ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 5/2016

УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: t.suslina@spbu.ru

АННОТАЦИЯ

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область класса C^{2p}. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ изучается самосопряженный сильно эллиптический оператор $A_{D,\varepsilon}$ порядка $2p$, $p \geqslant 2$, заданный выражением $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$, $\varepsilon > 0$, при условиях Дирихле на границе. Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и положительно определенная $(m \times m)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, периодическая относительно некоторой решетки; $b(\mathbf{D}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha$ — дифференциальный оператор порядка p с постоянными коэффициентами; b_α — постоянные $(m\times n)$-матрицы. Предполагается, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет максимальный ранг. Для резольвенты $(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ получены аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, с оценками погрешности в зависимости от ε и ζ.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, эллиптические уравнения высокого порядка, задача Дирихле, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 16-01-00087).

Введение

Задачам усреднения (гомогенизации) дифференциальных операторов (ДО) с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами посвящена обширная литература. Укажем в первую очередь книги [BeLPa], [BaPan], [ZhKO].

0.1. **Операторные оценки погрешности для задач усреднения в $\mathbb{R}^d$.**

В цикле работ Бирмана и Суслиной [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам теории усреднений. С помощью этого подхода изучался широкий класс матричных самосопряженных сильно эллиптических ДО второго порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0, \tag{0.1}$$

где матрица-функция $g(\mathbf{x})$ размера $m \times m$ ограничена, равномерно положительно определена и периодична относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Оператор $b(\mathbf{D})$ — ДО первого порядка вида $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$, где b_j — постоянные $(m \times n)$-матрицы. Предполагается, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет ранг n при всех $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Простейший пример оператора вида (0.1) — акустический оператор $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$; оператор теории упругости также допускает запись в требуемом виде. Эти и другие примеры подробно рассмотрены в [BSu2].

В [BSu1, BSu2] показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — постоянная *эффективная матрица*. Установлена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

В [BSu3] найдена более точная аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. В [BSu4] получена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с оценкой

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.3}$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon)$ — так называемый *корректор*. Оператор $\mathcal{K}(\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, а потому зависит от ε; при этом $\|\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2 \to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$.

Оценки вида (0.2), (0.3), получившие название *операторных оценок погрешности*, точны по порядку. Метод работ [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений.

Отметим также недавние работы [Su4, Su5], в которых были получены двупараметрические аналоги оценок (0.2) и (0.3) для резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ в произвольной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ (в зависимости от ε и ζ).

Другой подход к операторным оценкам погрешности (*модифицированный метод первого приближения* или *метод сдвига*) был предложен Жиковым; этим методом в [Zh] и [ZhPas1] были получены оценки вида (0.2) и (0.3) для операторов акустики и теории упругости. Относительно дальнейших результатов см. недавний обзор Жикова и Пастуховой [ZhPas2] и цитированную там литературу.

Отдельный интерес представляет задача усреднения для периодических эллиптических ДО *высокого четного порядка*. Теоретико-операторный подход, предложенный Бирманом и Суслиной, был развит применительно к таким операторам в работе Вениаминова [V] и в недавней статье Кукушкина и Суслиной [KuSu].

В [V] изучался оператор вида $\mathcal{B}_\varepsilon = (\mathbf{D}^p)^* g(\mathbf{x}/\varepsilon)\mathbf{D}^p$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричный положительно определенный и ограниченный тензор порядка $2p$, периодический относительно решетки Γ. При $p=2$ оператор такого вида возникает в теории упругости пластин (см. [ZhKO]). Эффективный оператор имеет вид $\mathcal{B}^0 = (\mathbf{D}^p)^* g^0 \mathbf{D}^p$, где g^0 — эффективный тензор. В [V] получен аналог оценки (0.2):

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{B}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon.$$

В [KuSu] изучался более общий класс эллиптических ДО высокого порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}). \tag{0.4}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и равномерно положительно определенная матрица-функция размера $m\times m$, периодическая относительно решетки Γ. Оператор $b(\mathbf{D})$ порядка $p \geqslant 2$ имеет вид $b(\mathbf{D}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha$, где b_α — постоянные $(m\times n)$-матрицы. Предполагается, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет ранг n при всех $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Основные результаты работы [KuSu] — аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$, где $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, в различных операторных нормах с двупараметрическими оценками погрешности (в зависимости от ε и ζ). Показано, что по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ резольвента $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ сходится к резольвенте эффективного оператора $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ (где g^0 — постоянная эффективная матрица), причем

$$\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1(\zeta)\varepsilon. \tag{0.5}$$

По "энергетической" норме (т. е., по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$) найдена аппроксимация резольвенты при учете корректора:

$$\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2(\zeta)\varepsilon. \tag{0.6}$$

Корректор $K(\zeta;\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители; при этом $\|K(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2\to H^p} = O(\varepsilon^{-p})$. Выяснен характер зависимости $C_1(\zeta)$ и $C_2(\zeta)$ от параметра ζ.

Близкие результаты об усреднении эллиптических операторов высокого порядка получены в недавних работах Пастуховой [Pas1, Pas2] с помощью метода сдвига (в этих работах оценки однопараметрические, фиксировано значение $\zeta = -1$).

0.2. **Операторные оценки погрешности для задач усреднения в ограниченной области.** Операторные оценки погрешности изучались также для эллиптических операторов второго порядка с быстро осциллирующими коэффициентами в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с достаточно гладкой границей. В [Zh, ZhPas1] рассматривались операторы акустики и теории упругости при условии Дирихле либо Неймана на границе $\partial\mathcal{O}$; были получены аналоги оценок (0.2) и (0.3), но с погрешностью порядка $O(\varepsilon^{1/2})$. Погрешность ухудшается за счет влияния границы. (В случае задачи Дирихле для оператора акустики $(L_2 \to L_2)$-оценка была улучшена в [ZhPas1], но порядок оценки не был точным.)

Близкие результаты для оператора $-\mathrm{div}\, g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана были установлены в работах Гризо [Gr1, Gr2] с помощью "unfolding"-метода. В статье [Gr2] для того же оператора впервые был получен аналог оценки (0.2) порядка $O(\varepsilon)$ (точной по порядку).

Для матричных операторов второго порядка $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$, заданных выражением (0.1) при условиях Дирихле или Неймана соответственно, операторные оценки погрешности были получены в работах [PSu1, PSu2, Su1, Su2, Su3]. В [PSu1, PSu2] изучалась задача Дирихле и была установлена оценка

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_D(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \tag{0.7}$$

Здесь $\mathcal{A}_D^0$ — эффективный оператор с условием Дирихле, а $\mathcal{K}_D(\varepsilon)$ — соответствующий корректор. В [Su1, Su2] удалось получить точную по порядку оценку по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$:

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.8}$$

Для задачи Неймана аналогичные результаты получены в [Su3]. Метод работ [PSu1, PSu2, Su1, Su2, Su3] основан на использовании результатов для задачи в $\mathbb{R}^d$, введении поправки типа пограничного слоя и получении оценок этой поправки в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Некоторые технические приемы заимствованы из [ZhPas1].

В недавних работах [Su4, Su5] получены аппроксимации резольвент $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ и $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ в произвольной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ — двупараметрические аналоги оценок (0.7) и (0.8).

Оценка вида (0.8) для равномерно эллиптических систем второго порядка при условиях Дирихле либо Неймана была независимо получена другим методом в работе Кенига, Лина и Шена [KeLiS] при некоторых условиях регулярности коэффициентов.

0.3. **Основные результаты.** В настоящей работе изучается оператор $A_{D,\varepsilon}$ высокого порядка $2p$ в ограниченной области $\mathcal{O}$ класса C^{2p}, заданный в факторизованной форме (0.4) при условиях Дирихле на границе $\partial\mathcal{O}$. *Цель работы* — получение аппроксимаций резольвенты $(A_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ в регулярной точке ζ с оценками погрешности в зависимости от ε и ζ.

Опишем основные результаты. Пусть $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ и $|\zeta| \geqslant 1$. Установлены оценки

$$\|(A_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1(\varphi)\big(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p}+\varepsilon^{2p}\big), \quad (0.9)$$

$$\begin{aligned}&\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_D(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}_2(\varphi)\big(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\big),\end{aligned} \quad (0.10)$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ (где ε_1 — достаточно малое число, зависящее от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ). Здесь A_D^0 — эффективный оператор, заданный выражением $b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})$ с условиями Дирихле. Корректор $K_D(\zeta;\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, при этом $\|K_D(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2\to H^p} = O(\varepsilon^{-p})$. Прослежена зависимость констант $\mathcal{C}_1(\varphi)$ и $\mathcal{C}_2(\varphi)$ от угла φ; оценки (0.9) и (0.10) равномерны по углу φ в секторе $\varphi \in [\varphi_0, 2\pi-\varphi_0]$ со сколь угодно малым $\varphi_0 > 0$. При фиксированном ζ оценка (0.9) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$, а оценка (0.10) имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$ (ухудшение порядка объясняется влиянием границы). Оценки (0.9) и (0.10) показывают, что с ростом $|\zeta|$ погрешность приближений резольвенты уменьшается.

Корректор $K_D(\zeta;\varepsilon)$ в общем случае содержит вспомогательный сглаживающий оператор. Мы выделяем дополнительное условие, при котором можно использовать стандартный корректор без сглаживателя.

Помимо аппроксимации резольвенты, мы находим аппроксимацию оператора $g(\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D})(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ (отвечающего "потоку") по $(L_2 \to L_2)$-операторной норме.

Для полноты изложения мы находим также аппроксимации резольвенты $(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$, справедливые в более широкой области изменения параметра ζ; при этом характер оценок относительно параметра ζ меняется. Опишем эти результаты. Операторы $A_{D,\varepsilon}$ и A_D^0 положительно определены. Пусть $c_* > 0$ — их общая нижняя грань. Рассмотрим значения $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_*,\infty)$. Положим $\zeta - c_* = |\zeta - c_*|e^{i\psi}$. При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливы оценки

$$\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}(\zeta)\varepsilon, \quad (0.11)$$

$$\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_D(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}(\zeta)\varepsilon^{1/2}, \quad (0.12)$$

где $\mathcal{C}(\zeta) = C(\psi)|\zeta - c_*|^{-2}$ при $|\zeta - c_*| \leqslant 1$ и $\mathcal{C}(\zeta) = C(\psi)$ при $|\zeta - c_*| > 1$. Прослежена зависимость $C(\psi)$ от угла ψ. Оценки (0.11) и (0.12) равномерны по углу ψ в секторе вида $\psi \in [\psi_0, 2\pi - \psi_0]$ со сколь угодно малым $\psi_0 > 0$.

0.4. **Метод.** Мы опираемся на результаты для оператора (0.4) порядка $2p$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, полученные в [KuSu] (на оценки (0.5) и (0.6)). Вначале мы выводим еще один результат для задачи в $\mathbb{R}^d$ (похожий на (0.6)), в котором используется сглаживание по Стеклову; см. ниже теорему 3.3.

Метод исследования оператора $A_{D,\varepsilon}$ аналогичен случаю операторов второго порядка: он состоит в рассмотрении ассоциированной задачи в $\mathbb{R}^d$, введении поправки типа пограничного слоя и ее тщательном анализе. Существенную техническую роль играет использование сглаживания по Стеклову (заимствованное из работы [ZhPas1]) и оценки в ε-окрестности границы. Сначала мы доказываем оценку (0.10), а затем оценку (0.9), опираясь на уже доказанное неравенство (0.10) и соображения двойственности.

Оценки (0.11) и (0.12) сравнительно просто выводятся из уже полученных оценок в точке $\zeta = -1$ и подходящих резольвентных тождеств.

0.5. **План статьи.** Работа состоит из двух глав. Глава 1 (§1–3) посвящена задаче в $\mathbb{R}^d$. В §1 введен класс операторов A_ε в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, описан эффективный оператор A^0 и введены сглаживающие операторы двух типов. §2 посвящен свойствам матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ — периодического решения вспомогательной задачи (1.10). В §3 приведены результаты работы [KuSu] об аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ (теоремы 3.1 и 3.2), а также получен другой вариант аппроксимации резольвенты по "энергетической" норме, использующий сглаживание по Стеклову (теорема 3.3). Глава 2 (§4–8) посвящена задаче Дирихле. В §4 дана постановка задачи, описан эффективный оператор, приведены вспомогательные утверждения. В §5 сформулированы основные результаты для задачи Дирихле — оценки (0.9), (0.10) (теоремы 5.1 и 5.2). Проведены первые два этапа доказательства: рассмотрена ассоциированная задача в $\mathbb{R}^d$ и введена поправка $\mathbf{w}_\varepsilon$ типа пограничного слоя; вопросы сведены к получению оценок норм поправки в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В §6 установлены требуемые оценки норм поправки и завершено доказательство теорем 5.1 и 5.2. В §7 выделен случай, когда можно избавиться от сглаживающего оператора и использовать стандартный корректор. Рассмотрены некоторые специальные случаи. В §8 получена аппроксимация резольвенты $(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$ — установлены оценки (0.11), (0.12).

0.6. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означает норму, $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ — скалярное произведение в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{G}}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$.

Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^n$ обозначаются через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно, $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — матрица размера $m \times n$, то $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Классы L_q вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаются через $L_q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $s \in \mathbb{R}$. Через $H^s_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В случае $n = 1$ пишем $L_q(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств векторнозначных или матричнозначных функций.

Жирным шрифтом обозначаются векторные величины. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$. Далее, если $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d_+$ — мультииндекс, то $|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$, $\mathbf{D}^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}$. Для двух мультииндексов α, β запись $\beta \leqslant \alpha$ означает, что $\beta_j \leqslant \alpha_j$, $j = 1, \dots, d$; для числа сочетаний используем обозначение $C_\alpha^\beta = C_{\alpha_1}^{\beta_1} \cdots C_{\alpha_d}^{\beta_d}$.

Используем обозначение $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Через C, c, $\mathfrak{c}$, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные.

Глава 1. Усреднение операторов в $\mathbb{R}^d$

§ 1. Периодические эллиптические операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

1.1. **Решетки в $\mathbb{R}^d$.** Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, порожденная базисом $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d$:

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{n} = \sum_{i=1}^d l_i \mathbf{n}_i,\ l_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^d t_i \mathbf{n}_i,\ 0 < t_i < 1 \right\}.$$

Двойственный по отношению к $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d$ базис $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_d$ в $\mathbb{R}^d$ определяется соотношениями $\langle \mathbf{s}_i, \mathbf{n}_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = 2\pi\delta_{ij}$. Этот базис порождает *решетку $\widetilde{\Gamma}$, двойственную к решетке* Γ:

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{s} = \sum_{i=1}^d q_i \mathbf{s}_i,\ q_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Вместо ячейки двойственной решетки нам удобнее рассматривать *центральную зону Бриллюэна*

$$\widetilde{\Omega} = \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{s}|,\ 0 \neq \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma} \right\},$$

которая является фундаментальным множеством решетки $\widetilde{\Gamma}$. Ниже используются обозначения $|\Omega| = \operatorname{mes} \Omega$,

$$r_0 = \frac{1}{2} \min_{0 \neq \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{s}|, \quad r_1 = \frac{1}{2} \operatorname{diam} \Omega.$$

Через $\widetilde{H}^s(\Omega;\mathbb{C}^n)$ обозначим подпространство тех функций из $H^s(\Omega;\mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит

$H^s_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Если $\varphi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, положим

$$\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0.$$

1.2. **Класс операторов.** В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается ДО A_ε порядка $2p$, формально заданный дифференциальным выражением

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — равномерно положительно определенная и ограниченная матрица-функция размера $m \times m$ (вообще говоря, $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами):

$$g,\ g^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad g(\mathbf{x}) > 0. \tag{1.2}$$

Оператор $b(\mathbf{D})$ задан выражением

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha, \tag{1.3}$$

где b_α — постоянные $(m \times n)$-матрицы, вообще говоря, с комплексными элементами. Предполагается, что $m \geqslant n$, а символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \boldsymbol{\xi}^\alpha$ подчинен условию

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Это условие равносильно существованию постоянных α_0 и α_1 таких, что

$$\begin{aligned} &\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \\ &0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Без ограничения общности будем считать, что нормы матриц b_α ограничены константой $\alpha_1^{1/2}$:

$$|b_\alpha| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad |\alpha| = p. \tag{1.5}$$

Строгое определение оператора A_ε дается через квадратичную форму

$$a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{1.6}$$

Заметим, что выполнены элементарные неравенства

$$\sum_{|\alpha|=p} |\boldsymbol{\xi}^\alpha|^2 \leqslant |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \leqslant \mathfrak{c}_p \sum_{|\alpha|=p} |\boldsymbol{\xi}^\alpha|^2, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.7}$$

где $\mathfrak{c}_p$ зависит лишь от d и p. С помощью преобразования Фурье и соотношений (1.2), (1.4) и (1.7) легко проверить справедливость оценок

$$c_0 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{1.8}$$

где использовано обозначение $|\mathbf{D}^p \mathbf{u}|^2 := \sum_{|\alpha|=p} |\mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}|^2$. Здесь

$$c_0 = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}, \quad c_1 = \mathfrak{c}_p \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}. \tag{1.9}$$

Следовательно, форма (1.6) замкнута и неотрицательна. Отвечающий ей самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ мы и обозначаем через A_ε.

1.3. **Эффективный оператор.** Для формулировки результатов нужно описать эффективный оператор A^0. Пусть $\Lambda \in \widetilde{H}^p(\Omega)$ — матрица-функция размера $n \times m$, являющаяся (слабым) Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right) = 0, \qquad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.10}$$

Так называемая *эффективная матрица* g^0 размера $m \times m$ строится по следующему правилу:

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.11}$$

где

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right). \tag{1.12}$$

Оказывается, что матрица g^0 положительна. *Эффективный оператор* A^0 для оператора (1.1) задается дифференциальным выражением

$$A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \tag{1.13}$$

на области определения $H^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Ниже нам понадобятся следующие оценки для символа $L(\boldsymbol{\xi}) = b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi})$ эффективного оператора:

$$c_0 |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \mathbf{1}_n \leqslant L(\boldsymbol{\xi}) \leqslant C_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \tag{1.14}$$

где c_0 определено в (1.9), а $C_* = \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}$. Эти оценки вытекают из (1.4) и из свойств эффективной матрицы (из ее положительности и из оценок (1.16)).

1.4. **Свойства эффективной матрицы.** Следующие свойства эффективной матрицы были проверены в [KuSu, предложение 5.3].

Предложение 1.1. *Обозначим*

$$\overline{g} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \underline{g} := \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

Эффективная матрица g^0 удовлетворяет неравенствам

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{1.15}$$

В случае, когда $m = n$, имеет место равенство $g^0 = \underline{g}$.

Оценки (1.15) известны в теории усреднений для конкретных ДО как вилка Фойгта-Рейсса. Из (1.15) вытекают оценки

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.16}$$

Выделим теперь случаи, когда в (1.15) какое-либо из неравенств превращается в равенство. Следующие два утверждения проверены в [KuSu, предложения 5.4 и 5.5].

Предложение 1.2. *Пусть* $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1,\dots,m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})$. *Равенство* $g^0 = \overline{g}$ *равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^*\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1,\dots,m. \tag{1.17}$$

Предложение 1.3. *Пусть* $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1,\dots,m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})^{-1}$. *Равенство* $g^0 = \underline{g}$ *равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{v}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{v}_k \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n); \quad k = 1,\dots,m. \tag{1.18}$$

Следующее свойство отмечено в [KuSu, замечание 5.6].

Замечание 1.4. *При условии* $g^0 = \underline{g}$ *матрица* (1.12) *постоянна:* $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$.

1.5. **Сглаживающие операторы.** Ниже используются два вспомогательных сглаживающих оператора разного типа. Первый действует в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ по правилу

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}, \tag{1.19}$$

где $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Иначе говоря, Π_ε — псевдодифференциальный оператор, символ которого есть характеристическая функция $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$ множества $\widetilde{\Omega}/\varepsilon$. Очевидно, Π_ε — ортопроектор в каждом пространстве $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, $s \geqslant 0$. Кроме того, $\mathbf{D}^\alpha \Pi_\varepsilon \mathbf{u} = \Pi_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leqslant s$.

Следующее утверждение проверено в [PSu2, предложение 1.4].

Предложение 1.5. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *выполнена оценка*

$$\|\Pi_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_0^{-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

В [BSu4, п. 10.2] установлено следующее утверждение.

Предложение 1.6. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$, *причем* $f \in L_2(\Omega)$. *Пусть* $[f^\varepsilon]$ *— оператор умножения на функцию* $f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. *Тогда оператор* $[f^\varepsilon]\Pi_\varepsilon$ *непрерывен в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, *причем*

$$\|[f^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Второй оператор S_ε называется *сглаживающим по Стеклову* и действует в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ по правилу

$$(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})\, d\mathbf{z}. \tag{1.20}$$

Отметим, что $\|S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$. Очевидно, $\mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u} = S_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leqslant s$.

Укажем некоторые свойства оператора (1.20); см. [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] или [PSu2, предложения 3.1, 3.2].

Предложение 1.7. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *выполнена оценка*

$$\|S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Предложение 1.8. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$*, причем* $f \in L_2(\Omega)$*. Пусть* $[f^\varepsilon]$ — *оператор умножения на функцию* $f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$*. Тогда оператор* $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$ *непрерывен в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$*, причем*

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \varepsilon > 0.$$

§ 2. Свойства матрицы-функции Λ

Ниже нам понадобятся следующие оценки норм матрицы-функции Λ (см. [KuSu, следствие 5.8]):

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} C_\Lambda^{(1)}, \quad C_\Lambda^{(1)} = m^{1/2}\alpha_0^{-1/2}(2r_0)^{-p}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \tag{2.1}$$

$$\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} C_\Lambda^{(2)}, \quad C_\Lambda^{(2)} = m^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \tag{2.2}$$

$$\|\Lambda\|_{H^p(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} C_\Lambda, \quad C_\Lambda = C_\Lambda^{(2)}\alpha_0^{-1/2}\left(\sum_{|\beta|\leqslant p}(2r_0)^{-2(p-|\beta|)}\right)^{1/2}. \tag{2.3}$$

Следующая лемма является обобщением леммы 8.3 из [BSu4] на случай операторов высокого порядка.

Лемма 2.1. *Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическое решение задачи* (1.10) *и* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (1.12)*. Тогда для любой функции* $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p(\Lambda(\mathbf{x})u(\mathbf{x}))|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d}|u|^2\,d\mathbf{x}\\
&+\beta_2\sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1}\int_{\mathbb{R}^d}\left(|\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda|^2 + |\widetilde{g}|^2\right)|\mathbf{D}^\beta u|^2\,d\mathbf{x}\\
&+\beta_3\sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1}\sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta:|\gamma|\geqslant 1}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{D}^{\alpha-\beta-\gamma}\Lambda|^2|\mathbf{D}^\gamma u|^2\,d\mathbf{x}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Постоянные β_l*,* $l = 1,2,3$*, зависят лишь от* d*,* p*,* m*,* α_0*,* α_1*,* $\|g\|_{L_\infty}$*,* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$*.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_m$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^m$. Обозначим столбцы матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ через $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,m$. В силу (1.10) Γ-периодическая вектор-функция $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$ принадлежит классу $H^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и удовлетворяет тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^d}\langle g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})\rangle\,d\mathbf{x} = 0 \tag{2.5}$$

для любой функции $\boldsymbol{\eta} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ такой, что $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = 0$ при $|\mathbf{x}| > R$ (для какого-либо $R > 0$).

Ясно, что достаточно установить (2.4) для вещественной функции u. Итак, пусть $u(\mathbf{x})$ — вещественная функция, причем $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Положим $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_j(\mathbf{x})u(\mathbf{x})^2$. В силу (1.3) имеем

$$\begin{aligned} b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta} &= ub(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u) + \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta \mathbf{D}^{\alpha-\beta}(\mathbf{v}_j u)\mathbf{D}^\beta u \\ &= ub(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u) + u\sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta (\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j)\mathbf{D}^\beta u \\ &+ \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta \mathbf{D}^\beta u \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta:|\gamma|\geqslant 1} C_{\alpha-\beta}^\gamma (\mathbf{D}^{\alpha-\beta-\gamma}\mathbf{v}_j)\mathbf{D}^\gamma u. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (2.5), приходим к тождеству

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^d} \langle g(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j)u, b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u)\rangle\, d\mathbf{x} \\ &+ \sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta \int_{\mathbb{R}^d} \langle g(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j)u, b_\alpha(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j)\mathbf{D}^\beta u\rangle\, d\mathbf{x} \\ &+ J_1 + J_2 + J_3 = 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} J_1 &:= \int_{\mathbb{R}^d} \langle g\mathbf{e}_j u, b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u)\rangle\, d\mathbf{x}, \\ J_2 &:= \sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta \int_{\mathbb{R}^d} \langle g\mathbf{e}_j u, b_\alpha(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j)\mathbf{D}^\beta u\rangle\, d\mathbf{x}, \\ J_3 &:= \sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1}\sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta:|\gamma|\geqslant 1} C_\alpha^\beta C_{\alpha-\beta}^\gamma \\ &\quad\times \int_{\mathbb{R}^d} \langle g(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j + \mathbf{e}_j), b_\alpha(\mathbf{D}^{\alpha-\beta-\gamma}\mathbf{v}_j)\mathbf{D}^\beta u\mathbf{D}^\gamma u\rangle\, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Далее, используя тождество

$$(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j)u = b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u) - \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta \mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j \mathbf{D}^\beta u$$

и вводя обозначение

$$J := \int_{\mathbb{R}^d} \langle gb(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u), b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u)\rangle\, d\mathbf{x},$$

запишем получившееся тождество в виде

$$J = -J_1 - J_2 - J_3 + J_4 - J_5 + J_6,$$

где

$$J_4 := \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta \int_{\mathbb{R}^d} \langle g b_\alpha (\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j)\mathbf{D}^\beta u, b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u)\rangle\, d\mathbf{x},$$

$$J_5 := \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta \int_{\mathbb{R}^d} \langle g b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u), b_\alpha (\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j)\mathbf{D}^\beta u\rangle\, d\mathbf{x},$$

$$J_6 := \sum_{|\alpha|=|\alpha'|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha,\beta'\leqslant\alpha':|\beta|\geqslant 1,|\beta'|\geqslant 1} C_\alpha^\beta C_{\alpha'}^{\beta'} \times \int_{\mathbb{R}^d} \langle g b_{\alpha'} (\mathbf{D}^{\alpha'-\beta'}\mathbf{v}_j)\mathbf{D}^{\beta'} u, b_\alpha (\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j)\mathbf{D}^\beta u\rangle\, d\mathbf{x}.$$

Член J_1 оценим по неравенству Коши:

$$|J_1| \leqslant \|g^{1/2}\mathbf{e}_j u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|g^{1/2} b(\mathbf{D})(\mathbf{v}_j u)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{1}{4} J + \|g\|_{L_\infty} \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

С учетом (1.5) для J_2 получаем оценку

$$|J_2| \leqslant c_1^{(2)} \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_2^{(2)} \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D}^\beta u|^2\, d\mathbf{x},$$

где $c_l^{(2)} = \kappa_l(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}$, $l=1,2$, а постоянные $\kappa_l(d,p)$ зависят только от d и p.

Далее, векторы $\widetilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j=1,\dots,m$, представляют собой столбцы матрицы $\widetilde{g}(\mathbf{x})$, определенной в (1.12). С учетом (1.5) член J_3 допускает оценку

$$\begin{aligned} |J_3| &\leqslant c^{(3)} \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta:|\gamma|\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\mathbf{g}}_j| |\mathbf{D}^{\alpha-\beta-\gamma}\mathbf{v}_j| |\mathbf{D}^\beta u| |\mathbf{D}^\gamma u|\, d\mathbf{x} \\ &\leqslant c^{(3)} \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta:|\gamma|\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^{\alpha-\beta-\gamma}\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D}^\gamma u|^2\, d\mathbf{x} \\ &+ c^{(4)} \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\widetilde{\mathbf{g}}_j|^2 |\mathbf{D}^\beta u|^2\, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

где $c^{(3)} = \kappa_3(d,p)\alpha_1^{1/2}$, $c^{(4)} = \kappa_4(d,p)\alpha_1^{1/2}$.

Члены J_4 и J_5 оцениваются одинаково. Имеем:

$$|J_4| + |J_5| \leqslant \frac{1}{4} J + c^{(5)} \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D}^\beta u|^2\, d\mathbf{x},$$

где $c^{(5)} = \kappa_5(d,p)\alpha_1\|g\|_{L_\infty}$. Наконец, член J_6 допускает оценку

$$|J_6| \leqslant c^{(6)} \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D}^\beta u|^2\, d\mathbf{x},$$

где $c^{(6)} = \kappa_6(d,p)\alpha_1\|g\|_{L_\infty}$.

В итоге приходим к оценке

$$J \leqslant \check{\beta}_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \check{\beta}_2 \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} (|\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\mathbf{v}_j|^2 + |\widetilde{\mathbf{g}}_j|^2)|\mathbf{D}^\beta u|^2\,d\mathbf{x}$$
$$+ \check{\beta}_3 \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta:|\gamma|\geqslant 1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^{\alpha-\beta-\gamma}\mathbf{v}_j|^2 |\mathbf{D}^\gamma u|^2\,d\mathbf{x},$$

где $\check{\beta}_1 = 2\|g\|_{L_\infty} + 2c_1^{(2)}$, $\check{\beta}_2 = 2(c_2^{(2)} + c^{(4)} + c^{(5)} + c^{(6)})$, $\check{\beta}_3 = 2c^{(3)}$.

Учитывая нижнюю оценку (1.8) (при $\varepsilon = 1$) и суммируя по j, приходим к искомому неравенству (2.4). $\square$

Следствие 2.2. *При $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\varepsilon^{2p} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p(\Lambda^\varepsilon u)|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} |u|^2\,d\mathbf{x}$$
$$+ \beta_2 \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \varepsilon^{2|\beta|} \int_{\mathbb{R}^d} \left(|(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)^\varepsilon|^2 + |\widetilde{g}^\varepsilon|^2\right) |\mathbf{D}^\beta u|^2\,d\mathbf{x} \tag{2.6}$$
$$+ \beta_3 \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta:|\gamma|\geqslant 1} \varepsilon^{2|\gamma|} \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}^{\alpha-\beta-\gamma}\Lambda)^\varepsilon|^2 |\mathbf{D}^\gamma u|^2\,d\mathbf{x}.$$

Доказательство. Пусть $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. Выполним подстановки $\mathbf{x} = \varepsilon\mathbf{y}$, $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{y})$. Тогда

$$\varepsilon^{2p} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p_{\mathbf{x}}(\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})u(\mathbf{x}))|^2\,d\mathbf{x} = \varepsilon^d \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p_{\mathbf{y}}(\Lambda(\mathbf{y})v(\mathbf{y}))|^2\,d\mathbf{y}.$$

Применяя (2.4) к интегралу справа, а затем делая обратную замену, приходим к оценке (2.6). $\square$

§ 3. Результаты для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$

В этом параграфе мы формулируем результаты об усреднении оператора A_ε в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, полученные в [KuSu], а также устанавливаем еще один результат, в формулировке которого используется сглаживатель по Стеклову.

3.1. **Аппроксимация резольвенты оператора A_ε по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.** Точка $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ является регулярной точкой как для A_ε, так и для A^0. Положим $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$, и введем обозначение

$$c(\varphi) = \begin{cases} |\sin\varphi|^{-1}, & \varphi \in (0,\pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi) \\ 1, & \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases}. \tag{3.1}$$

Следующая теорема была получена в [KuSu, теорема 8.1].

Теорема 3.1. *Пусть A_ε — оператор* (1.1) *и A^0 — эффективный оператор* (1.13). *Пусть $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $c(\varphi)$ определено в* (3.1). *Тогда при $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1+1/2p}.$$

Постоянная C_1 зависит лишь от d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

3.2. **Аппроксимация резольвенты оператора A_ε по $(L_2 \to H^p)$-операторной норме.** Чтобы аппроксимировать резольвенту $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, необходимо ввести *корректор*

$$K(\zeta; \varepsilon) := [\Lambda^\varepsilon] \Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}. \tag{3.2}$$

Напомним, что Λ — периодическое решение задачи (1.10), а Π_ε — сглаживающий оператор (1.19). Оператор (3.2) непрерывно отображает $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Это легко проверить с помощью предложения 1.6, учитывая, что $\Lambda \in \widetilde{H}^p(\Omega)$. При этом $\|K(\zeta; \varepsilon)\|_{L_2 \to H^p} = O(\varepsilon^{-p})$.

Следующий результат был получен в [KuSu, теорема 8.2].

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Пусть $K(\zeta; \varepsilon)$ — оператор* (3.2), *а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция* (1.12). *Тогда при $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K(\zeta; \varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant C_2 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} \left(1 + |\zeta|^{-1/2}\right), \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon \Pi_\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant C_3 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Постоянные C_2 и C_3 зависят лишь от m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

3.3. **Другая аппроксимация резольвенты оператора A_ε по норме операторов из L_2 в H^p.** Положим

$$\widetilde{K}(\zeta; \varepsilon) := [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}, \tag{3.5}$$

где S_ε — сглаживающий оператор по Стеклову, определенный в (1.20). Оператор (3.5) является непрерывным отображением пространства $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, что нетрудно проверить на основании предложения 1.8 и включения $\Lambda \in \widetilde{H}^p(\Omega)$. При этом $\|\widetilde{K}(\zeta; \varepsilon)\|_{L_2 \to H^p} = O(\varepsilon^{-p})$.

Наряду с теоремой 3.2 справедлив следующий результат (который оказывается более удобным для дальнейшего применения к изучению задачи в ограниченной области).

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Пусть* $\widetilde{K}(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (3.5), *а* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (1.12). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p \widetilde{K}(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \big(C_4 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + C_5 c(\varphi)\varepsilon^p\big)\big(1+|\zeta|^{-1/2}\big), \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C_6 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + C_7 c(\varphi)\varepsilon^p. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Постоянные C_4, C_5, C_6, C_7 *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Теорема 3.3 выводится из теоремы 3.2 с помощью следующей леммы.

Лемма 3.4. *При любом* $\mathbf{u} \in H^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\varepsilon^{2p} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p(\Lambda^\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon)|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{z}_\varepsilon|^2\, d\mathbf{x} + \beta_2 \mathcal{I}_2^\varepsilon[\mathbf{z}_\varepsilon] + \beta_3 \mathcal{I}_3^\varepsilon[\mathbf{z}_\varepsilon], \tag{3.8}$$

где $\mathbf{z}_\varepsilon := (\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}$,

$$\mathcal{I}_2^\varepsilon[\mathbf{z}_\varepsilon] := \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \varepsilon^{2|\beta|} \int_{\mathbb{R}^d} \Big(|(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)^\varepsilon|^2 + |\widetilde{g}^\varepsilon|^2\Big) |\mathbf{D}^\beta \mathbf{z}_\varepsilon|^2\, d\mathbf{x},$$

$$\mathcal{I}_3^\varepsilon[\mathbf{z}_\varepsilon] := \sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} \sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta:|\gamma|\geqslant 1} \varepsilon^{2|\gamma|} \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}^{\alpha-\beta-\gamma}\Lambda)^\varepsilon|^2 |\mathbf{D}^\gamma \mathbf{z}_\varepsilon|^2\, d\mathbf{x}.$$

Постоянные β_l, $l = 1,2,3$, *зависят лишь от* d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Доказательство. В силу предложений 1.6 и 1.8 и включений $\Lambda \in \widetilde{H}^p(\Omega)$, $\widetilde{g} \in L_2(\Omega)$ все члены неравенства (3.8) — непрерывные функционалы относительно $\mathbf{u}$ по норме пространства $H^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ плотно в $H^{2p}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, оценку (3.8) достаточно доказать при $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Фиксируем функцию $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ такую, что $0 \leqslant \chi(t) \leqslant 1$, $\chi(t) = 1$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, и $\chi(t) = 0$ при $t \geqslant 2$. Определим функцию $\chi_R(\mathbf{x}) = \chi(R^{-1}|\mathbf{x}|)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $R > 0$. Пусть $\mathbf{u} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{z}_\varepsilon = (\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}$. Тогда $\chi_R \mathbf{z}_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ и в силу следствия 2.2 выполнена оценка

$$\varepsilon^{2p} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p(\Lambda^\varepsilon \chi_R \mathbf{z}_\varepsilon)|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\chi_R \mathbf{z}_\varepsilon|^2\, d\mathbf{x} + \beta_2 \mathcal{I}_2^\varepsilon[\chi_R \mathbf{z}_\varepsilon] + \beta_3 \mathcal{I}_3^\varepsilon[\chi_R \mathbf{z}_\varepsilon].$$

С учетом оценок $\max|\mathbf{D}^\alpha \chi_R| \leqslant c R^{-|\alpha|}$ (при любом мультииндексе α) неравенство (3.8) получается отсюда предельным переходом при $R \to \infty$ на основании теоремы Лебега. $\square$

Из (3.8) и из формулы Лейбница

$$(\mathbf{D}^\alpha \Lambda^\varepsilon)\mathbf{z}_\varepsilon = \mathbf{D}^\alpha(\Lambda^\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon) - \sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta (\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda^\varepsilon)\mathbf{D}^\beta \mathbf{z}_\varepsilon$$

непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 3.5. *В условиях леммы* 3.4 *справедлива оценка*
$$\sum_{|\alpha|=p}\int_{\mathbb{R}^d}|(\mathbf{D}^\alpha\Lambda)^\varepsilon\mathbf{z}_\varepsilon|^2\,d\mathbf{x}\leqslant\widetilde{\beta}_1\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{z}_\varepsilon|^2\,d\mathbf{x}+\widetilde{\beta}_2\mathcal{I}_2^\varepsilon[\mathbf{z}_\varepsilon]+\widetilde{\beta}_3\mathcal{I}_3^\varepsilon[\mathbf{z}_\varepsilon].$$
Постоянные $\widetilde{\beta}_l$, $l=1,2,3$, *зависят лишь от* d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Доказательство теоремы 3.3. Заметим, что
$$\|\mathbf{v}\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\check{\mathfrak{c}}_p\left(\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{D}^p\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right),\quad \mathbf{v}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\tag{3.9}$$
где $\check{\mathfrak{c}}_p$ зависит лишь от d и p.

Оценим разность операторов (3.2) и (3.5). Пусть $\mathbf{F}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{u}_0=(A^0-\zeta I)^{-1}\mathbf{F}$. С учетом (3.9) имеем
$$\begin{aligned}&\|\big(K(\zeta;\varepsilon)-\widetilde{K}(\zeta;\varepsilon)\big)\mathbf{F}\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)}=\|\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant\check{\mathfrak{c}}_p\|\mathbf{D}^p\left(\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\check{\mathfrak{c}}_p\|\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{3.10}$$

Второе слагаемое в правой части (3.10) оценим с помощью предложений 1.6 и 1.8. С учетом (2.1) получаем
$$\begin{aligned}&\|\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant 2|\Omega|^{-1/2}\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant 2C_\Lambda^{(1)}\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Для оценки первого члена в правой части (3.10) применим лемму 3.4. Выполнена оценка (3.8) при $\mathbf{z}_\varepsilon=(\Pi_\varepsilon-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$. Первое слагаемое в правой части (3.8) оценивается с помощью предложений 1.5 и 1.7:
$$\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{z}_\varepsilon|^2\,d\mathbf{x}\leqslant C_1'\varepsilon^2\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\tag{3.12}$$
где $C_1'=(r_0^{-1}+r_1)^2$. Члены $\mathcal{I}_2^\varepsilon[\mathbf{z}_\varepsilon]$ и $\mathcal{I}_3^\varepsilon[\mathbf{z}_\varepsilon]$ оцениваются на основании предложений 1.6 и 1.8. Имеем
$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\left(|(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)^\varepsilon|^2+|\widetilde{g}^\varepsilon|^2\right)|\mathbf{D}^\beta\mathbf{z}_\varepsilon|^2\,d\mathbf{x}\\&\leqslant 4|\Omega|^{-1}\left(\|\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\widetilde{g}\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\|\mathbf{D}^\beta b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$
Отсюда с учетом (2.2) и (2.3) получаем
$$\mathcal{I}_2^\varepsilon[\mathbf{z}_\varepsilon]\leqslant C_2'\sum_{l=1}^p\varepsilon^{2l}\|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\tag{3.13}$$
где $C_2'=\kappa_2'(d,p)\left(C_\Lambda^2+\|g\|^2_{L_\infty}(1+C_\Lambda^{(2)})^2\right)$. Аналогично,
$$\mathcal{I}_3^\varepsilon[\mathbf{z}_\varepsilon]\leqslant C_3'\sum_{l=1}^p\varepsilon^{2l}\|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\tag{3.14}$$

где $C_3' = \kappa_3'(d,p)C_\Lambda^2$. В результате приходим к оценке

$$\varepsilon^{2p}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{D}^p\left(\Lambda^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\right)|^2\,d\mathbf{x} \leqslant C'\sum_{l=1}^{p}\varepsilon^{2l}\|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{3.15}$$

где $C' = \beta_1 C_1' + \beta_2 C_2' + \beta_3 C_3'$. Из (3.10), (3.11) и (3.15) вытекает, что

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{2p}\|\big(K(\zeta;\varepsilon) - \widetilde{K}(\zeta;\varepsilon)\big)\mathbf{F}\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant 4\check{\mathfrak{c}}_p(C_\Lambda^{(1)})^2\varepsilon^{2p}\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \check{\mathfrak{c}}_p C'\sum_{l=1}^{p}\varepsilon^{2l}\|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Оценим теперь нормы $\|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $l = 0,1,\dots,p$. Имеем:

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})(A^0)^{-1/2-l/2p}\|_{L_2\to L_2}\|(A^0)^{1/2+l/2p}(A^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2\to L_2}.\end{aligned}$$

С учетом (1.4) и (1.14) получаем

$$\|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})(A^0)^{-1/2-l/2p}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2}c_0^{-1/2-l/2p}.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\|(A^0)^{1/2+l/2p}(A^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2\to L_2} &\leqslant \sup_{x\geqslant 0} x^{1/2+l/2p}|x-\zeta|^{-1}\\ &\leqslant \big(\sup_{x\geqslant 0} x|x-\zeta|^{-1}\big)^{1/2+l/2p}\big(\sup_{x\geqslant 0}|x-\zeta|^{-1}\big)^{1/2-l/2p}.\end{aligned}$$

Вычисляя супремумы

$$\sup_{x\geqslant 0} x|x-\zeta|^{-1} \leqslant c(\varphi), \quad \sup_{x\geqslant 0}|x-\zeta|^{-1} = c(\varphi)|\zeta|^{-1},$$

приходим к оценке

$$\|(A^0)^{1/2+l/2p}(A^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant c(\varphi)|\zeta|^{-1/2+l/2p}, \quad l = 0,1,\dots,p.$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \check{C}_l c(\varphi)|\zeta|^{-1/2+l/2p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad l = 0,1,\dots,p, \tag{3.17}$$

где $\check{C}_l = \alpha_1^{1/2}c_0^{-1/2-l/2p}$. Вместе с (3.16) это влечет

$$\begin{aligned}&\varepsilon^p\|K(\zeta;\varepsilon) - \widetilde{K}(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_K^{(1)}c(\varphi)\varepsilon^p|\zeta|^{-1/2} + C_K^{(2)}c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\sum_{j=1}^{p}\left(\varepsilon|\zeta|^{1/2p}\right)^j,\end{aligned} \tag{3.18}$$

где $C_K^{(1)} = 2\check{\mathfrak{c}}_p^{1/2}C_\Lambda^{(1)}\check{C}_0$, $C_K^{(2)} = \check{\mathfrak{c}}_p^{1/2}(C')^{1/2}\max_{1\leqslant l\leqslant p}\check{C}_l$. Очевидно, $\sum_{j=1}^{p}\left(\varepsilon|\zeta|^{1/2p}\right)^j \leqslant p(\varepsilon|\zeta|^{1/2p} + \varepsilon^p|\zeta|^{1/2})$. Отсюда и из (3.18) получаем

$$\begin{aligned}&\varepsilon^p\|K(\zeta;\varepsilon) - \widetilde{K}(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_K c(\varphi)\left(\varepsilon^p|\zeta|^{-1/2} + \varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\right),\end{aligned} \tag{3.19}$$

где $C_K = \max\{C_K^{(1)}, pC_K^{(2)}\}$.

Наконец, из (3.3) и (3.19) вытекает искомое неравенство (3.6) с постоянными $C_4 = C_2 + C_K$, $C_5 = C_K$.

Перейдем к доказательству неравенства (3.7). С учетом (1.3), (1.5) и (1.12) имеем

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}\|(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$+ \sum_{|\alpha|=p} \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\|(\mathbf{D}^\alpha\Lambda)^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Первое слагаемое справа оценивается с помощью (3.12), а второе — на основании следствия 3.5 (ср. (3.12)–(3.14)). В результате получаем

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C'' \sum_{l=1}^{p} \varepsilon^l \|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $C'' = \|g\|_{L_\infty}(r_0^{-1} + r_1) + \kappa''(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\left(\widetilde{\beta}_1 C_1' + \widetilde{\beta}_2 C_2' + \widetilde{\beta}_3 C_3'\right)^{1/2}$. Отсюда с учетом (3.17) вытекает неравенство

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{C}''c(\varphi)\big(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (3.20)$$

где $\widetilde{C}'' = pC''\max_{1\leqslant l\leqslant p}\check{C}_l$. Теперь из (3.4) и (3.20) следует искомое неравенство (3.7) с постоянными $C_6 = C_3 + \widetilde{C}''$ и $C_7 = \widetilde{C}''$. $\square$

3.4. **Устранение сглаживающего оператора.** Оказывается, при дополнительных предположениях относительно свойств матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ можно избавиться от сглаживающего оператора в корректоре.

Условие 3.6. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* Λ *задачи* (1.10) *ограничено и является мультипликатором из* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *в* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$*:*

$$\Lambda \in L_\infty(\mathbb{R}^d) \cap M(H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m) \to H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)).$$

Ввиду периодичности матрицы-функции Λ, условие 3.6 равносильно тому, что $\Lambda \in L_\infty(\Omega) \cap M(H^p(\Omega;\mathbb{C}^m) \to H^p(\Omega;\mathbb{C}^n))$. Норму оператора $[\Lambda]$ умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ обозначим через

$$M_\Lambda := \|[\Lambda]\|_{H^p(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)}. \quad (3.21)$$

Описание пространства мультипликаторов в классах Соболева можно найти в книге [MSh]. Можно указать некоторые достаточные условия, гарантирующие выполнение условия 3.6 (см. [KuSu, предложение 7.10]).

Предложение 3.7. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих двух предположений*:
1°. $2p > d$;
2°. $g^0 = \underline{g}$, *т. е. имеют место представления* (1.18).

Тогда условие 3.6 *заведомо выполнено, причем* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и мультипликаторная норма* (3.21) *контролируются через* m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметры решетки* Γ.

При выполнении условия 3.6 вместо корректора (3.2) (или корректора (3.5)) можно использовать оператор

$$K^0(\zeta;\varepsilon) := \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}, \tag{3.22}$$

который в этом случае непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Отметим, что оператор (3.22) является традиционным корректором, применяемым в теории усреднений.

Следующее утверждение получается масштабным преобразованием из предложения 7.12 статьи [KuSu].

Предложение 3.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1, *а также условие* 3.6. *Пусть операторы* $K(\zeta;\varepsilon)$ *и* $K^0(\zeta;\varepsilon)$ *определены в* (3.2) *и* (3.22) *соответственно. Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\varepsilon^p \|K(\zeta;\varepsilon) - K^0(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_8 c(\varphi)(\varepsilon^p + \varepsilon^{2p}),$$
$$\|\widetilde{g}^\varepsilon (I - \Pi_\varepsilon) b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_9 c(\varphi)\varepsilon^p.$$

Постоянные C_8 *и* C_9 *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ, *а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ.

Комбинируя теорему 3.2 и предложение 3.8, приходим к следующему результату.

Теорема 3.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1, *а также условие* 3.6. *Пусть* $K^0(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (3.22), *а* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (1.12). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K^0(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad \leqslant C_2 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p}\left(1 + |\zeta|^{-1/2}\right) + C_8 c(\varphi)(\varepsilon^p + \varepsilon^{2p}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad \leqslant C_3 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + C_9 c(\varphi)\varepsilon^p.
\end{aligned}$$

Постоянные C_2 *и* C_3 *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ. *Постоянные* C_8 *и* C_9 *зависят от тех же величин, а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ.

Глава 2. Усреднение задачи Дирихле

§ 4. Задача Дирихле в ограниченной области

4.1. **Постановка задачи.** Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса C^{2p}. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $A_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D})$ при условиях Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Строгое определение: $A_{D,\varepsilon}$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, порожденный квадратичной формой

$$a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{4.1}$$

Форма (4.1) замкнута и положительно определена. Действительно, продолжим функцию $\mathbf{u} \in H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нулем на $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$. Тогда $\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Применяя (1.8), получаем

$$c_0 \int_{\mathcal{O}} |\mathbf{D}^p \mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} \leqslant a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int_{\mathcal{O}} |\mathbf{D}^p \mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{4.2}$$

Остается принять во внимание, что форма $\|\mathbf{D}^p\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ задает норму в $H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, эквивалентную стандартной. В силу неравенства Фридрихса из (4.2) следует, что

$$a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_2 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \quad c_2 = c_0 (\operatorname{diam} \mathcal{O})^{-2p}. \tag{4.3}$$

Наша цель — найти аппроксимацию при малом ε обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ задачи Дирихле

$$\begin{gathered} b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) - \zeta \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \partial_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \dots = \partial_{\boldsymbol{\nu}}^{p-1} \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}, \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Здесь через $\partial_{\boldsymbol{\nu}}^l \mathbf{u}(\mathbf{x})$ обозначена производная порядка l функции $\mathbf{u}$ по направлению внешней нормали к $\partial\mathcal{O}$. Как и в §3, считаем, что $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. (Случай других допустимых значений параметра ζ изучается ниже в §8.) Имеем: $\mathbf{u}_\varepsilon = (A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$. В операторных терминах, мы изучаем поведение резольвенты $(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$.

Лемма 4.1. *Пусть $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $c(\varphi)$ определено в* (3.1). *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — обобщенное решение задачи* (4.4). *Тогда при $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\varphi) |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.5}$$

$$\|\mathbf{D}^p \mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0 c(\varphi) |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.6}$$

где $\mathcal{C}_0 = 2^{1/2} c_0^{-1/2}$. В операторных терминах,

$$\begin{gathered} \|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\varphi)|\zeta|^{-1}, \\ \|\mathbf{D}^p (A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0 c(\varphi) |\zeta|^{-1/2}. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Доказательство. В силу (4.3) спектр оператора $A_{D,\varepsilon}$ содержится в $[c_2, \infty) \subset \mathbb{R}_+$. Норма резольвенты $(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ оценивается через величину, обратную к расстоянию от точки ζ до $\mathbb{R}_+$. Это влечет (4.7).

Чтобы проверить (4.6), запишем интегральное тождество для решения $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ задачи (4.4):

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta (\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{4.8}$$

Подставляя $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon$ в (4.8) и используя (4.5), получаем:

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2c(\varphi)^2|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.$$

С учетом (4.2) это дает (4.6). □

4.2. **Эффективный оператор A_D^0.** В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим самосопряженный оператор A_D^0, порожденный квадратичной формой

$$a_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{4.9}$$

Здесь g^0 — эффективная матрица, определенная в (1.11). Учитывая (1.16), убеждаемся, что форма (4.9) удовлетворяет оценкам вида (4.2) и (4.3) с теми же постоянными.

В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^{2p}$ оператор A_D^0 задается выражением $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ на области определения $H^{2p}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При этом

$$\|(A_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{2p}(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}, \tag{4.10}$$

где постоянная $\widehat{c}$ зависит лишь от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Для оправдания достаточно сослаться (к примеру) на теоремы 2.2 и 2.3 статьи [So].

Замечание 4.2. *Вместо условия $\partial\mathcal{O} \in C^{2p}$ достаточно было бы наложить неявное требование на область*: *ограниченная область $\mathcal{O}$ с липшицевой границей такова, что выполнена оценка* (4.10). *Для такой области остаются справедливыми результаты главы* 2. *В случае скалярных эллиптических операторов широкие достаточные условия на $\partial\mathcal{O}$, обеспечивающие справедливость оценки* (4.10), *можно найти в* [KoE] *и* [MSh, гл. 7] (*в частности, достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O} \in C^{2p-1,\nu}$, $\nu > 1/2$*).

Пусть $\mathbf{u}_0 = (A_D^0 - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда $\mathbf{u}_0$ — обобщенное решение задачи

$$\begin{aligned} &b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \zeta\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O};\\ &\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \partial_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \dots = \partial_{\boldsymbol{\nu}}^{p-1}\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Лемма 4.3. *Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Пусть $\mathbf{u}_0$ — обобщенное решение задачи* (4.11). *Тогда при $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\varphi)|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.12}$$

$$\|\mathbf{D}^p\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.13}$$

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_0 c(\varphi)(|\zeta|^{-1} + |\zeta|^{-1/2})\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.14}$$

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^{2p}(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}c(\varphi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}
\|(A_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant c(\varphi)|\zeta|^{-1},\\
\|\mathbf{D}^p(A_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2},\\
\|(A_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} &\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_0 c(\varphi)(|\zeta|^{-1}+|\zeta|^{-1/2}),\\
\|(A_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{2p}(\mathcal{O})} &\leqslant \widehat{c}c(\varphi).
\end{aligned}\tag{4.15}$$

Константа $\widetilde{\mathcal{C}}_0$ *зависит лишь от* d, p, α_0 *и* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Доказательство. Оценки (4.12), (4.13) проверяются по аналогии с доказательством леммы 4.1. Поскольку (3.9) переносится на функции класса $H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, из (4.12) и (4.13) следует (4.14) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}_0 = \check{\mathfrak{c}}_p^{1/2}\max\{1,\mathcal{C}_0\}$.

Оценка (4.15) вытекает из (4.10) и неравенства

$$\|A_D^0(A_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \sup_{x\geqslant 0} x|x-\zeta|^{-1} \leqslant c(\varphi).$$

$\square$

4.3. **Оценки в окрестности границы.** В этом пункте мы формулируем два простых вспомогательных утверждения, справедливых для ограниченных областей $\mathcal{O}$ с липшицевой границей. Точнее, предполагается следующее.

Условие 4.4. *Пусть* $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ *— ограниченная область. Положим* $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\operatorname{dist}\{\mathbf{x};\partial\mathcal{O}\}<\varepsilon\}$. *Пусть существует число* $\varepsilon_0\in(0,1]$ *такое, что полоску* $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0}$ *можно покрыть конечным числом окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса* $C^{0,1}$, *распрямляющие границу* $\partial\mathcal{O}$. *Обозначим* $\varepsilon_1=\varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$, *где* $2r_1=\operatorname{diam}\Omega$.

Очевидно, условие 4.4 менее ограничительно, чем сделанное выше предположение $\partial\mathcal{O}\in C^{2p}$.

Лемма 4.5. *Пусть выполнено условие* 4.4. *Обозначим* $B_\varepsilon=(\partial\mathcal{O})_\varepsilon\cap\mathcal{O}$. *Тогда имеют место следующие утверждения.*
1°. *Для любой функции* $u\in H^1(\mathcal{O})$ *справедлива оценка*

$$\int_{B_\varepsilon}|u|^2\,d\mathbf{x}\leqslant\beta_0\varepsilon\|u\|_{H^1(\mathcal{O})}\|u\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0.$$

2°. *Для любой функции* $u\in H^1(\mathbb{R}^d)$ *справедлива оценка*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|u|^2\,d\mathbf{x}\leqslant\beta_0\varepsilon\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0.$$

Постоянная β_0 *зависит только от области* $\mathcal{O}$.

Лемма 4.6. *Пусть выполнено условие* 4.4. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$ *такая, что* $f\in L_2(\Omega)$. *Пусть* S_ε

— оператор (1.20). *Обозначим* $\beta_* = \beta_0(1+r_1)$, $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *справедлива оценка*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Леммы 4.5 и 4.6 были проверены в [PSu2, § 5] при условии $\partial\mathcal{O} \in C^1$, но доказательства автоматически переносятся и на случай условия 4.4.

§ 5. Результаты для задачи Дирихле

5.1. **Аппроксимация резольвенты при** $|\zeta| \geqslant 1$**.** Сформулируем наши основные результаты об усреднении оператора $A_{D,\varepsilon}$.

Теорема 5.1. *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область класса* C^{2p}. *Пусть* $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$. *Пусть* $c(\varphi)$ *определено в* (3.1). *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (4.4) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (4.11) *при* $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. *Пусть число* ε_1 *выбрано в соответствии с условием* 4.4. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\varphi)^5 \left(\varepsilon |\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.1}$$

В операторных терминах,

$$\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\varphi)^5 \left(\varepsilon |\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p} \right). \tag{5.2}$$

Постоянная $\mathcal{C}_1$ *зависит лишь от* d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Для аппроксимации решения в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нужно ввести корректор. Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O} : H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad s = 0, 1, \dots, 2p.$$

Такой оператор существует (см., например, [St]). Обозначим

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^s(\mathcal{O}) \to H^s(\mathbb{R}^d)} =: C_\mathcal{O}^{(s)}, \quad s = 0, 1, \dots, 2p. \tag{5.3}$$

Постоянные $C_\mathcal{O}^{(s)}$ зависят лишь от области $\mathcal{O}$ и от s. Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Введем корректор

$$K_D(\zeta;\varepsilon) = R_\mathcal{O} [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (A_D^0 - \zeta I)^{-1}. \tag{5.4}$$

Оператор $K_D(\zeta;\varepsilon)$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Действительно, оператор $b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (A_D^0 - \zeta I)^{-1}$ непрерывно отображает $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, а оператор $[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon$ непрерывен из $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (это следует из предложения 1.8 и включения $\Lambda \in \widetilde{H}^p(\Omega)$).

Пусть $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (4.11). Обозначим $\widetilde{\mathbf{u}}_0 := P_\mathcal{O} \mathbf{u}_0$. Положим

$$\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) (S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \tag{5.5}$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon := \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon|_\mathcal{O}. \tag{5.6}$$

Тогда

$$\mathbf{v}_\varepsilon = (A_D^0 - \zeta I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon^p K_D(\zeta;\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{5.7}$$

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (5.4), (5.7). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 c(\varphi)^4 \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.8}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} &\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_D(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}_2 c(\varphi)^4 \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3 c(\varphi)^4 \left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.10}$$

Постоянные $\mathcal{C}_2$ *и* $\mathcal{C}_3$ *зависят лишь от* d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Замечание 5.3. 1) *При фиксированном* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *оценки из теоремы* 5.1 *имеют точный порядок* $O(\varepsilon)$. 2) *При фиксированном* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *оценки из теоремы* 5.2 *имеют порядок* $O(\varepsilon^{1/2})$. *Это объясняется влиянием границы области.* 3) *С ростом* $|\zeta|$ *погрешность аппроксимаций из теорем* 5.1 *и* 5.2 *уменьшается.* 4) *Оценки из теорем* 5.1 *и* 5.2 *равномерны по углу* φ *в области вида* $\{\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} : |\zeta| \geqslant 1, \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \varphi_0\}$ *со сколь угодно малым* $\varphi_0 > 0$.

5.2. **Первый этап доказательства. Ассоциированная задача в $\mathbb{R}^d$.** Доказательство теорем 5.1 и 5.2 опирается на применение результатов для задачи в $\mathbb{R}^d$ и выделение поправки типа пограничного слоя.

В силу леммы 4.3 и (5.3) справедливы оценки

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(0)} c(\varphi)|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.11}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(p)} c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.12}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(2p)} c(\varphi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.13}$$

где $C^{(p)} = 2C_{\mathcal{O}}^{(p)}\widetilde{\mathcal{C}}_0$, $C^{(2p)} = C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\widehat{c}$. Мы учли, что $|\zeta| \geqslant 1$. Интерполируя между (5.12) и (5.13), получаем

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+k}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(p+k)} c(\varphi)|\zeta|^{-1/2+k/2p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad k = 0, 1, \dots, p. \tag{5.14}$$

Здесь $C^{(p+k)} = (C^{(p)})^{1-k/p}(C^{(2p)})^{k/p}$.

Положим

$$\widetilde{\mathbf{F}} := A^0\widetilde{\mathbf{u}}_0 - \zeta\widetilde{\mathbf{u}}_0. \tag{5.15}$$

Тогда $\widetilde{\mathbf{F}} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\widetilde{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{F}$. Из (1.14), (5.11) и (5.13) вытекает оценка

$$\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_*\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)} + |\zeta|\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_4 c(\varphi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.16}$$

где $\mathcal{C}_4 = C_* C^{(2p)} + C_{\mathcal{O}}^{(0)}$. Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — решение уравнения в $\mathbb{R}^d$:

$$A_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \zeta \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{F}}, \tag{5.17}$$

т. е. $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = (A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}\widetilde{\mathbf{F}}$.

Применимы теоремы из §3. Из теорем 3.1 и 3.3 с учетом (5.15)–(5.17) следует, что при $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C_1 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1+1/2p} \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C_1 \mathcal{C}_4 c(\varphi)^3 \varepsilon |\zeta|^{-1+1/2p} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{5.18}$$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \left(2C_4 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + 2C_5 c(\varphi)\varepsilon^p\right) \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \left(2C_4 \mathcal{C}_4 c(\varphi)^3 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + 2C_5 \mathcal{C}_4 c(\varphi)^2\varepsilon^p\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{5.19}$$

Далее, в силу предложения 1.8 и (2.1) выполнено

$$\|[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_\Lambda^{(1)}. \tag{5.20}$$

Вместе с (1.4) и (5.12) это влечет

$$\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_\Lambda^{(1)} \alpha_1^{1/2} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_5 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.21}$$

где $\mathcal{C}_5 = C_\Lambda^{(1)} \alpha_1^{1/2} C^{(p)}$. В силу (5.18) и (5.21) справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^p \|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \left(C_1 \mathcal{C}_4 c(\varphi)^3 \varepsilon |\zeta|^{-1+1/2p} + \mathcal{C}_5 c(\varphi)\varepsilon^p |\zeta|^{-1/2}\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{5.22}$$

5.3. **Второй этап доказательства. Введение поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$.** Первое приближение $\mathbf{v}_\varepsilon$ к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ не удовлетворяет условиям Дирихле. Рассмотрим "поправку" $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{5.23}$$

и условию

$$\mathbf{w}_\varepsilon - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 \in H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.24}$$

Лемма 5.4. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (4.4), $\mathbf{v}_\varepsilon$ — функция (5.7). Пусть $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет (5.23) и (5.24). Тогда при $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}^p(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_6\big(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3\varepsilon^p\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.25}$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_7\big(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1+1/2p} + c(\varphi)^3\varepsilon^p|\zeta|^{-1/2}\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.26}$$

Постоянные $\mathcal{C}_6$ и $\mathcal{C}_7$ зависят лишь от d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Доказательство. Обозначим $\mathbf{V}_\varepsilon := \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon$. В силу (4.8), (5.23), (5.24) функция $\mathbf{V}_\varepsilon$ принадлежит классу $H^p_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и удовлетворяет тождеству

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{V}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}], \quad \boldsymbol{\eta}\in H^p_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{5.27}$$

где $J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] := (\mathbf{F},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} + \zeta(\mathbf{v}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}$. Продолжим функцию $\boldsymbol{\eta}$ нулем на $\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{O}$, сохраняя то же обозначение; тогда $\boldsymbol{\eta}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Вспомним, что $\widetilde{\mathbf{F}}$ является продолжением функции $\mathbf{F}$, а $\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ является продолжением функции $\mathbf{v}_\varepsilon$. Следовательно,

$$J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] = (\widetilde{\mathbf{F}},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} - (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \zeta(\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

С учетом (5.17) приходим к равенству

$$J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} - \zeta(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Применяя (1.4), (5.19) и (5.22), получаем оценку

$$|J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant k_1(\zeta,\varepsilon)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\big(\mathcal{C}_8\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_9|\zeta|^{1/2}\|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}\big). \tag{5.28}$$

Здесь $k_1(\zeta,\varepsilon) := c(\varphi)^3\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^2\varepsilon^p$, $\mathcal{C}_8 = 2\alpha_1^{1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\mathcal{C}_4\max\{C_4, C_5\}$, $\mathcal{C}_9 = \max\{C_1\mathcal{C}_4,\mathcal{C}_5\}$.

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ в (5.27), возьмем мнимую часть от полученного равенства и применим (5.28):

$$\begin{aligned}|\mathrm{Im}\,\zeta|\|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant k_1(\zeta,\varepsilon)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times\big(\mathcal{C}_8\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_9|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\big).\end{aligned} \tag{5.29}$$

При $\mathrm{Re}\,\zeta\geqslant 0$ (а тогда $\mathrm{Im}\,\zeta\neq 0$) отсюда выводим неравенство

$$\begin{aligned}|\zeta|\|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 2\mathcal{C}_8 k_2(\zeta,\varepsilon)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ \mathcal{C}_9^2 k_2(\zeta,\varepsilon)^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{5.30}$$

Здесь $k_2(\zeta,\varepsilon) := c(\varphi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3\varepsilon^p$. Если $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$, то возьмем вещественную часть полученного равенства и применим (5.28):

$$\begin{aligned}|\mathrm{Re}\,\zeta|\|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant k_1(\zeta,\varepsilon)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\times\big(\mathcal{C}_8\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_9|\zeta|^{1/2}\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\big).\end{aligned} \tag{5.31}$$

Складывая (5.29) и (5.31), выводим неравенство, аналогичное (5.30). В итоге при всех рассматриваемых значениях ζ получаем

$$\begin{aligned}|\zeta|\|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 4\mathcal{C}_8 k_2(\zeta,\varepsilon)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ 4\mathcal{C}_9^2 k_2(\zeta,\varepsilon)^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{5.32}$$

Теперь из (5.27) при $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ с учетом (5.28) и (5.32) вытекает оценка

$$\begin{aligned}a_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon,\mathbf{V}_\varepsilon] &\leqslant 9\mathcal{C}_8 k_2(\zeta,\varepsilon)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ 9\mathcal{C}_9^2 k_2(\zeta,\varepsilon)^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Отсюда выводим неравенство

$$a_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon] \leqslant \check{\mathcal{C}}_6^2 k_2(\zeta,\varepsilon)^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.33}$$

где $\check{\mathcal{C}}_6^2 = 18\mathcal{C}_9^2 + 81\mathcal{C}_8^2$. Из (5.33) с учетом (4.2) вытекает оценка (5.25) с постоянной $\mathcal{C}_6 = \check{\mathcal{C}}_6 c_0^{-1/2}$. Наконец, из (5.32) и (5.33) следует (5.26) с постоянной $\mathcal{C}_7 = 2(\mathcal{C}_8\check{\mathcal{C}}_6 + \mathcal{C}_9^2)^{1/2}$. $\square$

Выводы. 1) Из (5.25), (5.26) следует, что при $\varepsilon > 0$ выполнены оценки

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{D}^p(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}_6\big(c(\varphi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3\varepsilon^p\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}^p\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}_7\big(c(\varphi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + c(\varphi)^3\varepsilon^p|\zeta|^{-1/2}\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Ясно, что для доказательства теоремы 5.2 остается оценить подходящим образом норму $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})}$.

2) Из (5.21) вытекает оценка разности $\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 = \varepsilon^p(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)|_\mathcal{O}$:

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon^p\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_5 c(\varphi)\varepsilon^p|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.36}$$

Отсюда и из (5.35) при $\varepsilon > 0$ вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_7\big(c(\varphi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + c(\varphi)^3\varepsilon^p|\zeta|^{-1/2}\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{5.37}$$

где $\widetilde{\mathcal{C}}_7 = \mathcal{C}_7 + \mathcal{C}_5$. Поэтому для доказательства теоремы 5.1 нужно оценить надлежащим образом норму $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$.

§ 6. Оценки поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$. Доказательство теорем 5.1 и 5.2

Сначала мы оценим норму $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $H^p(\mathcal{O})$ и завершим доказательство теоремы 5.2. Затем, используя уже доказанную теорему 5.2 и соображения двойственности, оценим L_2-норму поправки и докажем теорему 5.1.

6.1. **Локализация вблизи границы.** Пусть число $\varepsilon_0 \in (0,1]$ выбрано в соответствии с условием 4.4. Будем считать, что $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$. Фиксируем гладкую срезку $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$ такую, что

$$\begin{aligned} &\theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{supp}\theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon, \quad 0 \leqslant \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1, \\ &\theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in (\partial\mathcal{O})_{\varepsilon/2}, \quad \varepsilon^l|\mathbf{D}^l\theta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \varkappa,\ l = 1,\dots,p. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Постоянная $\varkappa$ зависит только от области $\mathcal{O}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ функцию

$$\boldsymbol{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon^p\theta_\varepsilon(\mathbf{x})\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}). \tag{6.2}$$

Лемма 6.1. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *удовлетворяет условиям* (5.23), (5.24), *а функция* $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ *определена в* (6.2). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{D}^p\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{10}c(\varphi)\left(|\zeta|^{1/2}\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right), \tag{6.3}$$

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{11}c(\varphi)\left(\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + |\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right). \tag{6.4}$$

Постоянные $\mathcal{C}_{10}$ *и* $\mathcal{C}_{11}$ *зависят лишь от* d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ *и* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Доказательство. В силу (5.23), (5.24), (6.1) и (6.2) функция $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon := \mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon \in H^p_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned}&(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\boldsymbol{\rho}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}\\ &= -(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} + \zeta(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^p_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{6.5}$$

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ в (6.5) и возьмем мнимую часть от полученного равенства. Тогда

$$\begin{aligned}|\operatorname{Im}\zeta|\,\|\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{12}&\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ |\zeta|\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{6.6}$$

где $\mathcal{C}_{12} = \mathfrak{c}_p^{1/2}\alpha_1^{1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}$. Мы учли (1.4) и (1.7). При $\operatorname{Re}\zeta \geqslant 0$ (а тогда $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$) отсюда выводим

$$\begin{aligned}|\zeta|\,\|\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathcal{C}_{12}c(\varphi)&\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ c(\varphi)^2|\zeta|\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Если $\operatorname{Re}\zeta < 0$, то возьмем вещественную часть от полученного равенства и найдем

$$\begin{aligned}|\operatorname{Re}\zeta|\,\|\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{12}&\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ |\zeta|\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{6.8}$$

Складывая (6.6) и (6.8), выводим неравенство, аналогичное (6.7). В итоге при всех рассматриваемых значениях ζ получаем

$$\begin{aligned}|\zeta|\,\|\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4\mathcal{C}_{12}c(\varphi)&\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ 4c(\varphi)^2|\zeta|\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Теперь из (6.5) при $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ и (6.9) вытекает, что

$$\begin{aligned}a_{D,\varepsilon}[\boldsymbol{\rho}_\varepsilon,\boldsymbol{\rho}_\varepsilon] &\leqslant 9c(\varphi)^2|\zeta|\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ 9\mathcal{C}_{12}c(\varphi)\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Отсюда выводим неравенство

$$a_{D,\varepsilon}[\boldsymbol{\rho}_\varepsilon,\boldsymbol{\rho}_\varepsilon] \leqslant 18c(\varphi)^2|\zeta|\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + 81\mathcal{C}^2_{12}c(\varphi)^2\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.10}$$

Из (6.10) с учетом (4.2) следует, что

$$\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_0^{-1/2}c(\varphi)\left(\sqrt{18}|\zeta|^{1/2}\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + 9\mathcal{C}_{12}\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right).$$

Отсюда вытекает (6.3) с постоянной $\mathcal{C}_{10} = \max\{\sqrt{18}c_0^{-1/2}, 9\mathcal{C}_{12}c_0^{-1/2} + 1\}$. Далее, из (6.9) и (6.10) видно, что

$$\|\boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\varphi)\left(\sqrt{22}\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \sqrt{85}\mathcal{C}_{12}|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right),$$

что влечет (6.4) с постоянной $\mathcal{C}_{11} = \max\{\sqrt{22}+1, \sqrt{85}\mathcal{C}_{12}\}$. $\square$

6.2. **Оценка функции $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$.** Оценим теперь функцию (6.2).

Лемма 6.2. *Пусть число ε_1 выбрано согласно условию* 4.4. *Пусть функция $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ определена в* (6.2). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, справедливы оценки*

$$\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_5 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\varepsilon^p\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.11}$$

$$\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_{13}c(\varphi)\left(\varepsilon^p + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.12}$$

Постоянные $\mathcal{C}_9$ и $\mathcal{C}_{13}$ зависят лишь от d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Доказательство. Оценка (6.11) вытекает непосредственно из (5.21) и (6.1).

Рассмотрим производные от $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ при $|\alpha| = p$:

$$\partial^\alpha\boldsymbol{\phi}_\varepsilon = \varepsilon^p \sum_{\beta\leqslant\alpha}\sum_{\gamma\leqslant\alpha-\beta} C_\alpha^\beta C_{\alpha-\beta}^\gamma(\partial^\gamma\theta_\varepsilon)(\partial^{\alpha-\beta-\gamma}\Lambda^\varepsilon)(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial^\beta\widetilde{\mathbf{u}}_0). \tag{6.13}$$

При $k = |\beta| \geqslant 1$ воспользуемся (6.1), предложением 1.8, (1.4), (2.3) и (5.14):

$$\begin{aligned} &\varepsilon^p\|(\partial^\gamma\theta_\varepsilon)(\partial^{\alpha-\beta-\gamma}\Lambda^\varepsilon)(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial^\beta\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varkappa\varepsilon^k\|(\partial^{\alpha-\beta-\gamma}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial^\beta\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varkappa\varepsilon^k C_\Lambda\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+k}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}^{(k)}\varepsilon^k c(\varphi)|\zeta|^{-1/2+k/2p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Здесь $\mathcal{C}^{(k)} = \varkappa C_\Lambda\alpha_1^{1/2}C^{(p+k)}$.

При $\beta = 0$ применим лемму 4.6. Пусть $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. С учетом (6.1) имеем:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^p\|(\partial^\gamma\theta_\varepsilon)(\partial^{\alpha-\gamma}\Lambda^\varepsilon)(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varkappa\|(\partial^{\alpha-\gamma}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2((\partial\mathcal{O})_\varepsilon)} \\ &\leqslant \varepsilon^{1/2}\varkappa\beta_*^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\|\partial^{\alpha-\gamma}\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^{1/2}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1/2}. \end{aligned}$$

Вместе с (1.4) и (2.3) это влечет

$$\begin{aligned} &\varepsilon^p\|(\partial^\gamma\theta_\varepsilon)(\partial^{\alpha-\gamma}\Lambda^\varepsilon)(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon^{1/2}\varkappa\beta_*^{1/2}C_\Lambda\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^d)}^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}^{1/2}. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Теперь из (5.12), (5.14) и (6.15) вытекает неравенство

$$\varepsilon^p\|(\partial^\gamma\theta_\varepsilon)(\partial^{\alpha-\gamma}\Lambda^\varepsilon)(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_{14}\varepsilon^{1/2}c(\varphi)|\zeta|^{-1/2+1/4p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.16}$$

где $\mathcal{C}_{14} = \varkappa\beta_*^{1/2} C_\Lambda \alpha_1^{1/2} (C^{(p)} C^{(p+1)})^{1/2}$.

Оценивая слагаемые из (6.13) при $k = |\beta| \geqslant 1$ с помощью (6.14), а слагаемые с $\beta = 0$ с помощью (6.16), приходим к неравенству

$$\|\partial^\alpha \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_{15} c(\varphi) \left(\varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/2+1/4p} + \sum_{k=1}^{p} \varepsilon^k |\zeta|^{-1/2+k/2p} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.17}$$

где $\mathcal{C}_{15} = \kappa_7(d,p) \max\{\mathcal{C}_{14}, \mathcal{C}^{(1)}, \dots, \mathcal{C}^{(p)}\}$. Легко видеть, что выражение в скобках оценивается через $2p(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p)$. Тогда из (6.17) вытекает (6.12) с постоянной $\mathcal{C}_{13} = \kappa_8(d,p)\mathcal{C}_{15}$. $\square$

6.3. **Завершение доказательства теоремы 5.2.** Из лемм 6.1 и 6.2 следуют оценки

$$\|\mathbf{D}^p \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{16} c(\varphi)^2 \left(\varepsilon^p + \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/2+1/4p} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{17} c(\varphi)^2 \left(\varepsilon^p |\zeta|^{-1/2} + \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1+1/4p} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\mathcal{C}_{16} = \mathcal{C}_{10}(\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_{13})$, $\mathcal{C}_{17} = \mathcal{C}_{11}(\mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_{13})$. Вместе с (5.34), (5.35) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, это влечет

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{D}^p(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_6 \big(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p \big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ \mathcal{C}_{16} c(\varphi)^2 \big(\varepsilon^p + \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/2+1/4p} \big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \mathcal{C}_{18} \big(c(\varphi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/2+1/4p} + c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p \big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant 2\mathcal{C}_{18} c(\varphi)^4 \big(\varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},
\end{aligned} \tag{6.18}$$

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_7 \big(c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p |\zeta|^{-1/2} \big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ \mathcal{C}_{17} c(\varphi)^2 \big(\varepsilon^p |\zeta|^{-1/2} + \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1+1/4p} \big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \mathcal{C}_{19} \big(c(\varphi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1+1/4p} + c(\varphi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1+1/2p} + c(\varphi)^3 \varepsilon^p |\zeta|^{-1/2} \big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant 2\mathcal{C}_{19} c(\varphi)^4 \big(\varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1+1/4p} + \varepsilon^p |\zeta|^{-1/2} \big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},
\end{aligned} \tag{6.19}$$

где $\mathcal{C}_{18} = \mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_{16}$, $\mathcal{C}_{19} = \mathcal{C}_7 + \mathcal{C}_{17}$. Поскольку

$$\|\mathbf{u}\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant C(p;\mathcal{O}) \left(\|\mathbf{D}^p \mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right), \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{6.20}$$

где постоянная $C(p;\mathcal{O})$ зависит лишь от p и $\mathcal{O}$, из (6.18), (6.19) вытекает (5.8) с постоянной $\mathcal{C}_2 = 2C(p;\mathcal{O})(\mathcal{C}_{18} + \mathcal{C}_{19})$.

Остается установить неравенство (5.10). Из (5.8) с учетом (1.3), (1.5) следует оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{20} c(\varphi)^4 \big(\varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p \big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.21}$$

где $\mathcal{C}_{20} = \kappa_9(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\mathcal{C}_2$. В силу (1.3) и (5.5), (5.6) имеем:

$$\begin{aligned} g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon &= g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 \\ &+ \sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} g^\varepsilon b_\alpha C_\alpha^\beta \varepsilon^{|\beta|}(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{D}^\beta \widetilde{\mathbf{u}}_0. \end{aligned} \tag{6.22}$$

Из предложения 1.7 вытекает, что

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - g^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \|g^\varepsilon (I-S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} r_1 \|\mathbf{D} b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Третье слагаемое в правой части (6.22) оценивается на основании предложения 1.8 и (2.3). Учитывая также (1.5), получаем

$$\begin{aligned} &\Big\| \sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} g^\varepsilon b_\alpha C_\alpha^\beta \varepsilon^{|\beta|}(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{D}^\beta \widetilde{\mathbf{u}}_0 \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \mathcal{C}_{21} \sum_{l=1}^{p} \varepsilon^l \|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned} \tag{6.24}$$

где $\mathcal{C}_{21} = \kappa_{10}(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2} C_\Lambda$.

Из (1.4) и (5.14) следует оценка

$$\|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2} C^{(p+l)} c(\varphi)|\zeta|^{-1/2+l/2p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad l=1,\dots,p. \tag{6.25}$$

Сопоставляя (1.12) и (6.22)–(6.25), приходим к неравенству

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{22} c(\varphi)\big(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.26}$$

где $\mathcal{C}_{22} = \alpha_1^{1/2}\big(\|g\|_{L_\infty} r_1 C^{(p+1)} + p\,\mathcal{C}_{21}\max_{1\leqslant l\leqslant p} C^{(p+l)}\big)$.

В итоге, из (6.21) и (6.26) вытекает искомое неравенство (5.10) с постоянной $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_{20} + 2\mathcal{C}_{22}$. $\square$

6.4. **Доказательство теоремы 5.1.** Оценим L_2-норму поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$.

Лемма 6.3. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *удовлетворяет условиям* (5.23), (5.24). *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 4.4. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{23} c(\varphi)^5\big(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.27}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{23}$ *зависит лишь от* d, p, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. В тождестве (6.5) в качестве пробной функции $\boldsymbol{\eta}$ возьмем $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\varepsilon = (A_{D,\varepsilon} - \overline{\zeta} I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$, где $\boldsymbol{\Phi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда левая часть (6.5) может быть записана в виде $(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}$. Следовательно,

$$(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} = -(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + \zeta(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.28}$$

Для аппроксимации функции $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ применим уже доказанную теорему 5.2. Положим $\boldsymbol{\eta}_0 = (A_D^0 - \overline{\zeta} I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$, $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 = P_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\eta}_0$. Приближением функции $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ служит функция $\boldsymbol{\eta}_0 + \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$. Перепишем (6.28) в виде

$$
\begin{aligned}
&(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} = -(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0))_{L_2(\mathcal{O})} \\
&- (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}_0)_{L_2(\mathcal{O})} - (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})(\varepsilon^p \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0))_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ \zeta(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (6.29) через $\mathcal{I}_j(\varepsilon,\zeta)$, $j = 1,2,3,4$.

Проще всего оценить $\mathcal{I}_4(\varepsilon,\zeta)$, используя лемму 4.1 и (6.11):

$$
|\mathcal{I}_4(\varepsilon,\zeta)| \leqslant |\zeta| \|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5 c(\varphi)^2 \varepsilon^p |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\tag{6.30}
$$

Оценим теперь $\mathcal{I}_1(\varepsilon,\zeta)$. С учетом (1.3) и (1.5) имеем

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{I}_1(\varepsilon,\zeta)| &\leqslant \|g\|_{L_\infty} \kappa_{11}(d,p)\alpha_1 \\
&\times \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon^p \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
$$

Применяя теорему 5.2 (точнее, аналог оценки (6.18) для $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$) и (6.12), приходим к оценке

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{I}_1(\varepsilon,\zeta)| &\leqslant 2\|g\|_{L_\infty} \kappa_{11}(d,p)\alpha_1 \mathcal{C}_{13}\mathcal{C}_{18} \\
&\times c(\varphi)^5 \big(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\big)^2 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
|\mathcal{I}_1(\varepsilon,\zeta)| \leqslant \gamma_1 c(\varphi)^5 \big(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},
\tag{6.31}
$$

где $\gamma_1 = 4\|g\|_{L_\infty} \kappa_{11}(d,p)\alpha_1 \mathcal{C}_{13}\mathcal{C}_{18}$.

Чтобы оценить $\mathcal{I}_2(\varepsilon,\zeta)$, вспомним, что функция $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ сосредоточена в ε-окрестности границы, и применим лемму 4.5. С учетом (1.3) и (1.5) имеем

$$
\begin{aligned}
&|\mathcal{I}_2(\varepsilon,\zeta)| \leqslant \|g\|_{L_\infty} \kappa_{11}(d,p)\alpha_1 \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}_0\|_{L_2(B_\varepsilon)} \\
&\leqslant \|g\|_{L_\infty} \kappa_{11}(d,p)\alpha_1 \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \beta_0^{1/2} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

Для оценки $\|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}$ применим лемму 4.3:

$$
\|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0 c(\varphi) |\zeta|^{-1/2} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\tag{6.33}
$$

Далее, из (4.15) следует, что

$$
\|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}_0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c} c(\varphi) \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.
$$

Поскольку $H^1(\mathcal{O})$ совпадает с интерполяционным пространством $[L_2(\mathcal{O}), H^p(\mathcal{O})]_{1/p}$, а соответствующие нормы эквивалентны, то по интерполяции получаем

$$
\|\mathbf{D}^p \boldsymbol{\eta}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{24} c(\varphi) |\zeta|^{-1/2+1/2p} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},
\tag{6.34}
$$

где $\mathcal{C}_{24} = \check{C}(p;\mathcal{O})\mathcal{C}_0^{1-1/p}\widehat{c}^{1/p}$. Теперь из (6.32)–(6.34) и (6.12) вытекает оценка

$$|\mathcal{I}_2(\varepsilon,\zeta)| \leqslant \|g\|_{L_\infty}\kappa_{11}(d,p)\alpha_1\mathcal{C}_{13}c(\varphi)\big(\varepsilon^p + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}\big)$$
$$\times\, \beta_0^{1/2}\varepsilon^{1/2}(\mathcal{C}_0\mathcal{C}_{24})^{1/2}c(\varphi)|\zeta|^{-1/2+1/4p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следовательно,

$$|\mathcal{I}_2(\varepsilon,\zeta)| \leqslant \gamma_2 c(\varphi)^2\big(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.35}$$

где $\gamma_2 = 2\|g\|_{L_\infty}\kappa_{11}(d,p)\alpha_1\beta_0^{1/2}\mathcal{C}_{13}(\mathcal{C}_0\mathcal{C}_{24})^{1/2}$.

Осталось оценить $\mathcal{I}_3(\varepsilon,\zeta)$. С учетом (1.3) имеем

$$\mathcal{I}_3(\varepsilon,\zeta) = -\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon,\zeta) - \mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon,\zeta), \tag{6.36}$$

$$\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon,\zeta) = \sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta \varepsilon^{|\beta|}(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b_\alpha(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{D}^\beta\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0)_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.37}$$

$$\mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon,\zeta) = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.38}$$

Для оценки члена (6.37) воспользуемся (1.4), (1.5), предложением 1.8 и (2.3):

$$|\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon,\zeta)| \leqslant \kappa_{12}(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{3/2}C_\Lambda\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\bigg(\sum_{k=1}^p \varepsilon^k\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^{p+k}(\mathbb{R}^d)}\bigg).$$

Вместе с (6.12) и аналогом оценки (5.14) для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ это влечет

$$|\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon,\zeta)| \leqslant \kappa_{12}(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{3/2}C_\Lambda\mathcal{C}_{13}c(\varphi)\big(\varepsilon^p + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}\big)$$
$$\times\bigg(\sum_{k=1}^p \varepsilon^k C^{(p+k)}c(\varphi)|\zeta|^{-1/2+k/2p}\bigg)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда легко вывести оценку

$$|\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon,\zeta)| \leqslant \gamma_3^{(1)}c(\varphi)^2\big(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.39}$$

где $\gamma_3^{(1)} = 4p\kappa_{12}(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{3/2}C_\Lambda\mathcal{C}_{13}\max_{1\leqslant k\leqslant p}C^{(p+k)}$.

Член (6.38) оценим с помощью (1.4), (1.7), леммы 4.6 и (2.2):

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon,\zeta)| &\leqslant \|g\|_{L_\infty}(\mathfrak{c}_p\alpha_1)^{1/2}\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\times\bigg(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\bigg)^{1/2}\\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}(\mathfrak{c}_p\alpha_1)^{1/2}\|\mathbf{D}^p\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\times\beta_*^{1/2}\varepsilon^{1/2}C_\Lambda^{(2)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^{1/2}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1/2}.\end{aligned} \tag{6.40}$$

Аналогично (5.12), (5.14) имеем

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(p)} c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.41}$$

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(p+1)} c(\varphi)|\zeta|^{-1/2+1/2p}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.42}$$

Из (6.40)–(6.42) с учетом (1.4) и (6.12) вытекает оценка

$$\begin{aligned}|\mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon,\zeta)| \leqslant \mathcal{C}_{25} c(\varphi)^2 \bigl(\varepsilon^p + \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}\bigr)&\\ \times \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},&\end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_{25} = \|g\|_{L_\infty}\mathfrak{c}_p^{1/2}\alpha_1\beta_*^{1/2}\mathcal{C}_{13}C_\Lambda^{(2)}(C^{(p)}C^{(p+1)})^{1/2}$. Следовательно,

$$|\mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon,\zeta)| \leqslant \gamma_3^{(2)} c(\varphi)^2\bigl(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.43}$$

где $\gamma_3^{(2)} = 2\mathcal{C}_{25}$.

В итоге, сопоставляя (6.29), (6.30), (6.31), (6.35), (6.36), (6.39) и (6.43), приходим к неравенству

$$|(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}| \leqslant \gamma c(\varphi)^5\bigl(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}$$

при любом $\boldsymbol{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, где $\gamma = \mathcal{C}_5 + \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3^{(1)} + \gamma_3^{(2)}$. Следовательно,

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma c(\varphi)^5\bigl(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.44}$$

Теперь из (6.44) и (6.11) прямо вытекает искомая оценка (6.27) с постоянной $\mathcal{C}_{23} = \gamma + \mathcal{C}_5$. $\square$

Завершение доказательства теоремы 5.1. В силу (5.37) и (6.27)

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_7\bigl(c(\varphi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + c(\varphi)^3\varepsilon^p|\zeta|^{-1/2}\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ \mathcal{C}_{23}c(\varphi)^5\bigl(\varepsilon|\zeta|^{-1+1/2p} + \varepsilon^{2p}\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\end{aligned}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. Это влечет оценку (5.1) с постоянной $\mathcal{C}_1 = 2\widetilde{\mathcal{C}}_7 + \mathcal{C}_{23}$. $\square$

§ 7. Устранение сглаживающего оператора. Специальные случаи

7.1. **Устранение сглаживающего оператора.** При выполнении условия 3.6 вместо корректора (5.4) можно использовать стандартный корректор

$$K_D^0(\zeta;\varepsilon) := \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_D^0 - \zeta I)^{-1}, \tag{7.1}$$

который в этом случае непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Соответственно, в качестве приближения к решению задачи (4.4) вместо функции (5.7) можно использовать функцию

$$\mathbf{v}_\varepsilon^0 := (A_D^0 - \zeta I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon^p K_D^0(\zeta;\varepsilon)\mathbf{F} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon^p\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0. \tag{7.2}$$

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1, *а также условие* 3.6. *Пусть* $K_D^0(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (7.1), *а* $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ — *функция* (7.2). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathcal{C}}_2 c(\varphi)^4\big(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}+\varepsilon^p\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\tag{7.3}$$

или, в операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|(A_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_D^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p K_D^0(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\&\quad\leqslant\widetilde{\mathcal{C}}_2 c(\varphi)^4\big(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}+\varepsilon^p\big).\end{aligned}\tag{7.4}$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathcal{C}}_3 c(\varphi)^4\big(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/2+1/4p}+\varepsilon^p\big)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\tag{7.5}$$

Постоянные $\widetilde{\mathcal{C}}_2$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_3$ *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$, *а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ.

Для доказательства теоремы 7.1 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7.2. 1°. *Пусть* Λ *является мультипликатором из* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *в* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* M_Λ — *норма этого мультипликатора. Тогда для любого* $\mathbf{u}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *при* $\varepsilon>0$ *выполнена оценка*

$$\varepsilon^{2p}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{D}^p(\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2\,d\mathbf{x}\leqslant\check{\mathfrak{c}}_p M_\Lambda^2\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2+\varepsilon^{2p}|\mathbf{D}^p\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\big)\,d\mathbf{x}.\tag{7.6}$$

2°. *Пусть выполнено условие* 3.6. *Тогда матрица-функция* (1.12) *является мультипликатором из* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, *причем норма этого мультипликатора оценивается константой* $M_{\widetilde{g}}$, *зависящей лишь от* d, p, $\|g\|_{L_\infty}$, α_1, $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ. *При этом для любого* $\mathbf{u}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *при* $\varepsilon>0$ *выполнена оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\widetilde{g}^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\leqslant\check{\mathfrak{c}}_p M_{\widetilde{g}}^2\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2+\varepsilon^{2p}|\mathbf{D}^p\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\big)\,d\mathbf{x}.\tag{7.7}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. Выполняя замены $\mathbf{x}=\varepsilon\mathbf{y}$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{v}(\mathbf{y})$, имеем

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{2p}\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^p(\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}))|^2\,d\mathbf{x}\\&=\varepsilon^d\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{D}_{\mathbf{y}}^p(\Lambda(\mathbf{y})\mathbf{v}(\mathbf{y}))|^2\,d\mathbf{y}\leqslant M_\Lambda^2\varepsilon^d\|\mathbf{v}\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{7.8}$$

С учетом (3.9)

$$\begin{aligned}\varepsilon^d\|\mathbf{v}\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)}&\leqslant\check{\mathfrak{c}}_p\varepsilon^d\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2+|\mathbf{D}_{\mathbf{y}}^p\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\big)\,d\mathbf{y}\\&=\check{\mathfrak{c}}_p\int_{\mathbb{R}^d}\big(|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2+\varepsilon^{2p}|\mathbf{D}_{\mathbf{x}}^p\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\big)\,d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (7.8) вытекает (7.6).

Докажем теперь утверждение 2°. В силу леммы 1 пункта 1.3.2 книги [MSh] из условия 3.6 вытекает, что $\mathbf{D}^\alpha\Lambda$ при $|\alpha| = p$ является мультипликатором из $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем норма этого мультипликатора контролируется через $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и M_Λ. Тогда с учетом (1.3) и (1.5) матрица-функция $\widetilde{g} = g(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1}_m)$ является мультипликатором из $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем норма этого мультипликатора оценивается константой $M_{\widetilde{g}}$, зависящей лишь от d, p, $\|g\|_{L_\infty}$, α_1, $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и M_Λ. Доказательство неравенства (7.7) получается с помощью замен $\mathbf{x} = \varepsilon\mathbf{y}$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{y})$ (аналогично доказательству оценки (7.6)). $\square$

Доказательство теоремы 7.1. Пусть функции $\mathbf{v}_\varepsilon$ и $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ определены в (5.7) и (7.2) соответственно. Оценим их разность по норме в $H^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Учитывая (3.9), имеем

$$\begin{gathered}\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|^2_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon^{2p}\|\Lambda^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \check{\mathfrak{c}}_p\varepsilon^{2p}\left(\|\Lambda^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{D}^p(\Lambda^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right).\end{gathered} \tag{7.9}$$

В силу условия 3.6, неравенства $\|S_\varepsilon\|_{L_2\to L_2} \leqslant 1$ и (1.4) выполнено

$$\|\Lambda^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|\Lambda\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{7.10}$$

Далее, из леммы 7.2 вытекает неравенство

$$\begin{gathered}\varepsilon^{2p}\|\mathbf{D}^p(\Lambda^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \check{\mathfrak{c}}_p M_\Lambda^2\bigl(\|(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{2p}\|(I-S_\varepsilon)\mathbf{D}^p b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\bigr).\end{gathered} \tag{7.11}$$

Применяя предложение 1.7 и (1.4), имеем

$$\|(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{p+1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{7.12}$$

С учетом неравенства $\|S_\varepsilon\|_{L_2\to L_2} \leqslant 1$ и (1.4) справедлива оценка

$$\|(I-S_\varepsilon)\mathbf{D}^p b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)}. \tag{7.13}$$

Сопоставляя (7.9)–(7.13) и (5.12)–(5.14), приходим к неравенству

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{26}c(\varphi)\bigl(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.14}$$

где $\mathcal{C}_{26} = \alpha_1^{1/2}\max\{\check{\mathfrak{c}}_p M_\Lambda r_1 C^{(p+1)}, 2\check{\mathfrak{c}}_p^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty}C^{(p)} + 2\check{\mathfrak{c}}_p M_\Lambda C^{(2p)}\}$.

Теперь из (5.8) и (7.14) вытекает требуемая оценка (7.3) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}_2 = \mathcal{C}_2 + 2\mathcal{C}_{26}$.

Перейдем к доказательству неравенства (7.5). В силу (7.7) выполнено

$$\begin{gathered}\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\widetilde{g}^\varepsilon(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \check{\mathfrak{c}}_p M_{\widetilde{g}}^2\bigl(\|(I-S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{2p}\|(I-S_\varepsilon)\mathbf{D}^p b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\bigr).\end{gathered} \tag{7.15}$$

Отсюда и из (7.12), (7.13), (5.13), (5.14) вытекает оценка

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{27}c(\varphi)\bigl(\varepsilon|\zeta|^{-1/2+1/2p} + \varepsilon^p\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{7.16}$$

где $\mathcal{C}_{27} = \check{\mathfrak{c}}_p^{1/2} M_{\widetilde{g}} \alpha_1^{1/2} \max\{r_1 C^{(p+1)}, 2C^{(2p)}\}$.

Теперь из (5.10) и (7.16) следует искомое неравенство (7.5) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}_3 = \mathcal{C}_3 + 2\mathcal{C}_{27}$. $\square$

Сопоставляя теорему 7.1 и предложение 3.7, приходим к следующему утверждению.

Следствие 7.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Пусть* $K_D^0(\zeta;\varepsilon)$ *— оператор* (7.1), $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ *— функция* (7.2), $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$, *а* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица-функция* (1.12). *Кроме того, пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений*:

1°. $2p > d$;

2°. $g^0 = \underline{g}$ (*т. е., имеют место представления* (1.18)).

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки* (7.3)–(7.5), *причем постоянные* $\widetilde{\mathcal{C}}_2$, $\widetilde{\mathcal{C}}_3$ *зависят лишь от* m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

Замечание 7.4. 1) *При фиксированном* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *оценки из теоремы* 7.1 *имеют порядок* $O(\varepsilon^{1/2})$. *С ростом* $|\zeta|$ *погрешность уменьшается.* 2) *Оценки из теоремы* 7.1 *равномерны по углу* φ *в области вида* $\{\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} : |\zeta| \geqslant 1, \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \varphi_0\}$ *со сколь угодно малым* $\varphi_0 > 0$. 3) *Условия следствия* 7.3 *выполнены в следующих интересных для приложений случаях*: а) *когда* $p = 2$ *и* $d = 2$ *или* $d = 3$, *выполнено* $2p > d$; б) *когда* $m = n$, *выполнено* $g^0 = \underline{g}$. *Например, это верно для оператора* $A_\varepsilon = \Delta g^\varepsilon(\mathbf{x})\Delta$ *в* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *в любой размерности.*

7.2. **Специальные случаи.** Если $g^0 = \overline{g}$ (т. е., выполнены равенства (1.17)), то Γ-периодическое решение задачи (1.10) равно нулю: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$. В этом случае корректор (5.4) обращается в ноль и из теоремы 5.2 вытекает следующий результат.

Предложение 7.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Если* $g^0 = \overline{g}$ (*т. е., выполнены равенства* (1.17)), *то при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 c(\varphi)^4 \bigl(\varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\bigr) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В силу замечания 1.4 при условии $g^0 = \underline{g}$ матрица (1.12) постоянна: $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Применяя утверждение следствия 7.3 относительно потоков, приходим к следующему результату.

Предложение 7.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 5.1. *Если* $g^0 = \underline{g}$ (*т. е., имеют место представления* (1.18)), *то для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_3 c(\varphi)^4 \bigl(\varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/2+1/4p} + \varepsilon^p\bigr) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

§ 8. Аппроксимация резольвенты $(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$

8.1. **Общий случай.** В теоремах из §5 и §7 предполагалось, что $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $|\zeta| \geqslant 1$. В данном параграфе мы устанавливаем еще один результат об аппроксимации резольвенты $(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$, справедливый в более широкой области изменения параметра ζ. При ограниченных значениях $|\zeta|$, а также в точках ζ с малым φ или $2\pi - \varphi$ этот результат может оказаться предпочтительнее.

Теорема 8.1. *Пусть $\mathcal{O}$ — ограниченная область класса C^{2p}. Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$, где $c_* > 0$ — общая нижняя грань операторов $A_{D,\varepsilon}$ и A_D^0. Положим $\zeta - c_* = |\zeta - c_*|e^{i\psi}$ и введем обозначение*

$$\rho_*(\zeta) = \begin{cases} c(\psi)^2 |\zeta - c_*|^{-2}, & |\zeta - c_*| < 1 \\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_*| \geqslant 1 \end{cases},$$

где $c(\psi)$ определено в (3.1). Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (4.4) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (4.11) при $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Пусть $K_D(\zeta; \varepsilon)$ — оператор (5.4), а $\mathbf{v}_\varepsilon$ — функция (5.7). Пусть число ε_1 подчинено условию 4.4. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_1 \varepsilon \rho_*(\zeta) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_2 \varepsilon^{1/2} \rho_*(\zeta) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \qquad (8.1)$$

В операторных терминах,

$$\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_1 \varepsilon \rho_*(\zeta), \qquad (8.2)$$

$$\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_D(\zeta; \varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_2 \varepsilon^{1/2} \rho_*(\zeta). \quad (8.3)$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_3 \varepsilon^{1/2} \rho_*(\zeta) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \qquad (8.4)$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция (1.12). Постоянные $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ и $\mathfrak{C}_3$ зависят лишь от m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от параметров решетки Γ и от области $\mathcal{O}$.

Замечание 8.2. 1) *Величина $c(\psi)^2 |\zeta - c_*|^{-2}$ есть ни что иное, как величина, обратная к квадрату расстояния от точки ζ до $[c_*, \infty)$.* 2) *В качестве c_* можно выбрать $c_* = c_2$, где c_2 определено в (4.3).* 3) *Пусть $\nu > 0$ — сколь угодно малое число. Если считать ε достаточно малым, то в качестве c_* можно принять $c_* = \lambda_1^0 - \nu$, где λ_1^0 — первое собственное значение оператора A_D^0.* 4) *Легко указать верхнюю оценку числа c_*: из (4.2) видно, что $c_* \leqslant c_1 \mu_1^0$, где μ_1^0 — первое собственное значение оператора $B_p = \sum_{|\alpha|=p} \mathbf{D}^{2\alpha}$ с условиями Дирихле. Поэтому c_* ограничено величиной, зависящей лишь от d, p, $\|g\|_{L_\infty}$, α_1 и от области $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Применим теорему 5.1 при $\zeta = -1$. В силу (5.2)

$$\|(A_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (A_D^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathcal{C}_1\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{8.5}$$

Используем тождество

$$\begin{gathered}(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1} = (A_{D,\varepsilon} + I)(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \\ \times \left((A_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (A_D^0 + I)^{-1}\right)(A_D^0 + I)(A_D^0 - \zeta I)^{-1}.\end{gathered} \tag{8.6}$$

Из (8.5) и (8.6) вытекает, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнено

$$\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathcal{C}_1\varepsilon \sup_{x\geqslant c_*}(x+1)^2|x-\zeta|^{-2}. \tag{8.7}$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x\geqslant c_*}(x+1)^2|x-\zeta|^{-2} \leqslant \check{c}\rho_*(\zeta), \tag{8.8}$$

где $\check{c} = (c_* + 2)^2$. В силу замечания 8.2(4), $\check{c}$ ограничено величиной, зависящей лишь от d, p, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Теперь из (8.7) и (8.8) следует искомая оценка (8.2) с постоянной $\mathfrak{C}_1 = 2\mathcal{C}_1\check{c}$.

Применим теперь теорему 5.2 при $\zeta = -1$. В силу (5.9) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнена оценка

$$\|(A_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (A_D^0 + I)^{-1} - \varepsilon^p K_D(-1;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathcal{C}_2\varepsilon^{1/2}. \tag{8.9}$$

Заметим, что в силу леммы 6.2 с $\zeta = -1$ и (6.20) при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливо неравенство

$$\|\varepsilon^p\theta_\varepsilon K_D(-1;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_4\varepsilon^{1/2}, \tag{8.10}$$

где $\mathfrak{C}_4 = C(p;\mathcal{O})(\mathcal{C}_5 + 2\mathcal{C}_{13})$. Из (8.9) и (8.10) следует, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливо неравенство

$$\|(A_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (A_D^0 + I)^{-1} - \varepsilon^p(1-\theta_\varepsilon)K_D(-1;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_5\varepsilon^{1/2}, \tag{8.11}$$

где $\mathfrak{C}_5 = 2\mathcal{C}_2 + \mathfrak{C}_4$. Используем тождество

$$\begin{aligned}&(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p(1-\theta_\varepsilon)K_D(\zeta;\varepsilon) \\ &= (A_{D,\varepsilon} + I)(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \\ &\times \left((A_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (A_D^0 + I)^{-1} - \varepsilon^p(1-\theta_\varepsilon)K_D(-1;\varepsilon)\right) \\ &\times (A_D^0 + I)(A_D^0 - \zeta I)^{-1} + \varepsilon^p(\zeta+1)(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(1-\theta_\varepsilon)K_D(\zeta;\varepsilon).\end{aligned} \tag{8.12}$$

Поскольку образ операторов в (8.12) содержится в $H_0^p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, можно домножить слева на $A_{D,\varepsilon}^{1/2}$. С учетом (8.8) получаем

$$\begin{aligned}&\|A_{D,\varepsilon}^{1/2}\left((A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p(1-\theta_\varepsilon)K_D(\zeta;\varepsilon)\right)\|_{L_2\to L_2} \\ &\leqslant \check{c}\rho_*(\zeta)\|A_{D,\varepsilon}^{1/2}\left((A_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (A_D^0 + I)^{-1} - \varepsilon^p(1-\theta_\varepsilon)K_D(-1;\varepsilon)\right)\|_{L_2\to L_2} \\ &+ \varepsilon^p|\zeta+1|\sup_{x\geqslant c_*}x^{1/2}|x-\zeta|^{-1}\|(1-\theta_\varepsilon)K_D(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2\to L_2}.\end{aligned} \tag{8.13}$$

Обозначим слагаемые в правой части (8.13) через $\mathcal{L}_1(\zeta;\varepsilon)$ и $\mathcal{L}_2(\zeta;\varepsilon)$. Оценка первого члена вытекает из (4.2) и (8.11):

$$\mathcal{L}_1(\zeta;\varepsilon) \leqslant \check{c}\mathfrak{C}_5 c_1^{1/2}\varepsilon^{1/2}\rho_*(\zeta), \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1. \tag{8.14}$$

Поскольку $K_D(\zeta;\varepsilon) = R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(A_D^0)^{-1/2}(A_D^0)^{1/2}(A_D^0-\zeta I)^{-1}$, с учетом (1.4), (5.3), (5.20) и (6.1) имеем

$$\begin{aligned}&\|(1-\theta_\varepsilon)K_D(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant C_\Lambda^{(1)}\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(p)}\|(A_D^0)^{-1/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\sup_{x\geqslant c_*}x^{1/2}|x-\zeta|^{-1}.\end{aligned} \tag{8.15}$$

Из аналогов оценок (4.2) и (4.3) для оператора A_D^0 и из (6.20) следует, что

$$\|(A_D^0)^{-1/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \leqslant C(p;\mathcal{O})(c_0^{-1/2}+c_2^{-1/2}). \tag{8.16}$$

В силу (8.15) и (8.16) второй член в правой части (8.13) допускает оценку

$$\mathcal{L}_2(\zeta;\varepsilon) \leqslant \mathfrak{C}_6\varepsilon^p|\zeta+1|\sup_{x\geqslant c_*}x|x-\zeta|^{-2}, \tag{8.17}$$

где $\mathfrak{C}_6 = C_\Lambda^{(1)}\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(p)}C(p;\mathcal{O})(c_0^{-1/2}+c_2^{-1/2})$. Как проверено в [Su5, (8.17)], справедлива оценка

$$|\zeta+1|\sup_{x\geqslant c_*}x|x-\zeta|^{-2} \leqslant (c_*+2)(c_*+1)\rho_*(\zeta). \tag{8.18}$$

Теперь из (8.17) и (8.18) вытекает, что

$$\mathcal{L}_2(\zeta;\varepsilon) \leqslant \mathfrak{C}_6(c_*+2)(c_*+1)\varepsilon^p\rho_*(\zeta). \tag{8.19}$$

В итоге неравенства (8.13), (8.14) и (8.19) приводят к оценке

$$\begin{aligned}&\|A_{D,\varepsilon}^{1/2}\left((A_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_D^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p(1-\theta_\varepsilon)K_D(\zeta;\varepsilon)\right)\|_{L_2\to L_2}\\ &\leqslant \mathfrak{C}_7\varepsilon^{1/2}\rho_*(\zeta), \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\end{aligned}$$

где $\mathfrak{C}_7 = \check{c}\mathfrak{C}_5 c_1^{1/2}+\mathfrak{C}_6(c_*+2)(c_*+1)$. Отсюда с учетом (4.2), (4.3) и (6.20) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}&\|(A_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(A_D^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon^p(1-\theta_\varepsilon)K_D(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \mathfrak{C}_8\varepsilon^{1/2}\rho_*(\zeta), \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\end{aligned} \tag{8.20}$$

где $\mathfrak{C}_8 = C(p;\mathcal{O})(c_0^{-1/2}+c_2^{-1/2})\mathfrak{C}_7$. Наконец, в силу (8.8) и (8.10) имеем

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon^p\theta_\varepsilon K_D(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \|\varepsilon^p\theta_\varepsilon K_D(-1;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})}\|(A_D^0+I)(A_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \check{c}^{1/2}\mathfrak{C}_4\varepsilon^{1/2}\rho_*(\zeta)^{1/2}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\end{aligned}$$

Отсюда и из (8.20) следует искомое неравенство (8.3) с постоянной $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_8+\check{c}^{1/2}\mathfrak{C}_4$.

Остается проверить (8.4). Из (8.1) с учетом (1.3) и (1.5) следует, что при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \kappa_9(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\mathfrak{C}_2\varepsilon^{1/2}\rho_*(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.21}$$

Далее, аналогично (6.22)–(6.24) имеем

$$\begin{aligned}\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ \leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty} r_1\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \mathcal{C}_{21}\sum_{l=1}^{p}\varepsilon^l\|\mathbf{D}^l b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \mathfrak{C}_9\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)},\end{aligned} \tag{8.22}$$

где $\mathfrak{C}_9 = \|g\|_{L_\infty} r_1\alpha_1^{1/2} + p\,\mathcal{C}_{21}\alpha_1^{1/2}$.

Из (4.10) и (8.8) вытекает оценка

$$\|(A_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{2p}(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}\sup_{x\geqslant c_*} x|x-\zeta|^{-1} \leqslant \check{c}^{1/2}\widehat{c}\rho_*(\zeta)^{1/2}.$$

Следовательно, с учетом (5.3)

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\|\mathbf{u}_0\|_{H^{2p}(\mathcal{O})} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\check{c}^{1/2}\widehat{c}\rho_*(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.23}$$

Отсюда и из (8.22) следует, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{10}\varepsilon\rho_*(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\mathfrak{C}_{10} = \mathfrak{C}_9 C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\check{c}^{1/2}\widehat{c}$. Вместе с (8.21) это влечет (8.4) с постоянной $\mathfrak{C}_3 = \kappa_9(d,p)\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_{10}$. □

8.2. **Устранение сглаживающего оператора.**

Теорема 8.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1 *и условие* 3.6. *Пусть* $K_D^0(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (7.1) *и* $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ — *функция* (7.2). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_2\varepsilon^{1/2}\rho_*(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.24}$$

или, в операторных терминах,

$$\|(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (A_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K_D^0(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^p(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_2\varepsilon^{1/2}\rho_*(\zeta). \tag{8.25}$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_3\varepsilon^{1/2}\rho_*(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.26}$$

Постоянные $\widetilde{\mathfrak{C}}_2$ *и* $\widetilde{\mathfrak{C}}_3$ *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$, *а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ.

Доказательство. Аналогично (7.9)–(7.13) имеем

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{11}\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)}, \tag{8.27}$$

где $\mathfrak{C}_{11} = \alpha_1^{1/2}(2\check{\mathfrak{c}}_p^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty} + \check{\mathfrak{c}}_p M_\Lambda(r_1+2))$. Из (8.23) и (8.27) вытекает оценка

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{12}\varepsilon\rho_*(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.28}$$

где $\mathfrak{C}_{12} = C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\check{c}^{1/2}\widehat{c}\,\mathfrak{C}_{11}$.

Неравенства (8.1) и (8.28) влекут искомую оценку (8.24) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_2 = \mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_{12}$.

Остается проверить (8.26). Аналогично (7.12), (7.13), (7.15) имеем

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{13}\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^{2p}(\mathbb{R}^d)}, \tag{8.29}$$

где $\mathfrak{C}_{13} = \check{\mathfrak{c}}_p^{1/2} M_{\widetilde{g}} \alpha_1^{1/2}(r_1+2)$. Из (8.23) и (8.29) вытекает, что

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{14}\varepsilon\rho_*(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.30}$$

где $\mathfrak{C}_{14} = C_{\mathcal{O}}^{(2p)}\check{c}^{1/2}\widehat{c}\,\mathfrak{C}_{13}$. Сопоставляя (8.4) и (8.30), приходим к искомой оценке (8.26) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_3 = \mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_{14}$. $\square$

Из теоремы 8.3 и предложения 3.7 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Следствие 8.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть* $K_D^0(\zeta;\varepsilon)$ *— оператор* (7.1), $\mathbf{v}_\varepsilon^0$ *— функция* (7.2), $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$, *а* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица-функция* (1.12). *Кроме того, пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений*:

1°. $2p > d$;

2°. $g^0 = \underline{g}$ (*т. е., имеют место представления* (1.18)).

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки* (8.24)–(8.26), *причем постоянные* $\widetilde{\mathfrak{C}}_2$, $\widetilde{\mathfrak{C}}_3$ *зависят лишь от* m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и от области* $\mathcal{O}$.

8.3. **Специальные случаи.** Следующие утверждения получаются аналогично предложениям 7.5 и 7.6.

Предложение 8.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Если* $g^0 = \overline{g}$ (*т. е., выполнены равенства* (1.17)), *то при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^p(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_2\varepsilon^{1/2}\rho_*(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Предложение 8.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Если* $g^0 = \underline{g}$ (*т. е., имеют место представления* (1.18)), *то для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_3\varepsilon^{1/2}\rho_*(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Список литературы

[BaPan] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLPa] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[V] Вениаминов Н. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 5, 69–103.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[Zh] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), № 3, 305–308.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[ZhPas2] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи мат. наук **71** (2016), вып. 3, 27–122.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[KoE] Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д., *Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач*, Докл. АН СССР **246** (1979), вып. 4, 812–815.

[KuSu] Кукушкин А. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов высокого порядка с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **28** (2016), вып. 1, 89–149.

[MSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1986.

[Pas1] Пастухова С. Е., *Операторные оценки усреднения для эллиптических уравнений четвертого порядка*, Алгебра и анализ **28** (2016), вып. 2, 204–226.

[Pas2] Pastukhova S. E., *Estimates in homogenization of higher-order elliptic operators*, Appl. Anal. **16** (2016), no. 2, 1–18.

[PSu1] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптической задачи Дирихле: оценки погрешности в $(L_2 \to H^1)$-норме*, Функц. анализ и прил. **46** (2012), вып. 2, 92–96.

[PSu2] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.

[So] Солонников В. А., *Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса–Л. Ниренберга. II*, Тр. МИАН СССР **92** (1966), 233–297.

[St] Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[Su1] Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности в L_2 при усреднении эллиптической задачи Дирихле*, Функц. анализ и прил. **46** (2012), вып. 3, 91–96.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463–476.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453–3493.

[Su4] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра*, Функц. анализ и его прил. **48** (2014), вып. 4, 88–94.

[Su5] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), вып. 4, 87–166.