ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ 06/2016

А. М. ВЕРШИК П. Б. ЗАТИЦКИЙ

УНИВЕРСАЛЬНАЯ АДИЧЕСКАЯ АППРОКСИМАЦИЯ, ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ И МАСШТАБИРОВАННАЯ ЭНТРОПИЯ

Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН;
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
Математико-Механический факультет,
Университетский пр., д. 28, 198504,
Старый Петергоф, Санкт-Петербург, Россия
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Б. Каретный пер., д. 19, 127051, Москва, Россия
avershik@gmail.com
Лаборатория им. П.Л. Чебышева,
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
14-я линия В.О., д. 29Б, 199178, Санкт-Петербург, Россия
Санкт-Петербургское отделение
математического института им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия
pavelz@pdmi.ras.ru

Аннотация

Определяется бесконечный градуированный граф упорядоченных пар и каноническое действие группы $\mathbb{Z}$ (адическое действие) и бесконечной суммы групп второго порядка $\mathcal{D} = \sum_1^\infty \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на пространстве путей этого графа. Доказывается, что эти действия являются универсальными для каждой из групп в следующем смысле: всякое эргодическое действие указанных групп с инвариантной мерой и двучленной образующей, помноженное на некоторое специальное действие ("одометр") метрически изоморфно каноническому адическому действию на пространстве путей этого графа с некоторой центральной мерой. Рассматривается ряд задач, связанных с этой проблемой.

Ключевые слова: Граф упорядоченных пар, универсальное действие, адический автоморфизм, масштабированная энтропия.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 14-11-00581.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

Contents

1 Введение.

Настоящая работа посвящена решению нескольких связанных между собой задач:

— мы доказываем существование универсальной адической реализации произвольного эргодического действия группы $\mathbb{Z}$ и группы $\mathcal{D} = \sum_1^\infty \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, бесконечной прямой суммы групп второго порядка, на пространстве путей *градуированного графа* (*диаграммы Браттели*) *упорядоченных пар*, обозначаемого далее OP (Ordered Pairs);

— перечисляем все эргодические центральные меры на пространстве путей графа OP;

— доказываем, что масштабирующая последовательность для диадической фильтрации не зависит от выбора итерируемой метрики;

— доказываем, что для адических действий групп $\mathbb{Z}$ и группы $\mathcal{D}$ на пространстве путей этого графа существуют инвариантные меры, имеющие заданный субаддитивный рост масштабирующих последовательностей в определении масштабированной энтропии, при этом тот же рост имеет энтропия хвостовой фильтрации относительно этой меры.

Прокомментируем эти задачи и их решения.

1.1 Универсальная адическая реализация

В классической лемме Рохлина строится периодическая аппроксимация произвольного порядка для любого апериодического автоморфизма с инвариантной мерой. Возможно построить согласованную систему “башен Рохлина”, задающую исчерпывающую периодическую (например порядков 2^n, $n \in \mathbb{N}$) аппроксимацию: в [3, 4] построена так называемая “адическая реализация” любого эргодического действия. А именно, доказано, что для любого эргодического автоморфизма S существует такие градуированный граф Γ, адическая структура на нем и центральная мера ν на пространстве $\mathcal{T}(\Gamma)$ его путей, что адический сдвиг на $\mathcal{T}(\Gamma)$ изоморфен автоморфизму S. Возникает вопрос, нельзя ли уточнить это построение и реализовать произвольные эргодические действия на пространстве путей **одного и того же графа**, меняя лишь инвариантную меру? Можно конкретизировать вопрос следующим образом: рассмотрим так называемое символическое действие дискретной группы G (левыми) сдвигами на пространстве 2^G — это универсальная модель: любое действие с двучленной образующей реализуется таким образом. Тогда наш вопрос фактически сводится к такому: нельзя ли придать построению аппроксимации в лемме Рохлина универсальный характер, т.е. дать конструкцию периодической (например, для периодов степеней двойки) аппроксимации этого сдвига сразу для всех эргодических мер, инвариантных относительно сдвига? Положительный ответ на этот вопрос означал бы существование универсальной адической реализации. Но насколько известно авторам, ответ неизвестен; этот вопрос поднимался в давних разговорах В. А. Рохлина с первым автором, и высказывалась гипотеза, что здесь могут возникнуть препятствия логического характера.[1] Как показано в данной работе, такая универсальная конструкция возможна, если изменить вопрос следующим образом: *аппроксимировать (или строить адическую реализацию) не произвольного действия группы $\mathbb{Z}$, а прямого произведения произвольного действия на "одометр".* Под одометром мы понимаем операцию прибавления единицы к элементу группы $\mathbf{Z}_2$ диадических чисел; этот автоморфизм есть эргодический автоморфизм с диадическим спектром. В рассматриваемой далее группе $\mathcal{D} = \sum_1^\infty \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, в роли одометра выступает действие $\mathcal{D}$ на группе $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\mathbb{N}} = \prod_{j=1}^\infty (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ — группе ее характеров. Таким образом универсальность аппроксимации легко достигается за счет прямого умножения на действие самого простейшего вида. В качестве универсального пространства появляется прямое произведение пространства $2^{\mathcal{D}}$ и пространства одометра, которое в нашем случае совпадает с пространством путей графа упорядоченных пар. Тем самым, строится универсальная диадическая аппроксимация. Интересно выяснить, существует ли такая возможность для неабелевых аменабельных групп.

1.2 Инвариантные центральные меры

Отыскание инвариантных мер для действий групп на заданном компакте или топологическом пространстве — традиционная задача теории динамических систем. В работах последних лет показано, что во многих случаях ее можно свести к описанию так называемых центральных мер на пространстве путей градуированных графов (или диаграмм Браттели). В нашем случае речь идет о конкретном графе — графе OP упорядоченных пар. Его построение (см. параграф 2) очень просто: множество вершин очередного этажа есть множество всех упорядоченных пар вершин предыдущего этажа. Он, как и более сложно

[1] Общая проблема состоит в следующем: пусть в стандартном борелевском пространстве или, в частности, в сепарабельном метрическом пространстве задано гиперконечное отношение эквивалентности (т.е. траекторное разбиение борелевского действия группы $\mathbb{Z}$ -см. [22]); найти эффективный борелевский изоморфизм между этим пространством и пространством путей некоторого градуированного локально-конечного графа, который переводит хвостовое отношение эквивалентности на пространстве путей графа в данное отношение эквивалентности. Достаточно решить эту проблему для пространств $2^{\mathbb{Z}}$ и обычного действия на нем группы $\mathbb{Z}$ сдвигами. Для каких аменабельных групп такое построение вообще возможно, — неизвестно

устроенный граф неупорядоченных пар ("башня мер"), изучался в работе [31].

Существует естественная биекция между множеством центральных мер на пространстве путей графа упорядоченных пар и множеством мер на пространстве $2^{\mathbb{Z}} \times [0,1]$, инвариантных относительно прямого произведения действий группы $\mathbb{Z}$ (сдвиг на первой компоненте и одометр на отрезке). Помимо прямых произведений инвариантных мер (для одометра инвариантная мера единственна), существует серия наиболее интересных эргодических мер, относительно которых это действие является косым произведением, их мы полностью описываем. Более того, удается полностью описать типы действия группы $\mathbb{Z}$ относительно этих мер — это действия, у которых есть фактор, изоморфный одометру. Отметим, что необходимость этого условия тривиальна, в то время как достаточность не столь очевидна. Аналогичный результат верен для группы $\mathcal{D}$.

Изучаемый случай включается в следующий общий вопрос: имеется два непрерывных действия группы G на двух компактах X, Y; описать все меры, инвариантные, относительно прямого произведения действий группы G на произведении $X \times Y$ по модулю инвариантных мер на X и на Y, при этом у нас дополнительно известно, что на одном из пространств, например X, инвариантная мера единственна. Но даже при этом предположении задача выглядит необозримой, так как в ответ должны войти описания всех фактор-действия группы G на обоих пространствах. В изучаемом нами случае использовался тот факт, что все фактор-действия одометра хорошо известны, и потому задача об инвариантных мерах имеет хорошо обозримый ответ.

1.3 Масштабированная энтропия действий и фильтраций

Масштабированная энтропия динамических систем определена и исследована в недавних работах первого автора [10, 28]. Поводом для ее определения послужила теория фильтраций (убывающих последовательностей сигма-алгебр), и сначала она определялась как инвариант фильтрации (см. [1, 2, 6, 9]). Ниже мы устанавливаем численное совпадение этих понятий в нашей ситуации. Однако, важность понятия масштабированной энтропии динамических систем заставила нас дать ее интерпретацию в терминах адической реализации действий, это и делается в данной работе. Новизна понятия в том, что, хотя это чисто метрический (а не топологический) инвариант действия, он определяется не через метрическую энтропию разбиений, а через эпсилон-энтропии метрических пространств. Сначала определяется масштабирующая последовательность для автоморфизма пространства с мерой, дополнительно снабженного метрикой (т.е. допустимой тройки, см., например, [29]), как последовательность, нормирующая эпсилон-энтропию пространства, снабженного инвариантной мерой и итерированной метрикой. Гипотеза первого автора, доказанная в диссертации второго автора (см. [16, 17]) состоит в том, что асимптотика этой последовательности не зависит от выбора начальной метрики. Таким образом масштабированная энтропия это новый метрический инвариант действия групп, далеко обобщающий колмогоровскую энтропийную теорию.

Как сказано выше, понятие масштабированной энтропии возникло в результате анализа предшествующего понятия — *энтропии фильтрации*, которое было предложено, как метрический инвариант фильтрации, т.е. убывающей последовательности сигма-алгебр (или измеримых разбиений). В этой работе мы останавливаемся на теории фильтраций лишь в той мере, в какой она необходима для основной темы статьи. Тем более, что во вскоре выходящей работе первого автора эта теория в её современном варианте будет подробно изложена. В одном из частных случаев (однородные разбиения) энтропия фильтрации определялась без использования каких бы то ни было метрик на пространстве с мерой. Однако, в общем случае удобно определять ее (как и масштабированную энтропию действия) сначала в пространстве с метрикой (или полуметрикой), и затем доказывать независимость от выбора начальной метрики. Потому в данной работе мы приводим рассуждение о независимости, аналогичное тому, которое использовалось для масштабирующей последовательности действия. А именно, мы показываем, что в определении масштабирующей последовательности фильтрации можно не брать супремум по всем допустимым полуметрикам, а достаточно ограничиться любой допустимой метрикой.

В различных частных случаях идеи сходные с идеей масштабированной энтропии действия использовалась ранее разными авторами (см. [21] — последовательностная энтропия или энтропия Кириллова–Кушниренко, [23, 27] — медленная бернуллиевость, [26]— медленная энтропия, [24] — сложностная энтропия). Одно из первых применений идеи масштабированной энтропии состоит в следующем: ограниченность масштабирующей последовательности равносильна чистой точечности спектра (см. [21, 24, 29]). Определение масштабированной энтропии представляется наиболее общим и синтетическим: объединяющим понятия метрической и эпсилон-энтропии и вскрывающим вспомогательную (а не принципиальную) роль метрики.

В работе С. Ференци и К. К. Парк [25] был намечен результат о том, что масштабирующая последовательность для эргодических автоморфизмов может иметь любую промежуточную асимптотику, это было строго доказано в [17]. Там были построены примеры специальных центральных мер на пространстве путей графа OP, для которых адическое преобразование имело произвольный наперед заданный субаддитивный рост масштабирующей последовательности, а в работе [19] показано, что в непустом классе масштабирующих последовательностей обязана существовать субаддитивная последовательность. В приведенных примерах с промежуточным ростом свободное действие группы $\mathcal{D}$ строится на основе несвободного действия на $2^{\mathcal{D}}$, при котором мера сосредоточена на множестве функций, постоянных на классах смежности по некоторой подгруппе группы $\mathcal{D}$, которая в свою очередь выбирается по заданной масштабирующей последовательности. Более громоздко этот эффект промежуточного роста можно объяснить и для группы $\mathbb{Z}$ — как эффект действия на каком-то классе функций (т.е. на $2^{\mathbb{Z}}$) со скрытыми симметриями — но хорошей формулировки пока найти не удалось.

Результат о произвольности асимптотики масштабирующей последовательности для группы $\mathbb{Z}$ был доказан в [19], с использованием адической реализации действия; здесь он доказан также и для локально-конечных абелевых групп. Для некоторых специальных мер эта асимптотика для адического преобразования совпадает с асимптотикой энтропии хвостовой фильтрации пространства путей графа упорядоченных пар. Возможно, это совпадение имеет более общую природу и не связано со спецификой графа и рассматриваемых на пространстве его путей мер.

Наше ограничение графом упорядоченных пар и диадическими группами, разумеется, легко обобщается. Можно рассматривать граф упорядоченных троек или n-ок, соответственно диадические группы можно заменить на триадические и т.п. Это не вносит никаких принципиальных изменений в результаты, лишь меняет численные характеристики. Более того, можно рассматривать r_n-адический случай в котором число объединяемых точек (вместо пар) меняется от этажа к этажу, но остается постоянным на каждом этаже. Это случай так называемых $\{r_n\}$-адических фильтраций (см. [6]). Группы, соответствующие группе $\mathcal{D}$, будут прямыми суммами соответствующих групп $\mathbb{Z}/r_n\mathbb{Z}$. Одометр заменяется на автоморфизм, дискретный спектр которого есть соответствующая счетная подгруппа корней из единицы. Наконец, можно рассмотреть весь проект для одометра, спектр которого есть группа всех корней из единицы натуральных степеней, заменив группу $\mathcal{D}$ на группу аделей, а граф OP на более сложный граф, который пока не изучен.

1.4 План работы

В параграфе 2 мы приводим необходимые определения и конструкции из теории диаграмм Браттели, строим граф OP упорядоченных пар, определяем действие групп $\mathbb{Z}$ и $\mathcal{D} = \sum \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ бесконечных путей графа OP.

В параграфе 3 мы приводим независимое описание пространства путей графа OP, удобное для изучения действия группы $\mathcal{D}$. Мы также приводим серию примеров центральных мер на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$, которые, как будет видно ниже, дают промежуточный рост масштабирующих последовательностей.

В параграфе 4 мы приступаем к изучению действия адического преобразования на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$. Делая подходящую замену переменных, мы сводим задачу описания центральных мер на пространстве путей $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ графа упорядоченных пар OP к изучению мер на $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$, инвариантных относительно произведения сдвига $\mathbb{S}$ и одометра $\mathbb{O}$.

Параграф 5 посвящен изучению множества инвариантных относительно $\mathbb{S} \times \mathbb{O}$ мер на $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$. Оказывается, такие меры делятся на два типа — меры периодического типа и апериодические меры. Мы приводим описание эргодических мер обоих типов и исследуем их свойства.

В параграфе 6 мы обсуждаем масштабирующие последовательности действий группы $\mathbb{Z}$ и $\mathcal{D}$ на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ со специальными мерами μ^{σ}, доказываем независимость масштабирующей последовательности фильтрации от выбора итерируемой метрики, а также приводим вычисление масштабирующей последовательности хвостовой фильтрации на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ с этими специальными мерами.

2 Граф упорядоченных пар и действия на нем

2.1 Диаграммы Браттели, центральные меры, фильтрация

Пусть Γ — некоторый градуированный граф (диаграмма Браттели), этажи которого конечны и занумерованы целыми неотрицательными числами. Ребра (ориентированные) в этом графе могут соединять лишь вершины соседних этажей, причем начало ребра лежит на этаже с меньшим номером. Множество вершин этажа n обозначим символом Γ_n, а множество ребер, идущих из вершин этажа Γ_n в вершины этажа Γ_{n+1}, символом E_n. Символом $\mathcal{T}(\Gamma)$ будем обозначать множество бесконечных (ориентированных) путей в графе Γ, идущих из вершин нулевого этажа.

На множестве $\mathcal{T}(\Gamma)$ стандартным образом задается топология. Базой этой топологии являются так называемые элементарные цилиндрические множества — множества путей, имеющих фиксированное начало. В этой топологии элементарные цилиндрические множества являются также и замкнутыми, все пространство $\mathcal{T}(\Gamma)$ — компактом.

Для каждого $n \geq 0$ рассмотрим разбиение ξ_n пространства $\mathcal{T}(\Gamma)$ на множества путей, совпадающих, начиная с этажа n. Эти разбиения являются в некотором смысле независимыми дополнениями к алгебрам цилиндрических множеств. Обозначим символом ξ *хвостовую фильтрацию*, состоящую из последовательности этих разбиений — $(\xi_n)_{n\geq 0}$. Отношение эквивалентности, порожденное теоретико-множественным пересечением всех разбиений ξ_n, называется *хвостовым отношением эквивалентности* графа Γ: два пути эквивалентны тогда и только тогда, когда они совпадают, начиная с некоторого места.

Дополнительной (адической) структурой на градуированном графе является обратное лексикографическое упорядочение путей (см. [3]). Оно определяется с помощью введения линейного порядка на множестве ребер, входящих в каждую вершину из вершин предыдущего уровня. Говорят, что путь $y \in \mathcal{T}(\Gamma)$ больше пути $x \in \mathcal{T}(\Gamma)$, если для некоторого натурального n они совпадают, начиная с этажа n, и ребро, по которому путь y приходит на этаж n, больше ребра, по которому путь x приходит туда же. Адический порядок является линейным порядком на каждом классе хвостовой эквивалентности. На частично упорядоченном пространстве путей $\mathcal{T}(\Gamma)$ определяется *адическое преобразование* $\mathcal{A}$. Оно сопоставляет каждому пути следующий за ним в этом порядке. Отметим, что следующий путь можно найти не для каждого пути, поэтому адическое преобразование определено не на всем множестве $\mathcal{T}(\Gamma)$.

На топологическом пространстве $\mathcal{T}(\Gamma)$ можно рассматривать борелевские меры. Отметим, что разбиения ξ_n автоматически являются измеримыми по любой борелевской мере. Важный класс мер составляют так называемые *центральные меры* (или меры с максимальной энтропией). Мера μ называется центральной, если при фиксированном хвосте пути его начала равновероятны, то есть условные меры на элементах разбиения ξ_n равномерны. Отметим, что центральность меры равносильна ее инвариантности под действием адического преобразования. Множество всех центральных мер графа Γ обозначается символом $\mathrm{Inv}(\Gamma)$. Множество эргодических центральных мер является границей Шоке множества $\mathrm{Inv}(\Gamma)$ и называется *абсолютом* графа Γ.

Подробно об общей теории градуированных графов и центральных мерах см. [5, 11, 12, 13, 14, 30].

2.2 Описание графа OP упорядоченных пар и действий на пространстве его путей

2.2.1 Описание графа OP упорядоченных пар

Рассмотрим один конкретный градуированный граф — граф упорядоченных пар OP. Он определяется следующим образом. Множество вершин нулевого этажа определим как $\mathrm{OP}_0 = I = \{0, 1\}$. Далее, множество вершин этажа $n+1$ положим равным $\mathrm{OP}_{n+1} = \mathrm{OP}_n \times \mathrm{OP}_n$, $n \geq 0$, — множеству всевозможных упорядоченных пар вершин этажа n. Множество ребер E_n, $n \geq 0$, ведущих из вершин этажа n в вершины этажа $n+1$, устроено следующим образом. Пусть $v \in \mathrm{OP}_{n+1}$, $v = (v_0, v_1)$, где $v_0, v_1 \in \mathrm{OP}_n$. Проведем ребра из вершин v_0 и v_1 в вершину v, при этом зададим естественный порядок на этих ребрах — ребро из v_0 в v будем считать нулевым, а ребро из v_1 в v первым. Если $v_0 = v_1$, то из вершины v_0 в вершину $v = (v_0, v_0)$ идут сразу два ребра.

По индукции легко проверить, что количество вершин на этаже n графа OP равно 2^{2^n}, и в каждую вершину этажа n приходит ровно 2^n путей, начинающихся на этаже 0. Так как в каждую вершину, кроме вершин нулевого этажа, входит ровно два ребра, хвостовая фильтрация ξ для такого графа является диадической.

На пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ определен адический автоморфизм $\mathcal{A}$ (действие группы $\mathbb{Z}$) и можно определить каноническое (адическое) действие группы

$$\mathcal{D} = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

2.2.2 Описание адического преобразования на графе OP

В графе упорядоченных пар OP задан порядок на входящих в каждую вершину ребрах, поэтому автоматически (см. общее определение в пункте 2.1) определено адическое преобразование $\mathcal{A}$. Более конкретно, для пути $x \in \mathcal{T}(\mathrm{OP})$, проходящего по вершинам $v_n \in \mathrm{OP}_n$, $n \geq 0$, можно найти первое ребро этого пути, номер которого — 0. Пусть это ребро из вершины v_n в v_{n+1}. Определим путь $\mathcal{A}x$ так, что он совпадает с x, начиная с этажа $n+1$, приходит в вершину v_{n+1} по ребру с номером 1, а все предыдущие ребра имеют номера 0. Это преобразование определено лишь для тех путей, в которых есть хоть одно ребро с номером 0.

2.2.3 Описание канонического действия группы $\mathcal{D}$ на графе OP

Каноническое (адическое) действие κ группы $\mathcal{D}$ проще всего определить на образующих. Действие элемента g группы $\mathcal{D}$ на $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ мы будем обозначать символом $\kappa(g)$. Пусть группа $\mathcal{D} = \oplus_{i=0}^{\infty}\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ порождена образующими g_i, $i \geq 0$. Символом $\mathcal{D}_n$, $n \geq 0$, обозначим конечную подгруппу, порожденную образующими $g_0, \ldots, g_{n-1}$. Пусть g_n — образующая группы $\mathcal{D}$, а $x \in \mathcal{T}(\mathrm{OP})$ — путь. Определим путь $\kappa(g_n)x$ так, что он совпадает с x, начиная с этажа $n+1$; номер его ребра, входящего в вершину этажа $n+1$, отличается от номера аналогичного ребра в пути x, а номера ребер между этажами i и $i+1$, $0 \leq i < n$, в путях x и $\kappa(g_n)x$ совпадают. Заданные таким образом действия образующих удовлетворяют коммутационным соотношениям группы $\mathcal{D}$, поэтому задают действие.

Отметим, что действие κ группы $\mathcal{D}$ тесно связано с хвостовой фильтрацией ξ и множеством центральных мер $\mathrm{Inv}(\mathrm{OP})$. А именно, разбиение ξ_n есть в точности разбиение на орбиты действия подгруппы $\mathcal{D}_n$. Разбиение на орбиты всей группы $\mathcal{D}$ является хвостовым для графа OP. Борелевская мера на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ является центральной тогда и только тогда, когда она инвариантна относительно действия κ группы $\mathcal{D}$.

3 Независимое описание пространства путей графа OP

3.1 Пространство $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$, действие группы $\mathcal{D}$, фильтрация, теорема об изоморфизме

Рассмотрим пространство $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$, состоящее из всевозможных пар (w, α), где $w \in I^{\mathcal{D}}$ — конфигурация на группе $\mathcal{D}$, а $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ — бесконечная последовательность нулей и единиц. На этом пространстве стандартным образом определяются цилиндрические множества, а также топология произведения компактов. Цилиндрические множества являются открытыми и замкнутыми в этой топологии.

Пространство $I^{\mathbb{N}}$ с покоординатным сложением образует коммутативную группу, а группа $\mathcal{D}$ изоморфна ее подгруппе, состоящей из финитных последовательностей (нули, начиная с некоторого места).

Определение 1. Символом τ обозначим вложение группы $\mathcal{D}$ в группу $I^{\mathbb{N}}$, которое каждый элемент $g \in \mathcal{D}$, $g = \sum \alpha_i g_{i-1}$, отображает в финитную последовательность $(\alpha_i)_{i \geq 1}$ коэффициентов ее разложения по образующим.

Группа $\mathcal{D}$ действует на пространстве $I^{\mathcal{D}}$ сдвигом аргумента

$$w(\cdot) \mapsto w(\cdot + g), \qquad g \in \mathcal{D},\ w \in I^{\mathcal{D}},$$

а на пространстве $I^{\mathbb{N}}$ сложением

$$\alpha \mapsto \alpha + \tau(g), \qquad \alpha \in I^{\mathbb{N}},\ g \in \mathcal{D}.$$

Прямое произведение этих действий, действие группы $\mathcal{D}$ на произведении $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$, задается формулой:

$$\operatorname{diag}(g)\colon \big(w(\cdot), \alpha\big) \mapsto \big(w(\cdot + g), \alpha + \tau(g)\big), \qquad g \in \mathcal{D},\ w \in I^{\mathcal{D}},\ \alpha \in I^{\mathbb{N}}. \tag{1}$$

Это действие и диадическая структура (последовательность вложенных подгрупп $\mathcal{D}_n$) группы $\mathcal{D}$ задает диадическую фильтрацию на пространстве $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$ — хвостовую фильтрацию для этого действия. А именно, для $n \geq 0$ определим разбиение ζ_n пространства $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$ как разбиение на орбиты под действием подгруппы $\mathcal{D}_n$. Стоит отметить, что эта фильтрация не является прямым произведением хвостовых фильтраций соответствующих действий группы $\mathcal{D}$ на $I^{\mathcal{D}}$ и $I^{\mathbb{N}}$.

Теорема 1. *Пространство $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ путей графа* OP *упорядоченных пар с действием κ и пространство $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$ с действием* diag *изоморфны как топологические $\mathcal{D}$-пространства.*

Для доказательства этой теоремы нам необходимы некоторые предварительные рассуждения.

3.2 Метки на вершинах графа и доказательство теоремы 1

Конструкция графа OP упорядоченных пар позволяет естественным образом запараметризовать вершины графа OP конфигурациями на конечных подгруппах группы $\mathcal{D}$. Определим отображение Φ, которое вершинам этажа n, $n \geq 0$, биективно сопоставляет конфигурации на $\mathcal{D}_n$, индуктивно. Для $v \in \mathrm{OP}_0 = I$ определим $\Phi[v]$ как конфигурацию, которая отображает единственный элемент подгруппы $\mathcal{D}_0 = \{0\}$ в v. Далее, пусть мы уже определили отображение Φ на OP_n. Пусть $v \in \mathrm{OP}_{n+1}$, $v = (v_0, v_1)$, где $v_0, v_1 \in \mathrm{OP}_n$. Определим конфигурацию $\Phi[v]$ на $\mathcal{D}_{n+1}$ соотношением

$$\Phi[v](h) = \begin{cases} \Phi[v_0](h), & h \in \mathcal{D}_n; \\ \Phi[v_1](g_n + h), & h \in \mathcal{D}_{n+1} \setminus \mathcal{D}_n. \end{cases} \tag{2}$$

Замечание 1. Для каждого $n \geq 0$ отображение Φ является биекцией между этажом OP_n графа OP и множеством $I^{\mathcal{D}_n}$ конфигураций на подгруппе $\mathcal{D}_n$.

Отметим, что для двух вершин $v \in \mathrm{OP}_n$ и $v' \in \mathrm{OP}_{n+1}$, соединенных ребром с номером $\beta \in \{0,1\}$, соответствующие им конфигурации на $\mathcal{D}_n$ связаны соотношением

$$\Phi[v](h) = \Phi[v'](h + \beta g_n), \quad h \in \mathcal{D}_n. \tag{3}$$

Доказательство теоремы 1. Для доказательства теоремы мы построим изоморфизм $\Psi\colon \mathcal{T}(\mathrm{OP}) \to I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$ явно. Для этого мы зададим два отображения — отображение F пространства $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ на $I^{\mathcal{D}}$ и отображение A пространства $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ на $I^{\mathbb{N}}$. Их пара, отображение $\Psi = (F, A)$, и будет искомым гомеоморфизмом пространства $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ на $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$.

Пусть $x \in \mathcal{T}(\mathrm{OP})$ — некоторый путь, проходящий по вершинам $v_n \in \mathrm{OP}_n$, $n \geq 0$, и ребрам $e_n \in E_n$, $n \geq 0$ (ребро e_n соединяет вершины v_n и v_{n+1}). Напомним, что по конструкции графа упорядоченных пар, на двух ребрах, ведущих в данную вершину, задан порядок (номера 0 или 1). Для $n \geq 1$ положим α_n равным порядковому номеру ребра e_{n-1}. Тем самым определена последовательность $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 1} \in I^{\mathbb{N}}$, которую мы и назовем образом пути x при отображении A:

$$A[x] := \alpha.$$

Отображение F определяется несколько сложнее. Нам необходимо определить некоторую конфигурацию $F[x] \in I^{\mathcal{D}}$ на группе $\mathcal{D}$. При этом каждой вершине v_n, $n \geq 0$, пути x отображение Φ сопоставляет конфигурацию $\Phi[v_n]$ на конечной подгруппе $\mathcal{D}_n$. Отметим, что, вообще говоря, последовательность конфигураций $\Phi[v_n]$ $n \geq 0$, не согласована, то есть конфигурация $\Phi[v_n]$ не является сужением конфигурации $\Phi[v_{n+1}]$ на подгруппу $\mathcal{D}_n$. Прямым следствием равенства (3) и определения числа α_{n+1} является тождество

$$\Phi[v_n](\cdot) = \Phi[v_{n+1}](\cdot + \alpha_{n+1} g_n) \qquad \text{на } \ \mathcal{D}_n, \ n \geq 0.$$

Отсюда следует соотношение

$$\Phi[v_n](\cdot + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} g_i) = \Phi[v_{n+1}](\cdot + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i+1} g_i) \qquad \text{на } \ \mathcal{D}_n, \ n \geq 0,$$

которое означает, что последовательность конфигураций $\Phi[v_n](\cdot + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} g_i)$, $n \geq 0$, согласована. Следовательно, можно задать конфигурацию на $\mathcal{D}$, сужение которой на каждую подгруппу $\mathcal{D}_n$ совпадает с конфигурацией $\Phi[v_n](\cdot + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} g_i)$. Эту конфигурацию на $\mathcal{D}$ мы и зададим как образ $F[x]$ пути x при отображении F:

$$F[x](g) = \Phi[v_n](g + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i+1} g_i), \qquad g \in \mathcal{D}_n, \ n \geq 1. \tag{4}$$

Как уже было указано выше, мы определяем отображение Ψ как пару (F, A):

$$\Psi[x] = (F[x], A[x]), \qquad x \in \mathcal{T}(\mathrm{OP}).$$

Проверим, что данное отображение Ψ является биекцией пространства путей $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ графа OP на $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$. Отметим, что формула (4) позволяет однозначно восстановить вершины v_n, $n \geq 0$, пути x по конфигурации $F[x]$ и последовательности $\alpha = A[x]$. Далее, ребро e_n, $n \geq 0$, однозначно восстанавливается по своему концу v_{n+1} и порядковому номеру α_{n+1}. Более того, конфигурация может быть выбрана произвольно из $I^{\mathcal{D}}$, а последовательность α произвольно из $I^{\mathbb{N}}$. Тем самым доказано, что отображение Ψ является биекцией.

Образом цилиндрического множества в $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ при отображении Ψ является цилиндрическое множество в $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$, это очевидно из определения отображения Ψ. Отсюда следует, что отображение Ψ является гомеоморфизмом.

Осталось проверить, что отображение Ψ является $\mathcal{D}$-эквивариантным. Для произвольного $m \geq 0$ проверим необходимое коммутационное соотношение:

$$\Psi[\kappa(g_m)x] = \mathrm{diag}(g_m)\Psi[x], \quad x \in \mathcal{T}(\mathrm{OP}). \tag{5}$$

По определению канонического действия κ, путь $\kappa(g_m)x$ совпадает с путем x, начиная с этажа $m+1$, порядковые номера ребер до этажа m в этих путях совпадают, а порядковый номер ребра, идущего с этажа m на этаж $m+1$ отличается. По определению отображения A отсюда следует, что

$$\begin{aligned} A[\kappa(g_m)x]_i &= A[x]_i, \quad i \neq m+1; \\ A[\kappa(g_m)x]_{m+1} &\neq A[x]_{m+1}. \end{aligned}$$

Иными словами, $A[\kappa(g_m)x] = A[x] + \tau(g_m)$. Равенство

$$F[\kappa(g_m)x](\cdot) = F[x](\cdot + g_m)$$

следует из формулы (4). Тем самым, мы доказали соотношение (5) и $\mathcal{D}$-эквивариантность отображения Ψ.

$\square$

3.3 Примеры центральных мер на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ путей графа OP, меры μ^σ

Одним из центральных вопросов теории градуированных графов является вопрос описания центральных мер на пространстве путей графа. Детальному изучению множества $\mathrm{Inv}(\mathrm{OP})$ центральных мер на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ путей графа OP посвящен параграф 5. В данном пункте мы обсудим некоторый класс примеров центральных мер.

Эквивариантный гомеоморфизм Ψ переводит множество $\mathrm{Inv}(\mathrm{OP})$ центральных мер в множество мер на $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$, инвариантных относительно действия diag группы $\mathcal{D}$, заданного формулой (1). Проекции таких мер на $I^{\mathcal{D}}$ и $I^{\mathbb{N}}$ тоже инварианты относительно соответствующих действий группы $\mathcal{D}$. Единственной мерой на $I^{\mathbb{N}}$, инвариантной относительно такого действия группы $\mathcal{D}$, является мера Лебега m.

Примерами мер на $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$, инвариантных относительно действия diag группы $\mathcal{D}$, могут служить меры вида $\mu \times m$, где μ — некоторая $\mathcal{D}$-инвариантная мера на $I^{\mathcal{D}}$, а m — мера Лебега на $I^{\mathbb{N}}$. Среди таких мер мы выделим специальный класс.

Определение 2. Пусть $\sigma = (\sigma_i)_{i \geq 0}$ — некоторая последовательность нулей и единиц. Пусть

$$\mathcal{D}^{\sigma} = \langle g_i : \sigma_i = 0,\ i \geq 0 \rangle$$

— подгруппа группы $\mathcal{D}$, порожденная только теми образующими g_i, для которых $\sigma_i = 0$. Рассмотрим фактор-отображение $\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\mathcal{D}^{\sigma}$ и индуцированное им отображение конфигураций $I^{\mathcal{D}/\mathcal{D}^{\sigma}} \to I^{\mathcal{D}}$. Меру на $I^{\mathcal{D}}$, которая является обратным образом меры Лебега на $I^{\mathcal{D}/\mathcal{D}^{\sigma}}$ при этом отображении, обозначим символом m^{σ}. Произведение $m^{\sigma} \times m$ этой меры и меры Лебега на $I^{\mathbb{N}}$ обозначим символом ω^{σ}.

Меры μ^{σ} на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ путей графа OP, обратные образы мер ω^{σ} при отображении Ψ^{-1}, изучались в работе [18]. Там были вычислены масштабирующие последовательности (см. параграф 6) адического автоморфизма на пространстве $(\mathcal{T}(\mathrm{OP}), \mu^{\sigma})$, а также масштабирующие последовательности канонического действия κ группы $\mathcal{D}$ на нем.

4 Действие группы $\mathbb{Z}$

4.1 Действие группы $\mathbb{Z}$ на $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$

Перейдем к изучению действия группы $\mathbb{Z}$ на пространстве путей $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ графа OP — адического преобразования $\mathcal{A}$, определенного в пункте 2.2.

Определение 3. Символом $I_0^{\mathbb{N}}$ будем обозначать множество всех последовательностей из $I^{\mathbb{N}}$, содержащих лишь конечное количество нулей или единиц. Его дополнение, то есть множество последовательностей, содержащих бесконечное количество нулей и единиц, будем обозначать символом $I_{\infty}^{\mathbb{N}}$.

Напомним определение одометра.

Определение 4. На множестве $I^{\mathbb{N}}$ определяется преобразование $\mathbb{O}$ — *одометр*. Пусть $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ таково, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n-1} = 1$, $\alpha_n = 0$ для некоторого $n \geq 0$. Тогда последовательность $\mathbb{O}[\alpha]$ определяется так, что $\mathbb{O}[\alpha]_i = \alpha_i$ при $i > n$, $\mathbb{O}[\alpha]_n = 1$ и $\mathbb{O}[\alpha]_i = 0$ при $i < n$.

Областью определения одометра в таком определении является, вообще говоря, не все множество $I^{\mathbb{N}}$. Отметим, что множество $I^{\mathbb{N}}$ есть группа $\mathbb{Z}_2$ целых 2-адических чисел в “цифровой” записи. При этом одометр $\mathbb{O}$ является прибавлением единицы в группе $\mathbb{Z}_2$. Одометр, заданный на $I^{\mathbb{N}}$ при помощи структуры 2-адических чисел, определен уже на всем множестве. Однако, мы не будем пользоваться таким продолжением, а ограничимся определением 4. Такой подход более удобен при работе с графом OP.

Замечание 2. Все $\mathbb{O}^n\,\alpha$, $n\in\mathbb{Z}$, определены для $\alpha\in I^{\mathbb{N}}$ тогда и только тогда, когда $\alpha\in I^{\mathbb{N}}_{\infty}$.

Напомним, что адическое преобразование также определено не на всем пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ путей графа OP, а лишь на его подмножестве.

Определение 5. Пусть $\mathcal{T}_0(\mathrm{OP})\subset\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ — множество всевозможных путей $x\in\mathcal{T}(\mathrm{OP})$, для которых определены все $\mathcal{A}^n x$, $n\in\mathbb{Z}$.

Замечание 3. Путь $x\in\mathcal{T}(\mathrm{OP})$. Тогда $x\in\mathcal{T}_0(\mathrm{OP})$ тогда и только тогда, когда $A[x]\in I^{\mathbb{N}}_{\infty}$. Отображение Ψ устанавливает биекцию между $\mathcal{T}_0(\mathrm{OP})$ и $I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty}$.

Изучим преобразование $\mathcal{A}^{\Psi}=\Psi\circ\mathcal{A}\circ\Psi^{-1}$ на $I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty}$. Из определения адического преобразования следует, что для $x\in\mathcal{T}_0(\mathrm{OP})$ последовательность $A[\mathcal{A}x]$ есть следующая за $A[x]$ в обратном лексикографическом порядке. Иными словами, преобразование $\mathcal{A}^{\Psi}\colon I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty}\to I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty}$ действует на второй координате как одометр $\mathbb{O}$. С другой стороны, орбиты действий групп $\mathbb{Z}$ и $\mathcal{D}$ на пространстве $\mathcal{T}_0(\mathrm{OP})$ совпадают, и оба действия свободны. Следовательно, для каждого $x\in\mathcal{T}_0(\mathrm{OP})$ найдется единственный элемент $g\in\mathcal{D}$, такой, что $\mathcal{A}x=\kappa(g)x$. Тогда $\mathbb{O}[A[x]]=A[\mathcal{A}x]=A[\kappa(g)x]=A[x]+\tau(g)$, то есть $g=\tau^{-1}(\mathbb{O}[A[x]]-A[x])$. Следовательно,

$$F[\mathcal{A}x](\cdot)=F[\kappa(g)x](\cdot)=F[x](\cdot+g).$$

Итого, мы доказали следующее утверждение.

Предложение 1. *Преобразование $\mathcal{A}^{\Psi}$ на $I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty}$ удовлетворяет соотношению*

$$\mathcal{A}^{\Psi}(f,\alpha)=\Big(f\big(\,\cdot+\tau^{-1}(\mathbb{O}[\alpha]-\alpha)\big),\mathbb{O}[\alpha]\Big),\quad f\in I^{\mathcal{D}},\alpha\in I^{\mathbb{N}}_{\infty}. \tag{6}$$

4.2 Изоморфизм преобразования $\mathcal{A}^{\Psi}$ и прямого произведения действий на $I^{\mathbb{Z}}\times I^{\mathbb{N}}$. Отображение Λ

Для более детального изучения действия группы $\mathbb{Z}$ разумно заменить фазовое пространство $I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}$ на $I^{\mathbb{Z}}\times I^{\mathbb{N}}$. При этом мы сделаем это таким образом, чтобы преобразования $\mathcal{A}^{\Psi}$ переходило в преобразование $\mathbb{S}\times\mathbb{O}$, где $\mathbb{S}$ — левый сдвиг на $I^{\mathbb{Z}}$.

Мы хотим построить такое отображение $\Lambda\colon I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty}\to I^{\mathbb{Z}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty}$, которое замыкает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_0(\mathrm{OP}) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "\mathcal{A}"] & I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty} \arrow[r, "\Lambda"] \arrow[d, "\mathcal{A}^{\Psi}"] & I^{\mathbb{Z}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty} \arrow[d, "\mathbb{S}\times\mathbb{O}"] \\
\mathcal{T}_0(\mathrm{OP}) \arrow[r, "\Psi"] & I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty} \arrow[r, "\Lambda"] & I^{\mathbb{Z}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty}
\end{tikzcd} \tag{7}$$

Если мера ν на $I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}$ является инвариантной относительно действия группы $\mathcal{D}$, то множество $I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}}_{\infty}$ имеет полную ν-меру, поскольку проекция ν на $I^{\mathbb{N}}$ является мерой Лебега m. Стало быть, отображение Λ будет определено mod 0 по мере ν.

Определение 6. Борелевски измеримое отображение из произведения $I^{\mathcal{D}} \times I_{\infty}^{\mathbb{N}}$ в произведение $I^{\mathbb{Z}} \times I_{\infty}^{\mathbb{N}}$ будем называть *послойным*, если оно сохраняет вторую компоненту, то есть для каждого $\alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}}$ образ слоя $I^{\mathcal{D}} \times \{\alpha\}$ лежит в слое $I^{\mathbb{Z}} \times \{\alpha\}$.

Ограничимся классом послойных отображений Λ, слои $\Lambda(\cdot, \alpha) \colon I^{\mathcal{D}} \to I^{\mathbb{Z}}$ которых при $\alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}}$ индуцированы некоторыми отображениями $\lambda_\alpha \colon \mathbb{Z} \to \mathcal{D}$, то есть являются заменами аргумента конфигураций:

$$\Lambda(f, \alpha) = \big(f \circ \lambda_\alpha, \alpha\big), \quad f \in I^{\mathcal{D}}, \alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}}. \tag{8}$$

Для таких отображений Λ коммутативная диаграмма (7), очевидно, равносильна следующему соотношению на семейство отображений $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}}}$:

$$\lambda_{\mathbb{O}[\alpha]}(k) + \tau^{-1}(\mathbb{O}[\alpha] - \alpha) = \lambda_\alpha(k+1), \qquad \alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}},\ k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Лемма 1. *Отображение $\Lambda \colon I^{\mathcal{D}} \times I_{\infty}^{\mathbb{N}} \to I^{\mathbb{Z}} \times I_{\infty}^{\mathbb{N}}$, определенное равенством* (8) *и удовлетворяющее коммутационному соотношению* (7), *является борелевски измеримым тогда и только тогда, когда отображение $\lambda \colon \alpha \mapsto \lambda_\alpha(0)$ из $I_{\infty}^{\mathbb{N}}$ в $\mathcal{D}$ борелевски измеримо. При этом отображение Λ полностью задается отображением λ.*

Proof. Пусть $k \in \mathbb{Z}$, $w^0 \in I$. Пусть $W = \{w \in I^{\mathbb{Z}} \colon w(k) = w^0\}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1}(W \times I_{\infty}^{\mathbb{N}}) &= \bigcup_{\alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}}} \{f \in I^{\mathcal{D}} \colon f(\lambda_\alpha(k)) = w^0\} \times \{\alpha\} \\ &= \bigcup_{g \in \mathcal{D}} \{f \in I^{\mathcal{D}} \colon f(g) = w^0\} \times \{\alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}} \colon \lambda_\alpha(k) = g\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Измеримость отображения Λ равносильна тому, что множество в формуле (10) измеримо для любых $k \in \mathbb{Z}$, $w^0 \in I$.

Если отображение Λ измеримо, то для $k = 0, w^0 = 1$ множество из формулы (10) измеримо. Пусть $g_0 \in \mathcal{D}$. Выберем $f^0 \in I^{\mathcal{D}}$ так, что $f^0(g) = 1$ для $g \in \mathcal{D}$ только для $g = g_0$. Тогда измеримым является множество

$$\begin{aligned} \{\alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}} \colon (f^0, \alpha) \in \Lambda^{-1}(W \times I_{\infty}^{\mathbb{N}})\} &= \{\alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}} \colon f^0 \circ \lambda_\alpha \in W\} \\ &= \{\alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}} \colon f^0(\lambda_\alpha(0)) = 1\} = \{\alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}} \colon \lambda_\alpha(0) = g_0\} \\ &= \{\alpha \in I_{\infty}^{\mathbb{N}} \colon \lambda(\alpha) = g_0\}. \end{aligned} \tag{11}$$

Тем самым, отображение λ измеримо.

Если отображение λ измеримо, то из формулы (9) видно, что для каждого $k \in \mathbb{Z}$ измеримым также является отображение $\alpha \mapsto \lambda_\alpha(k)$ из $I_{\infty}^{\mathbb{N}}$ в $\mathcal{D}$. Но в таком случае множество в правой части формулы (10) является счетным объединением измеримых множеств, то есть измеримо. Следовательно, отображение Λ измеримо.

Последнее утверждение леммы тривиально, так как отображения λ_α однозначно определяются через λ при помощи формулы (9). $\square$

Выберем такое отображение $\lambda\colon I_\infty^{\mathbb{N}} \to \mathcal{D}$, которое отображает все в нулевой элемент группы $\mathcal{D}$. Оно при помощи соотношений (9) порождает семейство отображений

$$\lambda_\alpha\colon \mathbb{Z} \to \mathcal{D},$$

$\alpha \in I_\infty^{\mathbb{N}}$, которое, в свою очередь, при помощи формулы (8) определяет послойное отображение $\Lambda\colon I^{\mathcal{D}} \times I_\infty^{\mathbb{N}} \to I^{\mathbb{Z}} \times I_\infty^{\mathbb{N}}$. Закрепим обозначения λ_α и Λ за этими объектами.

Таким образом, действие адического преобразования $\mathcal{A}$ на пространстве путей $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ графа OP борелевски изоморфно действию преобразования $\mathbb{S} \times \mathbb{O}$ на пространстве $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$.

Отсюда следует теорема об универсальной адической аппроксимации автоморфизмов.

Теорема 2. *Пусть T — автоморфизм пространства Лебега (X, p), имеющий двучленную образующую. Тогда найдется такая мера $\mu \in \mathrm{Inv}(\mathrm{OP})$, что адическое преобразование $\mathcal{A}$ на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ путей графа OP с мерой μ изоморфно преобразованию $T \times \mathbb{O}$ на прямом произведении $X \times I^{\mathbb{N}}$ с мерой $p \times m$.*

Определение 7. Символом $\mathbb{M}$ обозначим множество борелевских вероятностных мер на пространстве $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$, инвариантных относительно преобразования $\mathbb{S} \times \mathbb{O}$. Символом $Ex(\mathbb{M})$ обозначим множество эргодических мер из $\mathbb{M}$ — границу Шоке, состоящую из крайних точек.

Замечание 4. Отображение $\Lambda \circ \Psi$ является биекцией между множеством центральных мер $\mathrm{Inv}(\mathrm{OP})$ на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ графа OP и множеством $\mathbb{M}$.

Следующее замечание дает явную формулу для послойного отображения Λ.

Замечание 5. Для каждого $\alpha \in I_\infty^{\mathbb{N}}$ отображение λ_α удовлетворяет соотношению

$$\lambda_\alpha\Big(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{\alpha_{i+1}} \beta_i 2^i\Big) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i g_i, \tag{12}$$

где $n \geq 0$, $\beta_i \in \{0, 1\}$.

Прообразом подгруппы $\mathcal{D}_n$ при отображении λ_α является отрезок целых чисел $\{-a_n, \ldots, -a_n + 2^n - 1\}$, где $a_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 2^{i-1}$, причем $\lambda_\alpha^{-1}(\mathcal{D}_n)$ есть левая половина $\lambda_\alpha^{-1}(\mathcal{D}_{n+1})$, если $\alpha_{n+1} = 0$, и правая, если $\alpha_{n+1} = 1$.

5 Инвариантные меры на $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$

5.1 Прямые произведения и меры периодического типа

В этой части мы изучим меры на $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$, инвариантные относительно действия $\mathbb{S} \times \mathbb{O}$. Напомним, мы обозначили их множество символом $\mathbb{M}$. Это множество мер при отображении Λ^{-1} переходит в множество всех мер на $I^{\mathcal{D}} \times$

$I^{\mathbb{N}}$, инвариантных относительно действия diag группы $\mathcal{D}$. А при отображении $\Psi^{-1} \circ \Lambda^{-1}$ это множество переходит в множество центральных мер на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ путей графа OP упорядоченных пар.

Простейшими примерами мер из $\mathbb{M}$ являются прямые произведения. Если η — вероятностная борелевская мера на $I^{\mathbb{Z}}$, инвариантная относительно сдвига $\mathbb{S}$, то ее прямое произведение с мерой Лебега m на $I^{\mathbb{N}}$, мера $\eta \times m$, является инвариантной относительно преобразования $\mathbb{S} \times \mathbb{O}$.

Определение 8. Пусть ν — некоторая мера на $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$. Символом $\mathcal{P}[\nu]$ будем обозначать проекцию меры ν на $I^{\mathbb{Z}}$. Пусть $k \geq 0$, $0 \leq r \leq 2^k - 1$. Пусть $A_{r,k} = \{\alpha \in I^{\mathbb{N}} \colon \sum_{i=1}^{k} \alpha_i 2^{i-1} = r\}$ — цилиндр в $I^{\mathbb{N}}$. Символом $\mathcal{P}_{r,k}[\nu]$ будем обозначать нормированную проекцию на $I^{\mathbb{Z}}$ сужения меры ν на множество $I^{\mathbb{Z}} \times A_{r,k}$. Символом $\theta_k[\nu]$ будем обозначать меру $\mathcal{P}_{0,k}[\nu]$. Символом $\Theta[\nu]$ обозначим последовательность мер $(\theta_k[\nu])_{k \geq 0}$.

Чуть более сложный пример меры из $\mathbb{M}$ дает следующая конструкция, которую мы называем *мерой периодического типа*.

Определение 9. Символом $\mathcal{M}_k$, $k \geq 0$, обозначим множество всех борелевских вероятностных мер на $I^{\mathbb{Z}}$, инвариантных относительно $\mathbb{S}^{2^k}$. Символом $Ex(\mathcal{M}_k)$ обозначим множество крайних точек в $\mathcal{M}_k$.

Замечание 6. Для каждого $k \geq 0$ множество $\mathcal{M}_k$ с топологией слабой сходимости мер является симплексом Полсена, то есть множество $Ex(\mathcal{M}_k)$ его крайних точек плотно в нем.

Определение 10. Пусть $k \geq 0$ и $\eta \in \mathcal{M}_k$. Меру

$$D_k[\eta] = \sum_{i=0}^{2^k-1} \mathbb{S}^i \eta \times (\chi_{A_{i,k}} m) \tag{13}$$

на $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$ будем называть *мерой периодического типа k с базой η.*

Отметим, что меры периодического типа 0 — это просто прямые произведения.

Замечание 7. Если $k \geq 0$ и $\eta \in \mathcal{M}_k$, то $D_k[\eta] \in \mathbb{M}$.

Замечание 8. Для $0 \leq k \leq n$ и $\eta \in \mathcal{M}_k$ выполнено равенство $D_n[\eta] = D_k[\eta]$.

Определение 11. Будем говорить, что мера ν на $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$ *является мерой периодического типа k*, если k — наименьшее возможное число, для которого найдется такая мера $\eta \in \mathcal{M}_k$, что $\nu = D_k[\eta]$. Множество всех мер на $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$ периодического типа не больше k будем обозначать символом $\mathbb{M}_k$, а множество его крайних точек — символом $Ex(\mathbb{M}_k)$.

Будем говорить, что мера ν *является мерой периодического типа*, если она является мерой периодического типа k для некоторого $k \geq 0$.

Меру $\nu \in \mathbb{M}$, не являющуюся мерой периодического типа, будем называть *апериодической*. Множество апериодических мер будем обозначать символом $\mathbb{M}_\infty$.

Замечание 9. Множество $\mathbb{M}$ инвариантных мер на $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$ разлагается в дизъюнктное объединение множества апериодических мер, а также множеств мер периодического типа k, $k \geq 0$:

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_{\infty} \cup \mathbb{M}_0 \cup \bigcup_{k \geq 1} (\mathbb{M}_k \setminus \mathbb{M}_{k-1}).$$

Для каждого k, $k \geq 0$, отображение D_k является аффинным гомеоморфизмом между множествами $\mathcal{M}_k$ и $\mathbb{M}_k$, и, следовательно, биекцией между $Ex(\mathcal{M}_k)$ и $Ex(\mathbb{M}_k)$.

5.2 Аппроксимация мерами периодического типа

Приступим к изучению мер из $\mathbb{M}$ общего вида.

Замечание 10. Для любой меры $\nu \in \mathbb{M}$ соответствующее ей семейство мер $\mathcal{P}_{r,k}[\nu]$, $k \geq 0$, $0 \leq r < 2^k$, на $I^{\mathbb{Z}}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\mathbb{S}\mathcal{P}[\nu] = \mathcal{P}[\nu]; \qquad \mathbb{S}^{2^k}\mathcal{P}_{r,k}[\nu] = \mathcal{P}_{r,k}[\nu]; \tag{14}$$

$$\mathbb{S}\mathcal{P}_{r,k}[\nu] = \mathcal{P}_{r+1,k}[\nu], \quad 0 \leq r < 2^k - 1; \qquad \mathbb{S}\mathcal{P}_{2^k-1,k}[\nu] = \mathcal{P}_{0,k}[\nu]; \tag{15}$$

$$\mathcal{P}_{r,k}[\nu] = \frac{1}{2}\big(\mathcal{P}_{r,k+1}[\nu] + \mathcal{P}_{r+2^k,k+1}[\nu]\big) = \frac{1}{2}\big(\mathcal{P}_{r,k+1}[\nu] + \mathbb{S}^{2^k}\mathcal{P}_{r,k+1}[\nu]\big). \tag{16}$$

Следствие 1. *Пусть* $\nu \in \mathbb{M}$. *Последовательность мер* $\theta_k[\nu]$, $k \geq 0$, *однозначно задает все семейство мер* $\mathcal{P}_{r,k}[\nu]$ *и, следовательно, меру* ν. *Кроме того, выполнены соотношения*

$$\mathbb{S}^{2^k}\theta_k = \theta_k, \qquad \theta_k = \frac{1}{2}(\theta_{k+1} + \mathbb{S}^{2^k}\theta_{k+1}), \quad k \geq 0. \tag{17}$$

Далее, если некоторая последовательность мер θ_k, $k \geq 0$, *на* $I^{\mathbb{Z}}$ *удовлетворяет соотношениям* (17), *то найдется единственная мера* $\nu \in \mathbb{M}$, *для которой* $\theta_k = \theta_k[\nu]$, $k \geq 0$.

Определение 12. Символом proj_k обозначим проекцию множества $\mathcal{M}_{k+1}$ на множество $\mathcal{M}_k$, задаваемую формулой

$$\mathrm{proj}_k\theta = \frac{1}{2}(\theta + \mathbb{S}^{2^k}\theta), \quad \theta \in \mathcal{M}_{k+1}.$$

Лемма 2. *Отображение* Θ *является аффинным гомеоморфизмом пространства мер* $\mathbb{M}$ *со слабой топологией на проективный предел* $\varprojlim(\mathcal{M}_k, \mathrm{proj}_k)$.

Определение 13. Будем говорить, что последовательность мер $(\theta_k)_{k\geq 0}$ на $I^{\mathbb{Z}}$ *стабилизируется в момент* n, $n \geq 0$, если $\theta_k = \theta_{k+1}$ при $k \geq n$ и $\theta_{n-1} \neq \theta_n$.

Замечание 11. Для каждого $k \geq 0$ отображение Θ является биекцией между множеством $\mathbb{M}_k \setminus \mathbb{M}_{k-1}$ мер периодического типа k и последовательностями, стабилизирующимися в момент k. При этом для $\eta \in \mathcal{M}_k$ выполнено тождество

$$\theta_n[D_k[\eta]] = \eta, \quad n \geq k.$$

Следствие 2. *Меры периодического типа плотны в* $\mathbb{M}$.

Proof. Легко понять, что мера $\nu \in \mathbb{M}$ аппроксимируется в слабой топологии последовательностью мер $D_k[\theta_k[\nu]]$, $k \to \infty$. □

Как было отмечено в замечании 6, для каждого $k \geq 0$ множество $\mathbb{M}_k$ является симплексом Полсена, то есть его граница Шоке, множество $Ex(\mathbb{M}_k)$, плотно в $\mathbb{M}_k$. Следствие 2 означает, что множество $\cup_{k\geq 0}\mathbb{M}_k$ мер периодического типа плотно в симплексе $\mathbb{M}$ всех инвариантных мер на пространстве $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$. Отсюда следует, что множество $\cup_{k\geq 0} Ex(\mathbb{M}_k)$ плотно в $\mathbb{M}$. Однако, не все меры из $\cup_{k\geq 0} Ex(\mathbb{M}_k)$ являются крайними точками в $\mathbb{M}$ (см. лемму 5 ниже). Таким образом возникает естественный вопрос — *является ли симплекс* $\mathbb{M}$ *симплексом Полсена?* Авторам в данный момент неизвестен ответ на этот вопрос. Вопрос о том, сохраняется ли полсеновость при тех или иных операциях над симплексами инвариантных мер как будто бы не изучен.

5.3 Эргодические инвариантные меры на пространстве $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$

Перейдем к изучению множества $Ex(\mathbb{M})$ — множества мер из $\mathbb{M}$, эргодических относительно $\mathbb{S} \times \mathbb{O}$.

Следующая лемма дает характеризацию эргодических мер из $\mathbb{M}$ в терминах их частичных проекций $\theta_k[\cdot]$, $k \geq 0$.

Лемма 3. *Пусть* $\nu \in \mathbb{M}$. *Тогда следующие условия равносильны*:

1. $\nu \in Ex(\mathbb{M})$;
2. $\theta_k[\nu] \in Ex(\mathcal{M}_k)$ *для каждого* $k \geq 0$;
3. *для некоторого* $n \geq 0$ *для каждого* $k \geq n$ *выполнено* $\theta_k[\nu] \in Ex(\mathcal{M}_k)$.

Proof. Покажем, что из (1) следует (2). Пусть $k \geq 0$. Напомним, что символом $A_{r,k}$ мы обозначали координатные цилиндры в $I^{\mathbb{N}}$ (см. определение 8). Пусть $B \subset I^{\mathbb{Z}}$ — некоторое $\mathbb{S}^{2^k}$-инвариантное множество. Тогда множество

$$\bigcup_{r=0}^{2^k-1} (\mathbb{S}^r B) \times A_{r,k}$$

является $\mathbb{S} \times \mathbb{O}$-инвариантным. Следовательно, в силу эргодичности меры ν ее значение на этом множестве равно нулю или единице. Отсюда следует, что $\theta_k[\nu](B)$ тоже равно нулю или единице.

Очевидно, что из (2) следует (3). Предположим теперь, что условие (3) выполнено, и докажем (1). Предположим противное, пусть ν — не эргодична. Тогда найдутся различные $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{M}$, для которых $\nu_1 + \nu_2 = 2\nu$. Но тогда для каждого $k \geq n$ имеем $\theta_k[\nu_1] + \theta_k[\nu_2] = 2\theta_k[\nu]$. В силу эргодичности меры $\theta_k[\nu]$ имеем равенство $\theta_k[\nu_1] = \theta_k[\nu_2]$ при $k \geq n$. В силу соотношения 17 это выполнено и для всех $k \geq 0$. Но тогда меры ν_1 и ν_2 совпадают, что противоречит процедуре их построения. □

Следствие 3. *Пусть* $\nu \in Ex(\mathbb{M})$. *Тогда для каждого* k, $k \geq 0$, *и различных* r_1, r_2 *из множества* $\{0, \ldots, 2^k - 1\}$ *меры* $\mathcal{P}_{r_1,k}[\nu]$ *и* $\mathcal{P}_{r_2,k}[\nu]$ *либо совпадают, либо взаимно сингулярны.*

Proof. Каждая из мер $\mathcal{P}_{r,k}[\nu]$, $0 \leq r \leq 2^k - 1$, является эргодической для преобразования $\mathbb{S}^{2^k}$. А любые две эргодические меры либо совпадают, либо взаимно сингулярны. $\square$

5.3.1 Эргодические меры периодического типа

Нам понадобится следующая простая лемма.

Лемма 4. *Пусть* T *— автоморфизм пространства Лебега* (X, μ). *Если преобразование* T^2 *является эргодическим на* (X, μ), *то для любого* $k \geq 1$ *преобразование* T^{2^k} *тоже является эргодическим на* (X, μ).

Proof. Из эргодичности преобразования T^2 следует эргодичность самого автоморфизма T а также то, что -1 не является собственным числом унитарного оператора U_T на $L^2(X, \mu)$, соответствующего автоморфизму T. Так как собственные числа оператора U_T образуют группу, отсюда следует, что единственным собственным числом оператора U_T, которое является корнем степени 2^k из 1, является число 1. Стало быть, 1 является простым собственным числом оператора T^{2^k}. $\square$

Следующая лемма дает описание множества мер периодического типа из $Ex(\mathbb{M})$.

Лемма 5. *Пусть* $k \geq 0$, $\eta \in \mathcal{M}_k$. *Тогда* $D_k[\eta] \in Ex(\mathbb{M})$ *тогда и только тогда, когда* $\eta \in Ex(\mathcal{M}_{k+1})$.

Proof. Из замечания 11 следует, что для $n \geq k$ выполнено равенство $\theta_n[D_k[\eta]] = \eta$.

Если мера $D_k[\eta]$ является эргодической для $\mathbb{S} \times \mathbb{O}$, то в соответствии с леммой 3 мера $\eta = \theta_{k+1}[D_k[\eta]]$ является эргодической для $\mathbb{S}^{2^{k+1}}$.

Если мера η является эргодической для $\mathbb{S}^{2^{k+1}}$, то в силу леммы 4 она является эргодической для $\mathbb{S}^{2^n}$, $n > k$. Следовательно, мера $D_k[\eta]$ удовлетворяет условию (3) леммы 3. Отсюда следует, что она эргодична для $\mathbb{S} \times \mathbb{O}$. $\square$

Следствие 4. *Пусть* $k \geq 0$. *Тогда (здесь и далее мы подразумеваем* $\mathbb{M}_{-1} = \varnothing$*)*

$$Ex(\mathbb{M}) \cap \mathbb{M}_k \setminus \mathbb{M}_{k-1} = Ex(\mathbb{M}_k) \cap Ex(\mathbb{M}_{k+1}) \setminus Ex(\mathbb{M}_{k-1}). \tag{18}$$

Proof. Проверим, что левая часть равенства (18) содержится в правой. Если $\nu \in Ex(\mathbb{M}) \cap \mathbb{M}_k \setminus \mathbb{M}_{k-1}$, то, очевидно, $\nu \in Ex(\mathbb{M}_k)$. Далее, найдется мера $\eta \in \mathcal{M}_k \setminus \mathcal{M}_{k-1}$, для которой $\nu = D_k[\eta]$. В соответствии с леммой 5 из того, что $\nu \in Ex(\mathbb{M})$, следует, что $\eta \in Ex(\mathcal{M}_{k+1})$. Следовательно, $\nu \in Ex(\mathbb{M}_{k+1})$. При этом $\eta \notin \mathcal{M}_{k-1}$, поэтому $\nu \notin Ex(\mathbb{M}_{k-1})$.

Теперь проверим, что правая часть равенства (18) содержится в левой. Пусть $\nu \in Ex(\mathbb{M}_k) \cap Ex(\mathbb{M}_{k+1}) \setminus Ex(\mathbb{M}_{k-1})$. Тогда $\nu = D_k[\eta]$ для некоторой $\eta \in \mathbb{M}_k \cap Ex(\mathcal{M}_{k+1})$. Из леммы 5 следует, что $\nu \in Ex(\mathbb{M})$. Кроме того, если $\nu \in \mathbb{M}_{k-1}$, то, очевидно, $\nu \in Ex(\mathbb{M}_{k-1})$, противоречие. Поэтому $\nu \in Ex(\mathbb{M}) \cap \mathbb{M}_k \setminus \mathbb{M}_{k-1}$. □

Кроме того, очевидно соотношение

$$Ex(\mathbb{M}) \cap \mathbb{M}_\infty = Ex(\mathbb{M}_\infty).$$

Следствие 5. *Множество эргодических мер из $\mathbb{M}$ допускает следующую градуировку*:

$$Ex(\mathbb{M}) = Ex(\mathbb{M}_\infty) \cup \bigcup_{k \geq 0} (Ex(\mathbb{M}_k) \cap Ex(\mathbb{M}_{k+1}) \setminus Ex(\mathbb{M}_{k-1})).$$

5.3.2 Апериодические эргодические меры

Теорема 3. *Пусть $\nu \in Ex(\mathbb{M}_\infty)$. Тогда для каждого k, $k \geq 0$, и различных r_1, r_2 из множества $\{0, \ldots, 2^k - 1\}$, меры $\mathcal{P}_{r_1,k}[\nu]$ и $\mathcal{P}_{r_2,k}[\nu]$ взаимно сингулярны.*

Proof. Пусть для некоторого k, $k \geq 0$, две меры $\mathcal{P}_{r_1,k}[\nu]$ и $\mathcal{P}_{r_2,k}[\nu]$ не являются взаимно сингулярными. Мы можем выбрать число k минимальным среди таковых. Не умаляя общности, считаем, что $r_1 < r_2$. Согласно следствию 3 меры $\mathcal{P}_{r_1,k}[\nu]$ и $\mathcal{P}_{r_2,k}[\nu]$ совпадают. В силу минимальности k, все меры $\mathcal{P}_{r,k-1}[\nu]$, $0 \leq r < 2^{k-1}$, попарно сингулярны. Пользуясь этим соображением и соотношением 16, мы получаем $r_2 - r_1 = 2^{k-1}$. Следовательно, мера $\mathcal{P}_{r_1,k-1}[\nu]$ совпадает с мерой $\mathcal{P}_{r_1,k}[\nu]$ и является эргодической для преобразования $\mathbb{S}^{2^k}$. Значит, мера $\theta_{k-1}[\nu]$ тоже является эргодической для преобразования $\mathbb{S}^{2^k}$. В силу леммы 4 мера $\theta_{k-1}[\nu]$ является эргодической для $\mathbb{S}^{2^n}$, $n \geq k$. С другой стороны, для $n > k$ согласно формуле (17) мера $\theta_{k-1}[\nu]$ является средним арифметическим сдвигов меры $\theta_n[\nu]$, которые являются инвариантными относительно $\mathbb{S}^{2^n}$. Следовательно, $\theta_n[\nu] = \theta_{k-1}[\nu]$ при $n \geq k$. Следовательно, $\nu = D_k[\theta_{k-1}[\nu]]$, то есть мера ν является мерой периодического типа, что противоречит условию. □

Определение 14. Для $n \geq 0$ символом ϱ_n обозначим число $e^{2^{1-n}\pi i}$ — корень степени 2^n из единицы с наименьшим аргументом.

Следствие 6 (Свойства апериодических эргодических мер)**.** *Пусть ν — апериодическая мера из $Ex(\mathbb{M})$. Тогда*:

1. *меры $\theta_k[\nu]$ и $\mathbb{S}^r\theta_k[\nu]$ взаимно сингулярны при $k \geq 1$ и $1 < r < 2^k - 1$;*

2. *(дельтаобразность) для $\theta_0[\nu]$-почти всех $w \in I^{\mathbb{Z}}$ условные меры в сечениях $\{w\} \times I^{\mathbb{N}}$ являются дельта-мерами;*

3. *проекция $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$ на $I^{\mathbb{Z}}$ является изоморфизмом динамических систем $(I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}, \nu, \mathbb{S} \times \mathbb{O})$ и $(I^{\mathbb{Z}}, \theta_0[\nu], \mathbb{S})$;*

4. *числа ϱ_n, $n \geq 0$, являются собственными для автоморфизма $\mathbb{S}$ на пространстве $(I^{\mathbb{Z}}, \theta_0[\nu])$;*

5. *динамическая система $(I^{\mathbb{Z}}, \theta_0[\nu], \mathbb{S})$ обладает фактором, изоморфным одометру $(I^{\mathbb{N}}, m, \mathbb{O})$.*

Возникает следующий естественный вопрос — какие меры на $I^{\mathbb{Z}}$ могут являться проекциями апериодических мер из $Ex(\mathbb{M})$. В соответствии с леммой 3 эти меры являются эргодическими относительно сдвига $\mathbb{S}$. Оказывается, что условие из последнего пункта следствия (6) является не только необходимым, но и достаточным.

Лемма 6. *Пусть $\eta \in Ex(\mathcal{M}_0)$. Пусть сдвиг $\mathbb{S}$ на пространстве $(I^{\mathbb{Z}}, \eta)$ имеет фактор, изоморфный одометру. Тогда найдется апериодическая мера $\nu \in Ex(\mathbb{M})$, для которой $\theta_0[\nu] = \eta$. Более того, множество всех таких мер ν естественным образом параметризуются точками $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ (см. лемму 7).*

Proof. Для каждого $n \geq 0$ найдем единственную (с точностью до константы) собственную функцию f_n, отвечающую собственному числу ϱ_n:

$$\mathbb{S} f_n = \varrho_n f_n.$$

Домножив при необходимости эти функции на подходящие константы, мы можем считать, что $f_0 = 1$ и $f_n = f_{n+1}^2$, $n \geq 0$. Тогда почти всюду по мере η значения функции f_n совпадают со степенями ϱ_n^r, $0 \leq r < 2^n - 1$, $n \geq 0$. Рассмотрим множества уровня функций f_n:

$$B(r,n) = \{w \in I^{\mathbb{Z}} \colon f_n(w) = \varrho_n^r\}, \qquad 0 \leq n, \quad 0 \leq r < 2^n - 1.$$

Очевидно, для каждого фиксированного $n \geq 1$ отображение $\mathbb{S}$ циклически переставляет множества $B(r,n)$, $r = 0, \ldots, 2^n - 1$, поэтому $\eta(B(r,n)) = \frac{1}{2^n}$.

Пусть $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$, $\alpha = (\alpha_k)_{k \geq 1}$. Положим $r(n,\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \alpha_{k+1}$, $n \geq 0$. Для $n \geq 0$ определим меру $\theta_n^{(\alpha)}$ как нормированное сужение меры η на множество $\mathcal{B}(n,\alpha) = B\big(r(n,\alpha), n\big)$:

$$\theta_n^{(\alpha)} = 2^n \eta\big|_{\mathcal{B}(n,\alpha)}, \quad n \geq 0.$$

Понятно, что мера $\theta_n^{(\alpha)}$ является инвариантной относительно $\mathbb{S}^{2^n}$. Легко проверить, что построенная последовательность мер $(\theta_n^{(\alpha)})_{n \geq 0}$ удовлетворяет соотношению (17). Это напрямую вытекает из того, что множества $\mathcal{B}(n,\alpha)$ и $\mathcal{B}(n+1,\alpha)$ связаны равенством

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(n,\alpha) = \{f_{n+1}^2 = \varrho_n^{r(n,\alpha)}\} = \{f_{n+1} = \varrho_{n+1}^{r(n,\alpha)}\} \cup \{f_{n+1} = -\varrho_{n+1}^{r(n,\alpha)}\} = \\ B\big(r(n,\alpha), n+1\big) \cup B\big(2^n + r(n,\alpha), n+1\big) = \mathcal{B}(n+1,\alpha) \cup \mathbb{S}^{2^n}\mathcal{B}(n+1,\alpha).\end{aligned}$$

Согласно следствию 1 последовательность $(\theta_n^{(\alpha)})_{n\geq 0}$ задает некоторую меру $\nu^{(\alpha)}[\eta] \in \mathbb{M}$, для которой $\theta_n[\nu^{(\alpha)}[\eta]] = \theta_n^{(\alpha)}$, $n \geq 0$. В частности,

$$\theta_0[\nu^{(\alpha)}[\eta]] = \theta_0^{(\alpha)} = \eta.$$

Осталось проверить эргодичность построенной меры $\nu^{(\alpha)}[\eta]$. В соответствии с леммой 3, эргодичность меры $\nu^{(\alpha)}[\eta]$ равносильна тому, что для каждого $n \geq 0$ мера $\theta_n^{(\alpha)}$ эргодична для $\mathbb{S}^{2^n}$. Проверим это.

Пусть множество $B \subset I^{\mathbb{Z}}$ инвариантно относительно $\mathbb{S}^{2^n}$. Тогда функция

$$f = \sum_{j=0}^{2^n-1} \varrho_n^j \chi_{\mathbb{S}^j B}$$

удовлетворяет равенству $\mathbb{S}f = \varrho_n f$. Все собственные числа оператора $\mathbb{S}$ простые, поэтому $f = Cf_n$ η-п.в. для некоторой константы $C \in \mathbb{C}$. Отсюда следует, что либо $\eta(B) = 0$, либо множество B совпадает с множеством $B(r,n)$ для некоторого r, $0 \leq r \leq 2^n - 1$. В частности, множество $\mathcal{B}(n,\alpha)$ не содержит нетривиальных $\mathbb{S}^{2^n}$-инвариантных подмножеств. Следовательно, мера $\theta_n^{(\alpha)}$ является эргодической для $\mathbb{S}^{2^n}$. $\square$

Лемма 7. *Построенное в доказательстве леммы 6 семейство мер $\nu^{(\alpha)}[\eta]$, $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$, описывает все меры из $Ex(\mathbb{M})$ с заданной проекцией η. Иными словами, если $\nu \in \mathbb{M}$ и $\theta_0[\nu] = \eta$, то $\nu = \nu^{(\alpha)}[\eta]$ для некоторого $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$.*

Прежде, чем переходить к доказательству этой леммы, обсудим одно спектральное свойство мер периодического типа.

Лемма 8. *Пусть $k \geq 0$, $\eta \in \mathcal{M}_k$. Пусть $D_k[\eta] \in Ex(\mathbb{M})$. Тогда числа ϱ_n, $n > k$, не являются собственными для оператора $\mathbb{S}$ на пространстве $(I^{\mathbb{Z}}, \theta_0[D_k[\eta]])$.*

Proof. Пусть

$$\mathbb{S}f = \varrho_n f \tag{19}$$

почти всюду по мере $\theta_0 = \theta_0[D_k[\eta]]$. Покажем, что $f = 0$ почти всюду по мере θ_0. Ясно, что $\mathbb{S}^{2^n}f = f$ почти всюду по мере $\mathbb{S}^j\eta$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$. В силу лемм 5, 4 меры $\mathbb{S}^j\eta$, $0 \leq j \leq 2^k - 1$, являются эргодическими для $\mathbb{S}^{2^n}$. Следовательно, функция f постоянна почти всюду по каждой из этих мер. Отсюда следует, что функция f принимает не более, чем 2^k различных значений на некотором подмножестве, полном по мере θ_0. С другой стороны в силу соотношения (19), если функция f не равна нулю почти всюду, то она должна принимать как минимум 2^n различных значений на множествах положительной меры. Следовательно, $f = 0$ почти всюду по мере θ_0. $\square$

Доказательство леммы 7. Мы будем использовать обозначения из доказательства леммы 6. Пусть $\nu \in \mathbb{M}$ — эргодическая и $\theta_0[\nu] = \eta$. Из леммы 8 следует, что мера ν не может быть периодического типа. При фиксированном $n \geq 0$ в силу следствия 6 меры $\mathcal{P}_{r,n}[\nu]$, $0 \leq r \leq 2^n - 1$, попарно взаимно сингулярны. Кроме того, в силу соотношений замечания 10 выполнено равенство

$$\eta = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{2^n-1} \mathcal{P}_{r,n}[\nu].$$

Пусть множество $B_n \subset I^{\mathbb{Z}}$ таково, что $\mathcal{P}_{0,n}[\nu] = 2^n \eta\big|_{B_n}$. Тогда $\mathcal{P}_{r,n} = 2^n \eta\big|_{\mathbb{S}^r B_n}$, $0 \leq r \leq 2^n - 1$, и множества $\mathbb{S}^r B_n$ попарно не пересекаются.

Функция

$$g_n = \sum_{r=0}^{2^n-1} \varrho_n^r \chi_{\mathbb{S}^r B_n}$$

удовлетворяет соотношению $\mathbb{S} g_n = \varrho_n g_n$. Поэтому $g_n = c_n f_n$ для некоторой константы $c_n \in \mathbb{C}$. Отсюда следует, что $B_n = B(r_n, n)$ для некоторого r_n, $0 \leq r_n \leq 2^n - 1$, $c_n = \varrho_n^{-r_n}$.

Осталось выяснить, как связаны числа r_n и r_{n+1}. Отметим, что мера $\mathcal{P}_{0,n}$ является полусуммой мер $\mathcal{P}_{0,n+1}$ и $\mathcal{P}_{2^n,n+1}$. Следовательно, множество B_{n+1} является подмножеством множества B_n. Значит, $B(r_{n+1}, n+1) \subset B(r_n, n)$. По определению этих множеств это означает, что $\varrho_{n+1}^{2r_{n+1}} = \varrho_n^{r_n}$, то есть $r_{n+1} - r_n \,\vdots\, 2^n$. Следовательно, либо $r_{n+1} = r_n$, либо $r_{n+1} = r_n + 2^n$. Положим $\alpha_{n+1} = 2^{-n}(r_{n+1} - r_n)$, $n \geq 0$. Тогда $r_n = r(n, \alpha)$, $B_n = \mathcal{B}(n, \alpha)$, откуда следует $\theta_n[\nu] = \theta_n^{(\alpha)}$ и $\nu = \nu^{(\alpha)}[\eta]$. □

5.3.3 Описание всех эргодических мер

Итого, мы получили следующее описание эргодических мер из $\mathbb{M}$.

Теорема 4. *Эргодические меры в множестве $\mathbb{M}$ делятся на два непересекающихся класса:*

1. *эргодические меры периодического типа k, $k \geq 0$, вида*

$$D_k[\eta], \quad \text{где } \eta \in \mathcal{M}_k \cap Ex(\mathcal{M}_{k+1});$$

2. *эргодические апериодические меры вида $\nu^{(\alpha)}[\eta]$, где мера η на пространстве $I^{\mathbb{Z}}$ инвариантна и эргодична относительно сдвига $\mathbb{S}$, и, более того, оператор $\mathbb{S}$ на $(I^{\mathbb{Z}}, \eta)$ имеет фактор, изоморфный одометру.*

Замечание 12. Эргодические меры из $\mathbb{M}$ периодического типа 0 являются всеми прямыми произведениями вида $\eta \times m$, где η — $\mathbb{S}$-инвариантная мера на $I^{\mathbb{Z}}$, эргодическая относительно преобразования $\mathbb{S}^2$.

Свойства эргодических апериодических мер были подробно описаны в следствии 6.

5.4 Дополнительная информация об эргодических мерах на $I^{\mathbb{Z}} \times I^{\mathbb{N}}$: как устроены условные меры

Пусть эргодический автоморфизм T пространства Лебега (X, μ) имеет инвариантное измеримое разбиение ς. В таком случае автоморфизм T имеет фактор-автоморфизм T_ς, действующий в фактор-пространстве X_ς с фактор-мерой μ_ς, и говорят, что T *есть косое произведение над автоморфизмом* T_ς *пространства* X_ς с некоторой системой автоморфизмов слоев (см. напр. [20]). При этом обычно считается, что в силу эргодичности пространство (X, μ) естественно изоморфно прямому произведению пространства $(X_\varsigma, \mu_\varsigma)$ и "типового слоя" с типовой мерой слоя т. е. типовой условной мерой на элементах разбиения ς. Однако, особенно, если пространство X снабжено топологией сепарабельного метрического пространства, то удобней не производить униформизации слоев, а считать, что слои остаются подмножествами исходного пространства X, с условными мерами как борелевскими мерами на слоях разбиения. Тогда действие автоморфизма не меняется, и остается лишь проблема явного вычисления условных мер. Обычно в теории Рохлина они вычисляются с помощью базиса измеримого разбиения ς и это — общий метод[2]. В нашем случае базис разбиения определяется структурой фактор-автоморфизма (одометра), точнее его спектром. Таким образом почти все условные меры (взаимно сингулярные между собой) становятся пределами последовательностей мер типа эргодических усреднений (см. далее). Мы не используем информации об условных мерах в дальнейшем. Однако, подобный метод можно использовать и для других косых произведений.

Определение 15. Будем говорить, что вероятностная мера ϑ на $I^{\mathbb{Z}}$ — *усредняемая*, если для любого $k \geq 1$ существует мера ϑ_k на $I^{\mathbb{Z}}$, которая является слабым пределом последовательности мер $\vartheta_{k,n}$, $n \to \infty$, где

$$\vartheta_{k,n} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{S}^{j2^k} \vartheta, \tag{20}$$

причем последовательность мер ϑ_k стремится слабо к мере ϑ при $k \to \infty$.

Следующая лемма является следствием эргодической теоремы и теоремы Лебега о дифференцировании.

Лемма 9. *Если* $\nu \in \mathbb{M}$, *то для почти всех* $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ *условная мера на слое* $I^{\mathbb{Z}} \times \{\alpha\}$ *является усредняемой как мера на* $I^{\mathbb{Z}}$. *При этом мера* ν *однозначно определяется типичной условной мерой.*

Proof. Пусть $\nu[\alpha]$ — условная мера на слое $I^{\mathbb{Z}} \times \{\alpha\}$. Тогда в силу инвариантности меры ν относительно преобразования $\mathbb{S} \times \mathbb{O}$для почти всех $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ выполнено соотношение

$$\mathbb{S}^j \nu[\alpha] = \nu[\mathbb{O}^j \alpha], \quad j \in \mathbb{Z}.$$

[2]Заметим, что совокупность условных (канонических) мер соответствует ядру оператора условного ожидания (ортогонального проектора) на подалгебру, отвечающую разбиению ς.

Пусть ϕ — характеристическая функция некоторого цилиндрического множества в $I^{\mathbb{Z}}$. Рассмотрим функцию ψ на $I^{\mathbb{N}}$, определенную почти всюду формулой

$$\psi(\alpha) = \int_{I^{\mathbb{Z}}} \phi(w) d\nu[\alpha](w),$$

— интеграл функции ϕ по слою. Пусть $k \geq 0$. Тогда для почти всех $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ выполнено равенство

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \psi(\mathbb{O}^{j2^k} \alpha) = \int_{I^{\mathbb{Z}}} \phi(w) d\nu[\alpha]_{k,n}(w), \quad n \geq 1, \tag{21}$$

где мера $\nu[\alpha]_{k,n}$ — усреднение меры $\nu[\alpha]$, определенное формулой (20). Преобразование $\mathbb{O}^{2^k}$ является эргодическим на каждом из цилиндров $A_{r,k}$, $0 \leq r \leq 2^k-1$, (см. определение 8) с мерой Лебега, поэтому по эргодической теореме для почти всех $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ левая часть равенства (21) сходится при $n \to \infty$ к среднему значению функции ψ по цилиндрическому множеству $A_{r,k}$, содержащему точку α. То есть

$$\int_{I^{\mathbb{Z}}} \phi(w) d\nu[\alpha]_{k,n}(w) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2^k \int_{(w,\beta)\in I^{\mathbb{Z}} \times A_{r,k}} \phi(w) d\nu(w,\beta) = \int_{I^{\mathbb{Z}}} \phi \mathcal{P}_{r,k}[\nu]$$

при условии $\alpha \in A_{r,k}$. Следовательно, для каждого $k \geq 0$ для почти каждого $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ меры $\nu[\alpha]_{k,n}$ сходятся слабо к мере $\mathcal{P}_{r(k,\alpha),k}[\nu]$, где число $r(k,\alpha)$ выбрано так, что $\alpha \in A_{r(k,\alpha),k}$.

Далее, применяя теорему Лебега о дифференцировании, получаем, что для почти каждого $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ среднее значение функции ψ по цилиндрическому множеству $A_{r(k,\alpha),k}$, содержащему точку α, сходится к $\psi(\alpha)$ при $k \to \infty$. Выбирая в качестве ϕ счетный набор цилиндров, получаем, что для почти всех $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ имеется сходимость мер $\mathcal{P}_{r(k,\alpha),k}[\nu]$ к мере $\nu[\alpha]$. Следовательно, для почти всех $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ мера $\nu[\alpha]$ является усредняемой.

Более того, для почти каждого $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ мера $\nu[\alpha]$ однозначно задает последовательность мер $\mathcal{P}_{r(k,\alpha),k}[\nu]$, $k \geq 0$ (как пределы усреднений), поэтому определяет и всю меру ν. $\square$

Замечание 13. Если $\nu \in Ex(\mathbb{M})$, то для почти всех $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$ условные меры в слоях $I^{\mathbb{Z}} \times \{\alpha\}$ являются крайними точками в множестве усредняемых мер на $I^{\mathbb{Z}}$.

6 Вычисление масштабирующей последовательности

В этом параграфе мы напомним определение масштабирующей последовательности действия группы (в нашем случае $\mathbb{Z}$ и $\mathcal{D}$), а также определение масштабирующей последовательности фильтрации. В работе [18] были вычислены масштабирующие последовательности действия κ группы $\mathcal{D}$ и адического действия группы $\mathbb{Z}$ на пространстве путей $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ графа упорядоченных пар OP со специальными мерами μ^σ. Оказалось, что классы масштабирующих последовательностей этих действий совпадают. В настоящем параграфе мы приведем еще один способ вычислить масштабирующую последовательность для действия κ группы $\mathcal{D}$ на пространстве $(\mathcal{T}(\mathrm{OP}), \mu^\sigma)$. Кроме того, мы найдем класс масштабирующих последовательностей хвостовой фильтрации $\xi = (\xi_n)_{n\geq 0}$ на пространстве $(\mathcal{T}(\mathrm{OP}), \mu^\sigma)$ и покажем, что он совпадает с описанным ранее классом масштабирующих последовательностей действий.

6.1 Напоминание определений и свойств

Напомним необходимую часть теории допустимых метрик (см., например, работы [7, 8, 10, 28, 29, 15, 18]).

6.1.1 Допустимые полуметрики и эпсилон-энтропия

Определение 16. Пусть (X,μ) — пространство Лебега. Полуметрику ρ на X (и тройку (X,μ,ρ)) называют *допустимой*, если ρ измерима как функция двух переменных по мере μ^2, и найдется подмножество полной меры, на котором полуметрика ρ сепарабельна. Если ρ является метрикой на некотором подмножестве полной меры, то она называется *допустимой метрикой*. Конус допустимых суммируемых (по мере μ^2) полуметрик на (X,μ) обозначается символом $\mathcal{A}dm(X,\mu)$.

Для работы с допустимыми полуметриками оказалось удобна следующая норма на пространстве функций двух переменных, которая была названа m-нормой (см. [29]).

Определение 17. Для $f \in L^1(X^2,\mu^2)$ положим

$$\|f\|_m = \inf\{\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)} \colon |f| \leq \rho\ \mu^2-\text{ п.в.},\quad \text{где } \rho \text{ — измеримая полуметрика на } (X,\mu)\}.$$

Определение 18. Пусть ρ — измеримая (как функция двух переменных) полуметрика на (X,μ), пусть $\varepsilon > 0$. *Эпсилон-энтропией тройки* (X,μ,ρ) назовем число $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho)$, которое определяется как двоичный логарифм наименьшего натурального числа k, для которого пространство X можно разбить на такие измеримые множества $X_0,\ldots,X_k$, что множество X_0 имеет малую меру, $\mu(X_0) < \varepsilon$, а множества X_j, $1 \leq j \leq k$, имеют диаметр в полуметрике ρ меньше ε. Если такого натурального k не существует, то $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho) = +\infty$.

Замечание 14. Измеримая полуметрика ρ на (X,μ) является допустимой тогда и только тогда, когда $\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\rho) < +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$.

Лемма 10 (см. [29, 17]). *Эпсилон-энтропия удовлетворяет следующим свойствам:*

1. *эпсилон-энтропия* $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho)$ *убывает по* ε *и возрастает по полуметрике* ρ;

2. *если* $\rho \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ *и* $\int_{X^2} \rho d\mu^2 < \varepsilon^2/2$, *то* $\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho) = 0$;

3. *если* $\rho, \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$, *и* $\rho \le \rho_1 + \rho_2$ μ^2*-п.в., то*

$$\mathbb{H}_{4\varepsilon}(X, \mu, \rho) \le \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_1) + \mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_2).$$

4. *если* $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ *и* $\|\rho_1 - \rho_2\|_m < \varepsilon^2/32$, *то*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, \rho_1) \le \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X, \mu, \rho_2).$$

6.1.2 Масштабирующая последовательность сохраняющего меру преобразования

Определение 19. Пусть (X, μ) — пространство Лебега. Пусть T — сохраняющее меру преобразование на (X, μ). Пусть ρ —- измеримая полуметрика на (X, μ). *Усреднением полуметрики* ρ *под действием* T *за* n *шагов*, $n \ge 1$, называется полуметрика

$$T_{av}^n \rho = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} T^j \rho.$$

В дальнейшем мы будем использовать символ $\asymp$ для двух последовательностей положительных чисел, ограничивающих друг друга с некоторой константой:

$$a_n \asymp b_n \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \infty.$$

Определение 20. Пусть T — сохраняющее меру преобразование пространства Лебега (X, μ). Пусть ρ — допустимая полуметрика на (X, μ). Последовательность $h = (h_n)_{n\ge1}$ положительных чисел называется *масштабирующей для полуметрики* ρ, если для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^n \rho) \asymp h_n, \quad n \to \infty.$$

Класс всех масштабирующих последовательностей для полуметрики ρ обозначается символом $\mathcal{H}(X, \mu, T, \rho)$.

В работе [17] (см. также краткое сообщение [16]) была доказана сформулированная А. М. Вершиком гипотеза о том, что масштабирующая последовательность не зависит от полуметрики ρ в широком классе полуметрик.

Определение 21. Полуметрика ρ на (X, μ) называется (двусторонней) *порождающей* для преобразования T, если найдется такое подмножество $X_0 \subset X$ полной меры, что для любых различных точек $x, y \in X_0$ найдется такое $n \in \mathbb{Z}$, что $\rho(T^n x, T^n y) > 0$.

Очевидно, что измеримая метрика является порождающей полуметрикой.

Теорема 5 (см. [17]). *Пусть $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$ — порождающие для сохраняющего меру преобразования T. Тогда $\mathcal{H}(X,\mu,T,\rho_1) = \mathcal{H}(X,\mu,T,\rho_2)$.*

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

Лемма 11. *Пусть $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$ — две допустимые метрики. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $X_0 \subset X$, что $\mu(X_0) > 1-\varepsilon$, и полуметрики ρ_1 и ρ_2 задают одну и ту же топологию на X_0.*

Теорема 5 означает, что класс масштабирующих последовательностей является характеристикой преобразования T.

Определение 22. Последовательность h называется *масштабирующей энтропийной последовательностью* сохраняющего меру преобразования T пространства Лебега (X,μ), если $h \in \mathcal{H}(X,\mu,T,\rho)$ для некоторой (а тогда и любой) порождающей полуметрики $\rho \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$. Класс масштабирующих энтропийных последовательностей преобразования T обозначается символом $\mathcal{H}(X,\mu,T)$.

Очевидно, класс масштабирующих энтропийных последовательностей является метрическим инвариантом.

В работе [19] было показано, что, если класс масштабирующих последовательностей не пуст, то в нем содержится возрастающая субаддитивная последовательность. В работе [18] было показано, что существует динамическая система с наперед заданной масштабирующей энтропийной последовательностью, если эта последовательность субаддитивна и возрастает. Тем самым была дана характеристика всевозможных масштабирующих энтропийных последовательностей сохраняющих меру преобразований. Примерами динамических систем с заданным ростом масштабирующих последовательностей послужило адическое преобразование $\mathcal{A}$ пространства $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ путей графа OP упорядоченных пар с мерами μ^σ для различных последовательностей σ. А именно, было доказана следующая теорема.

Теорема 6 (см. [18]). *Последовательность $h_n = 2^{\sum_{i=0}^{n-1}\sigma_i}$, $n \geq 1$, является масштабирующей последовательностью адического преобразования $\mathcal{A}$ пространства $(\mathcal{T}(\mathrm{OP}), \mu^\sigma)$.*

6.1.3 Масштабирующая последовательность действия группы

По аналогии с определением для одного сохраняющего меру преобразования, можно ввести определение масштабирующей последовательности действия группы. Для этого необходимо, чтобы в группе было выделено оснащение — некоторое семейство подмножеств G_n, $n \in \mathbb{N}$, по которым происходит усреднение.

Определение 23. Пусть G — некоторая группа автоморфизмов пространства Лебега (X,μ) с оснащением $G_n \subset G$, $n \geq 1$. Пусть ρ — допустимая полуметрика на (X,μ). Последовательность $h = (h_n)_{n\geq 1}$ положительных чисел называется *масштабирующей для полуметрики* ρ, если для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X, \mu, T_{av}^{G_n}\rho) \asymp h_n, \quad n \to \infty,$$

где $T_{av}^{G_n}\rho = \frac{1}{|G_n|}\sum_{g \in G_n} \rho(g\ \cdot)$ — усреднение полуметрики ρ по сдвигам из G_n.

Класс всех масштабирующих последовательностей для полуметрики ρ относительно действия группы G обозначается символом $\mathcal{H}(X, \mu, G, \rho)$.

Как и в случае одного преобразования, масштабирующая последовательность действия оснащенной группы G не зависит от выбора исходной метрики.

Теорема 7 (см. [18]). *Если* $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$ *— метрики, то*

$$\mathcal{H}(X, \mu, G, \rho_1) = \mathcal{H}(X, \mu, G, \rho_2).$$

Для того, чтобы заменить в последней теореме метрики на порождающие полуметрики, необходимо накладывать определенные условия на последовательность множеств G_n (см. работу [18]). Как и в случае одного преобразования, вводится понятие *масштабирующей последовательности действия оснащенной группы* — это масштабирующая последовательность произвольной допустимой метрики. Класс таких последовательностей является метрическим инвариантом действия оснащенной группы G, обозначается символом $\mathcal{H}(X, \mu, G)$.

Следующее утверждение позволяет проверять, что некоторая последовательность чисел является масштабирующей, тестируя это на подходящей последовательности полуметрик, не обязательно порождающих.

Лемма 12. *Пусть последовательность полуметрик* $\rho_k \in \mathcal{A}dm(X, \mu)$, $k \geq 1$, *в совокупности разделяет точки некоторого подмножества полной меры. Пусть последовательность* h *положительных чисел такова, что* $h \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \rho_k)$, $k \geq 1$. *Тогда* $h \in \mathcal{H}(X, \mu, G)$.

Proof. Можно выбрать последовательность достаточно малых положительных чисел c_k, $k \geq 1$, таким образом, что функция $\rho = \sum c_k \rho_k$ будет лежать в $\mathcal{A}dm(X, \mu)$. При этом ρ будет допустимой метрикой. Воспользовавшись леммой 10, легко понять, что $h \in \mathcal{H}(X, \mu, G, \rho)$, поэтому $h \in \mathcal{H}(X, \mu, G)$. □

6.1.4 Масштабирующая последовательность фильтрации

Упоминание о понятии масштабированной энтропии фильтрации можно найти еще в работах [1, 2], а также в докторской диссертации первого автора (см. также [5, 7, 9, 10]). Напомним одно из возможных определений масштабирующей последовательности фильтрации.

Пусть $\varsigma = (\varsigma_n)_{n \geq 0}$ — диадическая фильтрация на пространстве Лебега (X, μ), где ς_0 — разбиение на точки. На каждом элементе разбиения ς_n, $n \geq 0$, естественным образом задана диадическая иерархия — он состоит из двух элементов разбиения ς_{n-1}, каждый из которых тоже состоит из двух элементов разбиения ς_{n-2}, и так далее, до разбиения на точки. На точках каждого элемента разбиения ς_n, сохраняя иерархию (то есть сохраняя элементы предыдущих разбиений), действует группа $\mathcal{T}_n$ автоморфизмов двоичного дерева высоты n (в нем $n+1$ этаж вершин и n этажей ребер).

Пусть ρ — некоторая полуметрика на (X,μ). Для каждого $n \geq 0$ следующим образом строится полуметрика $\mathcal{K}_n = \mathcal{K}_n[\rho]$ на множестве элементов разбиения ς_n. Пусть c_1, c_2 — два элемента разбиения ς_n, $c_i = \{x_{i,j} \colon j = 1, \dots, 2^n\}$, $i = 1, 2$. Положим

$$\mathcal{K}_n[\rho](c_1, c_2) = \inf_{S \in \mathcal{T}_n} \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} \rho(x_{1,j}, S x_{2,j}). \tag{22}$$

Отметим, что последовательность полуметрик $\mathcal{K}_n[\rho]$, $n \geq 0$, может быть построена итеративно следующим образом. Пусть $\mathcal{K}_0[\rho] = \rho$ — полуметрика на $X = X/\varsigma_0$. Для $n \geq 0$ каждая точка множества X/ς_{n+1} есть неупорядоченная пара точек из X/ς_n, ей можно сопоставить полусумму дельта мер в этих точках. Таким образом, множество X/ς_{n+1} вкладывается в пространство мер на X/ς_n. На пространстве мер на метрическом пространстве $(X/\varsigma_n, \mathcal{K}_n[\rho])$ имеется метрика Канторовича. Именно она и задает метрику $\mathcal{K}_{n+1}[\rho]$ на X/ς_{n+1}.

Отметим, что полуметрику $\mathcal{K}_n[\rho]$, определенную на фактор-пространстве $(X/\varsigma_n, \mu/\varsigma_n)$, можно понимать и как полуметрику на исходном пространстве (X,μ) (нужно всего лишь взять ее композицию с фактор-отображением). При этом полученные полуметрические тройки изоморфны — сохраняющим меру и полуметрику отображением является фактор-отображение.

Определение 24. Последовательность положительных чисел h_n, $n \geq 1$, называется *масштабирующей для полуметрики ρ и диадической фильтрации* $\varsigma = (\varsigma_n)_{n \geq 0}$ пространства (X,μ), если для достаточно малого $\varepsilon > 0$ выполнено асимптотическое соотношение

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X/\varsigma_n, \mu/\varsigma_n, \mathcal{K}_n[\rho]) \asymp h_n, \quad n \to \infty.$$

Класс масштабирующих последовательностей для полуметрики ρ и фильтрации ς обозначим символом $\mathcal{H}(X,\mu,\varsigma,\rho)$.

Как и в случае энтропии действия, оказывается, что класс масштабирующих последовательностей не зависит от метрики.

Теорема 8. *Пусть $\varsigma = (\varsigma_n)_{n \geq 0}$ — диадическая фильтрация на пространстве Лебега (X,μ), а $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$ — две метрики на нем. Тогда*

$$\mathcal{H}(X,\mu,\varsigma,\rho_1) = \mathcal{H}(X,\mu,\varsigma,\rho_2)$$

Эта теорема является основанием для следующего определения.

Определение 25. Последовательность положительных чисел h_n, $n \geq 1$, называется *масштабирующей последовательностью диадической фильтрации* $\varsigma = (\varsigma_n)_{n \geq 0}$ пространства (X,μ), если она является масштабирующей для некоторой (а тогда и любой другой) суммируемой допустимой метрики ρ на пространстве (X,μ).

6.2 Независимость масштабирующей последовательности фильтрации от метрики

В этом пункте мы приведем доказательство теоремы 8, основанное на теории допустимых полуметрик. Следующая лемма является ключевой в нашем доказательстве.

Лемма 13. *Пусть $\varsigma = (\varsigma_n)_{n\geq 0}$ — диадическая фильтрация пространства Лебега (X,μ). Пусть $n \geq 0$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$. Тогда*

$$\big\|\mathcal{K}_n[\rho_1] - \mathcal{K}_n[\rho_2]\big\|_m \leq 3\|\rho_1 - \rho_2\|_m.$$

Иными словами, итерация по Канторовичу $\mathcal{K}_n$ является липшицевым в m-норме с константой Липшица 3.

Доказательство леммы 13 основано на следующем наблюдении, вытекающем непосредственно из неравенства треугольника.

Замечание 15. Пусть $N \geq 1$, ρ — полуметрика на некотором множестве X, пусть $x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_N \in X$. Тогда

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \rho(x_j, y_j) \leq \frac{3}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \rho(x_j, y_k).$$

Proof. Пусть $k, m \in \{0, \ldots, N-1\}$. Тогда для каждого j, $1 \leq j \leq N$, из неравенства треугольника следует, что

$$\rho(x_j, y_j) \leq \rho(x_j, y_{j+k}) + \rho(x_{j+k-m}, y_{j+k}) + \rho(x_{j+k-m}, y_j),$$

где суммирование в индексах ведется, конечно, по модулю N. Суммируя это неравенство по всем j, k, m и поделив результат на N^3, получаем требуемое. □

Доказательство леммы 13. Пусть $N = 2^n$, пусть c_1, c_2 — два элемента разбиения ς_n. Пусть $c_1 = \{x_1, \ldots, x_N\}$, $c_2 = \{y_1, \ldots, y_N\}$. Пусть ρ — такая измеримая полуметрика на (X,μ), что $|\rho_2 - \rho_1| \leq \rho$. Тогда

$$\mathcal{K}_n[\rho_2](c_1, c_2) \leq \mathcal{K}_n[\rho_1 + \rho](c_1, c_2) \leq \mathcal{K}_n[\rho_1](c_1, c_2) + \max_{s \in S_N} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \rho(x_j, y_{s(j)}),$$

где максимум берется по всем перестановкам s из симметрической группы S_N. Оценивая последнее слагаемое при помощи замечания 15, получаем неравенство

$$\mathcal{K}_n[\rho_2](c_1, c_2) \leq \mathcal{K}_n[\rho_1](c_1, c_2) + 3\tilde{\rho}(c_1, c_2), \qquad \text{где } \tilde{\rho}(c_1, c_2) = \frac{1}{N^2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \rho(x_j, y_k).$$

Очевидно, также выполнено и симметричное неравенство

$$\mathcal{K}_n[\rho_1](c_1, c_2) \leq \mathcal{K}_n[\rho_2](c_1, c_2) + 3\tilde{\rho}(c_1, c_2).$$

Осталось лишь заметить, что таким образом определенная функция $\tilde{\rho}$ является измеримой полуметрикой на пространстве X/ς_n с фактор-мерой μ/ς_n, причем $\|\tilde{\rho}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} = \|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)}$. Следовательно,

$$\big\|\mathcal{K}_n[\rho_1] - \mathcal{K}_n[\rho_2]\big\|_m \leq 3\|\tilde{\rho}\|_{L^1(X^2,\mu^2)} = 3\|\rho\|_{L^1(X^2,\mu^2)}.$$

Переходя к инфимуму по всевозможным полуметрикам ρ, мажорирующим модуль разности $|\rho_1 - \rho_2|$, получаем требуемое неравенство. $\square$

Следующая лемма является аналогом леммы 9 работы [17].

Лемма 14. *Пусть $\rho, \tilde{\rho} \in \mathcal{A}dm(X,\mu)$, причем ρ — метрика. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\varepsilon_1 > 0$ и $C_1 > 0$, что для любого $n \geq 0$ выполнено неравенство*

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\mathcal{K}_n[\tilde{\rho}]) \leq C_1 \mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho]). \tag{23}$$

Proof. Рассмотрим множество $\mathcal{M}_\rho \subset \mathcal{A}dm(X,\mu)$, состоящее из тех полуметрик $\tilde{\rho}$, для которых выполнено заключение леммы. Наша цель — доказать, что $\mathcal{M}_\rho = \mathcal{A}dm(X,\mu)$.

Очевидно, что множество $\mathcal{M}_\rho$ вместе с каждой полуметрикой содержит все полуметрики, мажорируемые ею, то есть если $\rho_1 \in \mathcal{M}_\rho$ и $\rho_2 \leq \rho_1$, то $\rho_2 \in \mathcal{M}_\rho$.

Покажем, что множество $\mathcal{M}_\rho$ замкнуто в m-норме. Действительно, если полуметрика ρ_1 лежит в его замыкании, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется полуметрика $\rho_2 \in \mathcal{M}_\rho$, для которой $\|\rho_1 - \rho_2\|_m < \varepsilon^2/96$. Из леммы 13 следует, что для любого $n \geq 0$ имеет место неравенство

$$\big\|\mathcal{K}_n[\rho_1] - \mathcal{K}_n[\rho_2]\big\|_m < \varepsilon^2/32.$$

Согласно лемме 10, выполнено неравенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho_1]) \leq \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho_2]),$$

откуда следует, что полуметрика ρ_1 тоже лежит в множестве $\mathcal{M}_\rho$.

Пусть $f\colon (X,\mu) \to \mathbb{R}$ — некоторая измеримая функция. Символом $d[f]$ обозначим полуметрику, построенную по функции f следующим образом:

$$d[f](x,y) = |f(x) - f(y)|, \quad x,y \in X.$$

В случае, если функция f является характеристической функцией некоторого измеримого множества $A \subset X$, полуметрика $d[f]$ называется разрезной (или просто разрезом).

Легко понять, что, если функция f является липшицевой относительно метрики ρ, то полуметрика $d[f]$ принадлежит множеству $\mathcal{M}_\rho$. Действительно, если $|f(x) - f(y)| \leq C\rho(x,y)$ для некоторой константы $C > 1$ и всех $x, y \in X$, то $\mathcal{K}_n[d[f]] \leq C\mathcal{K}_n[\rho]$ для $n \geq 0$, поэтому

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\mathcal{K}_n[d[f]]) \leq \mathbb{H}_{\varepsilon/C}(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho]),$$

откуда следует, что $d[f] \in \mathcal{M}_\rho$.

Нетрудно проверить неравенство

$$|d[f_1](x,y) - d[f_2](x,y)| \le |f_1(x) - f_2(x)| + |f_1(y) - f_2(y)|, \quad x, y \in X,$$

причем функция, стоящая в его правой части, является полуметрикой на X. Отсюда следует неравенство

$$\|d[f_1] - d[f_2]\|_m \le 2\|f_1 - f_2\|_{L^1(X,\mu)}.$$

Пусть $f \in L^1(X,\mu)$. Аппроксимируя функцию f липшицевыми по метрике ρ функциями в L^1-норме, применяя замкнутость множества $\mathcal{M}_\rho$, получим, что $d[f] \in \mathcal{M}_\rho$.

Из вышесказанного следует, что в множестве $\mathcal{M}_\rho$ содержатся все полуметрики, мажорируемые конечной суммой разрезных полуметрик. А такие полуметрики аппроксимируют в m-норме любую суммируемую допустимую полуметрику (см. доказательство леммы 9 работы [17]). Таким образом, из замкнутость множества $\mathcal{M}_\rho$ в m-норме следует, что $\mathcal{M}_\rho = \mathcal{A}dm(X,\mu)$. Лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 8. В силу симметрии, достаточно доказать включение $\mathcal{H}(X,\mu,\varsigma,\rho_1) \subset \mathcal{H}(X,\mu,\varsigma,\rho_2)$. Если первое множество пусто, то доказывать нечего. Пусть оно не пусто, пусть последовательность $h = (h_n)_{n\ge 0}$ положительных чисел такова, что $h \in \mathcal{H}(X,\mu,\varsigma,\rho_1)$. Покажем, что $h \in \mathcal{H}(X,\mu,\varsigma,\rho_2)$.

Из леммы 14, примененной для $\rho = \rho_1$ и $\tilde\rho = \rho_2$, очевидно, что для любого $\varepsilon > 0$ выполнено соотношение

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho_2])}{h_n} < +\infty.$$

Остается проверить отделенность от нуля нижнего предела. Для этого нужно применить лемму 14, поменяв роли метрик ρ_1 и ρ_2. А именно, для $\rho = \rho_2$ и $\tilde\rho = \rho_1$ для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\varepsilon_1 > 0$ и $C_1 > 0$, что

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho_1]) \le C_1 \mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho_2]).$$

Если при этом число ε достаточно мало, то

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho_1])}{h_n} \le C_1 \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{H}_{\varepsilon_1}(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho_2])}{h_n}.$$

Стало быть, если $\tilde\varepsilon < \varepsilon_1$, то

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{H}_{\tilde\varepsilon}(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho_2])}{h_n}.$$

Итого, мы доказали, что $h \in \mathcal{H}(X,\mu,\varsigma,\rho_2)$. Теорема доказана. $\square$

Следующее замечание позволяет находить масштабирующую последовательность фильтрации, проводя вычисления для подходящего семейства полуметрик.

Замечание 16. Пусть последовательность суммируемых допустимых полуметрик $(\rho_k)_{k\geq 0}$ не убывает и в совокупности разделяет точки пространства (X,μ) с точностью до множества меры ноль. Пусть $\varsigma = (\varsigma_n)_{n\geq 0}$ — диадическая фильтрация на (X,μ). Предположим, что некоторая последовательность $h = (h_n)_{n\geq 0}$ положительных чисел является масштабирующей для фильтрации ς и каждой из полуметрик ρ_k, $k \geq 0$. Тогда последовательность h является масштабирующей для фильтрации ς.

Proof. Подберем малые положительные коэффициенты C_k, $k \geq 0$, таким образом, чтобы функция $\rho = \sum_{k\geq 0} C_k\rho_k$ являлась суммируемой допустимой метрикой. В силу теоремы 8 и определения 25 достаточно показать, что $h \in \mathcal{H}(X,\mu,\varsigma,\rho)$. Метрика ρ, очевидно, мажорирует каждую из полуметрик ρ_k, $k \geq 0$, поэтому оценка нижнего предела очевидна. Перейдем к оценке верхнего предела.

Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем такой номер l, что

$$\Big\|\rho - \sum_{k=0}^{l} C_k\rho_k\Big\|_m = \Big\|\sum_{k\geq l+1} C_k\rho_k\Big\|_{L^1(X^2,\mu^2)} < \varepsilon^2/96.$$

Тогда в силу леммы 13 для каждого $n \geq 0$ выполнено неравенство

$$\Big\|\mathcal{K}_n[\rho] - \mathcal{K}_n[\sum_{k=0}^{l} C_k\rho_k]\Big\|_m < \varepsilon^2/32,$$

откуда в силу леммы 10 следует неравенство

$$\mathbb{H}_\varepsilon(X,\mu,\mathcal{K}_n[\rho]) \leq \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X,\mu,\mathcal{K}_n[\sum_{k=0}^{l} C_k\rho_k]) \leq \mathbb{H}_{\varepsilon/4}(X,\mu,\sum_{k=0}^{l} C_k\cdot\mathcal{K}_n[\rho_l]) \leq Ch_n$$

для некоторой константы $C > 0$. Отсюда легко следует искомая оценка верхнего предела. □

Укажем для полноты, что в определении энтропии однородной (в частности, диадической) фильтрации в исходных работах (см., например, [6]) использовались первоначально не эпсилон-энтропии метрики, а метрические энтропии некоторых разбиений пространства на орбиты группы автоморфизмов дерева, связанной с фильтрацией. В сравнимых терминах это различие состоит в том, что использовались итерации по Канторовичу полуметрик, определяемых произвольными функциями с конечным числом значений. Выше по существу доказано, что супремум масштабирующих последовательностей энтропий по всем таким полуметрикам (т.е. по всем функциям с конечным числом значений) можно заменить на любую произвольную метрику. Представляется, что такой результат верен и для многих неоднородных фильтраций, например, полуоднородных (т.е. для фильтраций относительно центральных мер на пространстве путей произвольных градуированных графов).

6.3 Вычисление масштабирующих последовательностей действий

Как уже упоминалось выше (см. теорему 6), класс $\mathcal{H}(\mathcal{T}(\mathrm{OP}), \mu^\sigma, \mathcal{A})$ был вычислен в работе [18]. Там же был вычислен класс $\mathcal{H}(\mathcal{T}(\mathrm{OP}), \mu^\sigma, \mathcal{D})$ для действия κ группы $\mathcal{D}$ с естественным оснащением $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$, показано, что они совпадают. В этом пункте мы приведем еще один способ вычисления класса $\mathcal{H}(\mathcal{T}(\mathrm{OP}), \mu^\sigma, \mathcal{D})$.

Заметим следующий общий факт.

Лемма 15. *Пусть действие некоторой оснащенной группы G на пространстве (X_1, μ_1) имеет масштабирующую последовательность h_n, а ее действие на пространстве (X_2, μ_2) имеет "дискретный спектр" (то есть имеет инвариантную суммируемую допустимую метрику). Тогда прямое произведение действий на пространстве $(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$ тоже имеет масштабирующую последовательность h_n.*

Proof. Пусть ρ_1 — порождающая допустимая полуметрика на пространстве (X_1, μ_1), а ρ_2 — инвариантная допустимая метрика на пространстве (X_2, μ_2). Тогда полуметрика

$$\rho\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \rho_1(x_1, y_1) + \rho_2(x_2, y_2)$$

является допустимой, порождающей для прямого произведения действий на пространстве $(X_1 \times X_2, \mu_1 \times \mu_2)$. При этом эпсилон-энтропии ее конечных усреднений при помощи неравенства из леммы 10 оцениваются с двух сторон через эпсилон-энтропии усреднения полуметрики ρ_1, так как метрика ρ_2 инвариантна и имеет конечные эпсилон-энтропии. □

Отсюда следует утверждение, ранее доказанное в работе [18]:

Следствие 7. *Последовательность $h_n = 2^{\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i}$ является масштабирующей для действия* diag *группы $\mathcal{D}$ на пространстве $(I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}, \omega^\sigma)$ и, следовательно, для изоморфного ему канонического действия κ группы $\mathcal{D}$ на пространстве $(\mathcal{T}(\mathrm{OP}), \mu^\sigma)$.*

Proof. Действие группы $\mathcal{D}$ на $(I^{\mathbb{N}}, m)$ имеет инвариантную метрику, поэтому мы попадаем в условие леммы 15. Таким образом, действие $\mathcal{D}$ на $(I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}, \omega^\sigma)$ имеет ту же масштабирующую последовательность, что и ее действие на $(I^{\mathcal{D}}, m^\sigma)$. Мера m^σ является обратным образом меры Лебега на $I^{\mathcal{D}/\mathcal{D}^\sigma}$ (см. определение 2), поэтому масштабирующая последовательность действия на $(I^{\mathcal{D}}, m^\sigma)$ совпадает с масштабирующей последовательностью действия на $I^{\mathcal{D}/\mathcal{D}^\sigma}$ с мерой Лебега. Подгруппа $\mathcal{D}^\sigma$ действует на этом пространстве тривиально, поэтому вычисление сводится к вычислению масштабирующей последовательности "эффективно" действующей части группы $\mathcal{D}$ — дополнительной подгруппы

$$\bar{\mathcal{D}}^\sigma = \langle g_i \colon \sigma_i = 1,\ i \geq 0 \rangle .$$

Пусть ρ — разрез по первой координате на $I^{\bar{\mathcal{D}}^\sigma} = I^{\mathcal{D}/\mathcal{D}^\sigma}$ — очевидно, допустимая полуметрика, порождающая для действия $\mathcal{D}$. Тогда полуметрическое пространство $(I^{\bar{\mathcal{D}}^\sigma}, T_{av}^{\mathcal{D}_n}\rho)$ с мерой Лебега изоморфно диадическому кубу размерности $|\mathcal{D}_n/(\mathcal{D}^\sigma \cap \mathcal{D}_n)| = 2^{\sum_{i=0}^{n-1}\sigma_i}$ с равномерной мерой, откуда и следует результат. □

Рассуждая аналогично, можно получить следующий результат.

Лемма 16. *Пусть $H \subset \mathcal{D}$ — некоторая подгруппа. Рассмотрим меру m^H на $I^{\mathcal{D}}$, которая есть обратный образ меры Лебега на $I^{\mathcal{D}/H}$. Тогда последовательность $h_n = |\mathcal{D}_n/(H \cap \mathcal{D}_n)|$ является масштабирующей для прямого произведения действий группы $\mathcal{D}$ (с оснащением $\mathcal{D}_n$, $n \geq 1$) на пространстве $(I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}, m^H \times m)$.*

6.4 Вычисление масштабирующей последовательности фильтрации

В этом пункте мы приведем вычисление масштабирующей последовательности фильтрации ζ на пространстве $(I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}, \omega^\sigma)$, и, следовательно, изоморфной ей хвостовой фильтрации ξ на пространстве $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ путей графа OP упорядоченных пар с мерой μ^σ.

Сперва мы докажем вспомогательную лемму. Пусть $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$. Отметим, что на подгруппе $\mathcal{D}_m$ есть диадическая иерархия — иерархия классов смежности по подгруппам $\mathcal{D}_j$, $0 < j < m$. Биекции множества $\mathcal{D}_m$, сохраняющие эту иерархию, образуют группу, изоморфную группе $\mathcal{T}_m$ автоморфизмов двоичного дерева высоты m. Для произвольного конечного множества Q тривиальным образом порождается действие группы $\mathcal{T}_m$ на $Q^{\mathcal{D}_m}$ перестановкой координат. Это действие, очевидно, сохраняет нормированную метрику Хемминга d_H на $Q^{\mathcal{D}_m}$. Пусть

$$\mathrm{dist}_m(w^{(1)}, w^{(2)}) = \min_{S \in T_m} d_H(w^{(1)}, Sw^{(2)}), \quad w^{(1)}, w^{(2)} \in Q^{\mathcal{D}_m},$$

— полуметрика на $Q^{\mathcal{D}_m}$, измеряющая расстояние между орбитами под действием группы $\mathcal{T}_m$.

Лемма 17. *Пусть Q — конечное множество. Пусть $r, m \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r \leq m$. Пусть G_m — подгруппа группы $\mathcal{D}_m$, порожденная некоторыми r образующими из $\{g_0, \ldots, g_{m-1}\}$. Пусть*

$$W = \{w \in Q^{\mathcal{D}_m} \colon w(g + \cdot) = w(\cdot)\ \forall g \in G_m\}$$

— множество функций на $\mathcal{D}_m$ со значениями в Q, неподвижных относительно сдвига аргумента на элементы подгруппы G_m. Пусть ν — равномерная мера на W. Тогда ε-энтропия тройки $(Q^{\mathcal{D}_m}, \mathrm{dist}_m, \nu)$ для любого достаточно малого положительного ε оценивается с двух сторон через 2^{m-r} с мультипликативной константой, зависящей от ε и $|Q|$.

Proof. Мера ν сосредоточена на W — множестве конфигураций, неподвижных при сдвиге аргумента на элементы группы G_m. Множество W не инвариантно относительно действия группы $\mathcal{T}_m$, поэтому в орбите функции $w \in W$ под действием $\mathcal{T}_m$ могут быть функции не из W. Тем не менее минимум расстояния в метрике Хемминга между такими орбитами достигается на элементах из W. Таким образом, мы можем перейти к фактору по действию группы G_m. Тройка $(Q^{\mathcal{D}_m}, \mathrm{dist}_m, \nu)$ при этом перейдет в изоморфную. Следовательно, ε-энтропия тройки $(Q^{\mathcal{D}_m}, \mathrm{dist}_m, \nu)$ есть функция от $m-r$. Обозначим изучаемую эпсилон-энтропию символом $h_{m-r}(\varepsilon) = h_{m-r}(\varepsilon, |Q|)$.

В дальнейшем мы можем считать $r = 0$. Тогда $W = Q^{\mathcal{D}_m}$. Оценим число $h_m(\varepsilon)$ с двух сторон. Оценка сверху сводится к стандартной энтропийной оценке. Действительно, это число не превосходит ε-энтропии равномерной меры на метрическом пространстве $(Q^{\mathcal{D}_m}, d_H)$. Это пространство является кубом (со стороной $|Q|$) размерности 2^m, эпсилон-энтропия которого хорошо известна и асимптотически пропорциональна размерности куба, то есть 2^m.

Оценка снизу делается чуть более тонко и требует разбора случаев $|Q| = 2$ и $|Q| > 2$. В обоих случаях мы оценим размер M_m максимальной орбиты в пространстве $Q^{\mathcal{D}_m}$ под действием группы $\mathcal{T}_m$. Найдем такую константу $C_1 = C_1(\varepsilon, |Q|)$, что шар радиуса ε в метрическом пространстве $(Q^{\mathcal{D}_m}, d_H)$ содержит не более, чем $C_1(\varepsilon, |Q|)^{2^m}$ точек, причем $C_1(\varepsilon, |Q|) \to 1$, когда $\varepsilon \to 0$ при фиксированном $|Q|$. В эпсилон окрестности каждой орбиты содержится не более, чем $C_1(\varepsilon, |Q|)^{2^m} M_m$ точек, поэтому эпсилон-энтропия равномерной меры допускает следующую оценку снизу:

$$h_m(\varepsilon) \geq \log\left((1-\varepsilon)\frac{|Q|^{2^m}}{C_1(\varepsilon, |Q|)^{2^m} M_m}\right). \tag{24}$$

При $|Q| > 2$ нам достаточно заметить, что $M_m \leq |\mathcal{T}_m| = 2^{2^m - 1}$. Поэтому в силу неравенства (24) имеем

$$h_m(\varepsilon) \geq 2^m \log\left(\frac{|Q|}{2C_1(\varepsilon, |Q|)}\right) + \log(1-\varepsilon) \geq 2^m C_2(\varepsilon, |Q|)$$

при достаточно малых ε для некоторой положительной константы $C_2(\varepsilon, |Q|)$.

Если $|Q| = 2$, то число M_m можно оценить по индукции. Очевидно, выполнено неравенство $M_{m+1} \leq 2M_m^2$, а для $m = 2$ имеем $M_2 = 4$, поэтому $M_m \leq 2^{3\cdot 2^{m-2}-1}$. Применяя это неравенство вместе с (24), получаем оценку

$$h_m(\varepsilon) \geq 2^m \log\left(\frac{2^{1/4}}{C_1(\varepsilon, 2)}\right) + \log(1-\varepsilon) \geq 2^m C_2(\varepsilon)$$

при достаточно малых ε для некоторой положительной константы $C_2(\varepsilon)$.

Суммируя вышесказанное, получаем $h_m(\varepsilon) \asymp 2^m$, $m \to \infty$. $\square$

Теорема 9. *Последовательность* $h = (h_n)$, $h_n = 2^{\sum_{i=0}^{n-1} \sigma_i}$, $n \geq 1$, *является масштабирующей последовательностью фильтрации* $\zeta = (\zeta_n)_{n \geq 0}$ *на пространстве* $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$ *с мерой* ω^σ, *а также изоморфной ей фильтрации* $\xi = (\xi_n)_{n \geq 0}$ *на пространстве* $\mathcal{T}(\mathrm{OP})$ *с мерой* μ^σ.

Proof. Вычислим асимптотику энтропий для следующей последовательности полуметрик ρ_k, $k \geq 1$, на $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$. Пусть $w^{(1)}, w^{(2)} \in I^{\mathcal{D}}$, $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)} \in I^{\mathbb{N}}$. Положим

$$\rho_k\big((w^{(1)}, \alpha^{(1)}), (w^{(2)}, \alpha^{(2)})\big) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } w^{(1)}|_{\mathcal{D}_k} = w^{(2)}|_{\mathcal{D}_k} \text{ и } \alpha_i^{(1)} = \alpha_i^{(2)} \text{ для } i = 1, \ldots, k; \\ 1, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что такая последовательность полуметрик монотонно возрастает и в совокупности разделяет точки пространства $I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}}$. В силу замечания 16 достаточно показать, что последовательность h является масштабирующей для каждой полуметрики ρ_k, $k \geq 1$.

Пусть k — фиксированное натуральное число. Пусть $n > k$. Наша цель — понять, как устроена полуметрика $\mathcal{K}_n[\rho_k]$ на множестве элементов разбиения ζ_n.

Определим отображение $\phi_n \colon I^{\mathcal{D}} \times I^{\mathbb{N}} \to I^{\mathcal{D}_n}$ следующим образом. Каждый элемент разбиения ζ_n есть орбита некоторой точки под действием группы $\mathcal{D}_n$, причем в ней найдется единственная пара (w, α), $w \in I^{\mathcal{D}}$, $\alpha \in I^{\mathbb{N}}$, для которой $\alpha_i = 0$ при $i = 1, \ldots, n$; будем называть такую пару *представителем* этого элемента разбиения, и положим $\phi_n = w|_{\mathcal{D}_n}$ на этой орбите.

Пусть $(w^{(1)}, \alpha^{(1)})$ и $(w^{(2)}, \alpha^{(2)})$ — представители элементов c_1 и c_2 разбиения ζ_n соответственно. Тогда согласно (22) имеем (напомним, что группа $\mathcal{T}_n$ действует на $\mathcal{D}_n$ с сохранением иерархии, а τ — вложение $\mathcal{D}$ в $I^{\mathbb{N}}$)

$$\mathcal{K}_n[\rho_k](c_1, c_2) = \\ \min_{S \in \mathcal{T}_n} \left\{ \frac{1}{2^n} \sum_{g \in \mathcal{D}_n} \rho_k\Big(\big(w^{(1)}(g + \cdot), \tau(g) + \alpha^{(1)}\big), \big(w^{(2)}(Sg + \cdot), \tau(Sg) + \alpha^{(2)}\big)\Big) \right\}. \quad (25)$$

Пусть $\mathcal{D}_{n,k}$ — подгруппа группы $\mathcal{D}_n$, порожденная образующими $g_{k+1}, \ldots, g_n$ — дополнительная к $\mathcal{D}_k$. Очевидно, что минимум в выражении (25) достигается на таких преобразованиях $S \in \mathcal{T}_n$, для которых $Sg - g \in \mathcal{D}_{n,k}$ для всякого $g \in \mathcal{D}_n$. Такие преобразования представляются в виде $S(g + \tilde{g}) = g + \tilde{S}\tilde{g}$, где $g \in \mathcal{D}_k$, $\tilde{g} \in \mathcal{D}_{n,k}$, а преобразование $\tilde{S}$ действует на $\mathcal{D}_{n,k}$, сохраняя иерархию. Поэтому мы можем переписать формулу (25) в следующем виде:

$$\mathcal{K}_n[\rho_k](c_1,c_2) =$$

$$\min_{\tilde S}\Big\{\frac{1}{2^n}\sum_{\substack{g\in\mathcal{D}_k\\ \tilde g\in\mathcal{D}_{n,k}}}\rho_k\Big(\big(w^{(1)}(g+\tilde g+\cdot),\tau(g+\tilde g)+\alpha^{(1)}\big),\big(w^{(2)}(g+\tilde S\tilde g+\cdot),\tau(g+\tilde S\tilde g)+\alpha^{(2)}\big)\Big)\Big\}=$$

$$= \min_{\tilde S}\left\{\frac{1}{2^{n-k}}\Big|\big\{\tilde g\in\mathcal{D}_{n,k}\colon w^{(1)}(\tilde g+\cdot)\big|_{\mathcal{D}_k}\neq w^{(2)}(\tilde S\tilde g+\cdot)\big|_{\mathcal{D}_k}\big\}\Big|\right\}. \quad (26)$$

Сужение конфигурации $w\in I^{\mathcal{D}}$ на $\mathcal{D}_n$ можно рассматривать как элемент пространства $Q_k^{\mathcal{D}_{n,k}}$ для $Q_k = I^{\mathcal{D}_k}$. Наделим пространство $Q_k^{\mathcal{D}_{n,k}}$ метрикой Хемминга d_H. На нем действует с сохранением иерархии группа $\mathcal{T}_{n-k}$. Последнее выражение в формуле (26) есть в точности расстояние между орбитами этого действия, содержащими $w^{(1)}|_{\mathcal{D}_n} = \phi_n(w^{(1)},\alpha^{(1)})$ и $w^{(2)}|_{\mathcal{D}_n} = \phi_n(w^{(2)},\alpha^{(2)})$. Иными словами, отображение ϕ_n есть изометрия из полуметрического пространства $\big((I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}})/\zeta_n,\mathcal{K}_n[\rho_k]\big)$ в метрическое пространство $(Q_k^{\mathcal{D}_{n,k}},d_H)$.

Пусть ν_n — обратный образ меры ω^σ при отображении ϕ_n. Это мера на $I^{\mathcal{D}_n} = Q_k^{\mathcal{D}_{n,k}}$, сосредоточенная и равномерная на множестве тех конфигураций $w\in I^{\mathcal{D}_n}$, которые удовлетворяют соотношению $w(g_i+\cdot)=w(\cdot)$ при $0\le i\le n-1$, $\sigma_i=0$. Пусть $Q=\{w\in I^{\mathcal{D}_k}\colon w(\cdot+g_i)=w(\cdot)$ при $0\le i\le k-1,\sigma_i=0\}$.

Возьмем $m=n-k$. Группа $\mathcal{D}_{n,k}$ изоморфна группе $\mathcal{D}_m$ (сдвигом нумерации образующих). Символом G_m обозначим ее подгруппу, порожденную теми образующими g_i, $k\le i\le n$, для которых $\sigma_i=0$. Мы оказываемся в условиях леммы 17, где мера ν_n есть обратный образ меры ω^σ при отображении ϕ_n, а W — ее носитель. Применяя лемму, находим асимптотику ε-энтропии фактора меры ω^σ по разбиению ζ_n на пространстве $(I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}})/\zeta_n$ с полуметрикой $\mathcal{K}_n[\rho_k]$, построенной по полуметрике ρ_k:

$$\mathbb{H}_\varepsilon((I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}})/\zeta_n,\omega^\sigma/\zeta_n,\mathcal{K}_n[\rho_k]) = \mathbb{H}_\varepsilon(Q_k^{\mathcal{D}_{n,k}},\nu_n,d_H)\asymp 2^{\sum_{i=k}^n\sigma_i}\asymp h_n,\quad n\to\infty.$$

Тем самым, мы доказали, что последовательность h является масштабирующей для полуметрики ρ_k, $k\ge 1$, и фильтрации ζ на пространстве $(I^{\mathcal{D}}\times I^{\mathbb{N}},\omega^\sigma)$. В силу замечания 16 это означает, что последовательность h является масштабирующей последовательностью фильтрации ζ. $\square$

7 Выводы

1. Предложенную в работе универсальную модель адического действия группы $\mathbb{Z}$ (равно как и бесконечной суммы групп второго порядка) на пространстве путей графа OP можно сравнить с общепринятой и хорошо известной символической моделью действия групп, которая также является универсальной. Преимущество предлагаемой модели в том, что в ней уже задана каноническая периодическая аппроксимация действия, которой нет в символической модели.

2. Универсальная модель предполагает описание всех центральных мер на пространстве путей графа. Это описание найдено в работе, и оно оказалось весьма обозримым по модулю описания инвариантных мер в символической модели).

3. Шкала промежуточных произвольных сублинейных асимптотик масштабированной энтропии, существование которых обнаружено лишь недавно, связывается с масштабированной энтропией фильтраций на пространстве путей графа, т.е. в конце концов, со скоростью периодических аппроксимаций адического действия групп. Это совпадение обнаруживает глубокую связь теории фильтраций и периодических аппроксимаций, которая будет исследована в дальнейших работах.

References

[1] А. М. Вершик, *Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения*, ДАН СССР, 193:4 (1970), 748–751

[2] А. М. Вершик, *Континуум попарно неизоморфных диадических последовательностей*, Функц. анализ и его прил., 5:3 (1971), 16–18

[3] А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения*, ДАН СССР, 259:3 (1981), 526–529

[4] А. М. Вершик, *Теорема о марковской периодической аппроксимаций в эргодической теории*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 115 (1982), 72–82

[5] А. М. Вершик, С. В. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и K_0-функтор*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Нов. достиж., 26 (1985), 3–56

[6] А. М. Вершик, *Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений*, Алгебра и анализ, 6:4 (1994), 1Ц-68

[7] А. М. Вершик, *Случайные метрические пространства и универсальное пространство Урысона*, Фундаментальная математика сегодня, к десятилетию НМУ, МЦНМО, М., 2003, 54–88

[8] А. М. Вершик, *Случайные метрические пространства и универсальность*, Успехи математических наук, 59:2 (2004), 65–104

[9] А. М. Вершик, А. Д. Горбульский, *Масштабированная энтропия фильтраций σ-алгебр*, ТВП, 52:3 (2007), 446–467

[10] А. М. Вершик, *Информация, энтропия, динамика*, Математика XX века. Взгляд из Петербурга, 2010, 47–76

[11] А. М. Вершик, *Внутренняя метрика на градуированных графах, стандартность и инвариантные меры*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 421 (2014), 58–67

[12] А. М. Вершик, *Задача о центральных мерах на пространствах путей градуированных графов*, Функц. анализ и его прил., 48:4 (2014), 26–46

[13] А. М. Вершик, *Оснащенные градуированные графы, проективные пределы симплексов и их границы*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 432 (2015), 83–104

[14] А. М. Вершик, *Стандартность, как инвариантная формулировка независимости*, Функц. анализ и его прил., 49:4 (2015), 18–32

[15] П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *Об исправлении метрик*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 390 (2011), 201–209

[16] П. Б. Затицкий, *О масштабирующей энтропийной последовательности динамической системы*, Функц. анализ и его прил., 48:4 (2014), 70–74

[17] П. Б. Затицкий, *Масштабирующая энтропийная последовательность: инвариантность и примеры*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 432 (2015), 128–161

[18] П. Б. Затицкий, *О возможной скорости роста масштабирующей энтропийной последовательности*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 436 (2015), 136–166

[19] П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров, *О субаддитивности масштабирующей энтропийной последовательности*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 436 (2015), 167–173

[20] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, emphЭргодическая теория, Наука (1980)

[21] А. Г. Кушниренко, *О метрических инвариантах типа энтропии*, УМН, 22:5(137) (1967), 57–65

[22] R. Dougerty, S. Jackson, A. Kechris, *The structure of hyperfinite Borel equivalence relations*, Trans. Amer. Math. Soc. 341:1 (1994), 193–225

[23] J. Feldman, *New K-automorphisms and a problem of Kakutani*, Israel J. Math. 24:1 (1976), 16–38

[24] S. Ferenczi, *Measure-theoretic complexity of ergodic systems*, Israel J. Math. 100 (1997), 189–207

[25] S. Ferenczi, K. K. Park, *Entropy dimensions and a class of constructive examples*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 17:1 (2007), 133–141

[26] A. Katok, J.-P. Thouvenot, *Slow entropy type invariants and smooth realization of commuting measure-preserving transformations*, Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics, 33:3 (1997), 323–338

[27] M. Ratner, *Horocycle flows are loosely Bernoulli*, Israel J. Math. 31:2 (1978), 122–132

[28] A. M. Vershik, *Dynamics of metrics in measure spaces and their asymptotic invariants*, Markov Process. Related Fields, 16:1 (2010), 169–184

[29] A. M. Vershik, F. V. Petrov and P. B. Zatitskiy *Geometry and dynamics of admissible metrics in measure spaces*, Central Europ. J. Math. 11:3 (2013), 379–400

[30] A. M. Vershik, *Smoothness and standardness in the theory of AF-algebras and in the problem on invariant measures*, Proceeding of Symposia in Pure Mathematics, 91 (2015), Amer. Math. Soc.

[31] A. M. Vershik, *Asymptotic theory of path spaces of graded graphs and its applications*, Jpn. J. Math. 11:2 (2016), 151–218