой оценки и из формулы (9.2) следует, что для всех  $r \in [0, \pi]$  справедлива оценка

$$|J_l^{(\alpha, \beta)}(r)| < c(l + 1)^{-1/2}, \quad l \geq 0, \quad (9.3)$$

с постоянной, зависящей только от  $\alpha$  и  $\beta$ .

Рассмотрим инвариантную меру пересечения двух шаров  $B_r(y_1)$  и  $B_r(y_2)$  в пространстве  $Q = Q(d, d_0)$

$$\mu_r(y_1, y_2) = \mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2)) = \int_Q \chi_r(\theta(y_1, y)) \chi_r(\theta(y, y_2)) d\mu(y), \quad (9.4)$$

где  $\chi_r(\cdot)$  – характеристическая функция отрезка  $[0, r]$ ,  $0 \leq r \leq \pi$ . Мы воспользовались здесь формулой (1.16).

**Лемма 9.1.** Для ядра (9.4) справедливо следующее разложение по зональным сферическим функциям

$$\mu_r(y_1, y_2) = v_r^2 + \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l a_l(r) \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)}, \quad (9.5)$$

где  $v_r = \mu(B_r(y))$  и

$$\begin{aligned} a_l(r) &= (\sin \frac{1}{2}r)^{2d} (\cos \frac{1}{2}r)^{2d_0} \left\{ P_{l-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\cos r) \right\}^2 \\ &= (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1} \left\{ J_{l-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(r) \right\}^2. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Коэффициенты ряда (9.5) допускают оценку

$$M_l a_l(r) \leq c (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1} \quad (9.7)$$

с постоянной, зависящей только от  $d$  и  $d_0$ .

Кроме того, имеет место равенство

$$\kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l a_l(r) = v_r - v_r^2 = v_r v'_r. \quad (9.8)$$

*Доказательство.* Применяя разложение (8.33) к интегралу (9.4), получим

$$\mu_r(y_1, y_2) = \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 0} M_l \{C_l(\chi_r)\}^2 \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)}, \quad (9.9)$$

где  $C_l(\chi_l)$  – коэффициенты Фурье–Якоби (8.31) для характеристической функции  $\chi_r$ . Из (8.31) получаем

$$\begin{aligned} C_l(\chi_r) &= \int_0^r P_l^{(\alpha,\beta)}(\cos u)(\sin \frac{1}{2}u)^{d-1}(\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} du \\ &= (\frac{1}{2})^{\frac{d-1}{z} + \frac{d_0-1}{z}} \int_{\cos r}^1 (1-z)^\alpha (a+z)^\beta P_l^{(\alpha,\beta)}(z) dz. \end{aligned} \quad (9.10)$$

с учетом (2.2) имеем  $C_0(\chi_r) = \kappa(d, d_0)^{-1} v_r$ . При  $l \geq 1$  воспользуемся формулой Родрига для полиномов Якоби, см. [31, Eq. (4.3.1)],

$$P_l^{(\alpha,\beta)}(z) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} (1-z)^{-\alpha} (1+z)^{-\beta} \frac{d^l}{dz^l} \{(1-z)^{l+\alpha} (1+z)^{l+\beta}\}. \quad (9.11)$$

Подставляя (9.11) в (9.10), получим

$$\begin{aligned} &\int_{\cos r}^1 (1-z)^\alpha (1+z)^\beta P_l^{(\alpha,\beta)}(z) dz \\ &= (2l)^{-1} (1 - \cos r)^{\alpha+1} (1 + \cos r)^{\beta+1} P_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos r) \\ &= 2^{\alpha+\beta+1} l^{-1} (\sin \frac{1}{2}r)^{2\alpha+2} (\cos \frac{1}{2}r)^{2\beta+2} P_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos r). \end{aligned}$$

С учетом (8.26) и (9.1) окончательно находим

$$\begin{aligned} C_l(\chi_r) &= l^{-1} (\sin \frac{1}{2}r)^d (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0} P_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\cos r) \\ &= l^{-1} (\sin \frac{1}{2}r)^{\frac{d-1}{2}} (\cos \frac{1}{2}r)^{\frac{d_0-1}{2}} J_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(r). \end{aligned} \quad (9.12)$$

Подставляя (9.12) в (9.9), получаем формулы (9.5) и (9.6).

Поскольку  $M_l \simeq l$ , см. (8.28), и  $J_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(r) \lesssim l^{-1/2}$ , см. (9.3), то из (9.6) сразу следует оценка (9.7).

Из (9.4) следует, что  $\mu_r(y, y) = v_r$ . Полагая в (9.5)  $y_1 = y_2 = y$ , получаем равенство (9.8). Фактически, формула (9.8) является равенством Парсеваля для разложения по полиномам Якоби (8.30) функции  $\chi_r$ .  $\square$

Из Леммы 3.1 непосредственно вытекают следующие утверждения.

**Теорема 9.1.** Для любого пространства  $Q(d, d_0)$  справедливы следующие разложения по зональным сферическим функциям.

(i) Для ядер  $\lambda_r(y_1, y_2)$ , см. (1.6), и метрик  $\theta_r^\Delta(y_1, y_2)$ , см. (1.14), имеют место разложения

$$\lambda_r(y_1, y_2) = \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l a_l(r) \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)}, \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} \theta_r^\Delta(y_1, y_2) &= \langle \theta_r^\Delta \rangle - \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l a_l(r) \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)}, \\ &= \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l A_l(\eta) \left[ 1 - \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)} \right], \end{aligned} \quad (9.14)$$

где  $\langle \theta_r^\Delta \rangle = v_r v'_r$  – среднее значение метрики  $\theta_r^\Delta$ , см. (1.26), а коэффициенты  $a_l(r)$  определены в (9.6).

(ii) Если весовая функция  $\eta \in W(d, d_0)$ , то для ядер  $\lambda(\eta, y_1, y_2)$ , см. (1.8) и метрик  $\theta^\Delta(\eta, y_1, y_2)$ , см. (1.13) имеют место разложения

$$\lambda(\eta, y_1, y_2) = \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l A_l(\eta) \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)}, \quad (9.15)$$

$$\begin{aligned} \theta^\Delta(\eta, y_1, y_2) &= \langle \theta^\Delta(\eta) \rangle - \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l A_l(\eta) \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)}, \\ &= \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l A_l(\eta) \left[ 1 - \frac{P_l^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \beta)}(1)} \right], \end{aligned} \quad (9.16)$$

где  $\langle \theta^\Delta(\eta) \rangle$  – среднее значение метрики  $\theta^\Delta(\eta)$ , см. (1.18), а коэффициенты  $A_l(\eta)$  определены формулой

$$A_l(\eta) = \int_0^\pi \eta(a) a_l(u) du. \quad (9.17)$$

*Доказательство.* (i) Подставляя разложение (9.5) в формулы (1.23) и (1.25), получим, соответственно, разложения (9.13) и (9.14). Во втором равенстве в (9.14) учтено соотношение (9.8).

(ii) В силу оценки (9.7) ряды (9.13) и (9.14) можно почленно проинтегрировать с весовой функцией  $\eta \in W(d, d_0)$ . Это влечет разложения (9.15) и (9.16).  $\square$

Отметим, что в силу Теоремы 2.1 для хордовой метрики  $\tau$  также справедливо разложение (9.16) с весовой функцией  $\eta^\sharp(r) = \sin r$ . Кроме того, для хордовой метрики справедлива формула

$$\tau(y_1, y_2) = c(\alpha, \beta) \left[ 1 - \frac{P_1^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_1^{(\alpha, \beta)}(1)} \right]^{1/2}, \quad (9.18)$$

с постоянной

$$c(\alpha, \beta) = \left( \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 2} \right)^{1/2} = \left( \frac{d}{d + d_0} \right)^{1/2}. \quad (9.19)$$

Действительно, из формулы Родрига (9.11) получаем  $P_1^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + 2)z + \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$  и

$$\frac{1}{2}(1 - z) = \frac{\alpha + 1}{\alpha + \beta + 2} \left[ 1 - \frac{P_1^{(\alpha, \beta)}(z)}{P_1^{(\alpha, \beta)}(1)} \right]. \quad (9.20)$$

С другой стороны, по определениям (2.4), (5.24) хордовая метрика

$$\tau(y_1, y_2) = \sin \frac{1}{2}\theta(y_1, y_2) = \left[ \frac{1}{2}(1 - \cos \theta(y_1, y_2)) \right]^{1/2}. \quad (9.21)$$

Сравнивая формулы (9.20) и (9.21), получаем (9.18), (9.19).

Для сфер  $S^d$  по определению  $d_0 = d$ ,  $\beta = \alpha = \frac{d}{2} - 1$ , а полиномы Якоби  $P_l^{(\alpha, \alpha)}(z)$  с точностью до числового множителя совпадают с ультрасфериическими полиномами (полиномами Гегенбауэра), см. [31, Sec. 4.7]. При этом  $P_l^{(\alpha, \alpha)}(z)$  – четная или нечетная функция  $z$ , соответственно, для четных или нечетных  $l$ . Сравнивая формулу (4.5) и разложение (9.14) с

$r = \pi/2$ , получаем следующее разложение для геодезического расстояния на сфере

$$\begin{aligned}\theta(y_1, y_2) &= 2\pi \left[ \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^d \sum_{odd l \geq 1} l^{-2} M_l \left\{ P_{l-1}^{(\alpha+1, \alpha+1)}(0) \right\}^2 \frac{P_l^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \alpha)}(1)} \right] \\ &= 2\pi \left( \frac{1}{4} \right)^d \sum_{odd l \geq 1} l^{-2} M_l \left\{ P_{l-1}^{(\alpha+1, \alpha+1)}(0) \right\}^2 \left[ 1 - \frac{P_l^{(\alpha, \alpha)}(\cos \theta(y_1, y_2))}{P_l^{(\alpha, \alpha)}(1)} \right]. \quad (9.22)\end{aligned}$$

В разложении (9.20) участвуют только нечетные зональные сферические функции. Для соответствующих сумм (8.34) легко получить следующие формулы

$$\varphi_l[D_N] = \begin{cases} 0 & \text{если } D_N = D_{2a}, \\ 1 & \text{если } D_N = D_{2a+1}, \end{cases} \quad (9.23)$$

где подмножество  $D_{2a} \subset S^d$  состоит из  $a$  пар антиподальных точек, а  $D_{2a+1} = D_{2a} \cup \{x_0\}$ ,  $x_0 \in S^d$  – любая точка. Пользуясь (9.22) и (9.23), непосредственно получаем еще одно доказательство соотношений (2.22) для экстремальных сумм геодезических расстояний.

## 10. Оценки коэффициентов Фурье–Якоби

В настоящем разделе приводятся нужные нам оценки для коэффициентов

$$a_l(r) = (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1} \left\{ J_{l-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(r) \right\}^2, \quad (10.1)$$

$$A_l(\eta) = \int_0^\pi \eta(u) a_l(u) du, \quad (10.2)$$

$$A_l(\chi_r) = \int_0^\pi \chi_r(u) a_l(u) du = \int_0^r a_l(u) du \quad (10.3)$$

с  $J_l^{(\alpha, \beta)}(\cdot)$  определенным в (9.1). Фактически мы доказываем специальные весовые оценки для полиномов Якоби, справедливые при произвольных  $\alpha + 1 \geq -1/2$ ,  $\beta + 1 \geq -1/2$  и параметрах  $\alpha, \beta, d, d_0$  связанных соотношениями (8.26).

**Лемма 10.1.** Пусть весовая функция  $\eta \in W(d, d_0)$ ,  $\eta \neq 0$ , тогда справедливы следующие оценки.

(i) При  $0 < r \leq \pi$  и  $l \geq 1$

$$A_l(\eta) > cr^{-d+1}a_l(r). \quad (10.4)$$

(ii) Существует постоянная  $L \geq 1$ , зависящая только от  $\alpha$  и  $\beta$ , такая что при  $0 < r \leq \pi/2$  и  $lr > L$

$$A_l(\eta) < Cr^{-d}A_l(\chi_r). \quad (10.5)$$

Положительные постоянные  $c$  и  $C$  в (10.4) и (10.5) зависят только от  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\eta$ .

*Доказательство.* Из асимптотической формулы (9.2) получаем

$$J_{l-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(r) = (\pi l)^{-1} \{ \sin[(l + l_0)r + r_0] + O((l \sin r)^{-1}) \}, \quad (10.6)$$

$$\{J_{l-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(r)\}^2 = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2[(l + l_0)r + r_0] + R_l(r) \right\}, \quad (10.7)$$

где поправочный член  $R_l(r)$  удовлетворяет оценкам

$$R_l(r) = \begin{cases} O(l^{-1}) & \text{при } 0 < c_0 \leq r \leq \pi - c_0, \\ O((lr)^{-1}) & \text{при } l^{-1} \leq r \leq \pi/2, \end{cases} \quad (10.8)$$

где  $0 < c_0 < \pi/2$  – произвольная постоянная.

(i) Выберем и фиксируем достаточно малую постоянную  $0 < c_0 < \pi/2$ , чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} & \int_{c_0}^{\pi-c_0} \eta(u) (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} du \\ & \geq \frac{1}{2} \int_0^\pi \eta(u) (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} du = \frac{1}{2} \|\eta\|_{d, d_0} > 0. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Это возможно, поскольку,  $\eta \in W(d, d_0)$ ,  $\eta \neq 0$ , см. (2.14).

Пользуясь (10.9) и асимптотикой (10.7) с первой оценкой поправочного члена (10.8), получаем

$$\begin{aligned}
A_l(\eta) &\geq \int_{c_0}^{\pi-c_0} \eta(u) (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} \left\{ J_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(u) \right\}^2 du \\
&\geq (\pi l)^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \|\eta\|_{d,d_0} - \frac{1}{2} \int_{c_0}^{\pi-c_0} \eta(u) (\sin \frac{1}{2}u)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}u)^{d_0-1} \cos 2[(l+l_0)u+r_0] du \right. \\
&\quad \left. + O(l^{-1}) \right\} = (\pi l)^{-1} \frac{1}{4} \|\eta\|_{d,d_0} + o(1). \tag{10.10}
\end{aligned}$$

На последнем шаге в (10.10) мы воспользовались леммой Римана–Лебега.

Из (10.10) следует оценка

$$A_l(\eta) \geq (\pi l)^{-1} \frac{1}{8} \|\eta\|_{d,d_0} \tag{10.11}$$

для всех достаточно больших  $l > l_1$ . Вместе с тем,

$$\min_{1 \leq l \leq l_1} l A_l(\eta) > 0, \tag{10.12}$$

поскольку,  $A_l(\eta) > 0$  для всех  $l \geq 1$ . Из (10.11) и (10.12) следует, что оценка

$$A_l(\eta) \geq c_1 l^{-1} \tag{10.13}$$

выполняется для всех  $l \geq 1$  с некоторой постоянной  $c_1 > 0$ .

С другой стороны, пользуясь оценкой (9.3), получаем

$$r^{-d+1} a_l(r) = r^{-d+1} (\sin \frac{1}{2}r)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1} \left\{ J_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(r) \right\}^2 \leq c_2 l^{-1} \tag{10.14}$$

Сравнивая оценки (10.13) и (10.14), приходим к оценке (10.14) с  $c = c_1 c_2^{-1}$ .

(ii) Пусть  $0 < r \leq \pi/2$  и  $lr \geq L$ , где  $L \geq 1$  – некоторая постоянная.

Из определения (10.3) получаем

$$\begin{aligned}
r^{-d} A_l(\chi_r) &\geq r^{-d} \int_{r/2}^r a_l(u) du \\
&\geq r^{-d} (\sin \frac{1}{4}r)^{d-1} (\cos \frac{1}{2}r)^{d_0-1} \int_{r/2}^r \left\{ J_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(u) \right\}^2 du \\
&> c_1 r^{-1} \int_{r/2}^r \left\{ J_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(u) \right\}^2 du,
\end{aligned} \tag{10.15}$$

где можно положить  $c_1 = (1/8)^{d-1} (1/2)^{d_0-1}$ .

Подставляя в (10.15) асимптотику (10.7) со второй оценкой поправочного члена (10.8), получим

$$\begin{aligned}
&r^{-1} \int_{r/2}^r \left\{ J_{l-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(u) \right\}^2 du \\
&= (\pi l)^{-1} \left\{ \frac{1}{4} - \frac{1}{2} r^{-1} \int_{r/2}^r \cos 2[(l+l_0)u + r_0] du + O(L^{-1}) \right\}.
\end{aligned} \tag{10.16}$$

Очевидно, что интеграл в правой части (10.16) имеет порядок  $O((rl)^{-1} \lesssim O(L^{-1}))$ . Подставляя (10.16) в (10.15), получим

$$r^{-d} A_l(\chi_r) > c_1 (\pi l)^{-1} \left\{ \frac{1}{4} + O(L^{-1}) \right\}. \tag{10.17}$$

В силу (10.17) мы можем выбрать и фиксировать достаточно большое  $L$ , зависящее только от  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы выполнялась оценка

$$r^{-d} A_l(\chi_r) > \frac{1}{8} c_1 (\pi l)^{-1} = c_2 l^{-1}. \tag{10.18}$$

С другой стороны, пользуясь оценкой (9.3) и определением (10.2), получаем

$$A_l(\eta) \leq C_2 \|\eta\|_{d,d_0} l^{-1} = C_3 l^{-1}. \tag{10.19}$$

Сравнивая оценки (10.18) и (10.19), приходим к оценке (10.15) с  $C = C_3 c_2^{-1}$ .  $\square$

Лемма 10.1 доказана.

## 11. Доказательства Теорем 2.2 и 3.1

В настоящем разделе мы завершим доказательства Теорем 2.2 и 3.1. Эти результаты будут получены как непосредственные следствия общего результата об уклонениях приводимого ниже в Теореме 11.1.

Пользуясь Теоремой 9.1 (формулы (9.13) и (9.15)), запишем уклонения (1.5), (1.7) следующим образом

$$\lambda_r[D_N] = \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l a_l(r) \varphi_l[D_N], \quad (11.1)$$

$$\lambda[\eta, D_N] = \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l A_l(\eta) \varphi_l[D_N], \quad (11.2)$$

$$\lambda[\chi_r, D_N] = \kappa(d, d_0) \sum_{l \geq 1} l^{-2} M_l A_l(\chi_r) \varphi_l[D_N], \quad (11.3)$$

здесь  $D_N \subset Q(d, d_0)$  – произвольное  $N$ -точечное подмножество, а  $\varphi_l[D_N] \geq 0$  определены в (8.34). Ряды (11.1)–(11.3) сходятся и все их члены неотрицательны.

**Теорема 11.1.** *Пусть весовая функция  $\eta \in W(d, d_0)$ ,  $\eta \neq 0$ , тогда справедливы следующие оценки.*

(i) Для любого  $N$ -точечного подмножества  $D_N \subset Q(d, d_0)$  справедлива оценка

$$\lambda[\eta, D_N] > c r^{-d+1} \lambda_r[D_N], \quad (11.4)$$

где  $0 < r \leq \pi$  – произвольно.

(ii) Существует постоянная  $L \geq 1$ , зависящая только от  $d$  и  $d_0$  такая, что для любого  $N$ -точечного  $t$ -дизайна  $D_N \subset Q(d, d_0)$  с  $t \geq 2L/\pi$  справедлива оценка

$$\lambda[\eta, D_N] < C r^{-d} \lambda[\chi_r, D_N], \quad (11.5)$$

где  $r = Lt^{-1}$ .

Положительные постоянные с и  $C$  в (11.4) и (11.5) зависят только от  $d$ ,  $d_0$  и  $\eta$ .

*Доказательство.* (i) Пользуясь оценкой (10.4) и сравнивая ряды (11.1) и (11.2), получаем (11.4).

(ii) Если  $D_N \subset Q(d, d_0)$  –  $t$ -дизайн, то в силу (8.35)  $\varphi_l[D_N] = 0$  для  $l = 0, 1, \dots, t$  и суммирование во всех рядах (11.1)–(11.3) распространяется на  $l > t$ .

Выберем в качестве  $L$  постоянную, указанную в Лемма 10.1 (ii). Для  $r = Lt^{-1}$  получаем  $0 < r \leq \pi/2$  при  $t \geq 2L/\pi$  и  $lr > L$  при  $l > t$ . Пользуясь оценкой (10.5) и сравнивая ряды (11.2) и (11.3), получаем (11.5).

Теорема доказана.  $\square$

Теперь мы можем доказать Теоремы 2.2 и 3.1.

**Доказательство Теоремы 2.2.** Нам нужно доказать только левую оценку в (2.20). Из определений уклонений (1.5), (1.3) получаем

$$\lambda_r[D_N] \geq \langle\langle Nv_r \rangle\rangle^2,$$

где  $\langle\langle z \rangle\rangle = \min\{|z - n|, n \in \mathbb{Z}\}$  – расстояние от  $z \in \mathbb{R}$  до ближайшего целого. Определим  $r$  из условия  $Nv_r = 1/2$ , тогда  $\lambda_r[D] \geq 1/2$ . В силу (2.3),  $r \simeq N^{-1/d}$  и оценка (10.2) влечет левую оценку в (2.20).  $\square$

**Доказательство Теоремы 3.1.** Для количества точек подмножества  $D_N \subset Q(d, d_0)$  в шаре  $B_r(y)$  мы можем написать формулу

$$\begin{aligned} \int_Q (\#\{B_r(y) \cap D_N\})^2 d\mu(y) &= \int_Q \left( \sum_{x \in D_N} \chi(B_r(y), x) \right)^2 d\mu(y) \\ &= \sum_{y_1, y_2 \in D_N} \mu(B_r(y_1) \cap B_r(y_2)). \end{aligned} \quad (11.6)$$

Из формул (11.6), (1.24) и определения (3.7) получаем

$$\lambda_r[D_N] < \int_Q (\#\{B_r(y) \cap D_N\})^2 d\mu(y) \leq (\nu[D_N, r])^2. \quad (11.7)$$

Поскольку  $\nu[D_N, r]$  является неубывающей функцией  $r$ , из (11.7) вытекает оценка

$$\lambda[\chi_r, D_N] = \int_0^r \lambda_u[D_N] du < r(\nu[D_N, r])^2. \quad (11.8)$$

Подставляя (11.8) в (11.5), получаем

$$\lambda[\eta, D_N] < Cr^{-d+1}(\nu[D_N, r])^2. \quad (11.9)$$

Для  $r = Lt^{-1}$  оценка (11.9) совпадает с оценкой (3.8).  $\square$

## Список литературы

- [1] J. R. Alexander, *On the sum of distances between  $n$  points on a sphere.* Acta Math. Hungar. **23** (3–4) (1972), 443–448.
- [2] J. R. Alexander, J. Beck, W. W. L. Chen, *Geometric discrepancy theory and uniform distributions.* — in Handbook of Discrete and Computational Geometry (J. E. Goodman and J. O'Rourke eds.), Chapter 10, pages 185–207. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.
- [3] J. C. Baez, *Octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 145–205; errata in Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), 213.
- [4] E. Banai, *On extremal finite sets in the sphere and other metric spaces*, in *Algebraic, extremal and metric combinatorics 1986*, (Eds. M. M. Deza, P. Frankl, I. G. Rosenberg), Cambridge Univ. Press, 1988.
- [5] J. Beck, *Sums of distances between points on a sphere: An application of the theory of irregularities of distributions to distance geometry*, Mathematika **31** (1984), 33–41.
- [6] J. Beck, W. W. L. Chen, *Irregularities of Distribution*. Cambridge Tracts in Math., vol. 89, Cambridge Univ., Press, 1987.
- [7] A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, A series of modern surveys in Math., vol. 93, Springer, 1978.
- [8] D. Bilyk, F. Dai and R. Matzke. Stolarsky principle and energy optimization on the sphere. *Preprint*, (2016), available at <https://arxiv.org/abs/1611.04420>.
- [9] A. Bondarenko, D. Radchenko, M. Viazovska, *Optimal asymptotic bounds for spherical designs*, Ann. of Math. **178** No. 2 (2013), 443–452.
- [10] A. Bondarenko, D. Radchenko, M. Viazovska, *Well-separated spherical designs*, arXiv. 1303. 5531v2 [math. MG] 10 Jul 2013.
- [11] J. S. Brauchart, J. Dick, *A simple proof of Stolarsky's invariance principle*. — Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 2085–2096.
- [12] J. S. Brauchart, P. J. Grabner, *Distributing many points on spheres: minimal energy and desings*, arXiv: 1407. 8282v2 [math-ph] 7 Nov 2014.

- [13] H. Cohn, A. Kumar, *Universally optimal distribution of points on spheres*, J. Amer. Math. Soc. **20** No. 1 (2006), 99–147.
- [14] H. Cohn, A. Kumar, G. Minton, *Optimal simplices and codes in projective spaces*, to appear in Geometry and Topology, arXiv: 1308.3188.
- [15] J. Conway, R. Hardin, N. J. A. Sloane, *Packing lines, planes, etc.: packing in Grassmannian spaces*, Experiment. Math., **5** (1996), 139–159.
- [16] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packing, lattices and groups*, Springer-Verlag, 1988.
- [17] M. M. Deza, M. Laurent, *Geometry of cuts and metrics*, Springer-Verlag, 1997.
- [18] H. Freudenthal, *Lie groups in the Foundation of geometry*, Advances in Math., **1** (1965), 145–190.
- [19] R. Gangolli, *Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy’s Brownian motion of several parameters*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. III, No. 2 (1967), 121–325.
- [20] F. R. Harvey, *Spinors and calibrations*, Academic Press, 1990.
- [21] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press Inc., London, 1978.
- [22] S. Helgason, *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators, and Spherical functions*, Academic Press, 1984.
- [23] V. I. Levenshtein, *Universal bounds for codes and designs*, in Handbook of Coding Theory (V. S. Pless and W. C. Huffman eds.), Chapter 6, pages 499–648. Elsevier, Amsterdam, 1998.
- [24] P. Lévy, *Processus stochastiques et mouvement Brownien*, Deuxième édit., Paris 1965.
- [25] A. Lubotzky, R. S. Phillips, P. Sarnak, *Hecke operators and distributing points on the sphere*, I. Comm. Pure Appl. Math. **39** (S), suppl. (1986); *Hecke operators and distributing points on  $S^2$* , II. Comm. Pure Appl. Math. **40** (4) (1987), 401–420.

- [26] P. Mattila, *Geometry of sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and Rectifiability*, Cambridge Univ. Pres, Cambridge, 1995.
- [27] E. B. Saff, A. B. J. Kuijlaars, *Distributing many points on a sphere*, Math. Intelligencer, **19** (1) (1997), 5–11.
- [28] M. M. Skriganov, *Point distributions in compact metric spaces*, Preprint POMI 7/2015, arXiv: 1512.00364v1 [math.CO].
- [29] М. М. Скриганов, Точечные распределения в компактных метрических пространствах, II, Препринт ПОМИ-2.2016.
- [30] K. B. Stolarsky, *Sums of distances between points on a sphere*, II. Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 575–582.
- [31] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, AMS, 1950.
- [32] N. Ja. Vilenkin, A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions*, vols. 1–3, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1991–1992.
- [33] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, Univ. California, Berkley, 1972.
- [34] J. A. Wolf, *Harmonic analysis on commutative spaces*, Math. Surveys and Monographs, vol. 142, Amer. Math. Soc., Providence, 2007.