ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 2/2016

Точечные распределения в компактных метрических пространствах, II

М. М. Скриганов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

E-mail: `maksim88138813@mail.ru`

Май 2016

В настоящей работе продолжено иследование, начатое в [30], точечных распределений в компактных метрических пространствах. Приводятся новые результаты о предельно точных оценках для уклонений и сумм расстояний в двуточечно-однородных пространствах и о связи этих вопросов с t-дизайнами.

Работа носит в основном обзорный характер, ее цель – сравнить различные подходы к исследованию рассматриваемых задач. Подробные доказательства будут даны в последующей публикации [31].

Ключевые слова: геометрия расстояний, равномерные распределения, t – дизайны, двуточечные однородные пространства

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

Содержание

1. Введение. Предварительные сведения

Сначала введем некоторые общие понятия и фиксируем обозначения.

Пусть $\mathcal{M}$ компактное связанное метрическое пространство с метрикой θ и борелевской мерой μ. Удобно считать, что метрика θ и мера μ нормированы условиями $\operatorname{diam}(\mathcal{M}, \theta) = \pi$, $\mu(\mathcal{M}) = 1$. Для любой метрики ρ на $\mathcal{M}$ и любого подмножества $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ мы обозначаем

$$\operatorname{diam}(\mathcal{E}, \rho) = \sup\{\rho(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathcal{E}\} \tag{1.1}$$

диаметр $\mathcal{E}$ относительно метрики ρ.

Обозначим через $\langle \rho \rangle$ среднее значение метрики ρ

$$\langle \rho \rangle = \iint\limits_{\mathcal{M}\times\mathcal{M}} \rho(y_1, y_2)\, d\mu(y_1)\, d\mu(y_2). \tag{1.2}$$

Для любого $\mathbb{N}$-точечного подмножества $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{M}$ положим

$$\rho[\mathcal{D}_N] = \sum_{x_1, x_2 \in \mathcal{D}_N} \rho(x_1, x_2) \tag{1.3}$$

и введем экстремальную сумму расстояний

$$\rho_N = \sup_{\mathcal{D}_N} \rho[\mathcal{D}_N], \tag{1.4}$$

где супремум вычисляется по всем N-точечным подмножествам $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{M}$.

Пусть

$$B_r(y) = \{x \in \mathcal{M} : \theta(x, y) \leqslant r\} \subset \mathcal{M} \tag{1.5}$$

– замкнутый шар в метрике θ радиуса $r \in [0, \pi]$ с центром $y \in \mathcal{M}$ и объемом $v_r(y) = \mu(B_r(y))$.

Локальное уклонение N-точечного подмножества $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{M}$ в шаре (1.5) определяется так

$$\Lambda[B_r(y), \mathcal{D}_N] = \#\{B_r(y) \cap \mathcal{D}_N\} - N v_r(y). \tag{1.6}$$

Положим

$$\lambda_r[\mathcal{D}_N] = \int\limits_{\mathcal{M}} \Lambda[B_r(y), \mathcal{D}_n]^2 \, d\mu(y) \tag{1.7}$$

и определим квадратичное уклонение формулой

$$\lambda[\eta, \mathcal{D}_N] = \int\limits_0^\pi \lambda_r[\mathcal{D}_N] \eta(r) \, dr, \tag{1.8}$$

где $\eta(r) \geqslant 0$, $r \in [0, \pi]$ – некоторая весовая функция. Интеграл (1.8) очевидно сходится для любой интерируемой η. Ниже для специальных пространств $\mathcal{M}$ мы укажем более общие условия сходимости интегралов (1.8).

Введем экстремальное квадратичное уклонение

$$\lambda_N(\eta) = \inf_{\mathcal{D}_N} \lambda[\eta, \mathcal{D}_N], \tag{1.9}$$

где инфимум вычисляется по всем N-точечным подмножествам $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{M}$.

В теории равномерных распределений обычно рассматривают L_2-уклонения $\lambda[\eta, \mathcal{D}_N]^{1/2}$ и $\lambda(\eta)^{1/2}$, но нам удобнее иметь дело непосредственно с величинами (1.8) и (1.9).

Исследование экстремальных характеристик (1.4) и (1.9) является базовыми проблемами геометрии расстояний и, соответственно, теории равномерных распределений, см., например, Alexander–Beck–Chen [2], Beck–Chen [6], Matoušek [26]. Распределениям большого числа точек на сферах посвящены также обзоры Branchart–Grabner [12] и Saff–Kuijlaars [29].

Рассматриваемые нами проблемы подробно изучены для d-мерных сфер $S^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} : \|x\| = 1\}$. В этом случае θ – метрика большего круга. Обозначим через τ хордовую метрику на сфере S^d. При этом

$$\left.\begin{aligned} &\theta(x_1, x_2) = \arccos\langle x_1, x_2\rangle, \\ &\tau(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = 2\sin\frac{1}{2}\theta(x_1, x_2), \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

где $\langle \cdot , \cdot \rangle$ – скалярное произведение, а $\| \cdot \|$ – евклидова метрика в $\mathbb{R}^{d+1}$.

Рассмотрим квадратичное уклонение (1.8) на сфере S^d со специальное весовой функцией $\eta_q(r) = \sin r$, $r \in [0, \pi]$. В этом случае формулу (1.8) можно записать так

$$\begin{aligned} &\lambda[\eta_1, \mathcal{D}_N] \\ &= \int\limits_{-1}^{1} dz \int\limits_{S^d} [\#\{B(y,z) \cap \mathcal{D}_N\} - N\mu(B(y,z))]^2 \, d\mu(y), \end{aligned} \tag{1.11}$$

где μ – стандартная нормализованная d-мерная мера на S^d, а

$$B(y,z) = \{x \in S^d : \cos\theta(x,y) \geqslant z\}, \quad z \in [-1, 1], \tag{1.12}$$

– "сферическая шапочка", при этом $B(y,z) = B_r(y)$, $z = \cos r$.

Для сфер S^d Столярский [32] установил следующее замечательное тождество, связывающее квадратичное уклонение (1.8) и сумму расстояний (1.4) для хордовой метрики τ.

Теорема 1.1. *Для любого N – точечного подмножества $\mathcal{D}_N \subset S^d$ справедливо соотношение*

$$\alpha(S^d)\lambda[\eta_1, \mathcal{D}_N] + \tau[\mathcal{D}_N] = \langle\tau\rangle N^2, \tag{1.13}$$

где $\alpha(S^d) > 0$ некоторая постоянная независящая от $\mathcal{D}_N$.

В частности, для любого N справедливо равенство

$$\alpha(S^d)\lambda_N(\eta_1) + r_N = \langle\tau\rangle N^2. \tag{1.14}$$

Таким образом, проблемы исследования экстремальных характеристик (1.4) и (1.9) для сфер эквивалентны.

Соотношение (1.13) было названо в [32] принципом инвариантности.

Первоначальное доказательство принципа инвариантности (1.13) в [32] было довольносложным. В работах Brauchart–Dick [11] и Bilyk [8] указаны более простые доказательства.

Для сфер S^d известны следующие предельно точные оценки.

Теорема 1.2. *Для всех N на сфере S^d справедливы оценки*

$$\langle r \rangle N^2 - CN^{1-\frac{1}{d}} < \tau_N < \langle r \rangle N^2 - cN^{1-\frac{1}{d}}, \tag{1.15}$$

$$cN^{1-\frac{1}{d}} > \lambda_N(\eta_1) > cN^{1-\frac{1}{d}} \tag{1.16}$$

с постоянными $C > c > 0$ независящими от N.

Здесь и далее мы обозначаем через C и c различные достаточно большие и, соответственно, достаточно малые положительные постоянные и указываем, при необходимости, их зависимость или независимость от дополнительных параметров.

Левые неравенства в (1.15) и (1.16) следуют из результатов работ Alexander [1], Stolarsky [32] и Rakhmanov–Saff–Zhou [28]. В [1] была установлена связь между левым неравенством в (1.15) для сумм расстояний и специальными разбиениями сферы на N подмножеств равного объема N^{-1} и даметрами порядка $N^{-1/d}$. Такие разбиения были построены в [1] только для подпоследовательностей $N = c(d)m^d$, где $m \geqslant 1$ – целые, а $c(d) > 0$ – постоянная. Для произвольных N построение таких разбиений сферы оказалось достаточно нетривиальным и было дано лишь в работе [28]. В силу принципа инвариантности Столярского (1.13) и (1.14), левое неравенство в (1.15) влечет левое неравенство в (1.16).

Правые неравенства в (1.16) и (1.15) были доказаны Беком [5], см. также [6].

Следует иметь в виду, что далеко не все метрики на S^d удовлетворяют двусторонним оценкам (1.15). Например, для геодезического расстояния θ на сфере S^d справедливы такие соотношения

$$\theta_N = \langle \theta \rangle N^2 - \varepsilon_N, \quad \langle \theta \rangle = \frac{1}{2}\pi, \tag{1.17}$$

где $\varepsilon_N = 0$ для четных N и $0 \leqslant \varepsilon_N \leqslant \pi/2$ для нечетных N. Подробнее этот пример рассмотрен в конце §5.

2. Принципы инвариантности и оценки сумм расстояний и уклонений для общих метрических пространств

В работе автора [30] предложен подход к доказательству таких тождеств для общих метрических пространств. Приведем некоторые из результатов работы [30].

Пусть, как и выше, $\mathcal{M}$ – произвольное компактное связанное метрическое пространство с нормированными метрикой θ и борелевской мерой μ. Введем следующие метрики симметричной разности

$$\theta_r^{\Delta}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\mu(B_r(x_1)\Delta B_r(x_2)), \tag{2.1}$$

где

$$B_r(x_1)\Delta B_r(x_2) = B_r(x_1) \cup B_r(x_1) \setminus B_r(x_1) \cap B_r(x_2) \tag{2.2}$$

– симметрична разность шаров $B_r(x_1)$ и $B_r(x_2)$, x_1, $x_2 \in \mathcal{M}$. Таким образом,

$$\theta_r^{\Delta}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}v_r(x_1) + \frac{1}{2}v_r(x_2) - \mu(B_r(x_1) \cap B_r(x_2)). \tag{2.3}$$

Положим также

$$\theta^{\Delta}(\eta, x_1, x_2) = \int\limits_0^{\pi} \theta_r^{\Delta}(x_1, x_2)\eta(r)\, dr, \tag{2.4}$$

где $\eta(r) \geqslant 0$, $r \in [0, \pi]$, – некоторая весовая функция.

Метрики (2.3) и (2.4) можно записать в виде

$$\theta_r^{\Delta}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\int\limits_{\mathcal{M}} |\chi(B_r(x_1)y) - \chi(B_r(x_2), y)|\, d\mu(y), \tag{2.5}$$

$$\theta^{\Delta}(\eta, x_1, x_2) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_{\mathcal{M}} |\chi(B_r(x_1), y) - \chi(B_r(x_2), y)| d\mu(y)\eta(r) dr, \tag{2.6}$$

где $\chi(B_r(x), \cdot\,)$ – характеристическая функция шара $B_r(x)$.

Отметим, что ввиду симметрии метрики θ имеет место следующая полезная формула

$$\chi(B_r(x), y) = \chi(B_r(y), x) = \chi(r - \theta(x, y)), \tag{2.7}$$

где $\chi(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция полуоси $[0, \infty)$.

Напомним, что метрическое пространство $\mathcal{M}$ называется дистанционно-инвариантным, если объем любого шара $v_r(y) = \mu(B_r(y))$ не зависит от $y \in \mathcal{M}$, см. Levenshtein [24]. Типичными примерами дистанционно-инвариантных пространств являются однородные пространства $\mathcal{M} = G/H$, где G – компактная группа, $H \subset G$ – замкнутая подгруппа, а θ и μ – инвариантные метрика и мера на $\mathcal{M}$.

Сравнивая определения (2.1) с (1.7) и определение (2.4) с (1.8), получаем такое утверждение, см. [30, Теорема 2.1].

Теорема 2.1. *Пусть $\mathcal{M}$ – компактное дистанционно-инвариантное пространство. Тогда для любого N-точечного подмножества $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{M}$ справелдивы соотношения*

$$\lambda_r[\mathcal{D}_N] + \theta_r^{\Delta}[\mathcal{D}_N] = \langle \theta_r^{\Delta} \rangle N^2, \tag{2.8}$$

где $r \in [0, \pi]$,

$$\lambda[\eta, \mathcal{D}_N] + \theta^{\Delta}[\eta, \mathcal{D}_N] = \langle \theta^{\Delta}(\eta) \rangle N^2. \tag{2.9}$$

где η – произвольная весовая функция, для которой сходятся интегралы в определения (1.8) *и* (2.4).

Для дистанционно-инвариантного простарснтва средние значения (1.2) метрик (2.1) и (2.4 легко вычисляются. Пользуясь формулами (2.3) и (2.7) находим

$$\left.\begin{aligned} \langle \theta_r^{\Delta} \rangle &= v_r - v_r^2, \\ \langle \theta^{\Delta}(\eta) \rangle &= \int\limits_0^{\pi} \langle \theta_r^{\Delta} \rangle \eta(r) dr = \int\limits_0^{\pi} v_r(1 - v_r)\eta(r)\, dr. \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

Возможно ли обобщение соотношений (2.8) и (2.9) на произвольные компактные метрические пространства? На первый взгляд, ответ должен быть отрицательным. Тем не менее оказывается, что вероятностное обобщение этих соотношений возможно.

Рассмотрим произвольное разбиение $\mathcal{R}_N = \{V_i\}_1^N$ пространства $\mathcal{M}$ на N измеримых подмножеств $V_i \subset \mathcal{M}$, $1 \leqslant i \leqslant N$, равной меры:

$$\mu\Big(\mathcal{M} \setminus \bigcup_{i=1}^N V_i\Big) = 0, \mu(V_i \cap V_j) = 0, i \neq j, \mu(V_i) = N^{-1}. \tag{2.11}$$

Такое разбиение будем называть равнообъемным.

Для разбиения $\mathcal{R}_N$ и произвольной метрики ρ введем средний диаметр, см, (1.1),

$$\mathrm{Diam}_1(\mathcal{R}_N, \rho) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathrm{diam}(V_i, \rho) \tag{2.12}$$

и максимальный диаметр

$$\mathrm{Diam}_\infty(\mathcal{R}_N, \rho) = \max_{1 \leqslant i \leqslant N} \ \mathrm{diam}(V_i, \rho) \tag{2.13}$$

Очевидно, что

$$\mathrm{Diam}_1(\mathcal{R}_N, \rho) \leqslant \mathrm{Diam}_\infty(\mathcal{R}_{N,\rho}) \tag{2.14}$$

и для метрик ρ и ρ_1

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{Diam}_1(\mathcal{R}_N, \rho_1) \leqslant c_0 \, \mathrm{Diam}_1(\mathcal{R}_N, \rho), \\ \mathrm{Diam}_\infty(\mathcal{R}_N, \rho_1) \leqslant c_0 \, \mathrm{Diam}_\infty(\mathcal{R}_N, \rho) \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

при $\rho_1(x, y) \leqslant c_0 \rho(x, y)$, x, $y \in \mathcal{M}$.

Введем следующее вероятностное пространство

$$\Omega_N = \prod_{i=1}^N V_i = \{X_N = (x_1, \ldots, x_N) : x_i \in V_i, 1 \leqslant i \leqslant N\} \tag{2.16}$$

с вероятностной мерой $\omega_N = \prod\limits_{i=1}^N \widetilde{\mu}_i$, где $\widetilde{\mu}_i = N_\mu | V_i$ и $\mu | V_i$ обозначает сужение меры μ на подмножество $V_i \subset \mathcal{M}$.

Для случайной переменной $F[X_N]$, $X_N \in \Omega_N$, обозначим через $\mathbb{E}_N F[\,\cdot\,]$ ее математическое ожидание

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N F[\,\cdot\,] &= \int_{\Omega_N} F[X_N] d\omega_N(X_N) \\ &= N^N \iint_{V_1 \times \ldots V_N} F(x_1, \ldots, x_N) d\mu(x_1) \ldots d\mu(x_N). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Элементы $X_N \in \Omega_N$ можно рассматривать как специальный подкласс N-точечных подмножеств в пространстве $\mathcal{M}$, а соответствующие суммы расстояний и уклонений для $\mathcal{D}_N = X_N = (x_1, \dots, x_N) \in \Omega_N$ как случайные переменные на вероятностном пространстве Ω_N. Вероятностный принцип инвариантности формулируется следующим образом, см. [30, Теорема 3.1].

Теорема 2.2. *Для любого равнообъемного разбиения $\mathcal{R}_N$, см.* (2.11), *компактного метрического пространства $\mathcal{M}$ справедливы соотношения*

$$\mathbb{E}_N \lambda_r[\,\cdot\,] + \mathbb{E}_N \theta_r^{\Delta}[\,\cdot\,] = \langle \theta_r^{\Delta} \rangle N^2, \tag{2.18}$$

$$\mathbb{E}_N \lambda[\eta,\,\cdot\,] + \mathbb{E}_N \theta^{\Delta}[\eta,\,\cdot\,] = \langle \theta^{\Delta}(\eta) \rangle N^2. \tag{2.19}$$

Поскольку $X_N \in \Omega_N$ образуют подкласс всех N-точечных подмножеств $\mathcal{D}_N \subset \mathcal{M}$, то

$$\theta_N^{\Delta}(\eta) \geqslant \mathbb{E}_N \theta^{\Delta}[\eta,\,\cdot\,], \quad \lambda_N(\eta) \leqslant \mathbb{E}_N \lambda[\eta,\,\cdot\,]. \tag{2.20}$$

Рассмотрим также математическое ожидание (2.17) случайной переменной $\rho[X_N]$, $X_N \in \Omega_N$, для произвольной метрики ρ, см. (1.3). Следующая простая, но удивительно сильная оценка фактически содержится в работе Alexander [1, Lemma 2.4].

Лемма 2.1. *Для любого равнообъемного разбиения $\mathcal{R}_N$ пространства $\mathcal{M}$ и произвольной метрики ρ на $\mathcal{M}$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_N \rho[\,\cdot\,] &\geqslant \langle \rho \rangle N^2 - N \operatorname{Diam}_1(\mathcal{R}_N, \rho) \\ &\geqslant \langle \rho \rangle N^2 - N \operatorname{diam}_{\infty}(\mathcal{R}_N, \rho). \end{aligned}$$

Пользуясь оценками (2.15), Леммой 2.1 и Теоремой 2.2, получаем следующий результат, см. [30, Theorem 3.2].

Теорема 2.3. *Пусть метрика $\theta^{\Delta}(\eta)$ удовлетворяет неравенству*

$$\theta^{\Delta}(\eta, x_1, x_2) \leqslant c_0 \theta(x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathcal{M} \tag{2.21}$$

с некоторой постоянной c_0. Тогда для любого равнообъемного разбиения $\mathcal{R}_N$ пространства $\mathcal{M}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \theta_N^{\Delta}(\eta) &\geqslant \langle (\eta) \rangle N^2 - N c_0 \operatorname{Diam}_1(\mathcal{R}_N, \theta) \\ &\geqslant \langle \theta^{\Delta}(\eta) \rangle N^2 - N c_0 \operatorname{Diam}_{\infty}(\mathcal{R}_N, \theta) \end{aligned} \tag{2.22}$$

и

$$\lambda_N(\eta) \leqslant Nc_0 \operatorname{Diam}_1(\mathcal{R}_N, \theta) \leqslant Nc_0 \operatorname{diam}_\infty(\mathcal{R}_N, \theta) \tag{2.23}$$

с той же постоянной c_0, что и в (2.21).

Напомним следующие определения. Отображение $f : \mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}$ называется липшецевским, если

$$\theta(f(z_1), f(z_2)) \leqslant C\|z_1 - z_2\|, \quad z_1, z_2 \in \mathcal{O} \tag{2.24}$$

с некоторой постоянной C, наименьшая такая постоянная называется липшецевской постоянной отображения f и обозначения $\operatorname{Lip} f$; в (2.24) $\| \cdot \|$ обозначает евклидово расстояние в $\mathbb{R}^d$.

Компактное метрическое пространство $\mathcal{M}$ с метрикой θ и борелевской мерой μ назовем d-спрямляемым если существует мера ν на d-мерном единичном кубе $I^d = [0,1]^d$ абсолютно непрерывная относительно меры Лебега, измеримое подмножество $\mathcal{O} \subset I^d$ и инъективное липшецевское отображение $f : \mathcal{O} \to \mathcal{M}$, такие что $\mu(\mathcal{M} \setminus f(\mathcal{O})) = 0$ и $\mu(\mathcal{E}) = \nu(f^{-1}(\mathcal{E} \cap f(\mathcal{O}))$.

Нетрудно привести простые примеры d-спрямляемых пространств. Любое гладкое (или кусочно-гладкое) компактное d-мерное многообразие является d-спрямляемым, если в локальных координатах метрика удовлетворяет условию (2.24), а мера абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. В частности, любое компактное d-мерное риманово многообразие с римановыми расстоянием и мерой является d-спрямляемым.

Понятие спрямляемых пространств является базовым для геометрической теории меры, см. Federer [18] и Mattila [27]. В [18] и [27] можно найти более экзотические примеры d-спрямляемых пространств.

В [30, Теорема 4.1] доказан следующий результат, который можно рассматривать как относящийся к геометрической теории меры.

Теорема 2.4. *Пусть $\mathcal{M}$ компактное d-спрямляемое метрическое пространство. Тогда при любом N существует равнообъемное разбиение $\mathcal{R}_N$ пространства $\mathcal{M}$, такое что*

$$\operatorname{Diam}_1(\mathcal{R}_N, \theta) \leqslant d2^{2-1} \operatorname{Lip} f \, N^{-\frac{1}{d}}, \tag{2.25}$$

где $\operatorname{Lip} f$ – липшецевская постоянная отображения f в определении d-спрямляемого пространства $\mathcal{M}$.

В частности, такие разбиения $\mathcal{R}_N$, удовлетворяющие оценки (2.25) *существуют для любого компактного d-мерного риманова многообразия.*

В работе [28] для сфер S^d при всех достаточно больших N были построены равнообъемные разбиения $\mathcal{R}_N$, такие что

$$\mathrm{Diam}_\infty(\mathcal{R}_N, \theta) \leqslant C_d\, N^{-\frac{1}{d}} \tag{2.26}$$

с постоянной C_d независящей от N.

В силу неравенства (2.14) оценка (2.26) лучше чем (2.25). Однако, конструкция разбиений $\mathcal{R}_N$ в [28] существенно опирается на геометрическую специфику сфер. Более того, оценка (2.26) заведомо не может выполняться, если плотность меры μ не отделена от нуля. В любом случае, приведенная выше Теорема 2.3 показывает, что нетривиальная оценка (2.25) приводит к нетривиальным оценкам экстремальных характеристик $\theta_N(\eta)$ и $\lambda_N(\eta)$.

Сравнивая Теоремы 2.3 и 2.4, получаем такой результат.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathcal{M}$ – компактное d-спрямляемое метрическое пространство, а метрика $\theta^\Delta(\eta)$ удовлетворяет неравенству* (2.21). *Тогда при любом N справедливы оценки*

$$\theta^\Delta_N(\eta) \geqslant \langle \theta^\Delta(\eta) \rangle N^2 - CN^{1-\frac{1}{d}}, \tag{2.27}$$

$$\lambda_N(\eta) \leqslant CN^{1-\frac{1}{d}} \tag{2.28}$$

с постоянной $C > 0$ независящей от N.

Неравенство (2.21) выполняется, если η ограниченная функция, см. [30, Lemma 2.1(ii)]. В этом случае интегралы в определениях (1.8) и (2.4) также сходятся. Из Теоремы 2.5 мы получаем следующий общий результат.

Теорема 2.6. *Пусть $\mathcal{M}$ – компактное d-спрямляемое метрическое пространство, а весовая функция η ограничена. Тогда при любом N справедливы оценки* (2.27) *и* (2.28).

Для специальных пространств $\mathcal{M}$ условия на η могут быть существенно ослаблены, см. далее Леммы 3.1, 3.2 и Теорему 3.4.

3. Принципы инвариантности и точные оценки сумм расстояний и уклонений для двуточечно-однородных пространств

Для каких компактных метрических пространств $\mathcal{M}$ оценки (2.27) и (2.28) являются наилучшими? Исследование этого вопроса уже существенно зависит от значительно более глубоких свойств пространства $\mathcal{M}$ и опирается на более сложную технику. Выше мы видели, см. Теорему 1.2, что для сфер имеют место предельно точные оценки для сумм расстояний в хордовой метрики и для квадратичных уклонений со специальной весовой функцией η_1.

Сферы S^d являются простейшими примерами компактных связанных двуточечно-однородных пространств. В работе автора [31] показано, что для всех таких пространств имеют место предельно точные (по порядку величин) оценки для экстремальных сумм расстояний и уклонений. Приведем некоторые из результатов работы [31].

Напомним определение. Пусть G – группа изометрий метрического пространства $\mathcal{M}$ с метрикой θ, т.е. $\theta(gx_1, gx_2) = \theta(x_1, x_2)$ для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ и $g \in G$. Пространство $\mathcal{M}$ называется двуточечно-однородным, если для любых двух пар точек x_1, x_2 и y_2 с $\theta(x_1, x_2) = \theta(y_1, y_2)$ существует изометрия $g \in G$, такая что $y_1 = gx_1$, $y_2 = gx_2$. Очевидно, что в этом случае группа G транзитивна на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M} = G/K$ является однородным пространством, где подгруппа $K \subset G$ – стабилизатор некоторой точки $x_0 \in \mathcal{M}$.

Мы рассматриваем компактные связанные двуточечно-однородные пространства. Известно, что для таких пространств группы $K \subset G$ являются группами Ли, а $\mathcal{M} = G/K$ являются компактными симметричными римановыми многообразиями ранга один (теорема Вана). Все такие пространства классифицированы: это d-мерные сферы

$$S^d = SO(d+1)/SO(d) \times \{1\},$$

вещественные проективные пространства

$$\mathbb{R}P^n = O(n+1)/O(n) \times O(1),$$

комплексные проективные пространства

$$\mathbb{C}P^n = U(n+1)/U(n) \times U(1),$$

кватернионные проективные пространства

$$\mathbb{H}P^n = Sp(n+1)/Sp(n) \times Sp(1),$$

октонионная проективная плоскость

$$\mathbb{O}P^2 = F_4/\operatorname{Spin}(9).$$

Здесь используются стандартные обозначения теории групп Ли, в частности, F_4 – одна из исключительных простых групп Ли в классификации Картана. Подробное изложение этих вопросов можно найти в Helgason [22, 23], Wolf [35], а также Besse [7, Chap. 3].

Мы приведем только некоторые факты, нужные для формулировки результатов. Вещественная размерность указанных проективных пространств определяется формулой

$$d = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}P^n = nd_0, \quad d_0 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{F}, \tag{3.1}$$

$d_0 = 1, 2, 4, 8$ для $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, соответственно.

Для сфер S^d мы положим по определению $d_0 = d$. Проективные пространства размерности d_0 (т.е. $n = 1$) изоморфны d_0-мерным сферам. Удобно поэтому считать, что для проективных пространств $d > d_0$ (т.е. $n \geqslant 2$), а равенство $d = d_0$ выполняется только для сфер. С учетом этого соглашения, размерности d_0 и $d = nd_0$ однозначно (с точностью до изоморфизма) определяют соответствующее двуточечно-однородное пространство, которое мы будем обозначить через $Q = Q(d, d_0)$, через θ и μ обозначаются (нормированные) римановы расстояние и мера на $Q(d, d_0)$ инвариантные относительно соответствующей группы изометрий.

Очевидно, что любое пространство $Q(d, d_0)$ является дистанционно-инвариантным, см. определение в §2. Объем шара $v_r = \mu(B_r(y))$ не зависит от $y \in Q(d, d_0)$ и определяется формулой

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \int\limits_0^r w(d, d_0, u)\, du, \quad r \in [0, \pi], \\ w(d, d_0, u) &= w(d, d_0) \sin^{d-1} \frac{1}{2}u \, \cos^{d_0-1} \frac{1}{2}u, \quad u \in [0, \pi], \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

а $w(d, d_0) = B(d/2, d_0/2)$ – нормировочная постоянная определена условием $v_\pi = \mu(Q(d, d_0)) = 1$; здесь $B(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ – бэта-функция. Следует иметь в виду, что различные авторы записывают эти формулы по-разному, см. [23, pp. 165–168], [20, pp. 177–178], [24, pp. 508–510]. Эквивалентность этих записей легко проверяется.

Удобно ввести следующие классы весовых функций $\eta(r)$, $r \in [0, \pi]$:

$$\left.\begin{aligned} W(a,b) &= \{\eta \geqslant 0 : \|\eta\|_{a,b} < \infty\}, \quad a \geqslant b \geqslant 1, \\ \|\eta\|_{a,b} &= \int\limits_0^{\pi} \sin^{a-1} \frac{1}{2}r \, \cos^{b-1} \frac{1}{2}r \quad dr. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Отметим, что весовые функции в этих классах могут иметь, вообще говоря, довольно большие сингулярности при $r = 0$ и $r = \pi$.

Из формул (1.6) и (1.7) видно, что величина $\lambda_r[\mathcal{D}_N] = 0$ при $r = 0$ $r = \pi$. Используя (3.2), можно точно оценить скорость обращения в ноль $\lambda_r[\mathcal{D}_N]$ в этих точках. Это приводит к следующему вспомогательному результату.

Лемма 3.1. *Пусть весовая функция* $\eta \in W(d+1, d_0+1)$, *тогда интегралы в определениях* (1.8) *и* (2.4) *сходятся.*

С помощью Леммы 3.1 мы можем конкретизировать утверждение Теоремы 2.1 для пространств $Q(d, d_0)$.

Теорема 3.1. *Для любого* N*-точечного подмножества* $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$ *справедливы соотношения*

$$\lambda_r[\mathcal{D}_N] + \theta_r^{\Delta}[\mathcal{D}_N] = \langle \theta_r^{\Delta} \rangle N^2, \tag{3.4}$$

где $r \in [0, \pi]$,

$$\lambda[\eta, \mathcal{D}_N] + \theta^{\Delta}[\eta, \mathcal{D}_N] = \langle \theta^{\Delta}(\eta) \rangle N^2, \tag{3.5}$$

где $\eta \in W(d, d_0)$.

Для всех пространств $Q = Q(d, d_0)$ хордовую метрику τ можно определить следующей простой формулой

$$\tau(x_1, x_2) = c(Q) \sin \frac{1}{2}\theta(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in Q, \tag{3.6}$$

$$c(Q) = \begin{cases} 2 & \text{если} \quad Q = S^d, \\ \sqrt{2} & \text{если} \quad Q = \mathbb{R}P^n, \mathbb{C}P^n, \mathbb{H}P^n, \mathbb{Q}P^2. \end{cases}$$

Нетривиальный факт состоит в том, что пространство Q допускает вложение в сферу

$$\Pi : Q(d, d_0) \ni x \to \Pi(x) \in S_a^m \subset \mathbb{R}^{m+1}, \tag{3.7}$$

где S_a^m – m-мерная сфера радиуса $a = \sqrt{n/n+1}$, а $m = \frac{1}{2}(n+1)(d+2)-2$ и имеет место равенство

$$\tau(x_1, x_2) = \|\Pi(x_1) - \Pi(x_2)\|, \tag{3.8}$$

где $\| \cdot \|$ – евклидова метрика в $\mathbb{R}^m$. Это объясняет наименование метрики τ как хордовой.

Вложения (3.7) являются стандартным инструментом исследования геометрии проективных пространств, см., например, Baez [3], Freudenthal [19], Harvey [21, Chap. 14]. В удобной для нас форме эти вопросы изложены в [31].

Отметим, что для комплексных проективных пространств $\mathbb{C}P^n$ метрика τ совпадает (с точностью до постоянного множителя) со стандартной метрикой Фубини–Штуди. В связи с исследованием специальных точечных конфигураций в двуточечно-однородных пространствах хордовая метрика для проективных пространств $\mathbb{F}P^n$ обсуждается в работах Cohn–Kumar [13] и Cohn–Kumar–Minton [14], см. также работу Conway–Hardin–Sloane [15], где хордовая метрика определена для грассмановых многообразий.

Внимательный анализ вложений (3.7) приводит к следующему результату, см. [31].

Теорема 3.2. *Пусть весовая функция $\eta_1(r) = \sin r$, $r \in [0, \pi]$, тогда для любого двуточечно-транзитивного пространства $Q = Q(d, d_0)$ хордовая метрика* (3.6) *и метрика симметричной разности* (2.4) *связаны соотношением*

$$\tau(x_1, x_2) = \alpha(Q)\theta^{\Delta}(\eta_1, x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in Q \tag{3.9}$$

с постоянной

$$\alpha(Q) = \frac{\langle\tau\rangle}{\langle\theta^{\Delta}(\eta_1)\rangle} = \frac{\operatorname{diam}(Q, \tau)}{\operatorname{diam}(Q, \theta^{\Delta}(\eta_1)}. \tag{3.10}$$

Сравнивая Теоремы 3.1 и 3.2, получаем обобщение принципа инвариантности Столярского, см. Теорему 1.1, на произвольные двуточечно-транзитивные пространства $Q(d, d_0)$.

Теорема 3.3. *Для любого N-точечного подмножества $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$ справедливо соотношение*

$$\alpha(Q)\lambda[\eta_1, \mathcal{D}_N] + \tau[\mathcal{D}_N] = \langle\tau\rangle N^2, \tag{3.11}$$

где постоянная $\alpha(Q)$ определена в (3.10).

В частности, для любого N справедливо равенство

$$\alpha(Q)\lambda_N(\eta_1) + \tau_N = \langle\tau\rangle N^2. \tag{3.12}$$

Подчеркнем следующую важную особенность хордовой метрики τ. Напомним, что метрическое пространство $\mathcal{M}$ и метрика ρ на $\mathcal{M}$ называются L_p-вложимыми, если существует изометрическое вложение $f : \mathcal{M} \ni x \to f(x) \in L_p$, т.е. $\rho(x_1, x_2) = \|f(x_1) - f(x_2)\|_{L_p}$ для всех $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$. Любая метрика симметричной разности θ^Δ является изометрически L_1-вложимой, см. (2.5), (2.6), а хордовая метрика τ на пространствах $Q(d, d_0)$ является изометрически L_2-вложимой, см. (3.8). Известно, что L_2-вложимость сильнее и влечет L_1-вложимость, см., например, Deza–Laurent [17, Sec. 6.3]. Поэтому, соотношения вида (3.4), (3.5) для общих метрик симметрчной разности можно назвать слабым принципом инвариантности, а соотношение (3.11) для специальной хордовой метрики сильным принципом инвариантности.

Представляет интерес следующий вопрос: существуют ли еще весовые функции $\eta_2 \neq \eta_1$, для которых метрика $\theta^\Delta(\eta_2)$ является L_2-вложимой?

Вернемся теперь к вопросу о наилучших оценках экстремальных сумм расстояний и уклонений для двуточечно-однородных пространств.

Следующий важный вспомогательный результат уточняет Лемму 3.1.

Лемма 3.2. *Для метрик θ_r^Δ, $r \in [0, \pi]$, на пространстве $Q(d, d_0)$ справедлива оценка*

$$\theta_r^\Delta(x_1, x_2) \leqslant Cw(d, d_0, r)\theta(x_1, x_2)$$

Пусть весовая функция $\eta \in W(d, d_0)$, тогда для метрики $\theta^\Delta(\eta)$ на пространстве $Q(d, d_0)$ справедлива оценка

$$\theta^\Delta(\eta, x_1, x_2) \leqslant C\|\eta\|_{d,d_0}\,\theta(x_1, x_2),\ x_1, x_2 \in Q(d, d_0). \tag{3.13}$$

Постоянные C зависят только от d и d_0.

Результаты работы [31] о наилучших оценках экстремальных характеристик $\theta_N^{\Delta}(\eta)$ и $\lambda_N(\eta)$ для пространств $Q(d, d_0)$ формулируются так.

Теорема 3.4. *Пусть весовая функция $\eta \in W(d, d_0) \setminus \{0\}$, тогда для пространства $Q(d, d_0)$ при любом N справедливы оценки*

$$\langle \theta^{\Delta}(\eta) \rangle N^2 - c(\eta) N^{1-\frac{1}{d}} > \theta_N^{\Delta}(\eta) > \langle \theta^{\Delta}(\eta) \rangle N^2 - C(\eta) N^{1-\frac{1}{d}}, \tag{3.14}$$

$$c_1(\eta) N^{1-\frac{1}{d}} < \lambda_N(\eta) < C_1(\eta) N^{1-\frac{1}{d}} \tag{3.15}$$

с положительными постоянными не зависящими от N.

В частности, оценки (3.14) *справедливы для хордовой метрики*

$$\langle \tau \rangle N^2 - c N^{1-\frac{1}{d}} > \tau_N > \langle \tau \rangle N^2 - C N^{1-\frac{1}{d}} \tag{3.16}$$

с постоянными $C = C(\eta_1)$, $c = c(\eta_1)$.

Правые оценки в (3.14) и (3.15) следуют из Теоремы 2.5 и Леммы 3.2, поскольку римановы пространства $Q(d, d_0)$ очевидно являются d-спрямляемыми.

Доказательство левых оценок в (3.14) и (3.15) более сложное. Оно опирается на анализ Фурье на однородных пространствах $Q(d, d_0)$ и разложения функций уклонения (1.6), (1.7), (1.8) по соответствующим сферическим функциям. Для пространств $Q(d, d_0)$ сферические функции выражаются через полиномы Якоби $P_l^{(\alpha,\beta)}(z)$, $\alpha = \frac{d}{2} - 1$, $\beta = \frac{d_0}{2} - 1$, см., например, Conway–Sloane [16, Chap. 9], Vilenkin–Klimyk [34], Wolf [36]. Это позволяет получить удобные представления для функций уклонений. С помощью равномерных асимптотических формул для полиномов Якоби, см. Szegö [33], из этих предствлений следует левая оценка в (3.15). В свою очередь, левая оценка (3.14) следует теперь из принципа инвариантности (3.5).

4. Приложения к t-дизайнам

В литературе описаны различные специальные точечные конфигурации на сферах и на других двуточечно-однородных пространства, см., например, [12–14,24,29] и приведенную там библиографию. Насколько равномерно распределены точки таких специальных конфигураций в соответствующих пространствах? Что можно сказать о суммах расстояний (1.3) и уклонениях (1.8) для таких точечных подмножеств?

В работе [31] эти вопросы исследованы для t-дизайнов. Приведем соответствующие результаты из [31]. Общие сведения о t-дизайнах на двуточечно-однородных пространствах $Q(d, d_0)$ можно найти в обзорах Banai [3] и Levenshtein [24].

N-точечное подмножество $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$ называется t-дизайном, $t \geqslant 1$ – целое, если для любого полинома $f(z)$ степени не превосходящей t справедлива точная квадратурная формула

$$\sum_{x_1, x_2 \in \mathcal{D}_N} f(\cos\theta(x_1, x_2)) = N^2 \iint\limits_{Q \times Q} f(\theta(y_1, y_2))\, d\mu(y_1)\, d\mu(y_2). \tag{4.1}$$

Условие (4.1) можно записать в различных эквивалентных формах, например, как формулу

$$\sum_{x \in \mathcal{D}_N} f(\cos\theta(x, y_1)) = N \int\limits_{Q} f(\cos(y, y_2))\, d\mu(y), \tag{4.2}$$

которая выполняется для всех y_1, $y_2 \in Q = Q(d, d_0)$. Для сферических t-дизайнов $\mathcal{D}_N \subset S^d$ соотношения (4.1) и (4.2) эквивалентны точной квадратурной формуле

$$\sum_{x \in \mathcal{D}_N} F(x) = N \int\limits_{S^d} F(y)\, d\mu(y), \tag{4.3}$$

которая выполняется для всех однородных полиномов $F(x)$, $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, степени, не превосходящей t.

Для любого N-точечного подмножества $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$ положим

$$\nu[\mathcal{D}_N, r] = \max_{y \in Q} \#\{B_r(y) \cap \mathcal{D}_N\}, \quad r \in [0, \pi], \tag{4.4}$$

удобно также считать, что $\nu[\mathcal{D}_N, r] = N$ при $r > \pi$.

Результат, полученный в [31] для t-дизайнов, формулируется так.

Теорема 4.1. *Пусть весовая функция $\eta \in W(d, d_0)$ и N-точечное подмножество $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$ является t-дизайном. Тогда для всех достаточно больших N справедлива оценка*

$$\lambda[\eta, \mathcal{D}_N] < C(\eta) t^{d-1} \left(\nu[\mathcal{D}_N, C_1 t^{-1}]\right)^2 \tag{4.5}$$

с постоянными $C(\eta)$ и C_1 не зависящими от t и N, причем C_1 зависит только от d и d_0.

Доказательство Теоремы 4.1 также опирается на анализ Фурье и на теорию сферических функций на однородных пространствах $Q(d, d_0)$, см. комментарии к Теореме 3.4.

Для N-точечных t-дизайнов $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$ известны так называемые, универсальные оценки, см. [4], [24, p. 520], из которых следует, что

$$N > ct^d$$

с постоянной $c > 0$ не зависящей от N и t.

N-точечные t-дизайны $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$ называются *оптимальными*, если

$$Ct^d > N > ct^d \tag{4.6}$$

с некоторыми постоянными C и $c > 0$ не зависящими от N. Фактически мы рассматриваем последовательности точечных подмножеств $\mathcal{D}_N$ с $N \to \infty$.

N-точечное подмножество $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$ называется *хорошо разделенным*, если

$$\delta[\mathcal{D}_N] > cN^{-\frac{1}{d}} \tag{4.7}$$

с постоянной $c > 0$ не зависящей от N, здесь

$$\delta[\mathcal{D}_N] = \min\{\theta(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in \mathcal{D}_N,\ x_1 \neq x_2\} \tag{4.8}$$

– минимальное расстояние между точками $\mathcal{D}_N$.

Из определений (4.4), (4.7), (4.8) непосредственно следует, что $\nu[\mathcal{D}_N, r] \leqslant 1$ при $r < \delta[\mathcal{D}_N]$. Это очевидное наблюдение можно уточнить следующим образом.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$ и выполняется оценка*

$$\nu[\mathcal{D}_N, c_1 N^{-\frac{1}{d}}] < c_2 \tag{4.9}$$

с некоторыми постоянными c_2, $c_1 > 0$ не зависящими от N.

Тогда для любой постоянной $C_1 > 0$ и всех достаточно больших N справедлива оценка

$$\nu[\mathcal{D}_N, C_1 N^{-\frac{1}{d}}] < C_2 \tag{4.10}$$

с постоянной C_2 зависящей только от C_1, c_1, c_2, d, d_0.

В частности, если $\mathcal{D}_N$ – хорошо разделенное подмножество, то для любой постоянной $C_1 > 0$ выполняется оценка (4.10).

Из Теоремы 4.1 с помощью Леммы 4.1 следует такое утверждение.

Теорема 4.1. *Пусть весовая функция* $\eta \in W(d, d_0)$ *и* N*-точечное подмножество* $\mathcal{D}_N \subset Q(d, d_0)$ *удовлетворяет следующим двум условиям:*
(1) $\mathcal{D}_N$ *– оптимальный* t*-дизайн,*
(2) $\mathcal{D}_N$ *– хорошо разделенное подмножество.*
Тогда для всех достаточно больших N *справедливы оценки*

$$c(\eta)N^{1-\frac{1}{d}} < \lambda[\eta, \mathcal{D}_N] < c(\eta)N^{1-\frac{1}{d}}, \tag{4.11}$$

$$\langle\theta^{\Delta}(\eta)\rangle N^2 - c(\eta)N^{1-\frac{1}{d}} > \theta^{\Delta}[\eta, \mathcal{D}_N] > \langle\theta^{\Delta}(\eta)\rangle N^2 - c(\eta)N^{1-\frac{1}{d}} \tag{4.12}$$

с положительными постоянными не зависящими от N*.*

В частности, оценки (4.12) *справедливы для хордовой метрики*

$$\langle r\rangle N^2 - cN^{1-\frac{1}{d}} > r[\mathcal{D}_N] > \langle r\rangle N^2 - CN^{1-\frac{1}{d}}$$

с постоянными $C = C(\eta_1)$ *и* $c = c(\eta_1)$*.*

Отметим, что левая оценка в (4.11) следует из соответствующей левой оценки в (3.15), а оценки (4.12), (4.13) следуют из (4.11) и принципа инвариантности (3.4).

Существование оптимальных t-дизайнов долгое время оставалось открытой проблемой (гипотеза Кореваара–Меера). Недавно проблема была решена для сферических t-дизайнов. В работах Bondarenko–Radchenko–Viazovska [9, 10] было доказано существование оптимальных t-дизайнов $\mathcal{D}_N \subset S^d$ для всех достаточно больших N. Более того, в [10] было доказано, что такие оптимальные сферические t-дизайны могут быть построены и как хорошо разделенные подмножества.

Таким образом, Теорема 4.2 приложима и мы заключаем, что построенные в работах [9, 10] сферические t-дизайны достигают предельно точных (в смысле порядка) оценок (4.11), (4.12) для квадратичных уклонений и сумм расстояний.

Сферические t-дизайны непосредственно переносятся в вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^d$. Для любого N-точечного подмножества $\mathcal{D}_N \subset S^d$ определим $\widetilde{\mathcal{D}}_N \subset \mathbb{R}P^d$ как множество одномерных подпространств в $\mathbb{R}^{d+1}$ проходящих через точки $x \in \mathcal{D}_N$. Если $\mathcal{D}_N$ содержит пары антиподальных точек x и $-x$, то соответсвующие подпространства совпадают и учитываются с кратностью 2.

Поскольку $\mathbb{R}P^d \simeq S^d/\{\pm 1\}$, то условие (4.1) для полиномов степени m эквивалентно условию (4.3) для четных полиномов $F(x) = F(-x)$ степени $2m$. Отсюда следует, что если $\mathcal{D}_n \subset S^d$ является оптимальным t-дизайном, то $\widetilde{\mathcal{D}}_N \subset \mathbb{R}P^d$ является оптимальным $[t/2]$-дизайном.

Если оптимальный t-дизайн $\mathcal{D}_N \subset S^d$ является хорошо разделенным подмножеством, то, вообще говоря, оптимальный $[t/2]$-дизайн $\widetilde{\mathcal{D}}_N \subset \mathbb{R}P^d$ не является хорошо разделенным. Однако, в этом случае выполняется оценка (4.9) и, следовательно, по Лемме 4.1 выполняется оценка (4.10) с произвольной постоянной $C_1 > 0$.

Подставляя оценку (4.10) в (4.5), мы приходим к следующему утверждению: если оптимальный t-дизайн $\mathcal{D}_N \subset S^d$ является хорошо разделенным подмножеством, то соответсвующий оптимальный $[t/2]$-дизайн $\widetilde{\mathcal{D}}_N \subset \mathbb{R}P^d$ удовлетворяет предельно точным оценкам (4.11), (4.12) для квадратичных уклонений и сумм расстояний.

Обобщения на остальные проективные пространства $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$ и $\mathbb{O}P^2$ вероятно также возможны.

5. Замечания о ядрах Леви–Шёнберга

Ядра Леви–Шёнберга возникают как ковариации многопараметрических случайных процессов (процессов Леви) с параметрами на однородных пространствах. Подробное изложение этих вопросов можно найти в работе Gangolli [20]. Здесь мы кратко коснемся некоторых из этих вопросов, связанных с предметом настоящей работы.

Напомним определение. Пусть $Q = G/K$ – однородное пространство с G-инвариантными метрикой θ и мерой μ. Для определенности можно считать, что G и подгруппа $K \subset G$ – компактные группы Ли, так что Q – компактное риманово многообразие с римаными функцией расстояния θ и мерой μ нормированными как указывалось выше.

Вещественная симметричная функция $f(x_1, x_2)$, x_1, $x_2 \in Q$, называется ядром Леви–Шёнберга, если выполняются следующие условия:

(1) существует точка $x_0 \in Q$, такая что $f(x, x_0) = 0$ для всех $x \in Q$,

(2) f – положительно определена, т.е. для любых комплексных чисел $z_1, \ldots, z_N$ и любых точек $x_1, \ldots, x_N \in Q$

$$\sum_{i,j=1}^{N} z_i \overline{z}_i f(x_i, x_j) \geqslant 0, \tag{5.1}$$

(3) поляризация $\rho(x_1, x_2)$ ядра $f(x_1, x_2)$, определенная формулой

$$\rho(x_1, x_2) = f(x_1, x_1) + f(x_2, x_2) - 2f(x_1, x_2) \tag{5.2}$$

является G-инвариантной, т.е. $\rho(gx_1, gx_2) = \rho(x_1, x_2)$ для всех x_1, $x_2 \in Q$, $g \in G$.

Отметим, чт ядро Леви–Шёнберга f восстанавливается по его поляризации ρ:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\Big(\rho(x_1, x_0) + \rho(x_2, x_0) - \rho(x_1, x_2)\Big). \tag{5.3}$$

Если ядро Леви–Шёнберга f и его поляризация ρ заданы, то стандартные методы теории вероятностей позволяют построить соответствующий случайный процесс Леви как отображение

$$Y : Q \ni x \to Y(\omega, x) \in L_2(\Omega, d\omega)$$

из Q в пространство $L_2(\Omega, d\omega)$ вещественных случайных переменных на некотором вероятностном пространстве Ω с мерой $d\omega$. При этом $\mathbb{E}Y(\,\cdot\,, x) = 0$ и

$$\mathbb{E}(Y(\,\cdot\,, x_1)Y(\,\cdot\,, x_2)) = f(x_1, x_2),\ \mathbb{E}(Y(\,\cdot\,, x_1) - Y(\,\cdot\,, x_2))^2 = \rho(x_1, x_2)$$

для всех x, x_1, $x_2 \in Q$.

Кроме того, если $\rho(x_1, x_2) < c\theta(x_1, x_2)^\beta$ с некоторыми постоянными c и $\beta > 0$, то для почти всех $\omega \in \Omega$ траектория процесса $Y(\omega, x)$ является непрерывной функцией $x \in Q$.

Для произвольно фиксированной точки $x_0 \in Q$ рассмотрим ядро

$$f_r(x_1, x_2) = \int\limits_Q F_r(x_1, y)F_r(x_2, y)\, d\mu(y), \quad r \in [0, \pi], \tag{5.4}$$

где

$$F_r(x, y) = \chi(B_r(x), y) - \chi(B_r(x_0)y) \tag{5.5}$$

и $\chi(B_2(x), \cdot\,)$ – характеристическая функция шара $B_r(x)$, см. (1.5). Положим также

$$f(\eta, x_1, x_2) = \int\limits_0^\pi f_r(x_1, x_2)\eta(r)\, dr, \tag{5.6}$$

где $\eta(r)$ – некоторая весовая функция, для которой интеграл (5.6) сходится.

Теорема 5.1 (i). *Для любого компактного однородного пространства $Q = G/K$ с нормированными G-инвариантными метрикой θ и мерой μ функции* (5.4) *и* (5.6) *являются ядрами Леви–Шёнберга. Их поляризации ρ_r и $\rho_r(\eta)$ имеют вид*

$$\rho_r(x_1, x_2) = 2\theta^{\Delta})r(x_1, x_2), \tag{5.7}$$

$$\rho(\eta, x_1, x_2) = 2\theta^{\Delta}(\eta, x_1, x_2), \tag{5.8}$$

где θ_r^{Δ} и $\theta^{\Delta}(\eta)$ – метрики симметричной разности (2.1) и (2.4) и имеют место формулы обращения

$$\theta_r^{\Delta}(x_1, x_0) + \theta_r^{\Delta}(x_2, x_0) - \theta_r^{\Delta}(x_1, x_2) = 2f_r(x_1, x_2) \tag{5.9}$$

$$\theta^{\Delta}(\eta, x_1, x_0) + \theta^{\Delta}(\eta, x_2, x_0) - \theta^{\Delta}(\eta, x_1, x_2) = 2f(\eta, x_1, x_2) \tag{5.10}$$

(ii) *Для двуточечно-однородных пространств $Q = Q(d, d_0)$ соответствующие поляризации ρ_r и $\rho_r(\eta)$ удовлетворяют оценкам*

$$\rho_r(x_1, x_2) < Cw(d, d_0, r)\theta(x_1, x_2) \tag{5.11}$$

$$\rho(\eta, x_1, x_2) < C\|\eta\|_{d,d_0}\theta(x_1, x_2), \tag{5.12}$$

где $w(d, d_0, r)$ и $\|\eta\|_{d,d_0}$ определены в (3.2) *и* (3.3).

Часть (i) проверяется простым прямым вычислением, а часть (ii) следует из Леммы 3.2 и равенств (5.7), (5.8).

Исследование многопараметрических случайных процессов с ковариациями (5.4) и (5.6) выходит за рамки настоящей работы. Вместо этого мы рассмотрим некоторые простые, но любопытные факты, связанные с приведенными выше формулами.

Рассмотрим сферу S^d с метрикой большего круга θ и стандартной нормализованной d-мерной мерой μ. Справедлива следующая формула, см. [17, Sec. 6.4],

$$\theta(x_1, x_2) = \pi\mu(B_{\pi/2}(x_1)\Delta B_{\pi/2}(x_2)), \quad x_1, x_2 \in S^d, \tag{5.13}$$

где $B_{\pi/2}(x) = \{y \in S^d : \theta(y, x) \leqslant \pi/2\} = \{y \in S^d : \langle y, x >\geqslant 0\}$ – полусфера с центром x. Пользуясь (2.2), можно записать формулу (5.13) в виде

$$\theta(x_1, x_2) = \pi(1 - 2\mu(B_{\pi/2}(x_1) \cap B_{\pi/2}(x_2)) \tag{5.14}$$

В такой форме это равенство почти очевидно – достаточно заметить, что мера пересечения двух полусфер в (5.14) является линейной функцией $\theta(x_1, x_2)$.

Сравнивая формулы (5.13) и (2.1), получаем

$$\theta(x_1, x_2) = 2\pi\theta^{\Delta}_{\pi/2}(x_1, x_2). \tag{5.15}$$

Иными словами, геодезическая метрика θ на сфере S^d является метрикой симметричной разности.

Пользуясь формулами (5.15) и (5.5), получаем

$$\theta(x_1, x_0) + \theta(x_2, x_0) - \theta(x_1, x_2) = 4\pi \int\limits_{S^d} F_{\pi/2}(x_1, y) F_{\pi/2}(x_2, y)\, d\mu(y), \tag{5.16}$$

где

$$F_{\pi/2}(x, y) = \chi(B_{\pi/2}(x), y) - \chi(B_{\pi/2}(x_0), y). \tag{5.17}$$

Из формул (5.16), (5.17) сразу же следует, что выражение в левой части (5.16) является положительно определенным ядром. Это известная теорема Леви. Первоначально ее доказательство было получено на основе интегралов "белого шума" при исследовании случайных процессов параметризованных точками сферы, см. [25, Chap. 8; Appen. Chap. 3]. Прямое доказательство этой теоремы было дано Gangolli [20, Sec. 4] на основе разложения метрики θ по сферическим функциям на S^d (полиномам Гегенбауэра). Приведенное выше доказательство теоремы Леви на основе тождества (5.16) является, по видимому, наиболее простым.

Отметим, что геодезическая метрика θ для проективных пространств $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$, $\mathbb{H}P^n$, $\mathbb{O}P^2$ не является метрикой симметричной разности и для нее не имеет места аналог теоремы Леви. Это следует из результатов работы [20, Sec. 4; pp. 225–226]. Сказанное подчеркивает еще раз важность хордовой метрики τ, для которой все эти свойства имеют место для всех двуточечно-однородных пространств $Q(d, d_0)$, ср. Теоремы 3.2 и 5.1.

В заключение мы объясним появление аномально малых остатков в формуле (1.17). Пользуясь формулой (5.15) и принципом инвариантности (3.4) для сферы S^d, получаем

$$\theta[\mathcal{D}_N] = \langle\theta\rangle N^2 - 2\pi\lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_N],$$

где
$$\lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_N] = \int\limits_{S^d} \Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_N]^2 \, d\mu(y)$$
и
$$\Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_N] = \#\{B_{\pi/2}(y) \cap \mathcal{D}_N\} - N v_{\pi/2}.$$

Поскольку $v_{\pi/2} = 1/2$, то пользуясь (2.10), находим что $\langle\theta\rangle = \pi/2$.

N – точечное подмножество $\mathcal{D}_N \subset S^d$ представим как объединение двух непересекающихся подмножеств
$$\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_{2a}^{(0)} \cup \mathcal{D}_b^{(1)}, \quad N = 2a + b,$$
$\mathcal{D}_{2a}^{(0)} = \{x \in \mathcal{D}_N : -x \in \mathcal{D}_N\}$, $\mathcal{D}_b^{(1)} = \{x \in \mathcal{D}_N : -x \notin \mathcal{D}_N\}$, тогда
$$\Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_N] = \Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_{2a}^{(0)}] + \Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_b^{(1)}].$$
Ясно, что $\Lambda[B_{\pi/2}(y), \mathcal{D}_{2a}^{(0)}] = 0$ для всех $y \in S^d$ за исключением таких y, что $\langle y, x\rangle = 0$, $x \in \mathcal{D}_{2a}^{(0)}$. Поэтому
$$\lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_N] = \lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_b^{(1)}]. \tag{5.18}$$

Пусть $N = 2a$ – четное и $\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_{2a}^{(0)}$, тогда $\lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_N] = 0$. Пусть $N = 2a+1$ – нечетное и $\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_{2a}^{(0)} \cup \mathcal{D}_1^{(0)}$, где $\mathcal{D}_1^{(1)} = \{x_1\}$ – одноточечное подмножество. Простое вычисление показывает, что $\lambda_{\pi/2}[\{x_1\}] = \pi/2$ и, в силу (5.18), $\lambda_{\pi/2}[\mathcal{D}_N] = \pi/2$. Из сказанного следует соотношение (1.17).

Список литературы

[1] J. R. Alexander, *On the sum of distances between n points on a sphere.* — Acta Math. Hungar. **23** (3–4) (1972), 443–448.

[2] J. R. Alexander, J. Beck, W. W. L. Chen, *Geometric discrepancy theory and uniform distributions.* — in Handbook of Discrete and Computational Geometry (J. E. Goodman and J. O'Rourke eds.), Chapter 10, pages 185–207. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.

[3] J. C. Baez, *Octonions*, Bull. Amer. Math. Soc. **39** (2002), 145–205; errata in Bull. Amer. Math. Soc. **42** (2005), 213.

[4] E. Banai, *On extremal finite sets in the sphere and other metric spaces*, in *Algebraic, extremal and metric combinatorics* 1986, (Eds. M. M. Deza, P. Frankl, I. G. Rosenberg), Cambridge Univ. Press, 1988.

[5] J. Beck, *Sums of distances between points on a sphere: An application of the theory of irregularities of distrubutions to distance geometry*, Mathematika **31** (1984), 33–41.

[6] J. Beck, W. W. L. Chen, *Irregularities of Distribution.* — Cambridge Tracts in Math., vol. 89, Cambridge Univ., Press, 1987.

[7] A. L. Besse, *Manifolds all of whose geodesics are closed*, A series of modern surveys in Math., vol. 93, Springer, 1978.

[8] D. Bilyk, *Discrepancy problems as particle interactions*, Preprint, 2014.

[9] A. Bondarenko, D. Radchenko, M. Viazovska, *Optimal asymptotic bounds for spherical designs*, Ann. of Math. **178** No. 2 (2013), 443–452.

[10] A. Bondarenko, D. Radchenko, M. Viazovska, *Well-separated spherical designs*, frXiv. 1303. 5531v2 [math. MG] 10 Jul 2013.

[11] J. S. Brauchart, J. Dick, *A simple proof of Stolarsky's invariance principle.* — Proc. Amer. Math. Soc. **141** (2013), 2085–2096.

[12] J. S. Brauchart, P. J. Grabner, *Distributing many points on spheres: minimal energy and desings*, arXiv: 1407. 8282v2 [math-ph] 7 Nov 2014.

[13] H. Cohn, A. Kumar, *Universally optimal distribution of points on spheres*, J. Amer. Math. Soc. **20** No. 1 (2006), 99–147.

[14] H. Cohn, A. Kumar, G. Minton, *Optimal simplices and codes in projective spaces*, to appear in Geometry and Topology, arXiv: 1308.3188.

[15] J. Conway, R. Hardin, N. J. A. Sloane, *Packing lines, planes, etc.: packing in Grassmannian spaces*, Experiment. Math., **5** (1996), 139–159.

[16] J. H. Conway, N. J. A. Sloane, *Sphere packing, lattices and groups*, Springer-Verlag, 1988.

[17] M. M. Deza, M. Laurent, *Geometry of cuts and metrics*, Springer-Verlag, 1997.

[18] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, 1969.

[19] H. Freudenthal, *Lie groups in the Foundation of geometry*, Advances in Math., **1** (1965, 145–190.

[20] R. Gangolli, *Positive definite kernels on homogeneous spaces and certain stochastic processes related to Lévy's Brownian motion of several parameters*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. III, No. 2 (1967), 121–325.

[21] F. R. Harvey, *Spinors and calibrations*, Academic Press, 1990.

[22] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press Inc., London, 1978.

[23] S. Helgason, *Groups and geometric analysis. Integral geometry, invariant differential operators*, and Spherical functions, Academic Press, 1984.

[24] V. I. Levenshtein, *Universal bounds for codes and designs*, in Handbook of Coding Theory (V. S. Pless and W. C. Huffman eds.), Chapter 6, pages 499–648. Elsevier, Amsterdam, 1998.

[25] P. Lévy, *Processur stochastiques et monvement Brownien*, Deuxième ẽdit., Paris 1965.

[26] J. Matoušek, *Geometric Disrepancy. An Illustrated Guide*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[27] P. Mattila, *Geometry of sets and Meaaures in Euclidean Spaces. Fractals and Rectifiability*, Cambridge Univ. Pres, Cambridge, 1995.

[28] E. A. Rakhnanov, E. B. Saff, Y. M. Zhou, *Minimal discrete energy on the sphere.* — Mathematical Research Letters **1** (1994), 647–662.

[29] E. B. Saff, A. B. J. Kwijlaars, *Distributing many points on a sphere*, Math. Intelligencer, **19** (1) (1997), 5–11.

[30] M. M. Skriganov, *Point distributions in compact metric spaces*, (2015), arXiv: 1512.00364v1 [math.Co].

[31] M. M. Skriganov, *Point distributions in two-point homogeneous spaces* (in preparation).

[32] K. B. Stolarsky, *Sums of distances between points on a sphere*, II. Proc. Amer. Math. Soc. **41** (1973), 575–582.

[33] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, AMS, 1950.

[34] N. Ja. Vilenkin, A. U. Klimyk, *Representation of Lie groups and special functions*, vols. 1–3, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1991–1992.

[35] J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, Univ. Califormia, Berkley, 1972.

[36] J. A. Wolf, *Harmonic alalysis on commutative spaces*, Math. Surveys and Monographs, vol. 142, Amer. Math. Soc., Providence, 2007.