# ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН



Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ – 03/2016

# Векторные $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$-расслоения с общим слоем $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками

**С. С. Яковенко**

Санкт-Петербургский Государственный Университет,
математико-механический факультет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева
sergey.s.yakovenko@gmail.com

Июль, 2016

**Аннотация**

В работе изучаются векторные расслоения ранга два на $\mathbf{P}^1_A$, где $A$ – дедекиндова область. В случае области главных идеалов получена полная классификация расслоений с общим слоем $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками.

**Ключевые слова и фразы**: векторное расслоение, арифметическая поверхность, проективная прямая, линейное расслоение, приведение, подскок.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант РНФ-14-11-00456).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

# Введение

В данной статье мы изучаем векторные расслоения на поверхности $\mathbf{P}^1_A$, где $A$ – дедекиндово кольцо, особенно интересен случай $A = \mathbb{Z}$.

Опыт алгебраической геометрии по изучению векторных расслоений на комплексных проективных пространствах (см. [5]) показывает, что проблема классификации векторных расслоений на поверхностях весьма трудная. В случае же $\mathbf{P}^1_A$ известно совсем немногое, а именно: в статье [3] А. Л. Смирнова получена классификация векторных расслоений с тривиальным общим слоем и простыми подскоками над областями главных идеалов.

Следующим возможным шагом в этом направлении является классификация векторных расслоений ранга 2 на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ с общим слоем $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками.

Основной результат работы представлен в теореме 2.1.17 и предложениях 2.2.4, 2.2.5. Отметим, что классификация получена в случае произвольной области главных идеалов.

В примере 2.4 вычислено количество неизморфных расслоений на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, имеющих подскок в одной точке $p \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$.

Данная работа является частью реализации программы [3] по синтезу теории векторных расслоений на алгебраических многообразиях и теории векторных расслоений на компактифицированных арифметических кривых, представленной геометрией чисел.

# 1 Предварительные сведения

Пусть $A$ – дедекиндова область.

Как обычно (см., например, [4]), $\mathbf{P}^1_A = \operatorname{Proj} A[t_0, t_1], \quad \deg t_0 = \deg t_1 = 1$, $U_i$ – дополнение к нулям $t_i$, $U_{01} = U_0 \cap U_1$, $x = t_1/t_0$, $y = t_0/t_1$, $xy = 1$.

Тогда

$$\mathcal{O}(U_0) = A[x], \quad \mathcal{O}(U_1) = A[y], \quad \mathcal{O}(U_{01}) = A[x, y].$$

## 1.1 Некоторые известные результаты

Приведем некоторые известные результаты, связанные с векторными расслоениями на $\mathbf{P}^1_A$.

**1.1.1 Теорема** (Гротендик, [5]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_F$, где $F$ – поле, может быть представлено суммой линейных расслоений, причем слагаемые определены однозначно.*

Линейные расслоения на $\mathbf{P}^1_F$ также хорошо известны.

**1.1.2 Теорема** (Серр, [6]). *Всякое линейное расслоение на $\mathbf{P}^n_A$ изоморфно расслоению вида $p^*L \otimes \mathcal{O}(d)$, где $L$ – линейное расслоение на $\operatorname{Spec} A$, а $p$ – структурная проекция $\mathbf{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$.*

В частности, любое расслоение на $\mathbf{P}^1_F$ изоморфно расслоению $\mathcal{O}(d)$ для некоторого однозначно определенного $d \in \mathbb{Z}$.

Для произвольного дедекиндова $A$ имеет место следующий результат.

**1.1.3 Теорема** (Hanna, [1]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, где $A$ – дедекиндово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой либо линейные расслоения, либо расслоения ранга два.*

Полностью вопрос решен для евклидовых колец (см. [8]) или **??**).

**1.1.4 Теорема** (Hanna, [1]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, где $A$ – евклидово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения.*

В частности, всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения. Такая фильтрация называется линейной.

## 1.2 Теорема о замене базы и её следствия ([4])

Нам потребуются некоторые следствия этой теоремы. Сформулируем необходимые результаты. Пусть $f : X \to Y$ собственный морфизм нетеровых схем, $\mathcal{F}$ – когерентный $\mathcal{O}$-модуль, плоский над $Y$. Как обычно, $X_y$ – слой $f$ над $y \in Y$, а $\mathcal{F}_y = \mathcal{F}|_{X_y}$. Тогда функция $y \mapsto \chi(\mathcal{F}_y)$ локально постоянна на $Y$, а функция $y \mapsto \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$ (из $Y$ в $\mathbb{Z}$) полунепрерывна сверху на $Y$. Кроме того, если $Y$ – приведена и связна, то

(i) функция $y \mapsto \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$ постоянна на $Y$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_Y$-модуль $\mathcal{E} = R^p f_* \mathcal{F}$ – локально свободен (то есть является расслоением) и естественный морфизм $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$ – изоморфизм для всех $y \in Y$;

(ii) если выполнены (равносильные) условия предыдущего пункта, то естественный морфизм $R^{p-1} f_* \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \to H^{p-1}(X_y, \mathcal{F}_y)$ – изоморфизм для всех $y \in Y$.

## 1.3 Спектральная последовательность Бейлинсона

Некоторые методы, используемые в [5] для построения интересных векторных расслоений на $\mathbf{P}^n_{\mathbb{C}}$, можно применить и в случае $\mathbf{P}^1_A$. Например, это относится к двум спектральным последовательностям Бейлинсона.

**1.3.1 Теорема** (Бейлинсон). *Пусть $F$ – векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, а $p : \mathbf{P}^1_A \to \operatorname{Spec} A$ – структурная проекция. Существует спектральная последовательность с первым членом $E_1^{pq} = Rp_*^q(F(p)) \otimes \Omega^{-p}(p)$, сходящаяся к*

$$F^i = \begin{cases} F, & \text{если } i = 0; \\ 0, & \text{если } i \neq 0, \end{cases}$$

*то есть $E_\infty^{pq} = 0$, если $p + q \neq 0$.*

В частности, $E_1$-член этой последовательности расположен во втором квадранте, а его ненулевая часть расположена в нулевой и первой строках и имеет вид

$$\mathrm{H}^1(F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d^1} \mathrm{H}^1(F) \otimes \mathcal{O}$$

$$\mathrm{H}^0(F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d^1} \mathrm{H}^0(F) \otimes \mathcal{O}.$$

## 1.4 Оснащения и матрицы склейки

Пусть $E$ – векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$,

$$r = \operatorname{rk} E.$$

Оснащением $E$ назовем тривиализацию расслоений

$$E|U_0 = \mathcal{O}e_1 + \cdots + \mathcal{O}e_r,$$

$$E|U_1 = \mathcal{O}f_1 + \cdots + \mathcal{O}f_r.$$

Так как все проективные $A$-модули свободны, то по теореме Квиллена и Суслина ([9], [10]), каждое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$ допускает оснащение.

С оснащением связана матрица

$$\sigma \in \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}]), \tag{1}$$

называемая ниже матрицей склейки, такая, что

$$[e_1, \ldots, e_r]\sigma = [f_1, \ldots, f_r] \tag{2}$$

на $U_{01}$. Иными словами, $j$-тый столбец $\sigma$ представляет собой запись $f_j$ в $e$-базисе.

Наоборот, с произвольной матрицей $\sigma \in \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}])$ связано оснащенное $r$-расслоение $E(\sigma)$ на $\mathbf{P}^1_A$. По определению, $E(\sigma)|U_0 = \mathcal{O}e_1 + \cdots + \mathcal{O}e_r$, $E(\sigma)|U_1 = \mathcal{O}f_1 + \cdots + \mathcal{O}f_r$, а на $U_{01}$ расслоения склеиваются с помощью соотношения (2).

Таким образом, множество классов изоморфизма оснащенных векторных $r$-расслоений на $\mathbf{P}^1_A$ представлено как $\mathrm{GL}_r(A[x,x^{-1}])$, а множество классов изоморфизма (неоснащенных) векторных $r$-расслоений представлено как двойной фактор

$$\mathrm{Vect}_r(\mathbf{P}^1) = \mathrm{GL}_r(A[x]) \diagdown \mathrm{GL}_r(A[x,x^{-1}]) \diagup \mathrm{GL}_r(A[x^{-1}]). \tag{3}$$

# 2 Расслоения с общим слоем $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками

Пусть $A$ – дедекиндово кольцо. Мы собираемся изучать расслоения $E$ ранга 2, такие что $E_\eta \cong \mathcal{O} + \mathcal{O}(1)$ для общей точки $\eta \in \operatorname{Spec} A$ и $E_y \cong \mathcal{O} + \mathcal{O}(1)$ или $E_y \cong \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(2)$ для каждой замкнутой $y \in \operatorname{Spec} A$. Точки подскока образуют конечное множество.

## 2.1 Классификация

**2.1.1.** Рассмотрим расслоение $F = E(1)$. Так как структура слоёв известна, можем вычислить первый лист спектральной последовательности Бейлинсона, воспользовавшись теоремой о замене базы. Ненулевыми элементами первого листа являются $E_1^{-1,0} = \mathcal{O}^3$ и $E_1^{0,0} = \mathcal{O}^5$, то есть первый лист имеет вид

$$\mathcal{O}^3(-1) \xrightarrow{d_1^{-1,0}} \mathcal{O}^5\,.$$

Дальнейшие вычисления показывают, что последовательность вырождается в члене $E_2$, тогда по теореме Бейлинсона

$$E_\infty^{0,0} = E_2^{0,0} = \mathrm{Coker}\left(d_1^{-1,0}\right) = F. \tag{4}$$

**2.1.2.** Для вычислений зафиксируем $\mathcal{O}$-базисы $e_1, e_2, e_3$ и $f_1, \dots, f_5$ для расслоений $\mathcal{O}^3$ и $\mathcal{O}^5$. Выбор базисов фиксирует отождествление

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}^3(-2), \mathcal{O}^5(-1)) \cong M_{5,3}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1))).$$

Как мы выяснили ранее, расслоение $F = E(1)$ представляется в виде коядра отображения, действующего из $\mathcal{O}(-1)^3$ в $\mathcal{O}^5$. Подкрутив соответствующие расслоения на $\mathcal{O}(-1)$, получим представление $E$ в виде фактора в точной последовательности

$$0 \to \mathcal{O}^3(-2) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}^5(-1) \to E \to 0, \tag{5}$$

где $\phi = t_0\phi_0 + t_1\phi_1$, а $\phi_0,\ \phi_1 \in M_{5,3}(A)$. Замена базисов позволяет отождествлять расслоения, построенные по эквивалентным матрицам, где $\phi \sim \phi'$, если $\phi' = \rho\phi\sigma^{-1}$, $\rho \in \mathrm{GL}_5(A)$, $\sigma \in \mathrm{GL}_3(A)$. Будет называть такие преобразования приведением $\phi$.

**2.1.3.** Рассмотрим морфизм $\mathcal{O}$-модулей

$$\phi : \mathcal{O}^3(-2) \to \mathcal{O}^5(-1). \tag{6}$$

Стрелку $\phi$ назовем невырожденной, если её коядро $E = \mathrm{Coker}(\phi)$ является расслоением ранга 2. Невырожденность стрелки равносильна её локальной расщепимости.

Докажем, что всякую невырожденную стрелку $\phi$ можно привести к более простому виду.

Ограничивая $\phi$ в точку $t_0 = 0$, из теории элементарных делителей получим $\phi \sim \phi^{(1)}$, где

$$\phi_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1_3 \\ 0_{2,3} \end{bmatrix} \in M_{5,3}(A),$$

где $1_3 \in M_{3,3}(A)$ обозначает единичную матрицу; для любых натуральных $n$, $k$ $0_{n,k} \in M_{n,k}(A)$ – нулевая матрица соответствующего размера.

**2.1.4.** Стабилизатор $\phi_1^{(1)}$ в $\mathrm{GL}_5(A) \times \mathrm{GL}_3(A)$ состоит из пар $(\rho, \alpha^{-1})$, где $\rho = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0_{2,2} & \delta \end{bmatrix}$, $\delta \in \mathrm{GL}_2(A)$, $\beta \in M_{3,2}(A)$ – произвольная матрица.

Теория элементарных делителей и произвольность обратимых матриц $\alpha$ и $\delta$ позволяют преобразовать $\phi$ в $\phi_1$, компоненты $\phi_1$ имеют вид

$$\phi_1^{(1)} = \phi_1^{(1)},\ \phi_0^{(1)} = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \text{а } N = \begin{bmatrix} 0 & \nu\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Из невырожденности $\phi$ следует, что $\nu_1 \in A^*$. Действительно, если это не так, то существует такой простой элемент $\pi$, делящий $\nu_1$, что по модулю $\pi$ у матрицы $\phi^{(1)}$ имеется единственный 3-минор, который может быть ненулевым. Однако этот однородный полином степени 3 геометрически приводим, что противоречит невырожденности.

Поэтому можно считать $\nu_1 = 1$. Из этого следует, что $\mathrm{Coker}(\phi_1)$ не зависит от третьего столбца $M$, так как его можно подправить с помощью второй строки $N$. Таким образом, получили

$$\phi \sim \phi_2 = t_1 \begin{bmatrix} 1_3 \\ 0_{2,3} \end{bmatrix} + t_0 \begin{bmatrix} M \\ N(\nu) \end{bmatrix}, \text{где } N(\nu) = \begin{bmatrix} 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ \text{а } M = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,1} & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ \varepsilon_{2,1} & \varepsilon_{2,2} & 0 \\ \varepsilon_{3,1} & \varepsilon_{3,2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь мы можем описать, как устроены слои $\mathrm{Coker}(\phi)$, используя достаточно простой вид $\phi^{(2)}$.

**2.1.5 Предложение.** *Если $A$ - поле, то*

$$E \cong \begin{cases} \mathcal{O} + \mathcal{O}(1), & \text{при } \nu \neq 0; \\ \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(2), & \text{при } \nu = 0. \end{cases}$$

*Доказательство.* Точность (5) показывает, что $\mathrm{Det}\, E \simeq \mathcal{O}_X(1)$ и $E \simeq \mathcal{O}_X(-d) + \mathcal{O}_X(d+1)$ для некоторого $d \geq 0$. Также с (5) связана длинная точная последовательность когомологий

$$0 \longrightarrow H^0(X,E) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X^3(-2)) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(-2))^3 \simeq A^3 \longrightarrow 0, \qquad (8)$$

откуда $h^0(X,E) = 3$, а $d \leq 1$. Чтобы научиться отличать случай $d = 0$ от $d = 1$, рассмотрим подкрученную на $\mathcal{O}(-1)$ последовательность (5), а также связанную с ней длинную точную последовательность

$$0 \to H^0(E(-1)) \longrightarrow H^1(\mathcal{O}_X^3(-3)) \xrightarrow{H^1(\phi(-1))} H^1(\mathcal{O}_X^5(-2)) \longrightarrow H^1(E(-1)) \to 0. \qquad (9)$$

Нам нужна стрелка $H^1(\phi(-1))$. Будем вычислять сопряженную стрелку

$$H^0([\phi(-1)]^\vee \otimes K_X) : H^0(\mathcal{O}_X)^5 \to H^0(\mathcal{O}_X(1))^3,$$

где $K_X$ - канонический класс. Для этого нужна лишь функториальность двойственности $H^1(\phi)^\vee = H^0(\phi^\vee)$. Ввиду этого искомая стрелка задана умножением на сопряженную матрицу $\phi^* \in M_{5,3}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(1)))$. В базисах $f_1^*, \dots, f_5^*$ и $t_0e_1, \dots, t_0e_3, t_1e_1, \dots, t_1e_3$ матрица $\phi^*$ выглядит так

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_{1,1} & \varepsilon_{2,1} & \varepsilon_{3,1} & 0 & 0 \\ \varepsilon_{1,2} & \varepsilon_{2,2} & \varepsilon_{3,2} & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Откуда имеем $H^0(X, E(-1) = A \oplus A/\nu$, $H^1(X, E(-1)) = A/\nu$, что завершает доказательство предложения. □

**2.1.6 Следствие.** *$H^0(X, E(-1)) = A \oplus A/\nu$, $H^1(X, E(-1)) = A/\nu$*

*Доказательство.* Получено в ходе доказательства предыдущего предложения. □

Из предложения 2.1.5 и предположения о структуре расслоения $E$ имеем $\nu \neq 0$.

**2.1.7.** Далее считаем, что кольцо $A$ весьма специального вида, а именно – факториальное дедекиндово кольцо, иными словами, $A$ – область главных идеалов.

**2.1.8.** Займёмся дальнейшим приведением $\phi$. Невырожденность $\phi$ равносильна невырожденности ограничений на окрестности $U_0$ и $U_1$. Рассмотрим ограничение $\phi$ на $U_0$

$$\phi\,|_{U_0} = \phi_0 + x\phi_1 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,1} + x & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ \varepsilon_{2,1} & \varepsilon_{2,2} + x & 0 \\ \varepsilon_{3,1} & \varepsilon_{3,2} & x \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Ограничивая $\phi$ в точку $x = -\varepsilon_{1,1}$, получим одно из необходимых условий невырожденности:

$$\gcd(\varepsilon_{2,1}, \varepsilon_{3,1}) = 1, \tag{11}$$

то есть существуют такие $\overline{\varepsilon_{2,1}}$, $\overline{\varepsilon_{3,1}} \in A$, что

$$\varepsilon_{2,1}\,\overline{\varepsilon_{2,1}} + \varepsilon_{3,1}\,\overline{\varepsilon_{3,1}} = 1. \tag{12}$$

Как мы увидим в следующих пунктах, это условие не является достаточным.

**2.1.9.** Напомним, что стабилизатор $\phi_1^{(1)}$ в $\mathrm{GL}_5(A) \times \mathrm{GL}_3(A)$ состоит из пар матриц $(\rho, \alpha^{-1})$, определенных в 2.1.4. Вычислим стабилизатор $\phi_1^{(2)}$. Он состоит из пар $(\rho', \alpha')$, имеющих следующий вид

$$\rho' = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \\ 0 & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \beta_{3,1} & \beta_{3,2} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{1,1} & \delta_{1,2} \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{2,1} & \delta_{2,2} \end{bmatrix}, \quad \alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ 0 & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ 0 & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\text{причём} \begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} \in \tilde{\Gamma}_0(\nu), \text{ то есть } \alpha_{3,2} \equiv 0 \pmod{\nu}. \tag{13}$$

Возьмем $\alpha_{1,2} = -\alpha_{1,1}\overline{\varepsilon_{2,1}}\,\varepsilon_{1,1}$, $\alpha_{1,3} = -\alpha_{1,1}\overline{\varepsilon_{2,1}}\,\varepsilon_{1,1}$, где $\overline{\varepsilon_{2,1}}$, $\overline{\varepsilon_{3,1}}$ из (12). Тем самым избавимся от коэффициента $\varepsilon_{1,1}$ в $\phi^{(2)}$.

Далее будем считать $\alpha_{1,1} = 1$. К тому же заметим, что произвольность матрицы $(\beta_{i,j})_{1 \le i \le 3,\, 1 \le j \le 2}$, позволяет считать коэффициенты $\varepsilon_{k,2}$ при $1 \le k \le 3$ определенными по модулю идеала $(\nu)$.

Из невырожденности $\phi^{(2)}$ также следует, что хотя бы один из коэффициентов $\varepsilon_{2,1}, \varepsilon_{3,1}$ взаимно прост с $\nu$. Это обстоятельство и условие (13) сводят следующий шаг приведения к рассмотрению двух случаев.

**2.1.10.** Случай I: $\varepsilon_{3,1} \not\equiv 0 \pmod{\nu}$. Так как $\varepsilon_{3,1}$ взаимно прост с $\nu$ и с $\varepsilon_{2,1}$ по (11), существуют такие $\tau$ и $\omega$, что $\varepsilon_{2,1}\,\nu\tau + \varepsilon_{3,1}\,\omega = 1$. Положим

$$\begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{3,1} & -\varepsilon_{2,1} \\ \nu\tau & \omega \end{bmatrix} \in \tilde{\Gamma}_0(\nu). \tag{14}$$

Тогда $\phi \sim \phi^{(2)}$ приводится к виду

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2,2} & 0 \\ 1 & \varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

**2.1.11.** Случай II: $\varepsilon_{3,1} \equiv 0 \pmod{\nu}$. Напомним, что имеются $\overline{\varepsilon_{2,1}}, \overline{\varepsilon_{3,1}} \in A$ из условия (12). Определим

$$\begin{bmatrix} \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon_{2,1}} & \overline{\varepsilon_{3,1}} \\ -\varepsilon_{3,1} & \varepsilon_{2,1} \end{bmatrix} \in \tilde{\Gamma}_0(\nu). \tag{16}$$

Тогда $\phi$ приводится к виду

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ 1 & \varepsilon_{2,2} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

**2.1.12.** Таким образом, всякая невырожденная $\phi$ эквивалентна стрелке вида (15) или (17). Докажем теперь необходимое и достаточное условие невырожденности $\phi$.

**2.1.13 Предложение.** *Стрелка $\phi$ является невырожденной тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*

(i) $\varepsilon_{2,2} = 0$ *и* $\gcd(\varepsilon_{1,2}, \nu) = 1$, *если $\phi$ приведена к виду* (15)*;*

(ii) $\varepsilon_{2,2} = \varepsilon_{1,2} = 0$ *и* $\gcd(\nu, \varepsilon_{3,2}) = 1$, *если $\phi$ приведена к виду* (17).

*Доказательство.* Начнем со случая стрелки вида (15).

Невырожденность $\phi$ равносильна невырожденности ограничений $\phi$ на $U_0$ и $U_1$. Ограничение $\phi$ на $U_1$ имеет вид

$$\phi\,|_{U_1} = y\phi_0 + \phi_1 = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon_{1,2}\, y & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2,2}\, y + 1 & 0 \\ y & \varepsilon_{3,2}\, y & 1 \\ 0 & \nu y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{2,2}\, y + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \nu y & 0 \\ 0 & (-\varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,2}\, y) y^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что невырожденность ограничения на $U_1$ равносильна инъективности морфизма

$$A[y] \to A[y]^3 : 1 \mapsto (\varepsilon_{2,2}\, y + 1,\ \nu y,\ (-\varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,2}\, y) y^2)$$

и проективности его коядра. Расщепимость проекции на коядро равносильна расщепимости вложения $A[y] \to A[y]^3$, то есть унимодулярности строки

$$(\varepsilon_{2,2}\, y + 1,\ \nu y,\ (-\varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,2}\, y) y^2).$$

Предположим, что данная строка унимодулярна, тогда в точке $y = \nu$ она принимает вид

$$(\varepsilon_{2,2}\, \nu + 1,\ \nu^2, (-\varepsilon_{3,2} + \varepsilon_{1,2}\, \nu) \nu^2),$$

и существует тройка $(A, B, C) \in A^3$, такая что

$$A(\varepsilon_{2,2}\,\nu+1)+B\nu^2+C(-\varepsilon_{3,2}+\varepsilon_{1,2}\,\nu)\nu^2=1.$$

Сразу имеем $A=1$, но из этого следует, что $\varepsilon_{2,2}$ делится на $\nu$. Однако ранее мы отмечали, что коэффициент $\varepsilon_{2,2}$ определен по модулю $\nu$. То есть $\varepsilon_{2,2}=0$ является необходимым условием невырожденности $\phi$.

Ограничение $\phi$ на $U_0$ имеет вид

$$\phi\mid_{U_0}=\phi_0+x\phi_1=\begin{bmatrix}x & \varepsilon_{1,2} & 0\\ 0 & \varepsilon_{2,2}+x & 0\\ 1 & \varepsilon_{3,2} & x\\ 0 & \nu & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0 & \varepsilon_{1,2}-\varepsilon_{3,2}\,x & 0\\ 0 & \varepsilon_{2,2}+x & 0\\ 1 & \varepsilon_{3,2} & 0\\ 0 & \nu & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}0 & \varepsilon_{1,2}+\varepsilon_{3,2}\,\varepsilon_{2,2}\,x & 0\\ 0 & \varepsilon_{2,2}+x & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \nu & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Применяя рассуждение, аналогичное предыдущему, к морфизму

$$A[x]\to A[x]^3 : 1\mapsto(\varepsilon_{1,2}+\varepsilon_{3,2}\,\varepsilon_{2,2}\,x, \varepsilon_{2,2}+x, \nu),$$

получим равносильность невырожденности ограничения $\phi$ на $U_0$ и унимодулярности строки $(\varepsilon_{1,2}+\varepsilon_{3,2}\,\varepsilon_{2,2}\,x, \varepsilon_{2,2}+x, \nu)$. Воспользовавшись условием $\varepsilon_{2,2}=0$, получим второе необходимое условие невырожденности, а именно: невырожденность стрелки рассматриваемого вида влечет унимодулярность строки $(\varepsilon_{1,2}, \nu)$.

Достаточность этих условий проверяется непосредственно.

Пусть выполнены условия $\varepsilon_{2,2}=0$, $(\varepsilon_{1,2}, \nu)=1=\varepsilon_{1,2}\,\zeta+\nu\xi$.

Невырожденность сужения на $U_1$ очевидна. Невырожденность сужения на $U_0$ равносильна унимодулярности строки $[\varepsilon_{1,2}, x, \nu]$, имеем

$$(\zeta+x\zeta)\cdot\varepsilon_{1,2}-1\cdot x+(\xi+x\xi)\cdot\nu=1.$$

Перейдем к рассмотрению случая стрелки вида (17).

Ограничение $\phi$ на $U_1$ имеет вид

$$\phi\mid_{U_1}=y\phi_0+\phi_1=\begin{bmatrix}1 & \varepsilon_{1,2}\,y & 0\\ y & \varepsilon_{2,2}\,y+1 & 0\\ 0 & \varepsilon_{3,2}\,y & 1\\ 0 & \nu y & 0\\ 0 & 0 & y\end{bmatrix}\rightsquigarrow\begin{bmatrix}1 & \varepsilon_{1,2}\,y & 0\\ 0 & -\varepsilon_{1,2}\,y^2+\varepsilon_{2,2}\,y+1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & \nu y & 0\\ 0 & -\varepsilon_{3,2}\,y^2 & 0\end{bmatrix}.$$

Легко получить следующие необходимые условия невырожденности: $\varepsilon_{2,2}=0$, $\varepsilon_{1,2}=0$, строка $(\nu, \varepsilon_{3,2})$ унимодулярна.

Докажем достаточность. Для этого нужно показать, что при данных условиях стрелка невырождена на $U_0$. Как и ранее, вопрос сводится к проверке унимодулярности строки $(-x^2-\varepsilon_{2,2}\,x+\varepsilon_{1,2}, \varepsilon_{3,2}, \nu)$. Напомним, что $\varepsilon_{2,2}=\varepsilon_{1,2}=0$, $\nu\zeta+\varepsilon_{3,2}\,\xi=1$, поэтому

$$\phi\mid_{U_0}\ \text{невырождена}\ \Leftrightarrow(-x^2, \varepsilon_{3,2}, \nu)\ \text{унимодулярна}.$$

Подберем нужную линейную комбинацию

$$-x^2 \cdot 1 + \varepsilon_{3,2} \cdot (\xi + x^2\xi) + \nu \cdot (\zeta + x^2\zeta) = 1,$$

это завершает доказательство предложения. $\square$

**2.1.14.** Таким образом, мы получили две серии расслоений, в каждой из которых расслоения задаются определённым набором параметров. Введем для удобства новые обозначения.

**2.1.15.** Расслоения типа $a$. Пусть стрелка в последовательности (5) приводится к виду

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \zeta & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{18}$$

где строка $(\varepsilon,\, \nu)$ унимодулярна, $\nu \neq 0$. По предложению (2.1.13), $\phi$ является невырожденной, то есть определяет 2-расслоение.

Будем называть расслоения, определяемые такими $\phi$, расслоениями типа $a$.

Обозначим

$$E_a^{\nu,\varepsilon,\zeta} = \operatorname{Coker} \phi, \tag{19}$$

где символ $a$ указывает на тип расслоения.

**2.1.16.** Расслоения типа $b$. Пусть стрелка в последовательности (5), приводится к виду

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где строка $(\varepsilon,\, \nu)$ унимодулярна, $\nu \neq 0$, по предложению (2.1.13) $\phi$ является невырожденной, то есть определяет 2-расслоение.

Будем называть расслоения, определяемые такими $\phi$, расслоениями типа $b$. Обозначим

$$E_b^{\nu,0,\varepsilon} = \operatorname{Coker} \phi, \tag{21}$$

где символ $b$ указывает на тип расслоения.

**2.1.17 Теорема.** *Пусть $E$ – векторное 2-расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, причем его общий слой $E_K$ на $\mathbf{P}^1_K$ изоморфен $\mathcal{O} + \mathcal{O}(1)$, а все подскоки имеют вид $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(2)$. Тогда $E$ изоморфно или расслоению вида $E_a^{\nu,\varepsilon,\zeta}$, или расслоению вида $E_b^{\nu,0,\varepsilon}$, где $\nu$ и $\varepsilon$ автоматически взаимно просты.*

*Доказательство.* Учитывая следствия теоремы о замене базы 1.2, знание общего слоя и вид подскоков, легко понять, что $H^1(\mathbf{P}^1, E) \simeq H^1(\mathbf{P}^1, E(-1)) \simeq 0$,

$H^0(\mathbf{P}^1, E) \simeq A^3$, $H^0(\mathbf{P}^1, E(1)) \simeq A^5$. Применяя к $E(1)$ теорему Бейлинсона (см. (1.3.1)) и открутку, получим представление $E$ в виде фактора в точной последовательности

$$0 \to \mathcal{O}^3(-2) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}^5(-1) \to E \to 0, \tag{22}$$

где $\phi = t_0\phi_0 + t_1\phi_1$, а $\phi_0,\ \phi_1 \in M_{5,3}(A)$. Мы показали, что всякая невырожденная стрелка $\phi$ приводится к виду (15) или (17), воспользовавшись предложением (2.1.13), окончательно получим в каждом из случаев.

Если расслоение имеет тип $a$, то

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

где строка $(\varepsilon_{1,2}, \nu)$ унимодулярна.

Если расслоение имеет тип $b$, $\phi$ приводится к виду

$$\phi \sim t_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

где строка $(\varepsilon_{3,2}, \nu)$ унимодулярна. $\square$

## 2.2 Морфизмы между расслоениями.

Пусть даны 2-расслоения $F$ и $G$, имеющие общий слой $\mathcal{O} + \mathcal{O}(1)$ и простые подскоки, мы хотим изучить морфизмы между ними. Функториальность спектральной последовательности Бейлинсона сводит вычисление $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$ к перечислению коммутативных диаграмм вида

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}^3(-2) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{O}^5(-1) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"] & F \arrow[r] & 0 \\ \mathcal{O}^3(-2) \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{O}^5(-1) \arrow[r] & G \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где $\phi$ и $\psi$ – стрелки из определения $F$ и $G$. Уравнение коммутативности имеет следующий вид:

$$\lambda\phi = \psi\theta. \tag{25}$$

Теорема 2.1.17 сводит изучение этого вопроса к рассмотрению трех случаев, которые будут подробно разобраны в следующих предложениях.

**2.2.1 Предложение.** *Пусть* $F = F_a^{\nu,\varepsilon,\xi}$ *или* $F = F_b^{\nu,0,\varepsilon}$, $G = G_a^{\mu,\zeta,\chi}$ *или* $G = G_b^{\mu,0,\zeta}$ *(см. определения в (2.1.15), (2.1.16)), где* $(\nu,\varepsilon) = 1$, $(\mu,\zeta) = 1$, $\nu \neq 0$, $\mu \neq 0$. *Композиция функтора* $H^0$ *и канонических изоморфизмов* $H^0(X,F) \simeq A^3$ *и* $H^0(X,G) \simeq A^3$ *из (7), отождествляет* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F,G)$ *с множеством* $\theta \in M_{3,3}(A)$ *(переводя при этом композиции в произведения), для которых выполнены следующие условия целочисленности матриц*

$$\lambda_{2,2}N(\nu) = N(\mu)\theta, \quad \lambda_{2,2} \in M_{2,2}(A), \tag{26}$$

$$(M(\zeta)\theta - \theta M(\varepsilon))_{*,k} \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \in M_{3,2}(A),\ 2 \leq k \leq 3. \tag{27}$$

*И выполняется условие*

$$(M(\zeta)\theta - \theta M(\varepsilon))_{*,1} = 0_3 \tag{28}$$

*Доказательство.* Предположим, что существует пара морфизмов $(\theta,\lambda)$, удовлетворяющих уравнению (25). В точке $t_0 = 0$ коммутирование сводится к равенствам $\lambda_{1,1} = \theta$, $\lambda_{2,1} = 0$, где $\lambda_{2,1} \in M_{2,3}(A)$.

$$\begin{bmatrix} \theta & \lambda_{1,2} \\ 0 & \lambda_{2,2} \end{bmatrix} \phi = \psi\theta. \tag{29}$$

Запишем $\phi$ и $\psi$ в виде

$$\phi = \begin{bmatrix} M(\varepsilon) \\ N(\nu) \end{bmatrix},\ \psi = \begin{bmatrix} M(\zeta) \\ N(\mu) \end{bmatrix}, \tag{30}$$

тогда условие (29) точке $t_1 = 0$ запишется в виде двух условий

$$\theta M(\varepsilon) + \lambda_{1,2}N(\nu) = M(\zeta)\theta, \quad \lambda_{2,2}N(\nu) = N(\mu)\theta. \tag{31}$$

Условие на $\lambda_{1,2}$ и использование явного вида $N(\nu)$ приводят к следующим ограничениям

$$(M(\zeta)\theta - \theta M(\varepsilon))_{*,1} = 0_3, \quad \lambda_{1,2} = (M(\zeta)\theta - \theta M(\varepsilon))_{*,2-3} \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}. \tag{32}$$

□

Всё определяется с помощью $\theta$, но не всякая матрица подходит – нужна целочисленность $\lambda_{1,2}$, $\lambda_{2,2}$. Как увидим дальше, третье условие является ограничением на морфизмы между расслоениями разных типов.

**2.2.2 Следствие.** *Необходимым условием целочисленности* $\lambda_{2,2}$ *является* $\theta_{2,1} = \theta_{3,1} = 0$.

*Доказательство.* Действительно, рассмотрим условие (26), учитывая вид матрицы $N(\nu)$ (см. (7)), из условия, определяющего $\lambda_{2,2}$, получим $(N(\mu)\theta)_{*,1} = 0_2$, что равносильно $\theta_{2,1} = \theta_{3,1} = 0$. □

**2.2.3 Предложение.** *Пусть $F$ и $G$ расслоения различных типов. Тогда $F$ и $G$ не изоморфны.*

*Доказательство.* Будем считать, что $F$ имеет тип $a$, а $G$ имеет тип $b$, предположим, что существует $\theta \in \mathrm{GL}_3(A)$, осуществляющее изоморфизм $F \to G$, $\theta$ удовлетворяет условиям целочисленности. Запишем условие (28) и воспользуемся необходимыми условиями из доказанного следствия 2.2.2:

$$0_3 = \left( \begin{bmatrix} 0 & \zeta_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \zeta_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \theta - \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \right)_{*,1} = \begin{bmatrix} \zeta_{1,2}\theta_{2,1} - \theta_{1,2} \\ -\theta_{2,2} \\ \theta_{1,1} - \theta_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\theta_{1,2} \\ -\theta_{2,2} \\ \theta_{1,1} - \theta_{3,2} \end{bmatrix},$$

откуда $\theta_{1,2} = \theta_{2,2} = 0$ и $\theta_{1,1} = \theta_{3,2}$, а $\theta$ принимает вид

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_{1,1} & 0 & \theta_{1,3} \\ 0 & 0 & \theta_{2,3} \\ 0 & \theta_{1,1} & \theta_{3,3}. \end{bmatrix}$$

Воспользуемся теперь условием (27) предложения 2.2.1:

$$M_{3,2}(A) \ni \left( \begin{bmatrix} 0 & \zeta_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \zeta_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \theta - \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \right)_{*,k} \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \theta_{1,3}\,\varepsilon_{3,2} & \zeta_{1,2}\theta_{2,3} \\ -\theta_{2,3}\,\varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & \theta_{1,3} - \zeta_{3,2}\theta_{2,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Из невырожденности $G$ и предложения 2.1.13 знаем, что в нашем случае $(\nu, \varepsilon_{3,2}) = 1$, откуда $\theta_{2,3} \equiv 0 \pmod{\nu}$, но это противоречит условию $\theta \in \mathrm{GL}_3(A)$. □

Следующими двумя предложениями завершим классификацию расслоений с общим слоем $\mathcal{O} + \mathcal{O}(1)$ и простыми подскоками, описав изоморфизмы расслоений одинаковых типов. Следствие 2.1.6 в этом случае устанавливает равенство идеалов, порождаемых точками, в которых происходят подскоки.

**2.2.4 Предложение** (Изоморфизм расслоений типа $a$)**.** *Пусть $F = F_a^{\nu,\varepsilon_{1,2},\varepsilon_{3,2}}$, $G = G_a^{\mu,\zeta_{1,2},\zeta_{3,2}}$ - расслоения типа $a$, строки $(\varepsilon_{1,2}, \nu)$, $(\zeta_{1,2}, \mu)$ унимодулярны, $\nu \neq 0$, $\mu \neq 0$. Расслоения $F$ и $G$ изоморфны тогда и только тогда, когда имеется равенство идеалов $(\mu) = (\nu)$, и существует глобальная единица $\eta \in A^*$, для которой*

$$\zeta_{1,2} \equiv \eta\,\varepsilon_{1,2} \pmod{\nu}. \tag{33}$$

*Доказательство.* Как было отмечено выше, $(\mu) = (\nu)$ из следствия 2.1.6. Запишем условие (28), учитывая следствие 2.2.2:

$$0_3 = \left( \begin{bmatrix} 0 & \zeta_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \zeta_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \theta - \theta \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \varepsilon_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \right)_{*,1} = \begin{bmatrix} -\theta_{1,3} \\ -\theta_{2,3} \\ \theta_{1,1} - \theta_{3,3} \end{bmatrix},$$

откуда $\theta_{1,3} = \theta_{2,3} = 0$ и $\theta_{1,1} = \theta_{3,3}$, а $\theta$ принимает вид

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_{1,1} & \theta_{1,2} & 0 \\ 0 & \theta_{2,2} & 0 \\ 0 & \theta_{3,2} & \theta_{1,1}. \end{bmatrix}.$$

Вычисления показывают, что выполнение условия (27) равносильно следующим двум условиям:

существуют такие глобальные единицы $\theta_{1,1},\ \theta_{2,2}$, что $\zeta_{1,2}\theta_{2,2} \equiv \theta_{1,1}\,\varepsilon_{1,2} \pmod{\nu}$;

существует $\theta_{1,2}$, что $\theta_{1,2} + \zeta_{3,2}\theta_{2,2} \equiv \theta_{1,1}\,\varepsilon_{3,2} \pmod{\nu}$.

Поэтому необходимым условием изоморфизма является существование глобальной единицы $\eta \in A^*$, такой что выполнено соотношение

$$\zeta_{1,2} = \eta\,\varepsilon_{1,2} \pmod{\nu}. \tag{34}$$

Перейдем к проверке условия (26). Из вычислений имеем $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{2,2} = \theta_{1,1}$, $\lambda_{2,1}\nu - \theta_{3,2} = 0$, $\nu(\lambda_{1,1} - \theta_{2,2}) = 0$.

Для проверки достаточности найдем $\theta = (\theta_{i,j}) \in \mathrm{GL}_3(A)$. Пусть $\eta$ удовлетворяет (33). Легко проверить, что $\theta$, определенное следующим образом, индуцирует изоморфизм $F \to G$

$$\theta = \begin{bmatrix} \eta & \zeta + \eta\,\varepsilon_{3,2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}. \tag{35}$$

□

**2.2.5 Предложение** (Изоморфизм расслоений типа $b$)**.** *Пусть $F = F_b^{\nu,0,\varepsilon_{3,2}}$, $G = G_b^{\mu,0,\zeta_{3,2}}$ - расслоения типа $b$, строки $(\varepsilon_{3,2}, \nu)$, $(\zeta_{3,2}, \mu)$ унимодулярны, $\nu \neq 0$, $\mu \neq 0$. Расслоения $F$ и $G$ изоморфны тогда и только тогда, когда имеется равенство идеалов $(\mu) = (\nu)$, и существует глобальная единица $\eta \in A^*$, для которой*

$$\zeta_{3,2} \equiv \eta\,\varepsilon_{3,2} \pmod{\nu}. \tag{36}$$

*Доказательство.* Как было отмечено выше, $(\mu) = (\nu)$ из следствия 2.1.6. Запишем условие (28), учитывая следствие 2.2.2:

$$0_3 = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \zeta_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \theta - \theta \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{3,2} & 0 \end{bmatrix} \right)_{*,1} = \begin{bmatrix} -\theta_{1,2} \\ \theta_{1,1} - \theta_{2,2} \\ -\theta_{3,2} \end{bmatrix},$$

откуда $\theta_{1,2} = \theta_{3,2} = 0$ и $\theta_{1,1} = \theta_{2,2}$.

Вычисления показывают, что выполнение условия (27) равносильно существованию таких глобальных единиц $\theta_{1,1}$ и $\theta_{3,3}$, что $\zeta_{3,2}\theta_{1,1} \equiv \theta_{3,3}\,\varepsilon_{3,2} \pmod{\nu}$; $\theta_{1,2} \equiv \theta_{2,3} \equiv 0 \pmod{\nu}$.

Поэтому необходимым условием изоморфизма является существование глобальной единицы $\eta \in A^*$, такой что выполнено соотношение

$$\zeta_{3,2} = \eta\, \varepsilon_{3,2}\ (\nu). \tag{37}$$

Перейдем к проверке условия (26), из вычислений имеем $\lambda_{2,1} = 0,\ \lambda_{2,2} = \theta_{3,3},\ \lambda_{2,1}\nu - \theta_{2,3} = 0,\ \lambda_{1,1} = \theta_{1,1}$.

Для проверки достаточности найдем $\theta = (\theta_{i,j}) \in \mathrm{GL}_3(A)$. Пусть $\eta$ удовлетворяет (36). Тогда $\theta$, определенное следующим образом, индуцирует изоморфизм $F \to G$

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{bmatrix}. \tag{38}$$

□

## 2.3 Вычисление матриц склейки

**2.3.1.** (Случай $E = E_a^{\alpha,\zeta,\beta}$, где $(\alpha,\beta) = 1,\ \beta \neq 0$.) Для вычисления образа стрелки $\phi$ из определения $E$ и фактора по нему зафиксируем обозначения. Как и выше, стандартный $\mathcal{O}$-базис $\mathcal{O}^3$ обозначим $e_1, e_2, e_3$, а стандартный $\mathcal{O}$-базис $\mathcal{O}^5$ обозначим $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$.

Чтобы найти матрицу склейки для $E$, зафиксируем представление

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \tag{39}$$

Тривиализуем $E$ на $U_0$. В этом случае $\phi$ можно записать в виде

$$\phi|_{U_0} = t_0 \begin{bmatrix} x & \alpha & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & \zeta & x \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

На $U_0$ в качестве базиса образа $\phi$ можно взять $\phi(t_0^{-2}e_1)$, $\phi(t_0^{-2}e_2)$ и $\phi(t_0^{-2}e_3)$, то есть столбцы $t_0^{-1}\phi|_{U_0}$. Для вычисления фактора необходимо дополнить $\phi|_{U_0}$ до обратимой. Подойдет

$$\widetilde{\phi|_{U_0}} = t_0 \begin{bmatrix} x & \alpha & 0 & \gamma & -\zeta \\ 0 & x & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \zeta & x & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det \widetilde{\phi|_{U_0}} = t_0^5.$$

Итак, $\mathcal{O}_{U_0}$-модуль $\mathcal{O}(-1)^5|U_0$ имеет базис

$$t_0^{-1}[g_1, \ldots, g_5] = t_0^{-2}[f_1, \ldots, f_5]\widetilde{\phi|_{U_0}}, \tag{41}$$

причем $t_0^{-1}[\bar g_4, \bar g_5]$ – базис фактора, то есть базис $E|U_0$.

Тривиализуем $E$ на $U_1$. В этом случае $\phi$ можно записать в виде

$$\phi|_{U_1} = t_1 \begin{bmatrix} 1 & \alpha y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ y & \zeta y & 1 \\ 0 & \beta y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}, \text{ где } y = t_0/t_1 = x^{-1}.$$

Для вычисления фактора нужно дополнить $\phi|_{U_1}$ до обратимой. Например, так:

$$\widetilde{\phi|_{U_1}} = t_1 \begin{bmatrix} 1 & \alpha y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ y & \zeta y & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \det \widetilde{\phi|_{U_1}} = t_1^4.$$

Итак, $\mathcal{O}_{U_1}$-модуль $\mathcal{O}(-1)^5|U_1$ имеет базис

$$t_1^{-1}[h_1, \ldots, h_5] = t_1^{-2}[f_1, \ldots, f_5]\widetilde{\phi|_{U_1}}, \tag{42}$$

причем $t_1^{-1}[\bar h_4, \bar h_5]$ – базис фактора, то есть базис $E|U_1$.

Напишем матрицу перехода на $U_{01}$. Для этого запишем $t_1^{-1}h_4$ и $t_1^{-1}h_5$ в терминах $t_0^{-1}g_1, \ldots, t_0^{-1}g_5$. Сначала обратим матрицу для выражения $t_0^{-1}g_i$ через $t_0^{-2}f_j$ (см. (41)).

С учетом (41) и (42) получаем $t_1^{-1}[h_1, \ldots, h_5] = x^{-2}t_0^{-1}[g_1, \ldots, g_5]\widetilde{\phi|_{U_0}}^{-1}\widetilde{\phi|_{U_1}}$.

Опуская вычисления, $\mod g_1, g_2, g_3$ получаем, что

$$t_1^{-1}\begin{bmatrix} h_3 & h_4 \end{bmatrix} = x^{-2}x \begin{bmatrix} \alpha & \beta x^2 \\ \gamma x & \delta x^3 \end{bmatrix} t_0^{-1}\begin{bmatrix} g_3 & g_4 \end{bmatrix}.$$

Итак, расслоение $E$ может быть задано с помощью матрицы склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha y & \beta x \\ \gamma & \delta x^2 \end{bmatrix}, \quad \det \sigma = x. \tag{43}$$

Иными словами, можно считать, что выбраны базисы $[e_1, e_2]$ ограничения $E$ на $U_0$ и $[f_1, f_2]$ ограничения $E$ на $U_1$, причем

$$[e_1, e_2]\begin{bmatrix} \alpha x^{-1} & \beta x \\ \gamma & \delta x^2 \end{bmatrix} = [f_1, f_2] \text{ или } [e_1, e_2] = [f_1, f_2]\begin{bmatrix} \delta x & -\beta \\ -\gamma x^{-1} & \alpha x^{-2} \end{bmatrix} \text{ на } U_{01}.$$

Мы уже знаем, что $E$ имеет тривиальный общий слой и простые подскоки в делителях $\beta$ (см. 2.1.5).

**2.3.2.** (Случай $E = E_b^{\beta,0,\alpha}$, где $(\alpha, \beta) = 1,\ \beta \neq 0$.) Аналогичные предыдущим рассуждения показывают, что расслоение $E$ указанного вида может быть задано с помощью матрицы склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha y & \beta \\ \gamma x & \delta x^2 \end{bmatrix}, \quad \det \sigma = x. \tag{44}$$

## 2.4 Пример

Теоремы 2.1.17, 2.2.3, 2.2.4 и 2.2.5 полностью классифицируют 2-расслоения с тривиальным общим слоем и простыми подскоками в случае факториального дедекиндова кольца $A$.

Например, для $A = \mathbb{Z}$, имеется $p - 1$ различных расслоений с $\nu = p$, где $p$ – некоторое простое нечетное число, и 2 расслоения при $\nu = 2$, они задаются матрицами склейки

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} x^{-1} & 2x \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} \text{ (типа } a\text{) и } \sigma_2 = \begin{bmatrix} x^{-1} & 2 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} \text{ (типа } b\text{).}$$

В случае $\nu = 3$ также имеется 2 неизоморфных расслоения, определяемых матрицами склейки

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} x^{-1} & 3x \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} \text{ (типа } a\text{) и } \sigma_2 = \begin{bmatrix} x^{-1} & 3 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} \text{ (типа } b\text{).}$$

# Литература


[1] *Ch. C. Hanna.* Subbundles of vector bundles on the projective line. J. Algebra, 52, no. 2, 322-327, 1978.

[2] *А. Л. Смирнов, С. С. Яковенко* Построение линейной фильтрации для расслоений ранга 2 на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, Препринты ПОМИ, 02/2015.

[3] *A. Smirnov.* On filtrations of vector bundles over $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, Arithmetic and Geometry, Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lect. Note Series: 420, 436-457, 2015.

[4] *Р. Хартсхорн.* Алгебраическая геометрия. Москва, Мир, 1981.

[5] *К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпиндлер.* Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. Москва, Мир, 1984.

[6] *Ж.-П. Серр.* Когерентные алгебраические пучки. Расслоенные пространства и их приложения. Москва, изд-во Иностранной литературы, 1958.

[7] *G. Horrocks.* Projective modules over an extension of a local ring, Proc. London Math. Soc. (3) 14 (1964), 714-718.

[8] *Б.Л. Ван-дер-Варден.* Алгебра. Москва, Мир, 1976.

[9] *D. Quillen.* Projective modules over polynomial rings, Invent. Math., 1976, vol. 36, p. 167–171.

[10] *А. А. Суслин.* Проективные модули над кольцами многочленов свободны. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 5, с. 1063-1066.

[11] *А. Л. Смирнов.* Векторные $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$-расслоения с простыми подскоками, Препринты ПОМИ, 01/2015.