

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

**Случайные блуждания на группах,
действующих на деревьях, дендритах и
других древовидных пространствах**

А. В. МАЛЮТИН

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
malyutin@pdmi.ras.ru

Аннотация

Представлены результаты о случайных блужданиях в счетных группах, действующих на древовидных пространствах. Доказано, в частности, что всякое неприводимое действие счетной группы на нелинейном дендрите μ -проксимально в смысле Фюрстенберга.

Ключевые слова: дерево, дендрит, древовидное пространство, случайное блуждание, группа, проксимальность, граница Пуассона.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 13-01-12422-офи-м и 14-01-00373-а).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Г. В. Кузьмина,
П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин, В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

1 Введение

Настоящая работа относится к направлению, которое можно обозначить как изучение случайных блужданий на подгруппах групп автоморфизмов топологических пространств (или случайных блужданий на группах, действующих на топологических пространствах). Мы стремимся получить ответ на вопрос предельно наглядного характера: как ведут себя точки пространства под действием элементов типичной траектории случайного блуждания на группе. Этот вопрос тесно связан, в частности, с задачей описания границы Пуассона–Фюрстенберга группы. В рамках указанного направления целесообразно соотносить изучаемые действия групп со шкалой «дистальность — проксимальность», на одной стороне которой находятся изометрические действия, на другой — всевозможные «сжимающие» действия без инвариантных метрик (мер) и т. п. Специальный интерес представляет свойство μ -проксимальности, введенное в рассмотрение Фюрстенбергом (см. [Fur73], а также [Mar91], [GW13]; определение μ -проксимальности приведено в § 2). В группе, действующей на пространстве μ -проксимально, «проксимальные» элементы (т. е. элементы, под действием которых большие области пространства переходят в малые) не только присутствуют, но и в определенном смысле превалируют (см. [Fur73, теорема 14.1]). Поиск μ -проксимальных действий и доказательство наличия этого свойства часто представляет собой трудную задачу.¹

Весомая доля известных примеров μ -проксимальных действий привязана к изометрическим и имеет следующий вид: группа действует *изометриями* на симметрическом, гиперболическом или другом (обладающем определенными схожими свойствами) метрическом пространстве X , а сопутствующее действие на бесконечно удаленной границе ∂X этого пространства и/или на пространстве $X \cup \partial X$ оказывается μ -проксимальным. Обычно в такой модели поддается описанию и поведение точек: в типичном случае все точки подпространства X в пространстве $X \cup \partial X$ под действием элементов почти всякой траектории случайного блуждания на группе стремятся к некоторой «бесконечно удаленной» (зависящей от траектории) точке w в ∂X .²

В ряде недавних работ получены расширения и различные модификации вышеописанной модели. Перечислим некоторые из них.

1. В качестве пространства X рассматриваются пространства, все более далекие от гиперболических и симметрических (см. [Kai00], [Kar03]).

2. В качестве X берутся гиперболические пространства, не являющиеся ло-

¹Эта задача может рассматриваться как часть задачи описания границы Пуассона–Фюрстенберга заданной группы. Вторая часть задачи стоит в проверке максимальной (т. е. изоморфности ПФ-границе для конкретных мер) найденного μ -проксимального пространства. В настоящей работе исследуется μ -проксимальность; задача о максимальной не затрагивается.

²Вопрос о поведении точек самой границы ∂X исследован в меньшей степени. В нескольких изученных случаях почти все точки границы ∂X , за исключением некоторого малого но всюду плотного подмножества, под действием элементов траектории устремляются к той же предельной точке w .

кально компактными (см. [MT14], а также [MS14]).

3. Рассматриваются неизометрические действия на X : например, допускаются квазиизометрии, гомотетии и т. п., индуцирующие автоморфизмы на ∂X (см. [VM08], [GM12]).

Оказывается, для крайнего случая гиперболических пространств, — для 0-гиперболических пространств (т. е. для \mathbb{R} -деревьев), — желаемый сценарий пункта 3 реализуется в полном объеме: аналоги теорем о сходимости продолжают выполняться, если перейти от изометрических действий к произвольным действиям гомеоморфизмами или структурными автоморфизмами. Обнаруживающиеся здесь методы и подходы не опираются на метрики, выходят за рамки вышеописанной модели и формируют отдельное направление, охватывающее действия на разнообразных пространствах с древовидной структурой (Λ -деревьях, дендронах, дендритах, преддеревьях и проч.). Изложение части соответствующих результатов и методов и составляют существо настоящей заметки. Эти результаты удобно формулировать в терминах *дендритов*.

Напомним, что *дендритом* называют непустой связный метрический компакт (*континуум*), в котором любые две различные точки *разделены*³ третьей. Дендриты гомеоморфны компактным \mathbb{R} -деревьям. С другой стороны, любому сепарабельному \mathbb{R} -дереву каноническим образом соответствует некоторый дендрит (см. теоремы 8.1 и 10.5). Изучению дендритов посвящена обширная литература (некоторые ссылки даны в [Bow99, Mal13, Mal14]). В применении к случаю дендритов основные результаты настоящей статьи выглядят следующим образом.

1.1. Теорема. *Пусть счетная группа G действует гомеоморфизмами на дендрите D . Предположим, что D не является дугой и не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов (подконтинуумами принято называть связные подкомпакты дендрита). Пусть μ — вероятностная мера на G , носитель которой порождает G как полугруппу. Тогда G действует на D μ -проксимально.*

1.2. Теорема. *Пусть G , D и μ удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Тогда*

1. *Для почти всякой траектории $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ правого случайного μ -блуждания найдется точка $z(\tau)$ в D такая, что для каждой внутренней точки $x \in D$ последовательность $(\tau_i(x))_{i \in \mathbb{N}_0}$ сходится к $z(\tau)$;*

2. *Распределение пределов $z(\tau)$ задается некоторой (вероятностной борелевской) мерой ν_μ на D ; мера ν_μ*

– *непрерывна (т. е. принимает нулевое значение на одноточечных множествах),*

– *является основной (т. е. принимает ненулевое значение на каждой компоненте связности множества $D \setminus \{x\}$ для каждой $x \in D$),*

– *μ -стационарна (т. е. $\mu * \nu_\mu = \sum_{g \in G} g(\nu_\mu)\mu(g) = \nu_\mu$).*

³Говорят, что точки $a, b \in D$ топологического пространства D *разделены* точкой $c \in D$, если пространство $D \setminus \{c\}$ представимо в виде дизъюнктивной суммы двух открытых множеств A и B , где $a \in A$ и $b \in B$.

3. Мера ν_μ является единственной μ -стационарной вероятностной мерой на D ; пара (D, ν_μ) является μ -границей группы G в смысле Фюрстенберга.

Изучение действия счетных групп на других древовидных структурах во многом сводится к случаю дендритов (см. [Bow99]). Полученные для дендритов результаты напрямую применимы, скажем, к случаю автоморфизмов \mathbb{R} -деревьев. Действительно, — любому сепарабельному \mathbb{R} -дереву каноническим образом соответствует некоторый дендрит (для его получения нужно взять метрическое пополнение исходного \mathbb{R} -дерева, добавить концевые точки на бесконечности и, возможно, специальным образом ослабить исходную топологию; подробнее см., например, [Mal13, Mal14], а также теоремы 8.1 и 10.5), а любому непрерывному действию на исходном \mathbb{R} -дереве отвечает непрерывное действие на этом дендрите (поскольку топология при переходе к дендриту не увеличивается). Таким образом, если задано непрерывное действие на \mathbb{R} -дереве, мы можем рассмотреть индуцированное действие на соответствующем дендрите, применить к нему теорему 1.2, а результат проинтерпретировать в терминах исходного \mathbb{R} -дерева.⁴

Для классических деревьев — связных односвязных клеточных комплексов размерности не выше 1 — теорема 1.2 дает следующее (см. определения в §§ 2 и 12).

1.3. Следствие. Пусть счетная группа G действует на бесконечном (не обязательно локально конечном) дереве T . Предположим, что T не содержит собственных G -инвариантных поддеревьев, а индуцированное действие группы G на пространстве концов $\text{Ends}(T)$ не имеет конечных орбит. Пусть μ — вероятностная мера на G , носитель которой порождает G как полугруппу. Тогда для почти всякой траектории $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ правого случайного μ -блуждания найдется точка $z(\tau) \in \text{Ends}(T)$ такая, что для каждой точки $x \in T$ последовательность $(\tau_i(x))_{i \in \mathbb{N}_0}$ сходится к $z(\tau)$; распределение пределов $z(\tau)$ задается некоторой (вероятностной борелевской) мерой ν_μ на $\text{Ends}(T)$. Мера ν_μ непрерывна, ее носителем является все пространство $\text{Ends}(T)$. Мера ν_μ является единственной μ -стационарной вероятностной мерой на $\text{Ends}(T)$. Группа G действует на пространстве $T \cup \text{Ends}(T)$ μ -проксимально, т. е. пара $(T \cup \text{Ends}(T), \nu_\mu)$ является μ -границей в смысле Фюрстенберга.

1.4. Замечания. В формулировке следствия 1.3 привлекается пространство $T \cup \text{Ends}(T)$, поскольку понятия μ -проксимального пространства и μ -границы Фюрстенберга удобнее вводить для случая компактных пространств, а пространство концов $\text{Ends}(T)$ с естественной топологией может не быть компактным, если T не локально конечно.

1.5. Замечание о носителе стационарной меры. На примере дендритов можно наблюдать эффект, когда мера, стационарная по отношению к действию

⁴Заметим, однако, что последовательность точек (соответствующего \mathbb{R} -дереву) дендрита, сходящаяся к внутренней точке дендрита, не обязательно сходится в метрике исходного \mathbb{R} -дерева.

некоторой группы и мере на этой группе, концентрируется на множестве внутренних, а не концевых, точек дендрита. В рамках обсуждаемой выше модели $X \cup \partial X$ с изометрическим действием на X и, в частности, в случае симплициальных деревьев (не обязательно локально конечных) и дендритов, полученных их компактификацией, такого эффекта наблюдаться не может, — здесь стационарные меры всегда сосредоточены на пространстве концов ∂X (множестве концевых точек дендрита). Примеры с концентрацией стационарной меры на внутренних⁵ точках можно получить, например, из \mathbb{R} -деревьев, допускающих гомотетии (подобные действия рассматривались в [GM12]). Отметим, что стационарная мера сосредоточена либо на множестве концевых, либо на множестве внутренних точек дендрита (поскольку действие группы на границе Пуассона–Фюрстенберга, а значит и на любой μ -границе, эргодично, а указанные множества измеримы и инвариантны). Таким образом, индикатор концентрации стационарной меры дает дискретный (двухзначный) функционал на множестве невырожденных мер на группе, действующей на дендрите. Этот функционал заслуживает более подробного исследования. (Ср. с [KE13].)

2 Предварительные сведения о случайных блужданиях

2.1. Случайное блуждание. Пусть G — счетная группа, μ — вероятностная мера на G . Мера μ называется *невырожденной*, если ее носитель порождает G как полугруппу. *Правым случайным блужданием на группе G с распределением μ* (или, короче, *μ -блужданием*) называется марковский процесс с пространством состояний G , переходной вероятностью $P(g, h) = \mu(g^{-1}h)$ и начальным состоянием в единице группы.⁶ Реализации этого процесса называются *траекториями* блуждания. Соответствующую процессу марковскую меру на пространстве траекторий $G^{\mathbb{N}_0}$ ($\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \dots\}$) будем обозначать через P_μ . Мере P_μ можно описать следующим образом. Обозначим через C_{g_0, \dots, g_p} , где $p \in \mathbb{N}_0$, $g_i \in G$, семейство траекторий

$$C_{g_0, \dots, g_p} := \left\{ \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}_0} \in G^{\mathbb{N}_0} : (\tau_0, \dots, \tau_p) = (g_0, \dots, g_p) \right\}.$$

Тогда

$$P_\mu(C_{g_0, \dots, g_p}) = \delta_{1_G}(g_0) \times \mu(g_0^{-1}g_1) \times \dots \times \mu(g_{p-1}^{-1}g_p),$$

где δ_{1_G} есть вероятностная мера на G , сосредоточенная в единице группы ($\delta_{1_G}(\{1_G\}) = 1$).

⁵Можно говорить о сосредоточенности на множестве точек степени два, поскольку у любого дендрита множество *точек ветвления*, т. е. точек степени три и выше, не более чем счетно.

⁶В некоторых случаях правое случайное блуждание называют *левоинвариантным* блужданием.

2.2. Меры на пространстве. Пусть M — метрическое пространство. Мы обозначаем через $\mathcal{P}(M)$ пространство всех⁷ борелевских вероятностных мер на M , снабженное слабой топологией (в двойственности по отношению к пространству ограниченных непрерывных функций на M). Предбазой слабой топологии служит семейство множеств вида

$$\left\{ \nu \in \mathcal{P}(M) : a < \left(\int_M f d\nu \right) < b \right\}, \quad \text{где } f \in C_b(M), \ a, b \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, последовательность $(\nu_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ в $\mathcal{P}(M)$ сходится в слабой топологии (*слабо сходится*) к мере ν тогда и только тогда, когда для каждой функции $f \in C_b(M)$ числовая последовательность $(\int_M f d\nu_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ сходится к $\int_M f d\nu$.

Меру, сосредоточенную в одной точке, мы называем *дираковской*. Меру, принимающую нулевое значение на каждом одноточечном множестве, называют *непрерывной*.

2.3. Действия на мерах. Пусть счетная группа G действует гомеоморфизмами на метрическом пространстве M . Действие G на M индуцирует действие G на $\mathcal{P}(M)$:

$$(g \cdot \nu)(E) = \nu(g^{-1} \cdot E).$$

Пусть μ — вероятностная мера на G . Меру $\nu \in \mathcal{P}(M)$ называют *μ -стационарной*, если

$$\mu * \nu = \sum_{g \in G} (g \cdot \nu) \mu(g) = \nu.$$

В силу теоремы Шаудера–Тихонова–Какутани о неподвижной точке, если счетная группа G действует на компактном метризуемом пространстве M , то для произвольной вероятностной меры μ на G множество μ -стационарных мер в $\mathcal{P}(M)$ непусто.

Меру $\nu \in \mathcal{P}(M)$ называют *квази-инвариантной* по отношению к действию группы G , если для любого $g \in G$ мера $g \cdot \nu$ *абсолютно непрерывна* по отношению к мере ν , т. е. $\nu(g^{-1} \cdot E) = 0$ всегда, когда $\nu(E) = 0$. Как нетрудно видеть, если вероятностная мера μ на G невырождена, то всякая μ -стационарная мера в $\mathcal{P}(M)$ квази-инвариантна по отношению к действию группы G (см., например, [VM08, лемма 3.3]).

2.4. Определение. μ -Проксимальность и μ -границы в смысле Фюрстенберга. (См. [Fur73].) Пусть счетная группа G действует гомеоморфизмами на

⁷В работе [Fur73], на результаты которой мы ссылаемся, рассматриваются регулярные меры. Требование регулярности в случае произвольных компактных топологических пространств гарантирует хаусдорфовость пространства мер в слабой топологии. В случае метрических пространств все борелевские меры замкнуто-регулярны (см., например, [Par67, теорема 1.2, стр. 27]). Отметим также, что слабая топология на пространстве (борелевских вероятностных) мер произвольного метрического пространства хаусдорфова (см., например, [AB06, теорема 15.1]).

метрическом пространстве (M, d) . Пусть μ — вероятностная мера на G . Положим

$$\mu_{(n)} = (\mu + \mu^{*2} + \dots + \mu^{*n})/n,$$

где $\mu^{*1} = \mu$ и

$$\mu^{*k} := \sum_{g \in G} (g \cdot \mu^{*(k-1)}) \mu(g).$$

Пространство M (а равно и действие группы G на этом пространстве) называют μ -проксимальным, если для любых $x, y \in M$ и $\varepsilon > 0$ выполняется условие

$$\mu_{(n)}\{g | d(gx, gy) > \varepsilon\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Пусть $\nu \in \mathcal{P}(M)$ — μ -стационарная мера. Пару (M, ν) называют μ -границей в смысле Фюрстенберга для G , если для P_μ -почти всякой траектории $\tau = \{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ правого μ -блуждания последовательность мер $(\tau_i \cdot \nu)_{i \in \mathbb{N}_0}$ сходится к некоторой дираковской мере $\delta_{\omega(\tau)}$, где $\omega(\tau) \in M$.

2.5. Теорема. Пусть счетная группа G действует гомеоморфизмами на компактном метрическом пространстве M . Пусть μ — вероятностная мера на G . Тогда следующие условия эквивалентны:

- (а) Действие G на M является μ -проксимальным.
- (б) Для каждой μ -стационарной меры $\nu \in \mathcal{P}(M)$ пара (M, ν) является μ -границей для G в смысле Фюрстенберга.
- (с) Существует единственная μ -стационарная мера $\nu \in \mathcal{P}(M)$, а пара (M, ν) является μ -границей для G в смысле Фюрстенберга.

Доказательство. Эквивалентность (а) \Leftrightarrow (б) доказывается в [Fur73, теорема 14.1]. Импликация (а) \Rightarrow (с) доказывается в [VM08, лемма 3.1]. (Подробнее см. также [GW13, §7].) Импликация (с) \Rightarrow (б) тривиальна. \square

2.6. Граница Пуассона–Фюрстенберга. Граница Пуассона–Фюрстенберга случайного μ -блуждания на счетной группе G определяется как факторпространство пространства траекторий $(G^{\mathbb{N}_0}, P_\mu)$ по отношению к измеримой оболочке разбиения ζ , элементами которого являются классы эквивалентности отношения \sim (на пространстве траекторий), определяемого следующим образом:

$$(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \sim (\tau'_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \iff \exists k, k' : \tau_{k+j} = \tau'_{k'+j} \quad \forall j > 0.$$

Измеримая оболочка разбиения и граница Пуассона–Фюрстенберга являются объектами, определенными с точностью до подмножеств меры 0. Разбиение ζ инвариантно по отношению к действию группы G на пространстве траекторий $G^{\mathbb{N}_0}$, определяемого правилом $g(\tau_0, \tau_1, \dots) = (g\tau_0, g\tau_1, \dots)$. Это действие индуцирует каноническое действие группы G на границе Пуассона–Фюрстенберга. Как известно (см., например, [MNS12]), всякая μ -граница является, как пространство с мерой, эквивариантным фактором границы Пуассона–Фюрстенберга.

3 Предварительные сведения о дендритах

3.1. Определение. Дендриты. Говорят, что точки $a, b \in X$ топологического пространства X *разделены* точкой $c \in X$, если пространство $X \setminus \{c\}$ представимо в виде дизъюнктивной суммы двух открытых множеств A и B , где $a \in A$ и $b \in B$. *Древовидным (топологическим) пространством* называют (непустое) связное топологическое пространство, в котором любые две различные точки разделены третьей. Компактные древовидные пространства называют *дендронами*. Метризуемые дендроны называют *дендритами*.

3.2. Замечание. Дендрон метризуем если и только если он сепарабелен (см., например, [Cog74] или следствие 8.16 и замечание 5.16(iii) в [Nik89]). Таким образом, дендрит можно определить как сепарабельный дендрон. Обширный перечень эквивалентных определений дендритов и их свойств можно найти, например, в [Cha98] и приведенной там литературе по *теории континуума*. Далее в некоторых случаях без дополнительных оговорок используются результаты работ, в которых определение дендрита отличается от определения 3.1. Во всех этих случаях ссылки на доказательства эквивалентности определений можно найти в [Cha98].

3.3. Определения. *Континуумом* называют компактное связное хаусдорфово пространство. Связное замкнутое непустое подмножество дендрита называется *подконтинуумом* (подконтинуум дендрита является, таким образом, дендритом). Топологическое пространство X называется *упорядочиваемым*, если на X имеется линейный порядок $<$ такой, что совокупность подмножеств вида $\{x \in X : x < x_0\}$ и $\{x \in X : x_0 < x\}$, где $x_0 \in X$, порождает исходную топологию. *Дугами* или *линейными континуумами* называют упорядочиваемые континуумы. Как известно (см., например, [MSW82]), неодноточечный континуум линеен тогда и только тогда, когда у него имеется лишь две концевые точки. Всякая метризуемая дуга гомеоморфна замкнутому интервалу вещественной прямой (см., например, [Kir68, глава 5, § 47, раздел V, теорема 1]).⁸ *Степенью* точки x дендрита D называют количество компонент связности пространства $D \setminus \{x\}$. Как известно (см., обсуждение в [ACCS01, § 2] и цитированную там литературу), для дендритов такое определение степени эквивалентно определению степени точки для континуумов в смысле Менгера–Урысона, которое используется в некоторых работах, результаты которых мы применяем. Точки степени 1 (в неодноточечном дендрите) называют *неразделяющими* или *концевыми*; остальные точки дендрита называют *разделяющими* или *внутренними*. Точки степени по меньшей мере 3 называют *точками ветвления*. Подмножество B дендрита D называется *ветвью*, если B является компонентой связности

⁸В рамках теории дендритов и метрических континуумов «дуга» часто определяется как пространство, гомеоморфное замкнутому интервалу вещественной прямой. В нашем случае требуется общее определение, поскольку именно оно используется в части работ, результаты которых задействованы далее. Кроме того, общее определение дуги используется во второй части статьи.

пространства вида $D \setminus \{r\}$, где $r \in D$. Точку r будем называть *источником* ветви B . Если пространство $D \setminus \{r\}$ связно, ветвь $B = D \setminus \{r\}$ будем называть *вырожденной*.

Приведем некоторые свойства дендритов, используемые в доказательствах результатов статьи.

3.4. Лемма. *В неодноточечном дендрите множество точек степени 2 всюду плотно.*

Доказательство. Доказательство приведено, например, в [Kur68, глава 6, § 51, раздел VI, теорема 8, стр. 302]. \square

3.5. Лемма. *Всякое связное подмножество дендрита линейно связно.*

Доказательство. См., например, [Why42, (1.3) (ii), стр. 89]. \square

3.6. Лемма. *В произвольном дендрите для любых двух его точек имеется единственная дуга с концами в этих точках. Множество внутренних точек этой дуги совпадает с множеством точек, разделяющих две исходные.*

Доказательство. Доказательство первого классического факта приведено, например, в [MSW82, теорема 6] и [Why42, (1.2), стр. 89]. Доказательство второго дано в [vMW81, § 2]. \square

3.7. Обозначение. Дуги. Если a и b — точки дендрита D , дугу в D с концами в этих точках, существование и единственность которой гарантируется леммой 3.6, будем обозначать через $[a, b]$.

3.8. Лемма. *В дендрите для любых трех точек a , b и c выполняется соотношение $[a, b] \subset [a, c] \cup [c, b]$.*

Доказательство. Воспользуемся леммой 3.6 и тем фактом, что всякая точка, разделяющая точки a и b , либо разделяет также точки a и c , либо разделяет c и b . \square

3.9. Лемма. *Подмножество дендрита связно тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя своими точками a и b оно содержит и дугу $[a, b]$.*

Доказательство. Если с любыми двумя своими точками a и b подмножество содержит и дугу $[a, b]$, то оно связно, так как дуги связны. Для доказательства обратной импликации предположим, что некоторое подмножество X дендрита содержит точки a и b , но не содержит какой-нибудь точки c из $[a, b]$. Тогда точка c разделяет точки a и b (см. лемму 3.6). Это в силу определения разделяющей точки означает, что пространство $D \setminus \{c\}$ представимо в виде дизъюнктивной суммы двух открытых множеств A и B , где $a \in A$ и $b \in B$. Следовательно (поскольку $X \subset D \setminus \{c\}$, $a \in X$ и $b \in X$), подмножество X представимо в виде дизъюнктивной суммы двух непустых открытых множеств $A \cap X$ и $B \cap X$ и не является связным. \square

3.10. Лемма. *В дендрите пересечение связных подмножеств из произвольного набора либо пусто, либо связно. Пересечение подконтинуумов из произвольного набора либо пусто, либо является подконтинуумом.*

Доказательство. Легко следует из леммы 3.9. □

3.11. Лемма. *Если в наборе подконтинуумов дендрита любые два подконтинуума пересекаются, то пересечение всех подконтинуумов набора непусто (и является в силу леммы 3.10 подконтинуумом).*

Доказательство. Имеется несколько различных путей доказательства этого известного факта. Например, можно воспользоваться тем, что дополнения ветвей дендрита образуют *бинарное*⁹ семейство ([vMW81, лемма 2.7]), а любой подконтинуум представим в виде пересечения элементов этого семейства ([vMW81, следствие 2.14]), откуда вытекает, что подконтинуумы дендрита также образуют бинарное семейство. □

3.12. Определение. Выпуклые оболочки и политопы. *Выпуклой оболочкой* подмножества S в дендрите D называется пересечение всех связных подмножеств дендрита, содержащих S . Выпуклая оболочка множества S обозначается через $\text{hull}(S)$. Следуя традиции теории выпуклых структур, выпуклую оболочку конечного множества будем называть *политопом*.

3.13. Лемма. *Выпуклая оболочка непустого подмножества дендрита связна. Политопы дендрита являются подконтинуумами.*

Доказательство. Связность выпуклой оболочки следует из леммы 3.10. Покажем, что в дендрите для любого подмножества S выполняется равенство

$$\text{hull}(S) = \bigcup_{a,b \in S} [a, b].$$

Действительно, включение $\bigcup_{a,b \in S} [a, b] \subset \text{hull}(S)$ выполняется в силу леммы 3.9, поскольку $\text{hull}(S)$ связно и содержит S . Обратное включение выполняется по определению выпуклой оболочки в силу очевидной связности множества $\bigcup_{a,b \in S} [a, b]$ (содержащего S). Таким образом, политоп компактен, будучи представим в виде объединения конечного числа компактных множеств. Итак, в дендрите каждый политоп связан, компактен и не пуст, т. е. является подконтинуумом. □

3.14. Замечание о выпуклых оболочках. В силу леммы 3.10 выпуклая оболочка непустого подмножества дендрита связна. Связные подмножества дендрита образуют систему, удовлетворяющую аксиоматике выпуклой структуры из абстрактной теории выпуклых структур; подробнее см. [Mal14].

⁹ Семейство \mathcal{L} подмножеств некоторого множества называется *бинарным*, если во всяком подсемействе $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ с $\bigcap \mathcal{M} = \emptyset$ найдется пара непересекающихся элементов.

3.15. Лемма. *Ветви являются открытыми подмножествами дендрита. Более того, ветви образуют в дендрите открытую предбазу.*

Доказательство. См., например, лемму 2.1 и следствие 2.2 в [vMW81]. \square

3.16. Лемма. *В каждой концевой точке дендрита ветви образуют локальную базу.*

Доказательство. Поскольку степень точки в смысле определения 3.3 совпадает со степенью точки континуума в смысле Менгера–Урысона (см., обсуждение в [ACCS01, § 2] и цитированную там литературу), у всякой концевой точки дендрита имеется локальная база, состоящая из открытых множеств, граница у каждого из которых одноточечна. Открытое множество W с одноточечной границей r в дендрите D является открыто-замкнутым подмножеством пространства $D \setminus \{r\}$. Следовательно, W является объединением компонент связности пространства $D \setminus \{r\}$, т. е. ветвей. Отсюда очевидным образом следует утверждение леммы. \square

3.17. Лемма. *Пусть V — ветвь в дендрите D , а $r \in D$ — ее источник. Тогда множества $D \setminus V$ и $V \cup \{r\}$ являются подконтинуумами.*

Доказательство. Поскольку V открыто (лемма 3.15), $D \setminus V$ замкнуто. При этом $D \setminus V$ связно (см., например, [vMW81, лемма 2.3]) и непусто ($(D \setminus V) \ni r$), так что $D \setminus V$ есть подконтинуум. Множество $V \cup \{r\}$ представимо в виде пересечения множеств вида $D \setminus E$, где E — ветвь с источником r . Каждое из указанных множеств содержит точку r . Следовательно, $V \cup \{r\}$ является подконтинуумом в силу леммы 3.11. \square

3.18. Лемма. *Каждая ветвь дендрита имеет единственный источник.*

Доказательство. Пусть V — произвольная ветвь дендрита D . По определению, у V имеется источник (скажем, b). Допустим, точка a (не совпадающая с точкой b) также является источником для V . Тогда $a \notin V$ и $b \notin V$ по определению. Выберем произвольно точку $t \in V$. Поскольку $t \in V$, $b \notin V$ и a — источник ветви V , получаем, что t и b лежат в двух разных компонентах связности (т. е. ветвях) пространства $D \setminus \{a\}$. Поскольку ветви открыты (лемма 3.15), это означает, что точки t и b разделены точкой a , так что $a \in [b, t]$ в силу леммы 3.6. Аналогичным образом получаем, что $b \in [a, t]$, а это, очевидно, возможно лишь при $a = b$. Лемма доказана. \square

3.19. Лемма. *Последовательность $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ точек дендрита D сходится к точке $x \in D$ тогда и только тогда, когда для каждой внутренней точки $z \in (D \setminus \{x\})$ множество $\{j \in \mathbb{N} : z \in [x, x_j]\}$ пусто или конечно, т. е. когда*

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j > k} [x, x_j] = \{x\}.$$

Доказательство. Для точек r и s в D при $r \neq s$ обозначим через $\zeta_r(s)$ ветвь с источником в r , содержащую s . Тогда семейство

$$\{\zeta_z(x)\}_{z \in (D \setminus \{x\})}$$

есть в точности множество всех тех ветвей в D , которые содержат x . Как известно, ветви образуют в дендрите открытую предбазу (лемма 3.15). Это означает, что последовательность $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ точек дендрита D сходится к точке $x \in D$ тогда и только тогда, когда для каждой ветви B , содержащей точку x , множество

$$\{j \in \mathbb{N} : x_j \notin B\}$$

пусто или конечно, т. е. если для каждой точки $z \in (D \setminus \{x\})$ множество

$$\{j \in \mathbb{N} : x_j \notin \zeta_z(x)\}$$

пусто или конечно. Остается заметить, что условие $x_j \notin \zeta_z(x)$ эквивалентно условию $z \in [x, x_j]$. \square

3.20. Следствие. *Предположим, что последовательности точек $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ и $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ в дендрите D сходятся к точке $s \in D$. Тогда каждая последовательность $(z_i)_{i \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию $z_i \in [x_i, y_i]$ для всех $i \in \mathbb{N}$, также сходится к s .*

Доказательство. Если последовательность $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ в дендрите D сходится к точке s , то и всякая последовательность $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, удовлетворяющая условию $b_i \in [z, a_i]$ для всех $i \in \mathbb{N}$, также сходится к s (это вытекает из леммы 3.19, поскольку при $b_i \in [z, a_i]$ имеем $[z, b_i] \subset [z, a_i]$ в силу леммы 3.6). Отсюда сразу следует требуемое, поскольку $[x_i, y_i] \subset [z, x_i] \cup [z, y_i]$ по лемме 3.8. \square

В завершение раздела дадим несколько утверждений о неприводимом действии группы на дендрите. (Действие группы G на дендрите D называется *неприводимым*, если D не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов.)

3.21. Лемма. *Пусть группа G действует гомеоморфизмами на дендрите D . Предположим, что D не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов. Тогда для любой ветви B в D выполняется следующее свойство:*

$$G(B) := \bigcup_{g \in G} g(B) = D.$$

Доказательство. Допустим, что в D найдется ветвь B такая, что $G(B) \neq D$. Рассмотрим дополнение $J := D \setminus B$ и пересечение

$$K := \bigcap_{g \in G} g(J).$$

Заметим, что J является подконтинуумом (лемма 3.17), так что K есть пересечение подконтинуумов. Отсюда следует, что K также является подконтинуумом, поскольку пересечение подконтинуумов из произвольного набора либо пусто, либо является подконтинуумом (лемма 3.10), а K непусто так как $K = D \setminus G(B)$. Это входит в противоречие с предположением об отсутствии в D собственных G -инвариантных подконтинуумов, поскольку K является G -инвариантным в силу определения. Полученное противоречие доказывает лемму. \square

3.22. Теорема. *Пусть группа G действует гомеоморфизмами на дендрите D . Предположим, что D не является дугой и не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов. Тогда множество $E(D)$ концевых точек дендрита D несчетно, а действие не имеет конечных орбит.*

Доказательство. Допустим, что $E(D)$ не более чем счетно. Тогда в нем (как в самостоятельном топологическом пространстве) найдется изолированная точка w (см. [ChWZ13, теорема 5.5]). Концевая точка является изолированной точкой пространства $E(D)$ тогда и только тогда, когда она является изолированной точкой пространства $E(D) \cup R(D)$, где $R(D)$ — множество точек ветвления дендрита D (см. [ChWZ13, факт 2.1] и [ССР94, предложение 4.13]). Отсюда легко следует, что некоторая открытая окрестность J точки w в D имеет вид $[w, t] \setminus \{t\}$, а дополнение $D \setminus J$ является подконтинуумом. Тогда множество

$$\bigcap_{g \in G} g(D \setminus J)$$

является G -инвариантным собственным подконтинуумом в силу леммы 3.10 (непустота следует из непустоты множества $R(D)$ вследствие того, что D не является дугой). Полученное противоречие показывает, что $E(D)$ несчетно.

Если бы у действия нашлась конечная орбита O , то выпуклая оболочка $\text{hull}(O)$ этой орбиты была бы G -инвариантным политопом. В силу первого утверждения настоящей теоремы D политопом не является. Следовательно, $\text{hull}(O)$ есть собственный G -инвариантный подконтинуум (лемма 3.13). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. \square

4 Доказательство основных теорем 1.1 и 1.2

4.1. Определение. Вытесняющие последовательности. Последовательность $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ автоморфизмов дендрита D назовем *вытесняющей*, если для каждого политопа T , состоящего из внутренних точек дендрита D , найдется число $N_T \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha_j(T) \cap T = \emptyset$ для всех $j > N_T$.

4.2. Теорема. *Пусть счетная группа G действует гомеоморфизмами на дендрите D . Предположим, что D не является дугой и не содержит собственных*

G-инвариантных подконтинуумов. Пусть μ — вероятностная мера на G , носитель которой порождает G как полугруппу. Тогда почти всякая траектория случайного μ -блуждания в G содержит вытесняющую подпоследовательность.

Теорема 4.2 доказывается в § 5.

4.3. Определение. Вполне дираковские последовательности. Последовательность $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ автоморфизмов дендрита D назовем *вполне дираковской*, если найдется точка $w \in D$ и подмножество $Z \subset D$, которое либо пусто, либо состоит из одной концевой точки, такие, что для каждой точки $t \in D \setminus Z$ последовательность $(\alpha_i(t))_{j \in \mathbb{N}}$ сходится к w .

4.4. Теорема. *Каждая вытесняющая последовательность автоморфизмов дендрита содержит вполне дираковскую подпоследовательность.*

Теорема 4.4 доказывается в § 6.

4.5. Соглашение. Всюду в дальнейшем под мерами на дендрите подразумеваются борелевские вероятностные меры.

4.6. Определение. Слабо дираковские последовательности. Последовательность $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ автоморфизмов дендрита D назовем *слабо дираковской*, если найдется точка $w \in D$ такая, что для каждой внутренней точки $t \in D$ последовательность $(\alpha_i(t))_{j \in \mathbb{N}}$ сходится к w .

4.7. Замечание. Теорема 4.10 характеризует слабо дираковские последовательности.

4.8. Определение. Остовная мера. Меру на дендрите назовем *остовной*, если она не обращается в ноль ни на одной из ветвей дендрита.

4.9. Лемма. *Мера на дендрите является остовной если и только если ее носитель (наименьшее замкнутое множество, на котором сосредоточена мера) содержит множество всех концевых точек дендрита.*

Доказательство. Поскольку ветви образуют локальную базу в каждой концевой точке дендрита (лемма 3.16), носитель всякой остовной меры на дендрите содержит множество всех концевых точек дендрита. Обратное: если носитель некоторой меры содержит множество всех концевых точек дендрита, то мера является остовной, поскольку каждая ветвь содержит концевую точку (и является, тем самым, открытой окрестностью концевой точки). Действительно, если бы ветвь B дендрита D не содержала концевых точек, то объединение $B \cup \{r\}$, где $r \in D$ — источник ветви B , являлось бы континуумом (лемма 3.17) с единственной концевой (то же, что неразделяющей) точкой. Как хорошо известно (см., например, [Kur68, глава 5, § 47, раздел IV, теорема 5] и цитированную там литературу), во всяком неодноточечном континууме существуют по крайней мере две неразделяющие точки. \square

4.10. Теорема. Пусть $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность автоморфизмов неототочечного дендрита D и z — точка в D . Тогда следующие условия эквивалентны.

- (а) Найдется непрерывная остовная мера ν на D такая, что последовательность мер $(\alpha_i(\nu))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к δ -мере δ_z .
- (б) Для каждой внутренней точки $x \in D$ последовательность $(\alpha_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к z .
- (с) Для каждой непрерывной (борелевской вероятностной) меры ν на D последовательность мер $(\alpha_i(\nu))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к δ -мере δ_z .

Теорема 4.10 доказывается в § 7.

Теоремы 1.1 и 1.2 следуют из теорем 4.2, 4.4 и 4.10.

Доказательство теорем 1.1 и 1.2. В силу теоремы Шаудера–Тихонова–Какутани о неподвижной точке, множество (вероятностных борелевских) μ -стационарных мер на D непусто (см., например, [Fur73, предложение 7.4]). Поскольку действие G на D не имеет конечных орбит (теорема 3.22), каждая μ -стационарная мера на D непрерывна (см., например, [KM96, лемма 2.2.2]). Как известно, под действием элементов почти всякой траектории случайного μ -блуждания последовательность образов произвольной μ -стационарной меры (на компактном метрическом пространстве) слабо сходится к некоторому пределу (см. [Fur73, теорема 7.5], [KM96, лемма 2.2.3]). Поскольку мера μ невырождена, в силу теорем 4.2 и 4.4 почти всякая траектория случайного μ -блуждания содержит вполне дираковскую подпоследовательность. Очевидно, что под действием элементов вполне дираковской последовательности последовательность образов произвольной непрерывной меры сходится к дираковской мере. Следовательно, под действием элементов почти всякой траектории случайного μ -блуждания последовательность образов произвольной μ -стационарной меры сходится к некоторой дираковской мере. Согласно определению μ -границ по Фюрстенбергу (см. определение 2.4) это означает, что, какова бы ни была μ -стационарная мера ν , пара (D, ν) является μ -границей по Фюрстенбергу. Тогда в силу теоремы 2.5 действие G на D μ -проксимально. Теорема 1.1 доказана.

Из доказанной μ -проксимальности действия по теореме 2.5 следует, что μ -стационарная мера в $\mathcal{P}(D)$ единственна. Обозначим эту единственную μ -стационарную меру через ν_μ . Непрерывность меры ν_μ объясняется в первой части доказательства. Покажем, что ν_μ является остовной. Предположим, напротив, что ν_μ остовной не является, т. е. найдется ветвь B в D такая, что $\nu_\mu(B) = 0$. Поскольку μ невырождена, всякая μ -стационарная мера в $\mathcal{P}(D)$ квази-инвариантна по отношению к действию группы G (см., например, [VM08, лемма 3.3]), так что $\nu_\mu(g(B)) = 0$ для всех $g \in G$. Отсюда получаем, что $\nu_\mu(G(B)) = 0$. Однако из предположения об отсутствии в D собственных G -инвариантных подконтинуумов вытекает, что $G(B) = D$ (лемма 3.21), так что $\nu_\mu(G(B)) = \nu_\mu(D) = 1$. Полученное противоречие доказывает остовность меры ν_μ .

По определению μ -границы по Фюрстенбергу (определение 2.4), для почти всякой траектории $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ правого случайного μ -блуждания найдется точка $z(\tau)$ в D такая, что последовательность $(\tau_i(\nu_\mu))_{i \in \mathbb{N}_0}$ сходится к дираковской мере $\delta_{z(\tau)}$; при этом распределение пределов $z(\tau)$ задается мерой ν_μ (см. [MNS12, утверждение 2]). Поскольку мера ν_μ непрерывна и является остовой, здесь применима импликация $(a) \Rightarrow (b)$ теоремы 4.10, из которой следует, что для почти всякой траектории $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ правого случайного μ -блуждания и для каждой внутренней точки $x \in D$ последовательность $(\tau_i(x))_{i \in \mathbb{N}_0}$ сходится к $z(\tau)$. Это доказывает теорему 1.2. \square

4.11. Замечание. Доказательство теорем 1.1 и 1.2 можно провести без использования теоремы 4.4, опираясь на более слабый результат о том, что почти всякая траектория случайного μ -блуждания содержит слабо дираковскую подпоследовательность (см. определение 4.6 и лемму 6.1) и тот факт, что под действием элементов слабо дираковской последовательности последовательность образов произвольной непрерывной меры сходится к дираковской мере (импликация $(b) \Rightarrow (c)$ теоремы 4.10). Отметим также, что приведенное доказательство теорем 1.1 и 1.2 из всех импликаций теоремы 4.10 использует лишь импликацию $(a) \Rightarrow (b)$.

4.12. Замечание. Теорема 1.2 показывает, что (в условиях теорем 1.1 и 1.2) почти всякая траектория случайного μ -блуждания является слабо дираковской последовательностью. На примере простого блуждания в свободной группе нетрудно убедиться, что вполне дираковской последовательностью типичная траектория случайного μ -блуждания может не являться.

4.13. Задача. Если предельной точкой слабо дираковской последовательности является концевая точка дендрита, то данная последовательность является, как нетрудно видеть, вытесняющей. Таким образом, если (в условиях теорем 1.1 и 1.2) μ -стационарная мера ν_μ сконцентрирована на множестве концевых точек дендрита, то почти всякая траектория случайного μ -блуждания является вытесняющей последовательностью. Однако, если предельной точкой слабо дираковской последовательности является внутренняя точка дендрита, то данная последовательность не обязательно является вытесняющей. Вопрос: существует ли пример действия группы на дендрите, удовлетворяющий условиям теорем 1.1 и 1.2 и такой, что доля траекторий μ -блуждания, не являющихся вытесняющими последовательностями, имеет ненулевую меру?

5 Доказательство теоремы 4.2 о вытесняющих подпоследовательностях

5.1. Определение. Синдетическое подмножество. Подмножество S счетной группы G называется *синдетическим*¹⁰, если для некоторого конечного подмножества $A \subset G$ выполнено условие $A \cdot S = S \cdot A = G$.

5.2. Лемма. Пусть μ — невырожденная вероятностная мера в счетной группе G , а S — синдетическое подмножество в G . Тогда почти всякая траектория μ -блуждания в G посещает подмножество S бесконечное число раз.

Доказательство. Для доказательства этого факта достаточно заметить, что для каждого конечного подмножества $B \subset G$ найдется конечная последовательность (g_1, g_2, \dots, g_k) с $g_k \in \text{supp}(\mu)$ такая, что B содержится в множестве $\{g_1, g_1 g_2, \dots, g_1 \cdots g_k\}$, и применить вторую лемму Бореля–Кантелли. \square

Доказательство теоремы 4.2 базируется на следующей теореме.

5.3. Теорема. Пусть счетная группа G действует гомеоморфизмами на дендрите D . Предположим, что D не является дугой и не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов. Тогда для любого политопа $K \subset D$ множество

$$H_K := \{g \in G : g(K) \cap K = \emptyset\}$$

является синдетическим, т. е. для некоторого конечного подмножества $A \subset G$ выполняется условие $A \cdot H_K = H_K \cdot A = G$.

5.4. Определение. Остовное подмножество. Подмножество в дендрите назовем *остовным*, если оно пересекает каждую ветвь дендрита. (Ср. с определением 4.8 остовой меры.)

5.5. Утверждение. Пусть группа G действует на дендрите D . Предположим, что D не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов. Тогда всякое непустое G -инвариантное подмножество в D является остовным. В частности, если D не является дугой, то любая ветвь в D содержит точки ветвления, а любая невырожденная¹¹ ветвь в D содержится в ветви, источника которой является точкой ветвления.

Доказательство. Допустим, что некоторое непустое G -инвариантное подмножество $S \subset D$ не является остовным, так что в D найдется ветвь B , не пересекающая S . Тогда в силу G -инвариантности S не пересекается и с $G(B)$. Однако

¹⁰В литературе используются также термины *коограниченное* множество, *d-плотное* множество, *d-сеть*.

¹¹Ветвь называется *вырожденной*, если ее источник является концевой точкой (определение 3.3).

$G(B) = D$ по лемме 3.21. Отсюда вытекает, что $S = \emptyset$. Полученное противоречие доказывает первую часть утверждения.

В случае, если D не является дугой, множество точек ветвления в D непусто. Поскольку это множество G -инвариантно, оно является остовным, так что любая ветвь в D содержит точки ветвления. Если B — невырожденная ветвь, то в D найдется ветвь (скажем, B'), не пересекающаяся с B . В силу доказанного, в B' найдется точка ветвления (скажем, r). Поскольку r не лежит в B , ветвь B , будучи связной, целиком лежит в одной из компонент связности множества $D \setminus \{r\}$ (т. е. в одной из ветвей с источником в r ; ср. с утверждением (5) леммы 5.10 в [Mal14]). Эта компонента связности множества $D \setminus \{r\}$ и является искомой ветвью. \square

5.6. Утверждение. *Пусть счетная группа G действует гомеоморфизмами на дендрите D . Предположим, что D не является дугой и не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов. Пусть B — невырожденная ветвь в D . Тогда найдется бесконечное семейство $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ элементов из G такое, что образы $\{g_i(B)\}_{i \in \mathbb{N}}$ попарно не пересекаются.*

Доказательство. Пусть r — источник ветви B . Утверждение 5.5 сводит доказательство к случаю, когда r является точкой ветвления. Обозначим через \bar{B} объединение $B \cup \{r\}$. Множество \bar{B} является подконтинуумом в D (лемма 3.17). Рассмотрим пересечение подконтинуумов

$$K := \bigcap_{g \in G} g(\bar{B}).$$

В дендрите пересечение подконтинуумов из произвольного набора либо пусто, либо является подконтинуумом (лемма 3.10). Поскольку предполагается, что D не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов, а пересечение K в силу определения G -инвариантно и не совпадает с D , отсюда следует, что K пусто.

Как известно, если в наборе подконтинуумов дендрита любые два подконтинуума пересекаются, то пересечение всех подконтинуумов набора непусто и является подконтинуумом (лемма 3.11). Следовательно, найдутся такие g_1 и g_2 в G , что $g_1(\bar{B})$ и $g_2(\bar{B})$ не пересекаются. Таким образом, \bar{B} и $h(\bar{B})$, где $h := g_1^{-1}g_2$, не пересекаются (в частности, r не лежит в $h(\bar{B})$).

Заметим, что подконтинуум $h(\bar{B})$, будучи связным, целиком лежит в одной из компонент связности множества $D \setminus \{r\}$. Следовательно, поскольку точка r является точкой ветвления, т. е. $D \setminus \{r\}$ имеет не менее трех компонент связности, найдется ветвь (скажем, E), не пересекающая ни \bar{B} , ни $h(\bar{B})$. Согласно утверждению 5.5, в E найдется точка ветвления (скажем, r_2). Множество $D \setminus E$ связно (лемма 3.17). Поскольку точка r_2 не содержится в связном множестве $D \setminus E$, одна из компонент связности пространства $D \setminus \{r_2\}$ (или, что то же самое, одна из ветвей с источником в r_2) содержит $D \setminus E$. Обозначим эту ветвь (содержащую $D \setminus E$ и с источником в r_2) через B_2 . По построению, B_2 содержит \bar{B} и $h(\bar{B})$

(которые лежат в $D \setminus E$). Положив $\bar{B}_2 := B_2 \cup \{r_2\}$ и повторяя начальную часть настоящего доказательства, мы получаем, что найдется элемент $h_2 \in G$ такой, что \bar{B}_2 и $h_2(\bar{B}_2)$ не пересекаются. Таким образом, множества \bar{B} , $h(\bar{B})$, $h_2(\bar{B})$ и $h_2h(\bar{B})$ попарно не пересекаются.

Повторяя проделанные рассуждения, найдем ветвь B_3 , содержащую \bar{B}_2 и $h_2(\bar{B}_2)$, и т.д. Индукционный переход завершает доказательство. \square

5.7. Утверждение. Пусть счетная группа G действует гомеоморфизмами на дендрите D . Предположим, что D не является дугой и не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов. Пусть B — невырожденная ветвь в D . Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует набор $S := S(B, n) \subset G$ из $n + 1$ элемента такой, что для любого набора P из n точек в D найдется такой элемент $s \in S$, что $\text{hull}(P) \cap s(B) = \emptyset$.

Доказательство. В силу утверждения 5.6, найдется набор $S := S(B, n) \subset G$ из $n + 1$ элемента такой, что ветви, являющиеся образами ветви B под действием элементов из S , попарно не пересекаются. Следовательно, для любого набора P из n точек найдется $s \in S$ такое, что ветвь $s(B)$ не пересекает P . Однако, поскольку дополнение всякой ветви связно (лемма 3.17), отсюда следует, что $\text{hull}(P) \cap s(B) = \emptyset$. \square

5.8. Утверждение. Пусть счетная группа G действует гомеоморфизмами на дендрите D . Предположим, что D не является дугой и не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов. Пусть K — собственный подконтинуум в D . Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует набор $S := S(K, n) \subset G$ из $n + 1$ элемента такой, что для произвольного набора P из n точек в D найдется такой элемент $s \in S$, что $\text{hull}(P) \cap s(K) = \emptyset$.

Доказательство. Поскольку подконтинуум K является собственным, в дополнении $D \setminus K$ имеются внутренние точки дендрита D . (См. лемму 3.4: множество внутренних точек неодноточечного дендрита всюду плотно.) Пусть x — внутренняя точка из $D \setminus K$. Множество K , будучи связным, содержится в одной из компонент связности (скажем, в компоненте B) множества $D \setminus \{x\}$. Поскольку x — внутренняя точка дендрита D , ветвь B невырождена. Теперь утверждение прямо следует из утверждения 5.7. \square

Взяв в утверждении 5.8 в качестве подконтинуума политоп, получаем следующее.

5.9. Утверждение. Пусть счетная группа G действует гомеоморфизмами на дендрите D . Предположим, что D не является дугой и не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов. Если K — политоп (выпуклая оболочка конечного набора точек) в D , то существует конечный набор $S := S(K) \subset G$ такой, что для любого $g \in G$ найдется такой элемент $s \in S$, что $g(K) \cap s(K) = \emptyset$.

Доказательство теоремы 5.3. Поскольку D не является политопом (теорема 3.22), политоп K является собственным подконтинуумом в D (лемма 3.13). В силу утверждения 5.9 для политопы K найдется такой конечный набор $S := S(K) \subset G$, что для любого $g \in G$ при некотором $s \in S$ выполнено условие

$$K \cap g^{-1}s(K) = s^{-1}g(K) \cap K = \emptyset.$$

Положив $A := S \cup S^{-1}$, получаем желаемое $A \cdot H_K = H_K \cdot A = G$. \square

Доказательство теоремы 4.2. Покажем, что в D найдется счетная последовательность вложенных политопов

$$T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_k \subset \dots$$

такую, что объединение $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$ содержит все внутренние точки дендрита D . Действительно, в силу сепарабельности дендритов в D найдется счетное всюду плотное подмножество $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Для $k \in \mathbb{N}$ определим политоп T_k как выпуклую оболочку множества $\{x_1, \dots, x_k\}$. Каждая внутренняя точка p дендрита D разделяет дендрит на набор ветвей. Этот набор содержит по меньшей мере две ветви (по определению внутренней точки). Поскольку ветви открыты (лемма 3.15), в $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ найдутся точки x_a и x_b , лежащие в этих ветвях. Поскольку точка p разделяет точки x_a и x_b , точка p принадлежит дуге $[x_a, x_b]$ (лемма 3.6). Следовательно, p лежит в объединении $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} T_k$.

В силу теоремы 5.3 для каждого $k \in \mathbb{N}$ множество

$$H_{T_k} := \{g \in G : g(T_k) \cap T_k = \emptyset\}$$

синдетично. Следовательно, для каждого $k \in \mathbb{N}$ почти всякая траектория μ -блуждания в G посещает множество H_{T_k} бесконечное число раз (лемма 5.2). Таким образом, поскольку рассматривается счетная последовательность, почти всякая траектория μ -блуждания в G посещает каждое из множеств H_{T_k} , $k \in \mathbb{N}$, бесконечное число раз. Рассуждения, завершающие доказательство, очевидны. \square

6 Доказательство теоремы 4.4 о вполне дираковских последовательностях

Доказательство теоремы 4.4 опирается на следующую лемму.

6.1. Лемма. Пусть $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — вытесняющая последовательность автоморфизмов дендрита D . Пусть x — внутренняя, а w — произвольная точка в D . Предположим, что последовательность $(\alpha_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к w . Тогда для каждой внутренней точки $t \in D$ последовательность $(\alpha_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ также сходится к w .

6.2. Замечание. Доказываемая теорема 4.4 утверждает, что каждая вытесняющая последовательность содержит вполне дираковскую. Лемма 6.1 показывает, что каждая вытесняющая последовательность содержит слабо дираковскую. Заметим, что не всякая слабо дираковская последовательность содержит вполне дираковскую подпоследовательность.

Доказательство леммы 6.1. Воспользуемся критерием сходимости из леммы 3.19. Согласно этому критерию, если последовательность $(\alpha_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к w , то для каждой внутренней точки $z \in (D \setminus \{w\})$ множество

$$\{j \in \mathbb{N} : z \in [w, \alpha_j(x)]\}$$

пусто или конечно. Вместе с тем, для любых трех внутренних точек a , b и c в D множество

$$\{j \in \mathbb{N} : c \in \alpha_j[a, b]\}$$

также пусто или конечно, поскольку последовательность $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ является вытесняющей. В частности, для любых внутренних точек t и z в D множество

$$\{j \in \mathbb{N} : z \in \alpha_j[x, t]\}$$

пусто или конечно. Отсюда следует, что для любых внутренних точек t и z в D множество

$$\{j \in \mathbb{N} : z \in [w, \alpha_j(t)]\}$$

пусто или конечно, так как

$$[w, \alpha_j(t)] \subset ([w, \alpha_j(x)] \cup \alpha_j[x, t])$$

по лемме 3.8. Отсюда в силу критерия леммы 3.19 следует требуемое. \square

Доказательство теоремы 4.4. Выберем произвольную внутреннюю точку x_0 в D . В силу компактности найдется подпоследовательность $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ в $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ и (возможно, совпадающие) точки a и z в D такие, что последовательность $(\beta_i(x_0))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к a , а последовательность $(\beta_i^{-1}(x_0))_{i \in \mathbb{N}}$ — к z .

Покажем, что если точка $t \in D$ не является концевой либо не совпадает с z , то последовательность $(\beta_i(t))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к a . Предположим, что для некоторой точки $p \in D$ последовательность $(\beta_i(p))_{i \in \mathbb{N}}$ к точке a не сходится. Тогда в силу леммы 3.19 найдутся внутренняя точка $y \in (D \setminus \{a\})$ и подпоследовательность $(\gamma_i)_{i \in \mathbb{N}}$ последовательности $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ такие, что все дуги $[a, \gamma_i(p)]$, $i \in \mathbb{N}$, содержат точку y , а ни одна из дуг $[a, \gamma_i(x_0)]$, $i \in \mathbb{N}$, ее не содержит. Тогда, поскольку по лемме 3.8 выполняется включение

$$[a, \gamma_i(p)] \subset [a, \gamma_i(x_0)] \cup [\gamma_i(x_0), \gamma_i(p)],$$

все дуги $[\gamma_i(x_0), \gamma_i(p)] = \gamma_i([x_0, p])$, $i \in \mathbb{N}$, содержат y . В частности, для каждого $i \in \mathbb{N}$ точка $\gamma_i^{-1}(y)$ принадлежит дуге $[x_0, p]$. Заметим, что последовательность

автоморфизмов $(\gamma_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ является вытесняющей, будучи подпоследовательностью в последовательности $(\alpha_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$, которая является вытесняющей в силу предположения о том, что последовательность $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ является вытесняющей¹². Покажем, что выполняются следующие условия:

- (i) точка p является концевой в D ,
- (ii) последовательность $(\gamma_i^{-1}(y))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к p .

(i) Действительно, если бы точка p являлась внутренней, то топ $\text{hull}\{p, x_0, y\}$ состоял бы из внутренних точек, и в силу того, что последовательность $(\gamma_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ является вытесняющей, для достаточно больших i не выполнялось бы вышеуказанное включение $\gamma_i^{-1}(y) \in [x_0, p]$.

(ii) Если бы последовательность $(\gamma_i^{-1}(y))_{i \in \mathbb{N}}$ не сходилась к p , то, поскольку все точки этой последовательности принадлежат дуге $[x_0, p]$, нашлась бы бесконечная подпоследовательность $(\check{\gamma}_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ в $(\gamma_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ и точка \check{p} внутри дуги $[x_0, p]$ такие, что все точки $\check{\gamma}_i^{-1}(y)$, $i \in \mathbb{N}$, принадлежали бы (состоящей из внутренних точек дендрита) дуге $[x_0, \check{p}]$. Однако это невозможно в силу рассуждения из доказательства утверждения (i), поскольку точки y , x_0 и \check{p} являются внутренними, а последовательность $(\check{\gamma}_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$, будучи подпоследовательностью вытесняющей последовательности $(\gamma_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$, является вытесняющей.

Итак, мы показали, что условия (i) и (ii) выполняются. Из условия (ii) в силу леммы 6.1 вытекает, что последовательность $(\gamma_i^{-1}(x_0))_{i \in \mathbb{N}}$ также сходится к точке p . Отсюда, поскольку последовательность $(\gamma_i^{-1}(x_0))_{i \in \mathbb{N}}$ является подпоследовательностью в $(\beta_i^{-1}(x_0))_{i \in \mathbb{N}}$, а $(\beta_i^{-1}(x_0))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к z , мы получаем, что $p = z$.

Таким образом, из предположения о том, что последовательность $(\beta_i(p))_{i \in \mathbb{N}}$, где $p \in D$, не сходится к точке a , вытекает, что точка p является концевой и что $p = z$. Отсюда очевидным образом следует утверждение теоремы. \square

7 Доказательство теоремы 4.10 о слабо дираковских последовательностях

Доказательство импликации (a) \Rightarrow (b). Пусть x — внутренняя точка в D . Тогда в D найдется пара несовпадающих ветвей V и W с источником в x . В силу предполагаемой остовности меры μ выполняются условия $\mu(V) > 0$ и $\mu(W) > 0$. Поскольку последовательность мер $(\alpha_i(\nu))_{i \in \mathbb{N}}$ слабо сходится к δ_z , найдутся последовательности точек $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$ в V и $(w_i)_{i \in \mathbb{N}}$ в W такие, что последовательности $(\alpha_i(v_i))_{i \in \mathbb{N}}$, и $(\alpha_i(w_i))_{i \in \mathbb{N}}$ сходятся к z . Заметим, что (для каждого $i \in \mathbb{N}$) точки v_i и w_i разделены точкой x (так как v_i и w_i лежат в разных ветвях с источником в x , а все эти ветви являются открыто-замкнутыми подмножествами в

¹²Если последовательность $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ является вытесняющей, то и последовательность $(\alpha_i^{-1})_{i \in \mathbb{N}}$ является вытесняющей, поскольку для произвольного автоморфизма α и подмножества $S \subset D$ выполняется условие $(\alpha(S) \cap S) = \alpha(S \cap \alpha^{-1}(S))$.

пространстве $D \setminus \{x\}$ по лемме 3.15). Отсюда в силу леммы 3.6 следует, что $x \in [v_i, w_i]$ и, значит, $\alpha_i(x) \in [\alpha_i(v_i), \alpha_i(w_i)]$. Отсюда вытекает, что последовательность $(\alpha_i(x))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к z , поскольку $(\alpha_i(v_i))_{i \in \mathbb{N}}$ и $(\alpha_i(w_i))_{i \in \mathbb{N}}$ сходятся к z (следствие 3.20). \square

Доказательство импликации (b) \Rightarrow (c). Поскольку ветви образуют в дендрите предбазу открытых множеств (лемма 3.15), для доказательства того, что последовательность мер $(\alpha_i(\nu))_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к мере δ_z , достаточно показать, что для каждой ветви B , содержащей точку z , последовательность $\nu(\alpha_i^{-1}(B))_{i \in \mathbb{N}}$ стремится к 1, или, что то же самое, последовательность $\nu(\alpha_i^{-1}(D \setminus B))_{i \in \mathbb{N}}$ стремится к 0. Поскольку дополнение любой ветви в дендрите связно (лемма 3.17), последнее вытекает из следующей леммы 7.1. (Предположения леммы 7.1 для последовательности $(\alpha_i^{-1}(D \setminus B))_{i \in \mathbb{N}}$ выполнены, поскольку ветвь B является открытым множеством, а z лежит в B , так что в силу условия (b) для каждой внутренней точки $x \in D$ найдется $N_x \in \mathbb{N}$ такое, что $x \in \alpha_j^{-1}(B)$ и $x \notin \alpha_j^{-1}(D \setminus B)$ при всех $j > N_x$.) \square

7.1. Лемма. Пусть ν — непрерывная вероятностная борелевская мера на дендрите D , а $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность связных подмножеств в D . Предположим, что для каждой внутренней точки x в D найдется $N_x \in \mathbb{N}$ такое, что $x \notin K_j$ при всех $j > N_x$. Тогда

$$\nu(K_i) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Доказательство. Допустим, что последовательность $\nu(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ не стремится к нулю. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ в $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$, что $\nu(L_i) > \varepsilon$ при всех $i \in \mathbb{N}$. В силу конечности меры ν отсюда следует, что в $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ не найдется бесконечной подпоследовательности, состоящей из попарно непересекающихся элементов. Тогда по теореме Рамсея (для бесконечного случая) в $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ найдется бесконечная подпоследовательность $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$, состоящая из попарно пересекающихся элементов. Определим последовательность $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$, положив

$$U_k := \bigcup_{j > k} M_j.$$

Пусть

$$P := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} U_k.$$

С одной стороны, по построению для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняются условия $U_k \supset U_{k+1}$ и

$$\nu(U_k) \geq \nu(M_{k+1}) > \varepsilon,$$

откуда в силу σ -аддитивности меры ν следует, что $\nu(P) \geq \varepsilon > 0$.

С другой стороны, поскольку последовательность $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ состоит из попарно пересекающихся элементов, множества U_i , $i \in \mathbb{N}$, связны. Отсюда следует,

что и P связно (лемма 3.10). Однако в силу условия на исходную последовательность $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$, множество P по построению не содержит внутренних точек дендрита. Связное подмножество дендрита, содержащее две различные точки (скажем, a и b), по лемме 3.9 содержит и дугу $[a, b]$, все внутренние точки которой являются внутренними точками дендрита. Следовательно, P пусто или состоит из единственной точки. Отсюда в силу непрерывности меры ν вытекает, что $\nu(P) = 0$.

Утверждение леммы вытекает из полученного противоречия. \square

Доказательство импликации (c) \Rightarrow (a). Импликация (c) \Rightarrow (a) тривиальна, поскольку на каждом неодноточечном дендрите найдется непрерывная (вероятностная борелевская) остовная мера. Остовной является, например, каждая непрерывная мера, носитель которой совпадает со всем дендритом. Непрерывная мера, принимающая ненулевые значения на всех открытых множествах, имеется на каждом неодноточечном линейно связном сепарабельном метрическом пространстве M . Для построения примера достаточно взять набор отрезков $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где отрезок I_n есть копия отрезка $[0, 2^{-n}]$ с мерой Лебега, рассмотреть набор вложений этих отрезков в M со всюду плотным образом и взять соответствующий образ меры. \square

8 Древовидные пространства

Данный параграф открывает вторую часть настоящей статьи. Эта часть в значительной степени посвящена древовидным пространствам и анализу того, как класс древовидных пространств и группы их автоморфизмов соотносятся с подклассом дендронов и группами автоморфизмов дендронов. Этот вопрос связан с вопросом о том, какие следствия дают теоремы 1.1 и 1.2, сформулированные в терминах дендритов, для других классов пространств с древовидной структурой. В частности, в завершении второй части статьи из теорем 1.1 и 1.2 выводится следствие 1.3 о случайных блужданиях в группах, действующих на деревьях.

Напомним (см. определение 3.1), что *древовидным пространством* называют (непустое) связное топологическое пространство, в котором любые две различные точки разделены третьей. В классе древовидных пространств выделяется подкласс компактных древовидных пространств — дендронов. Как хорошо известно, древовидное пространство может иметь разнообразные «патологии», — например, оно не обязательно быть ни локально связным, ни дугообразно связным. Так называемая «топологическая синусоида», — объединение графика функции $\sin(1/x)$ на полуоткрытом интервале $(0, 1]$ с началом координат:

$$T = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in (0, 1] \right\} \cup \{(0, 0)\}$$

с топологией, индуцированной топологией плоскости, является древовидным пространством. (Большой набор примеров патологий древовидных пространств дан в [Wag75].) Дендроны подобных патологий не имеют, — они локально связны,

дугообразно связны и проч. (см. [vMW81], [War75], теорему 8.6). Оказывается, любому древовидному пространству каноническим образом соответствует некоторый дендрон, а действию группы на древовидном пространстве — действие на этом дендроне.

8.1. Теорема. *Для произвольного древовидного пространства T найдется дендрон $D(T)$ и непрерывное инъективное отображение $f: T \rightarrow D(T)$ такие, что образ $f(T)$ плотен в $D(T)$. Если для некоторого дендрона D' найдется непрерывное инъективное отображение $f': T \rightarrow D'$ такое, что образ $f'(T)$ плотен в D' , то существует единственный гомеоморфизм $g: D(T) \rightarrow D'$ такой, что $f' = g \circ f$.*

Для случая \mathbb{R} -деревьев этот результат доказывается в [Bow99]. Здесь мы выведем доказательство теоремы 8.1 из конструкций работы [War75] (в [War75] имеется лакуна, она устранена в [MS77]).

Дендрон $D(T)$ может быть «конструктивно» получен из заданного древовидного пространства T ослаблением топологии и добавлением конечных точек. (Процедуру добавления конечных точек можно произвести и перед процедурой ослабления топологии.) Эта ослабленная («упрощенная») топология, как и концы древовидного пространства, однозначно определяется отношением «точка a разделяет точки b и c » на тройках точек исходного древовидного пространства. В нижеследующих параграфах дано более подробное описание этих процедур в терминах теории *преддеревьев*.

Теорема 8.1 проясняет структуру класса всех древовидных пространств: класс всех древовидных пространств расслаивается над подклассом «простых» древовидных пространств, являющихся связными подмножествами дендронов, — любое древовидное пространство можно получить, взяв некоторое «простое» древовидное пространство и увеличив его топологию (добавив «патологии»).

8.2. Замечания. 1. В обозначениях теоремы 8.1 множество $D(T) \setminus f(T)$ состоит из конечных точек дендрона $D(T)$ (в силу того, что непрерывный образ связного множества связан).

2. Если T сепарабельно, то и дендрон $D(T)$ сепарабелен и, следовательно, является дендритом (см. замечание 3.2).

Для доказательства теоремы 8.1 удобно ввести в рассмотрение класс *простых* древовидных пространств, уже упомянутый в комментарии к теореме.

8.3. Простые древовидные пространства. Условимся писать (X, α) для обозначения пространства с топологией α на множестве X . Пусть (Z, τ) — древовидное пространство. Обозначим через $B(Z, \tau)$ семейство всех компонент связности (в топологии τ) множеств вида $Z \setminus \{x\}$, где $x \in Z$. Пусть $\sigma = \sigma(\tau)$ — топология на Z , порожденная семейством $B(Z, \tau)$.

8.4. Теорема. 1. *Для любого древовидного пространства (Z, τ) пространство $(Z, \sigma(\tau))$ является древовидным.*

2. Топология $\sigma(\tau)$ содержится в топологии τ , так что тождественная биекция $(Z, \tau) \rightarrow (Z, \sigma)$ непрерывна.
3. $\sigma(\sigma(\tau)) = \sigma(\tau)$.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 доказываются в теореме 20 в [Wag75]. Для доказательства третьего утверждения достаточно заметить, что $B(Z, \sigma) = B(Z, \tau)$ (действительно, компоненты σ -связности множеств вида $Z \setminus \{x\}$ не меньше компонент τ -связности в силу того, что $\sigma \subset \tau$; компоненты σ -связности не больше компонент τ -связности, так как каждая из компонент τ -связности открыта в топологии σ). \square

8.5. Определение. Назовем древовидные пространства, у которых $\sigma(\tau) = \tau$, простыми.

8.6. Теорема. Всякое простое древовидное пространство регулярно, локально связно, дугообразно связно, периферически конечно¹³.

Доказательство. См. [Wag75, теоремы 20 и 21]. \square

8.7. Теорема. Древовидное пространство является простым тогда и только тогда, когда оно вкладывается в дендрон. В частности, дендроны просты (и, тем самым, регулярны, локально связны, дугообразно связны, периферически конечны).

Доказательство. Из теоремы 23 в [Wag75] следует, что всякое простое древовидное пространство вкладывается в дендрон. Лемма 23.1 в [Wag75] утверждает, что всякое связное подпространство дендрона является простым древовидным пространством. Отсюда следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение является следствием теоремы следует из теоремы 8.6. \square

Доказательство теоремы 8.1. Существование. Напомним, что компактификацией топологического пространства X называется пара (Y, f) , где Y — компактное пространство, а $f: X \rightarrow Y$ есть вложение (гомеоморфизм на образ), у которого образ $f(X)$ всюду плотен в Y . Компактификацию (Y, f) называют древовидной, если Y — древовидное пространство (т. е. дендрон).

В [Wag75, теоремы 21 и 23] доказывается, что у каждого простого древовидного пространства (T, σ) существует единственная древовидная компактификация, т. е. существует дендрон $\delta(T, \sigma)$ и вложение $\phi: T \rightarrow \delta(T, \sigma)$ такие, что образ $\phi(T)$ плотен в $\delta(T, \sigma)$, причем если для некоторого дендрона δ' найдется вложение $\phi': T \rightarrow \delta'$, у которого образ плотен в δ' , то существует единственный гомеоморфизм $\psi: \delta(T, \sigma) \rightarrow \delta'$ такой, что $\phi' = \psi \circ \phi$.

Существование древовидной компактификации для простых древовидных пространств доказывает справедливость первого утверждения теоремы 8.1 для

¹³Говорят, что топологическое пространство периферически конечно, если у него имеется база открытых множеств, у каждого элемента которой граница конечна.

произвольных древовидных пространств: для заданного древовидного пространства (T, τ) в качестве искомого дендрона $D(T)$ рассмотрим дендрон $\delta(T, \sigma(\tau))$, а в качестве f возьмем композицию

$$(T, \tau) \rightarrow (T, \sigma(\tau)) \rightarrow \delta(T, \sigma(\tau)) = D(T). \quad \square$$

Доказательство второго утверждения теоремы 8.1 (единственность) выводится из единственности древовидной компактификации для простых древовидных пространств (теоремы 21 и 23 в [War75]) с помощью следующего предложения.

8.8. Предложение. *Пусть (T, τ) — древовидное пространство и $(T, \sigma(\tau))$ — соответствующее простое древовидное пространство. Тогда, если для некоторого простого древовидного пространства S найдется непрерывная биекция $\phi: (T, \tau) \rightarrow S$, то отображение $\phi: (T, \sigma(\tau)) \rightarrow S$ является гомеоморфизмом.*

Мы структурируем доказательство предложения 8.8, выделяя из него представляющие самостоятельный интерес утверждение и лемму.

8.9. Утверждение. *Пусть (T, τ) — древовидное пространство. Тогда, каковы бы ни были точки x, y и z в T , точка y разделяет точки x и z если и только если x и z лежат в разных компонентах связности множества $T \setminus \{y\}$.*

Доказательство. Утверждение вытекает из того факта, что в древовидном пространстве (T, τ) компоненты связности множества вида $T \setminus \{x\}$ открыты в τ (см., например, теорему 19 в [War75] или теорему 4 в [Rea74]). \square

8.10. Замечание. Напомним, что *квазикомпонентой* (связности) точки топологического пространства называется пересечение всех содержащих ее открыто-замкнутых подмножеств. Точка $c \in X$ топологического пространства X разделяет точки $a, b \in X$ тогда и только тогда, когда a и b лежат в разных квазикомпонентах пространства $X \setminus \{c\}$. Квазикомпоненты замкнуты и разбивают пространство. Компонента (связности) точки содержится в ее квазикомпоненте. Утверждение 8.9 показывает, что в древовидном пространстве компоненты множества $T \setminus \{c\}$ совпадают с его квазикомпонентами.

8.11. Лемма (ср. с леммой 7.5 в [Bow99]). *Пусть T и P — древовидные пространства, $f: T \rightarrow P$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда, каковы бы ни были точки x, y и z в T , точка y разделяет точки x и z если и только если точка $f(y)$ разделяет точки $f(x)$ и $f(z)$.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда P — дендрон. Будем писать $\langle abc \rangle_X$, если точка b разделяет точки a и c в пространстве X . Если $\langle f(x)f(y)f(z) \rangle_P$, то $\langle xyz \rangle_T$ в силу непрерывности отображения f . Для доказательства обратной импликации допустим, что найдутся такие точки x, y и z в T ,

что $\langle xyz \rangle_T$, но $f(y)$ не разделяет $f(x)$ и $f(z)$. Поскольку мы предполагаем, что P — дендрон, множество

$$[f(x), f(z)] := \{f(x), f(z)\} \cup \{s \in P \mid \langle f(x)sf(z) \rangle_P\}$$

является дугой — линейным континуумом (см., например, следствие 2.18 в [vMW81]). Если $f(y)$ не разделяет $f(x)$ и $f(z)$, то $f(y)$ не лежит в континууме $[f(x), f(z)]$. В этом случае в дендроне P найдется точка p' , разделяющая $f(y)$ и $[f(x), f(z)]$. (Согласно теореме 16 в [War75], в локально связном древовидном пространстве для любых двух не пересекающихся замкнутых связных подмножеств найдется разделяющая их точка. Дендроны локально связны; см., например, следствие 2.10 в [vMW81].) Точка p' лежит в образе $f(T)$, поскольку непрерывный образ связного множества связан. Положим $p := f^{-1}(p')$. Получаем, что $\langle xpy \rangle_T$ и $\langle ypz \rangle_T$. (Поскольку $\langle f(a)f(b)f(c) \rangle_P$ влечет $\langle abc \rangle_T$ в силу непрерывности.) Однако, как известно, если S — связное подмножество связного топологического пространства X , а R — открыто-замкнутое подмножество в пространстве $X \setminus S$, то объединение $S \cup R$ связно (см. [New39, глава IV, теорема 3.4]). Отсюда следует, что в T имеются связное множество R_x , содержащее точки p и x , но не содержащее y , а также связное множество R_z , содержащее p и z , но не содержащее y . Объединение $R_x \cup R_z$, таким образом, связно, содержит x и z , но не содержит y . Это противоречит условию $\langle xyz \rangle_T$. Обратная импликация доказана.

Теперь обратимся к случаю произвольного древовидного пространства P и заметим, что в силу первого утверждения теоремы 8.1 (которое выводится выше из теорем 20, 21 и 23 работы [War75]) найдется непрерывное инъективное отображение $h: P \rightarrow D$ в некоторый дендрон D . Применив к отображениям h и $h \circ f$ доказанный результат, получаем требуемое. \square

Доказательство предложения 8.8. Введем обозначение. Если (X, α) — топологическое пространство (т.е. пространство с топологией α на множестве X), будем обозначать через $R(X, \alpha)$ тернарное отношение¹⁴ « b разделяет a и c », т.е. $(a, b, c) \in R(X, \alpha)$ если и только если $(a, b, c) \in X \times X \times X$ и b разделяет a и c .

Пусть T, τ, S, ϕ — как в условии предложения 8.8 ((T, τ) — древовидное пространство, $(T, \sigma(\tau))$ — соответствующее простое древовидное пространство, S — простое древовидное пространство, $\phi: (T, \tau) \rightarrow S$ непрерывная биекция). Тогда в силу леммы 8.11 отношения $R(T, \tau)$ и $R(T, \sigma(\tau))$ совпадают, а отображение ϕ индуцирует изоморфизм отношений $R(T, \tau)$ и $R(S)$. Следовательно, ϕ индуцирует изоморфизм и между отношениями $(T, \sigma(\tau))$ и $R(S)$.

Теперь заметим, что в силу утверждения 8.9 на простом древовидном пространстве (X, α) топология однозначно восстанавливается по отноше-

¹⁴ Тернарными отношениями (или тернарными структурами) на множестве X называются подмножества

$$R \subset X^3 = X \times X \times X.$$

нию $R(X, \alpha)$, т. е. если биекция $\psi: (X, \alpha) \rightarrow (Y, \beta)$ между двумя древовидными пространствами задает изоморфизм отношений $R(X, \alpha)$ и $R(Y, \beta)$, то ψ задает гомеоморфизм между соответствующими простыми древовидными пространствами $(X, \sigma(\alpha))$ и $(Y, \sigma(\beta))$. Это доказывает предложение 8.8. \square

Доказательство теоремы 8.1. Единственность. Пусть (T, τ) — древовидное пространство, $\sigma = \sigma(\tau)$ — топология на T , определяемая в разделе 8.3,

$$f: (T, \sigma) \rightarrow \delta(T, \sigma) \quad -$$

древовидная компактификация (см. первую часть доказательства теоремы 8.1).

Пусть для некоторого дендрона D' найдется непрерывное инъективное отображение $f': (T, \tau) \rightarrow D'$ такое, что образ $f'(T)$ плотен в D' . Заметим, что образ $f'(T)$ связан и является, тем самым, древовидным пространством. Древовидное пространство $f'(T)$ просто, поскольку всякое связное подпространство дендрона является простым древовидным пространством (см. теорему 8.7 и [War75, лемма 23.1]). Отсюда в силу предложения 8.8 получаем, что отображение $f': (T, \sigma) \rightarrow f'(T)$ является гомеоморфизмом. Этот гомеоморфизм продолжается до гомеоморфизма $g: \delta(T, \sigma) \rightarrow D'$ в силу теоремы о существовании и единственности древовидной компактификации для простых древовидных пространств (теорема 23 в [War75]). Если $g^\dagger: \delta(T, \sigma) \rightarrow D'$ — некоторый гомеоморфизм, удовлетворяющий соотношению $f' = g^\dagger \circ f$, то ограничение $g^\dagger|_{f(T)}$ совпадает с композицией $f' \circ f^{-1}: f(T) \rightarrow f'(T)$ и, тем самым, с ограничением $g|_{f(T)}$. Поскольку $f(T)$ есть простое древовидное пространство (будучи по построению образом вложения простого древовидного пространства), отсюда в силу теоремы о существовании и единственности древовидной компактификации для простых древовидных пространств (теорема 23 в [War75]) следует, что $g^\dagger = g$. Теорема доказана. \square

9 Преддеревья

Согласно теореме 8.1, каждому древовидному пространству T каноническим образом отвечает некоторый дендрон $D(T)$. Как отмечалось в предыдущем параграфе, дендрон $D(T)$ может быть «конструктивно» получен из заданного древовидного пространства T ослаблением топологии и добавлением конечных точек. Для описания дендрона $D(T)$ мы привлекаем теорию преддеревьев, развиваемую в работах [AN98, Bow99, BC01, Mal13]. В настоящем параграфе дается ряд предварительных сведений из теории преддеревьев.

9.1. Определение. Преддеревья. *Тернарным отношением (или тернарной структурой) на множестве X называется подмножество в X^3 . Преддеревом называют множество (скажем, \mathcal{T}) с тернарным отношением $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^3$, удовлетворяющим следующим аксиомам:*

(T0) если $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, то $x \neq z$,

(T1) если $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, то $(z, y, x) \in \mathcal{S}$,

(T2) если $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, то $(x, z, y) \notin \mathcal{S}$,

(T3) если $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ и $w \neq y$, то $(x, y, w) \in \mathcal{S}$ или $(w, y, z) \in \mathcal{S}$.

Отношение \mathcal{S} понимается как строгое отношение промежуточности, т.е. соотношение $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ следует интерпретировать как « y лежит строго между x и z ». Полагая для точек x, y преддерева $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$

$$[x, y] := \{t \in \mathcal{T} : (x, t, y) \in \mathcal{S}\} \cup \{x, y\},$$

можно переписать систему аксиом (T0)–(T3) в следующем эквивалентном виде (эквивалентность доказывается, например, в [Mal14, леммы 1.13, 1.14]):

(A0) $[x, y] \supset \{x, y\}$,

(A1) $[x, y] = [y, x]$,

(A2) если $z \in [x, y]$ и $y \in [x, z]$, то $y = z$,

(A3) $[x, y] \subset [x, z] \cup [z, y]$.

9.2. Терминология. В преддерева множества вида $[x, y]$ называются *замкнутыми интервалами*. Подмножество C преддерева называется *выпуклым*, если $[x, y] \subset C$ для всех $x, y \in C$. Говорят, что подмножество L в преддерева *линейно*, если для любых точек $x, y, z \in L$ выполняется хотя бы одно из соотношений $x \in [y, z]$, $y \in [z, x]$ и $z \in [x, y]$. Непустое выпуклое линейное множество называют *дугой*. Линейное подмножество преддерева назовем *ограниченным*, если оно содержится в (замкнутом) интервале. Точка s в выпуклом подмноестве S преддерева называется *экстремальной* (в S), если множество $S \setminus \{s\}$ выпукло. Дугу в преддерева называют *лучом*, если она неограничена и имеет экстремальную точку. Дугу в преддерева называют *прямой*, если она неограничена и не содержится в луче. Точка t преддерева \mathcal{T} называется *медианой* тройки $a, b, c \in \mathcal{T}$, если $t \in [a, b] \cap [a, c] \cap [b, c]$. У тройки точек имеется не более одной медианы (см., например, [AN98, лемма 15.2]). Преддерева называется *медианным*, если у каждой тройки его точек имеется медиана.

Чтобы избежать путаницы с терминологией, введенной в первой части статьи, в дальнейшем интервалы, дуги, прямые и лучи в преддерева будем называть *псевдоинтервалами*, *псевдодугами*, *псевдопрямыми* и *псевдолучами*, соответственно.)

9.3. Лемма ([Mal14, лемма 1.16]). В преддерева для любых точек a, b, c, d, x выполняются следующие свойства:

(A4) если $b \in [a, c]$, то $[a, b] \subset [a, c]$.

(A5) если $b \in [a, c]$ и $c \in [a, d]$, то $c \in [b, d]$.

(A6) если $b \in [a, c]$, то $[a, b] \cap [b, c] = \{b\}$.

(A7) если $b \in [a, c]$, то $[a, b] \cup [b, c] = [a, c]$.

(A8) если $b \in [a, c]$, $c \in [b, d]$ и $b \neq c$, то $\{b, c\} \subset [a, d]$.

(A9) если $b \in [a, c]$, то $[x, a] \cap [x, c] \subset [x, b]$.

9.4. Лемма. Если a, b и c — точки в преддереве и $\{m\} = [a, b] \cap [b, c] \cap [c, a]$, то $[a, b] \cap [a, c] = [a, m]$.

Доказательство. Из условия $m \in [a, b]$ вытекает, что $[b, m] \subset [b, a]$ (свойство (A4)). Аналогичным образом, из условия $m \in [b, c]$ вытекает, что $[b, m] \subset [b, c]$. Следовательно, $[a, b] \cap [b, c] \supset [b, m]$. Отсюда в силу условия $[a, b] \cap [b, c] \cap [c, a] = \{m\}$ вытекает, что $[b, m] \cap [a, c] \subset \{m\}$, так что $[b, m] \cap [a, c] = \{m\}$. Однако $[a, b] = [a, m] \cup [m, b]$ (свойство (A7)), так что

$$\begin{aligned} [a, b] \cap [a, c] &= \left([a, m] \cup [m, b] \right) \cap [a, c] = \\ &= \left([a, m] \cap [a, c] \right) \cup \left([m, b] \cap [a, c] \right) = [a, m] \cup \{m\} = [a, m]. \quad \square \end{aligned}$$

9.5. Концы преддеревя. Пусть \mathcal{T} — преддерево. Определим на множестве псевдолучей в \mathcal{T} бинарное отношение *конфинальности* E , полагая $(R, R') \in E$ для псевдолучей R и R' , если пересечение $R \cap R'$ содержит псевдолучи. Отношение E является отношением эквивалентности (рефлексивность и симметричность очевидны, транзитивность доказывается в [Mal14, лемма 3.8(10)]). *Концами* преддеревя \mathcal{T} называются классы эквивалентности отношения E . Множество всех концов преддеревя \mathcal{T} обозначим через $\text{Ends}(\mathcal{T})$.

9.6. Замечание. В медианном преддереве пересечение конфинальных псевдолучей не только содержит псевдолучи, но и является псевдолучом (см. лемму 9.11).

9.7. Определение. Пусть \mathcal{T} — преддерево, $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^3$ — его тернарная структура, $\text{Ends}(\mathcal{T})$ — пространство его концов. Определим на множестве $\mathcal{T} \cup \text{Ends}(\mathcal{T})$ тернарную структуру $\widehat{\mathcal{S}}$ следующим образом:

R1. Если $x, y, z \in \mathcal{T}$, то $(x, y, z) \in \widehat{\mathcal{S}} \Leftrightarrow (x, y, z) \in \mathcal{S}$.

R2. Если $x, y \in \mathcal{T}$ и $\omega \in \text{Ends}(\mathcal{T})$, то

$(x, y, \omega) \in \widehat{\mathcal{S}} \Leftrightarrow (\omega, y, x) \in \widehat{\mathcal{S}} \Leftrightarrow$ найдется луч $R \in \omega$ такой, что $(x, y, r) \in \mathcal{S}$ для всех $r \in R$.

R3. Если $x \in \mathcal{T}$ и $\omega, \tau \in \text{Ends}(\mathcal{T})$, то

$(\omega, x, \tau) \in \widehat{\mathcal{S}} \Leftrightarrow$ найдутся лучи $R \in \omega$ и $Q \in \tau$ такие, что $(r, x, q) \in \mathcal{S}$ для всех $r \in R$ и $q \in Q$.

R4. Если $\omega \in \text{Ends}(\mathcal{T})$ и $x, y \in \mathcal{T} \cup \text{Ends}(\mathcal{T})$, то $(x, \omega, y) \notin \widehat{\mathcal{S}}$.

9.8. Теорема ([Mal14, теорема 11.3]). Множество $\mathcal{T} \cup \text{Ends}(\mathcal{T})$ с вышеописанной структурой $\hat{\mathcal{S}}$ является преддеревом.

9.9. Определение и соглашение. В дальнейшем, если задано преддерево \mathcal{T} , мы рассматриваем на множестве $\hat{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \cup \text{Ends}(\mathcal{T})$ структуру преддерева, описанную в разделе 9.7. Для замкнутых псевдоинтервалов преддерева $\hat{\mathcal{T}}$ используется то же обозначение, что и для псевдоинтервалов преддерева \mathcal{T} . Путаницы между псевдоинтервалами преддеревьев \mathcal{T} и $\hat{\mathcal{T}}$ не возникает, поскольку в силу определения преддерева $\hat{\mathcal{T}}$ его система псевдоинтервалов содержит систему псевдоинтервалов преддерева \mathcal{T} .

9.10. Лемма ([Mal14, лемма 11.5]). 1. Пусть p — точка в преддереве \mathcal{T} и пусть $\omega \in \text{Ends}(\mathcal{T})$. Тогда в \mathcal{T} существует единственный псевдолуч, исходящий из p и представляющий ω . Этот псевдолуч совпадает с подмножеством $[p, \omega] \setminus \{\omega\}$ преддерева $\mathcal{T} \cup \text{Ends}(\mathcal{T})$.

2. Если концы ω и τ преддерева \mathcal{T} различны, то в \mathcal{T} существует единственная псевдопрямая, содержащая псевдолучи из ω и τ . Эта псевдопрямая совпадает с подмножеством $[\omega, \tau] \setminus \{\omega, \tau\}$ преддерева $\mathcal{T} \cup \text{Ends}(\mathcal{T})$.

9.11. Лемма. В медианном преддереве пересечение конфинальных псевдолучей является псевдолучом.

Доказательство. Действительно, пусть L_1 и L_2 — конфинальные псевдолучи в преддереве \mathcal{T} . В силу леммы 9.10 псевдолучи L_1 и L_2 совпадают с подмножествами $[p_1, \omega] \setminus \{\omega\}$ и $[p_2, \omega] \setminus \{\omega\}$ преддерева $\mathcal{T} \cup \text{Ends}(\mathcal{T})$, где p_1 и p_2 — экстремальные точки псевдолучей, а ω — представленный ими конец. Если \mathcal{T} медианно, то медианно и преддерево $\mathcal{T} \cup \text{Ends}(\mathcal{T})$ (предложение 11.7 в [Mal14]). В силу медианности имеется точка $m \in \mathcal{T} \cup \text{Ends}(\mathcal{T})$ такая, что $[p_1, p_2] \cap [p_1, \omega] \cap [p_2, \omega] = \{m\}$. По лемме 9.4 имеем $[p_1, \omega] \cap [p_2, \omega] = [m, \omega]$. При этом $m \in \mathcal{T}$ поскольку $m \in [p_1, p_2]$. Получаем, что $L_1 \cap L_2 = [m, \omega] \setminus \{\omega\}$. Множество $[m, \omega] \setminus \{\omega\}$ является псевдолучом в \mathcal{T} (это следует из леммы 9.10). \square

9.12. Топология теней. *Ветвями* преддерева \mathcal{T} называются множества вида

$$\zeta_a(b) = \{t \in \mathcal{T} : a \notin [t, b]\},$$

где $a \neq b$. *Топология теней* на преддереве определяется как наименьшая топология, в которой все ветви преддерева открыты. Иными словами, ветви образуют предбазу топологии теней.

9.13. Замечание. В следующих параграфах будет рассматриваться структура преддерева на дендрите. Ветви дендрита в смысле определения 3.3 совпадают с ветвями соответствующего преддерева.

9.14. Утверждение. Если в некотором преддереве \mathcal{T} точка x лежит между точками a и b , то в топологии теней на \mathcal{T} точка x разделяет a и b .

Доказательство. Определим на множестве $\mathcal{T} \setminus \{x\}$ бинарное отношение R_x , положив

$$sR_x t \Leftrightarrow x \notin [s, t].$$

Отношение R_x является отношением эквивалентности (транзитивность вытекает из свойства (A3) в определении преддеревьев; подробнее см. [Mal14, определение 5.1]). Классами в R_x являются ветви вида $\zeta_x(p)$. Отсюда следует, что в $\mathcal{T} \setminus \{x\}$ дополнение любой ветви является объединением ветвей и, следовательно, открыто в топологии теней, так что точки, лежащие в разных ветвях вида $\zeta_x(p)$, разделены точкой x в топологии теней. Остается заметить, что в случае, если точка x лежит между точками a и b , точки a и b в силу определения ветви лежат в разных ветвях вида $\zeta_x(p)$. \square

9.15. Лемма ([Mal14, лемма 6.4]; ср. с леммой 3.19). *Последовательность $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ точек преддерева \mathcal{T} сходится к точке $x \in \mathcal{T}$ в топологии теней на \mathcal{T} тогда и только тогда, когда для каждой точки $z \in (\mathcal{T} \setminus \{x\})$ множество $\{j \in \mathbb{N} : z \in [x, x_j]\}$ пусто или конечно, т. е. когда*

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{j > k} [x, x_j] = \{x\}.$$

9.16. Лемма. *Пусть последовательность $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ точек преддерева \mathcal{T} сходится к точке $w \in \mathcal{T}$ в топологии теней на \mathcal{T} . Тогда для произвольной точки $v \in \mathcal{T}$ выполняется условие*

$$[v, w] \setminus \{w\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{j > k} [v, x_j] \subset [v, w].$$

Доказательство. В силу леммы 9.15 для каждой точки $z \in [v, w] \setminus \{w\}$ множество $\{j \in \mathbb{N} : z \in [x_j, w]\}$ пусто или конечно. Отсюда, поскольку $[v, w] \subset [x_j, w] \cup [x_j, v]$ в силу (A3), следует, что множество $\{j \in \mathbb{N} : z \notin [x_j, v]\}$ пусто или конечно, так что $z \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{j > k} [v, x_j]$. Таким образом

$$[v, w] \setminus \{w\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{j > k} [v, x_j].$$

С другой стороны, множество $\{j \in \mathbb{N} : z \in [x_j, w]\}$ пусто или конечно и для каждой точки $z \notin [v, w]$. Отсюда, поскольку $[x_j, v] \subset [x_j, w] \cup [v, w]$ в силу (A3), следует, что множество $\{j \in \mathbb{N} : z \in [x_j, v]\}$ пусто или конечно, так что $z \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{j > k} [v, x_j]$. Таким образом

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{j > k} [v, x_j] \subset [v, w]. \quad \square$$

10 Преддеревья и древовидные пространства

В настоящем параграфе древовидные пространства рассматриваются с точки зрения теории преддеревьев. В частности, в терминах теории преддеревьев дается описание дендрона $D(T)$, каноническим образом соответствующего древовидному пространству T (см § 8 и теорему 8.1).

10.1. Предложение. Пусть T — связное топологическое пространство (например, дендрит или другое древовидное пространство). Определим на T тернарное отношение $\mathcal{S} \subset T^3$, полагая $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ в случае, когда x и z разделены точкой y . Тогда \mathcal{S} удовлетворяет аксиомам (T0)–(T3), т. е. является структурой преддерева.

Доказательство. Это предложение доказывается, например, в [War80], [Ban13, разд. 6.2] и [Mal14, предл. 1.3]. \square

10.2. Соглашение. Всюду в оставшейся части работы мы по умолчанию считаем древовидные пространства преддеревьями с отношением промежуточности, заданным в формулировке предложения 10.1.

10.3. Замечание. Терминология и система обозначений, введенные в § 3 для дендритов, пересекаются с терминологией и обозначениями, введенными в § 9 для преддеревьев. При переходе от дендрита к соответствующему преддереву общие термины и обозначения согласуются. Так, ветвям дендрита (определение 3.3) соответствуют ветви преддерева (см. определения в разделе 9.2), подмножества вида $[a, b]$ (дуги дендрита) соответствуют подмножествам вида $[a, b]$ (замкнутым псевдоинтервалам) в преддереве и т. п.

Кроме того, при переходе от дендритов к преддеревьям некоторые понятия точно соответствуют друг другу. Например, концевые точки дендрита — это в точности терминальные точки соответствующего преддерева, связные подмножества дендрита соответствуют выпуклым подмножествам преддерева и т. п. В этой связи мы без дополнительных оговорок будем пользоваться терминологией обеих теорий в случаях, когда путаницы не возникает.

Эта смешанная терминология может быть распространена и на дендроны и древовидные пространства, однако здесь в некоторых случаях прямое соответствие свойств сохраняется лишь частично. К примеру, в локально связных древовидных пространствах замкнутые псевдоинтервалы (соответствующей структуры преддерева) гомеоморфны дугам, т. е. линейным континуумам (см. лемму 11.1). Однако в общем случае древовидного пространства псевдоинтервалы не обязаны быть ни дугообразно связными (см. пример топологической синусоиды в начале § 8), ни связными (см. пример 8 в [War75]). В произвольном древовидном пространстве замкнутые псевдоинтервалы замкнуты (следствие 10.9).

10.4. Теорема. Пусть (T, τ) — древовидное пространство. Тогда топология теней $\rho(\tau)$ на T совпадает с топологией $\sigma(\tau)$ из раздела 8.3, т. е. преддерево T с топологией теней является простым древовидным пространством.

Доказательство. Топология $\sigma(\tau)$ по определению порождена семейством $B(Z, \tau)$, состоящим из компонент связности (в топологии τ) множеств вида $Z \setminus \{x\}$ для всевозможных $x \in Z$ (в случае дендритов для таких множеств использовался термин «ветви»). Топология теней преддерева по определению порождена семейством всех ветвей преддерева T . Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что семейство $B(Z, \tau)$ совпадает с семейством всех ветвей преддерева T . Для этого достаточно убедиться в следующем: если x и a — несовпадающие точки в T , то ветвь $\zeta_x(a)$ преддерева T совпадает с содержащей точку a компонентой связности (в исходной топологии τ) множества $T \setminus \{x\}$. Это выполняется в силу утверждения 8.9. Теорема доказана. \square

10.5. Теорема. Пусть (T, τ) — древовидное пространство. Пусть $\text{Ends}(T)$ — множество концов соответствующего преддерева. Тогда преддерево

$$\widehat{T} := T \cup \text{Ends}(T)$$

с топологией теней $\widehat{\rho}$ на нем является дендромом. Тожественное отображение $(T, \tau) \rightarrow (\widehat{T}, \widehat{\rho})$ непрерывно, его образ плотен в $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$.

10.6. Замечание. Поскольку тождественное отображение $(T, \tau) \rightarrow (\widehat{T}, \widehat{\rho})$ непрерывно, а его образ плотен в $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$, дендрон $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$ совпадает с дендромом $D(T)$ из теоремы 8.1.

Доказательство теоремы 10.5. Докажем сначала, что T плотно в $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$. Пусть $\omega \in \widehat{T} \setminus T = \text{Ends}(T)$. Пусть $E \subset \widehat{T}$ — открытая (в $\widehat{\rho}$) окрестность точки ω . Поскольку ветви образуют предбазу топологии теней, найдется конечный набор ветвей, пересечение которых содержит ω и содержится в E . Заметим, что каждая ветвь B в \widehat{T} , содержащая ω , содержит некоторый представляющий ω псевдолуч преддерева T . Действительно, если r — источник ветви B , то множество $[r, \omega] \setminus \{r\}$ целиком лежит в B , поскольку $\omega \in B$, так что

$$B = \zeta_r(\omega) = \{t \in \widehat{T} : r \notin [t, \omega]\},$$

а для любого $t \in [r, \omega] \setminus \{r\}$ получаем $r \notin [t, \omega]$ в силу аксиомы (A2) из определения преддерева. Для каждого $p \in [r, \omega] \setminus \{r, \omega\}$ множество $[p, \omega] \setminus \{\omega\}$ содержится в $[r, \omega] \setminus \{r\} \subset B$ (см. свойство (A4) в лемме 9.3) и является псевдолучом, представляющим ω (см. лемму 9.10). Остается заметить, что пересечение конечного набора конфинальных псевдолучей по определению псевдолучей и конфинальности содержит псевдолуч (конфинальный с псевдолучами набора). Отсюда следует, что произвольно выбранная окрестность E точки ω содержит псевдолуч преддерева T , т. е. пересекается с T . Итак, T плотно в $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$.

Перейдем к доказательству первого утверждения теоремы ($(\widehat{T}, \widehat{\rho})$ является дендромом). Как следует из определения дендрона, для доказательства этого утверждения достаточно показать, что пространство $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$

(а) связно,

(b) является древовидным пространством (любые две различные точки разделены третьей),

(c) компактно.

Доказательство связности. По теореме 10.4, топология теней ρ на T совпадает с топологией $\sigma(\tau)$ из раздела 8.3, так что (T, ρ) является простым древовидным пространством (пункт 1 теоремы 8.4) и, в частности, связно. Из определения структуры преддерева на пространстве $\widehat{T} = T \cup \text{Ends}(T)$ вытекает, что множества, высекаемые ветвями преддерева \widehat{T} на вложенном преддереве $T \subset \widehat{T}$ являются ветвями преддерева T либо совпадают с T , причем каждая ветвь в T может быть получена описанным образом. Это означает, что топология $\widehat{\rho}$ индуцирует на преддереве T топологию, совпадающую с ρ . (Аналогичный факт верен для любой пары выпукло вложенных преддереьев.) Таким образом, T является связным подмножеством в $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$. Отсюда в силу доказанной выше плотности подмножества T в $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$ следует связность всего $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$.

Доказательство древовидности. Пусть a и b — различные точки в \widehat{T} . Рассмотрим три случая.

1) Точки a и b лежат в T . В этом случае, поскольку (T, τ) является древовидным пространством, найдется точка $x \in T$, разделяющая a и b в (T, τ) . Тогда x лежит между a и b как в преддереве T , так и в преддереве \widehat{T} (см. определение 9.7). Отсюда в силу утверждения 9.14 следует, что x разделяет a и b в $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$.

2) Точка a лежит в T , а точка b — в $\text{Ends}(T)$. Тогда в силу леммы 9.10 в T существует единственный псевдолуч L , исходящий из a и представляющий b ; причем этот псевдолуч совпадает с множеством $[a, b] \setminus \{b\}$ в преддереве \widehat{T} . Следовательно, множество $[a, b] \setminus \{a, b\}$ бесконечно. Каждая точка x из $[a, b] \setminus \{a, b\}$ лежит между a и b . Отсюда в силу утверждения 9.14 следует, что x разделяет a и b в $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$.

3) Точки a и b лежат в $\text{Ends}(T)$. Тогда в силу леммы 9.10 подмножество $[a, b] \setminus \{a, b\}$ из преддерева \widehat{T} является псевдопрямой в преддереве T , т. е. множество точек, лежащих между a и b , бесконечно. В силу утверждения 9.14 каждая из этих точек разделяет a и b в $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$.

Доказательство компактности. В произвольном преддереве для любой пары его точек a и b отношение \leq_a , определяемое правилом « $x \leq_a y$ если $[a, x] \subset [a, y]$ », задает линейный порядок на интервале $[a, b]$ (см. [Bow99] или [Mal14]). В [Mal14] доказывается (лемма 4.13 и следствие 11.10), что достаточным условием компактности топологии теней на преддереве $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \text{Ends}(\mathcal{T})$ является полнота порядков \leq_a для всех интервалов $[a, b]$ преддерева \mathcal{T} . (Линейно упорядоченное множество полно если в нем каждое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань.) Полнота указанных порядков для произвольного древовидного пространства утверждается леммой 8.2 в [War75], полное доказательство которой дано в [MS77].

Замечание. Этот результат о полноте можно воспринимать и как следствие теоремы 8.1 об отображении в дендрон, леммы 8.11 и того свойства дендронов, что все множества вида $[a, b]$ в дендроне являются линейными континуумами

(см., например, следствие 2.18 в [vMW81]).

Остается проверить непрерывность тождественного отображения $(T, \tau) \rightarrow (\widehat{T}, \widehat{\rho})$. Представим его как композицию тождественных отображений

$$(T, \tau) \rightarrow (T, \sigma(\tau)) \rightarrow (T, \rho) \rightarrow (\widehat{T}, \widehat{\rho})$$

Первое из этих отображений непрерывно по теореме 8.4, второе является гомеоморфизмом по теореме 10.4, а третье является гомеоморфизмом на образ (этот факт обсуждался в начале настоящего доказательства при проверке плотности T в $(\widehat{T}, \widehat{\rho})$).

Все утверждения теоремы доказаны. \square

10.7. Лемма (ср. с леммой 3.9). *Любое связное подмножество древовидного пространства выпукло в соответствующем преддереве (т. е. вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и все точки, их разделяющие).*

Доказательство. Лемма доказывается дословным повторением рассуждения, приведенного в доказательстве леммы 3.9. \square

10.8. Лемма (ср. с леммой 7.5 в [Bow99]). *Пусть T и P — древовидные пространства, $f: T \rightarrow P$ — непрерывное инъективное отображение. Тогда, каковы бы ни были точки a и b в T , выполняется условие*

$$f[a, b] = [f(a), f(b)].$$

Доказательство. Включение $f[a, b] \subset [f(a), f(b)]$ прямо вытекает из леммы 8.11. Обратное включение вытекает из леммы 8.11 в силу леммы 10.7, которая гарантирует, что псевдоинтервал $[f(a), f(b)]$ лежит в $f(T)$, поскольку $f(T)$ связно, будучи образом связного пространства при непрерывном отображении. \square

10.9. Следствие. *В древовидном пространстве замкнутые псевдоинтервалы, псевдолучи и псевдопрямые являются замкнутыми подмножествами.*

Доказательство. Пусть T — древовидное пространство. В силу теоремы 10.5 (см. также теорему 8.1) преддерево $\widehat{T} := T \cup \text{Ends}(T)$ с топологией теней $\widehat{\rho}$ на нем является дендромом, а тождественное отображение $f: (T, \tau) \rightarrow (\widehat{T}, \widehat{\rho})$ непрерывно. В силу леммы 10.8, любой замкнутый псевдоинтервал в преддереве T является прообразом замкнутого псевдоинтервала в дендроне, а по лемме 11.1 замкнутый псевдоинтервал в дендроне гомеоморфен континууму (дендроны локально связны; см., например, теорему 8.7 или следствие 2.10 в [vMW81]), в частности, является замкнутым подмножеством, так что его прообраз также замкнут. В силу леммы 9.10 любой псевдолуч является прообразом замкнутого псевдоинтервала в преддереве-дендроне \widehat{T} , что в силу вышеизложенных соображений также влечет замкнутость. Замкнутость псевдопрямой следует из того факта, что она представима в виде объединения двух псевдолучей (см. [Mal14]). \square

11 Локально связные древовидные пространства

11.1. Лемма (ср. с леммой 3.6). *В локально связном древовидном пространстве для любых двух его точек a и b имеется единственный линейный континуум K с концами в a и b . Множество $K \setminus \{a, b\}$ совпадает с множеством точек, разделяющих a и b , так что $K = [a, b]$, где $[a, b]$ — замкнутый псевдоинтервал соответствующего преддерева.*

Доказательство. Утверждения леммы прямо вытекают из следствия 15.1, теоремы 16 и леммы 17.1 в [War75]. \square

11.2. Лемма (ср. с леммой 3.9). *В локально связном древовидном пространстве подмножество связно тогда и только тогда, когда оно выпукло в соответствующем преддереве (т. е. тогда и только тогда, когда вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и все точки, их разделяющие).*

Доказательство. Выпуклость связных подмножеств доказывается дословным повторением рассуждения, приведенного в доказательстве леммы 3.9. Если подмножество выпукло, т. е. с любыми двумя своими точками a и b содержит и интервал $[a, b]$, то оно связно, так как в локально связном древовидном пространстве псевдоинтервал $[a, b]$ связан в силу леммы 11.1. \square

11.3. Лемма (ср. с леммой 3.10). *В локально связном древовидном пространстве пересечение связных подмножеств из произвольного набора либо пусто, либо связно.*

Доказательство. Утверждение леммы следует из леммы 11.2, поскольку в преддереве пересечение выпуклых подмножеств из произвольного набора либо пусто, либо выпукло (в силу определения выпуклых подмножеств). \square

11.4. Лемма. 1. *В локально связном древовидном пространстве любая псевдодуга гомеоморфна связному подмножеству линейного компакта.*

2. *В сепарабельном локально связном древовидном пространстве любая псевдодуга гомеоморфна интервалу вещественной прямой.*

Доказательство. 1. Пусть J — псевдодуга в локально связном древовидном пространстве T . Тогда на J имеется линейный порядок $<$ такой, что для любых a и b из J при $a < b$ выполняется условие

$$[a, b] = \{a, b\} \cup \{x \in J : a < x < b\}$$

(см. лемму 2.7 в [Bow99] или лемму 3.3 в [Mal14]). Поскольку для произвольных точек a и b в J псевдоинтервал $[a, b]$ является дугой¹⁵ (лемма 11.1), упорядоченное множество $(J, <)$ полно (т. е. в $(J, <)$ каждое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань). Обозначим через τ топологию на J ,

¹⁵Т. е. гомеоморфен линейному континууму

индуцированную топологией заданного древовидного пространства, и покажем, что τ совпадает с порядковой топологией на $(J, <)$.

Сначала убедимся, что τ содержит порядковую. Достаточно проверить, что для каждого $x \in J$ подмножества $J_x := \{t \in J : t < x\}$ и $J^x := \{t \in J : x < t\}$ входят в τ . Подмножества J_x и J^x связны в τ , будучи псевдодугами (см. лемму 11.2). Подмножества J_x и J^x лежат в разных компонентах связности множества $T \setminus \{x\}$, поскольку x разделяет J_x и J^x . Следовательно, J_x и J^x являются пересечениями псевдодуги J с разными компонентами множества $T \setminus \{x\}$; эти компоненты открыты в исходной топологии на T (см., например, теорему 19 в [War75] или теорему 4 в [Pea74]). Отсюда вытекает, что J_x и J^x входят в τ .

Покажем, что топология τ содержится в порядковой. Действительно, если бы нашлось подмножество $S \subset J$, входящее в τ и не открытое в порядковой топологии, то существовала бы точка $s \in S$, никакая порядковая открытая окрестность которой не содержалась бы в S . Тогда нашелся бы и псевдоинтервал $[a, b]$, содержащийся в J и содержащий s , в пересечении с которым S давало бы множество, не открытое в порядковой топологии на $[a, b]$. Это противоречит тому, что псевдоинтервал $[a, b]$ гомеоморфен линейному континууму.

Остается заметить, что, как хорошо известно, всякое связное упорядочиваемое¹⁶ пространство гомеоморфно подмножеству линейного компакта.

2. Пусть T — сепарабельное локально связное древовидное пространство. По теореме 8.1 найдется дендрон $D(T)$ и непрерывное инъективное отображение $f: T \rightarrow D(T)$ такие, что образ $f(T)$ плотен в $D(T)$. Поскольку T сепарабельно, а образ $f(T)$ непрерывного отображения f плотен в $D(T)$, дендрон $D(T)$ сепарабелен, и значит, является дендритом (см. замечание 3.2). В силу леммы 10.8 отображение f переводит псевдодуги пространства T в псевдодуги дендрита $D(T)$ с сохранением порядка. Остается обратиться к доказательству первого пункта леммы и заметить, что в дендрите любая псевдодуга гомеоморфна интервалу вещественной прямой. Действительно: в силу леммы 7.12 в [Bow99], любая псевдодуга дендрита лежит в некотором псевдоинтервале; в силу леммы 11.1, всякий замкнутый псевдоинтервал в дендрите является дугой; всякая дуга дендрита гомеоморфна замкнутому интервалу вещественной прямой (см. обсуждение в разделе 3.3).

Замечание. В доказательстве пункта 2 леммы можно также воспользоваться тем, что всякое древовидное пространство является медианным преддеревом, а в медианном преддереве сепарабельность топологии теней дает сильную сепарабельность: имеется счетное множество, пересекающее каждую неодноточечную псевдодугу (см. [Bow99]). \square

11.5. Определение. Вещественные лучи. Пусть T — сепарабельное локально связное древовидное пространство. *Вещественным лучом* в T будем называть подмножество, гомеоморфное полуоткрытому интервалу $[0, 1)$ вещественной прямой и не содержащееся в подмножестве в T , гомеоморфном замкнутому

¹⁶См. определение в разделе 3.3.

интервалу $[0, 1]$.

11.6. Утверждение. *Подмножество сепарабельного локально связного древовидного пространства является псевдолучом если и только если оно является вещественным лучом.*

Доказательство. Пусть L — вещественный луч в сепарабельном локально связном древовидном пространстве T . Тогда L связан и по лемме 10.7 является выпуклым подмножеством в соответствующем преддереве. Покажем, что L является линейным подмножеством в преддереве. Действительно, пусть $x, y, z \in L$. С точностью до переобозначения точек можно считать, что y лежит в подынтервале $I(x, z)$ луча L с концами в точках x и z . Однако из леммы 11.1 следует, что $I(x, z) = [x, z]$ и $y \in [x, z]$. Условие линейности выполнено. Таким образом, L является псевдодугой.

Вещественный луч по определению не содержится в подмножестве, гомеоморфном интервалу $[0, 1]$. В силу леммы 11.1, каждый замкнутый псевдоинтервал в преддереве T является линейным континуумом. Отсюда очевидно вытекает, что L не содержится ни в одном замкнутом псевдоинтервале преддереве. Кроме того, из леммы 11.2 следует, что начальная точка вещественного луча является экстремальной (в смысле определения из раздела 9.2). Таким образом, в преддереве T множество L является неограниченной псевдодугой с экстремальной точкой, т. е. псевдолучом.

Обратно: пусть L — псевдолуч в T . Тогда, согласно утверждению (1) леммы 3.8 в [Mal14], на L имеется линейный порядок $<$ такой, что при $a < b$ верно

$$[a, b] = \{a, b\} \cup \{x \in L : a < x < b\},$$

причем в упорядоченном множестве $(L, <)$ имеется минимальный, но не имеется максимального элемента. Отсюда в силу леммы 11.4 вытекает, что L гомеоморфно интервалу $[0, 1]$. Остается заметить, что L не лежит в подмножестве, гомеоморфном интервалу $[0, 1]$, поскольку такое подмножество в T являлось бы псевдоинтервалом (лемма 11.1), а псевдолуч по определению не содержится в псевдоинтервале. \square

12 Доказательство следствия 1.3 о деревьях

12.1. Определения. Деревья. *Деревом* называют связный и односвязный клеточный комплекс размерности не выше 1. Нульмерные клетки дерева называются *вершинами*, одномерные — *ребрами*. Дерево с бесконечным (соотв., конечным, счетным) количеством клеток называется *бесконечным* (соотв., *конечным*, *счетным*). Подкомплексы дерева, являющиеся деревьями, называют *поддеревьями*.

12.2. Определение. Концы дерева. Бесконечное (под)дерево, гомеоморфное интервалу $[0, 1]$, называется *лучом*. Два луча в дереве называют *конфинальными*, если их пересечение также является лучом. Конфинальность лучей является

отношением эквивалентности. *Концом* дерева называют класс эквивалентности конфинальных лучей. Множество концов дерева T обозначается через $\text{Ends}(T)$.

12.3. Определение. Сходимость к концам дерева. Говорят, что последовательность $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ точек дерева T *сходится* к концу $w \in \text{Ends}(T)$, если для некоторого¹⁷ представляющего конец w луча L в T выполняется следующее свойство: для каждой точки $t \in L \setminus \{p\}$, где p — вершина, из которой исходит луч L , найдется $N_t \in \mathbb{N}$ такое, что p и x_j разделены точкой t при всех $j > N_t$.

12.4. Топология на $T \cup \text{Ends}(T)$. Пусть T — дерево, $\text{Ends}(T)$ — множество его концов. Пусть x — точка в T , B — компонента связности пространства $T \setminus \{x\}$, $E(B)$ — подмножество в $\text{Ends}(T)$, образованное всеми теми концами, у которых найдется представляющий их луч, содержащийся в B . Будем рассматривать на множестве $T \cup \text{Ends}(T)$ топологию, порожденную семейством всех множеств вида $B \cup E(B)$ для всевозможных $x \in T$.

Доказательство следствия 1.3.

12.5. Лемма. *Всякое дерево является локально связным древовидным пространством.*

Доказательство. Как известно, любой клеточный комплекс локально линейно связан и, следовательно, локально связан (см., например, следствие 6.7 в [LW70]). Однозначно дугообразно связные локально дугообразно связные пространства древовидны (см., например, [Blo15, лемма 1.9]). Таким образом, для доказательства древовидности остается проверить, что деревья однозначно дугообразно связны. Связный клеточный комплекс линейно связан (см., например, следствие 6.8 в [LW70]). По определению, подмножество клеточного комплекса замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто его пересечение с замыканием каждой клетки. Отсюда следует, что компактное подмножество клеточного комплекса содержится в конечном числе клеток комплекса (см. метод доказательства в [Hat02, стр. 83]). В частности, подмножество дерева, гомеоморфное линейному континууму, гомеоморфно отрезку вещественной прямой. Это означает, что условие односвязности из определения дерева эквивалентно условию однозначной дугообразной связности. \square

В дальнейшем предполагается, что выполнены предположения следствия 1.3.

12.6. Утверждение. *Дерево T сепарабельно.*

Доказательство. Поскольку группа G счетна, а T не содержит собственных G -инвариантных поддеревьев, T счетно (как клеточный комплекс) и, следовательно, сепарабельно (как топологическое пространство). \square

¹⁷А значит, и для каждого.

12.7. Утверждение. У дерева T не имеется висячих вершин (т. е. вершин степени 1).

Доказательство. Действительно, так как T бесконечно, у него найдутся вершины степени больше 1. Следовательно, у T нет висячих вершин, так как в противном случае поддерево, натянутое на вершины степени больше 1, являлось бы собственным G -инвариантным поддеревом в противоречие с предположениями доказываемого следствия. \square

12.8. Утверждение. Множество концов $\text{Ends}(T)$ дерева T бесконечно.

Доказательство. Если у неодноточечного дерева нет висячих вершин (утверждение 12.7), то в нем есть лучи и, следовательно, его пространство концов непусто. Отсюда вытекает, что $\text{Ends}(T)$ бесконечно, поскольку предполагается, что индуцированное действие G на $\text{Ends}(T)$ не имеет конечных орбит. \square

В силу леммы 12.5 дерево T является локально связным древовидным пространством. Соглашение 10.2 задает на T структуру преддерева. Обозначим эту структуру через \mathcal{S} .

12.9. Утверждение. Лучи в T являются псевдолучами преддерева (T, \mathcal{S}) . Это соответствие индуцирует биекцию между множеством концов $\text{Ends}(T)$ дерева T и множеством концов $\text{Ends}(T, \mathcal{S})$ соответствующего преддерева.

Доказательство. Луч в T является вещественным лучом в смысле определения 11.5 (луч не может содержаться в подмножестве дерева, гомеоморфном замкнутому вещественному интервалу, поскольку компактное подмножество дерева содержится в конечном числе клеток; см. [Hat02, стр. 83]). Отсюда в силу утверждения 11.6 следует, что каждый луч в T является псевдолучом в (T, \mathcal{S}) и что конфинальные лучи конфинальны как псевдолучи. Это дает отображение $E: \text{Ends}(T) \rightarrow \text{Ends}(T, \mathcal{S})$.

Для проверки инъективности отображения E нужно показать, что не конфинальные лучи не конфинальны и как псевдолучи. Пусть лучи L_1 и L_2 не конфинальны. Пересечение $L_1 \cap L_2$ непусто, оно является связным (связность пересечения связных множеств в дереве можно получить в качестве следствия лемм 11.3 и 12.5) подкомплексом (как пересечение подкомплексов). Если связный подкомплекс луча не является лучом, он гомеоморфен замкнутому вещественному интервалу и не содержит псевдолучей, так что псевдолучи L_1 и L_2 не конфинальны.

Для проверки инъективности отображения E нужно показать, что в каждом семействе конфинальных псевдолучей в (T, \mathcal{S}) найдется луч. Согласно лемме 9.10, в каждом семействе конфинальных псевдолучей в (T, \mathcal{S}) найдется псевдолуч, начинающийся в точке, являющейся вершиной дерева T . Пусть L — псевдолуч с началом в вершине. В силу утверждения 11.6, L является вещественным лучом в T в смысле определения 11.5. Таким образом, L гомеоморфен вещественной полупрямой. Остается проверить, что L является подкомплексом в T .

Это следует из того, что L замкнут в T (следствие 10.9) и имеет единственную терминальную точку в вершине. (Замкнутое связное подмножество дерева, не являющееся подкомплексом, должно, очевидно, иметь терминальные точки хотя бы в одном из открытых ребер.) \square

Пользуясь доказанным утверждением, в оставшейся части доказательства следствия 1.3 мы отождествляем множество концов $\text{Ends}(T)$ дерева T с множеством концов соответствующего преддерева. Возникающую на объединении $\widehat{T} = T \cup \text{Ends}(T)$ структуру преддерева (она описывается в пункте 9.7; см. также теорему 9.8 и соглашение 9.9) обозначим через $\widehat{\mathcal{S}}$. Введем на преддереве $(\widehat{T}, \widehat{\mathcal{S}})$ топологию теней (см. § 9).¹⁸ Получившееся топологическое пространство обозначим через D_T .

12.10. Утверждение. *Пространство D_T является дендритом. Тожественная инъекция $T \rightarrow D_T$ непрерывна. Подмножество $\text{Ends}(T) \subset D_T$ совпадает с множеством концевых точек дендрита D_T , а T , соответственно, совпадает с множеством внутренних точек дендрита D_T .*

Доказательство. В силу леммы 12.5 дерево T является древовидным пространством. Отсюда по теореме 10.5 следует, что D_T является дендритом, а тождественная инъекция $T \rightarrow D_T$ непрерывна. Поскольку T сепарабельно (утверждение 12.6) и плотно в дендрите D_T (теорема 10.5), этот дендрит сепарабелен и, следовательно, является дендритом (см. замечание 3.2). Второе утверждение выполняется в силу отсутствия у T висячих вершин (утверждение 12.7). \square

12.11. Утверждение. *Пусть $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — последовательность точек в T и пусть $w \in \text{Ends}(T)$. Тогда, если $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к w в D_T , то $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к w и в смысле определения 12.3.*

Доказательство. Пусть L — произвольный луч в дереве T , представляющий конец w , и пусть $p \in T$ — вершина, из которой исходит L . Если $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к w в D_T , то по лемме 9.16 выполняется условие

$$[p, w] \setminus \{w\} \subset \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{j > k} [p, x_j]. \quad (1)$$

Обозначение $[\cdot, \cdot]$ относится здесь к замкнутым псевдоинтервалам преддерева $(\widehat{T}, \widehat{\mathcal{S}})$. Согласно лемме 9.10, множество $[p, w] \setminus \{w\}$ является псевдолучом в преддереве (T, \mathcal{S}) , исходящим из p и представляющим w . Из утверждения 12.9 следует, что $L = [p, w] \setminus \{w\}$. Условие (1) означает, что для каждой точки $s \in L = [p, w] \setminus \{w\}$ найдется $N_s \in \mathbb{N}$ такое, что $s \in [p, x_j]$ при всех $j > N_s$. Отсюда вытекает (поскольку последовательность $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ точек из T сходится к точке не из T), что для каждой точки $t \in L \setminus \{p\} = [p, w] \setminus \{p, w\}$ найдется $N_t \in \mathbb{N}$

¹⁸Если дерево не является локально конечным, топология теней на (T, \mathcal{S}) не совпадает с его исходной топологией. Однако борелевские алгебры, порожденные топологией теней и исходной топологией, в случае счетных деревьев совпадают.

такое, что t лежит между (в смысле структуры преддерева) точками p и x_j при всех $j > N_t$. Это завершает доказательство, поскольку по определению структуры преддерева \mathcal{S} на T (см. предложение 10.1 и соглашение 10.2) t лежит между точками p и x_j в преддереве (T, \mathcal{S}) , т. е. $(p, t, x_j) \in \mathcal{S}$, тогда и только тогда, когда t разделяет p и x_j в древовидном пространстве (дереве) T . \square

12.12. Утверждение. *Топология на \hat{T} , описанная в разделе 12.4, совпадает с топологией теней на преддереве $(\hat{T}, \hat{\mathcal{S}})$, т. е. с топологией дендрита D_T .*

Доказательство. Рутинная проверка на основе определений показывает, что семейство множеств, описанное в разделе 12.4 в качестве предбазы топологии, является в точности семейством всех невырожденных ветвей преддерева $(\hat{T}, \hat{\mathcal{S}})$ (поскольку висячих вершин у дерева T не имеется). Отсюда в силу определения топологии теней легко следует требуемое утверждение. \square

Действие группы G на дереве T естественным образом индуцирует действие группы G на дендрите D_T .

12.13. Утверждение. *Дендрит D_T не является дугой и не содержит собственных G -инвариантных подконтинуумов, т. е. удовлетворяет условиям теорем 1.1 и 1.2.*

Доказательство. Действительно, дендрит D_T не является дугой, поскольку, как указывается выше, множество его конечных точек $\text{Ends}(T)$ бесконечно (утверждения 12.8 и 12.10). Допустим, что D_T содержит собственный G -инвариантный подконтинуум K . K не является одноточечным подмножеством в $\text{Ends}(T)$, так как по условию действие G на $\text{Ends}(T)$ не имеет конечных орбит. Если $K \cap \text{Ends}(T)$ пусто, то K лежит в T . Если K содержит хотя бы две точки w и z из $\text{Ends}(T)$, то в силу леммы 3.9 K содержит и внутренность дуги $[w, z]$, а эта внутренность содержится в T . Итак, в любом случае K пересекается с T . В силу леммы 3.10 пересечение $K \cap T$ связно (в D_T). Следовательно, $K \cap T$ связно и в дереве T , поскольку тождественная инъекция $T \rightarrow D_T$ дерева в дендрит непрерывна (утверждение 12.10), а при непрерывной инъекции локально связных древовидных пространств прообразы связных множеств связны (это следует из лемм 8.11, 11.1 и 11.2). Заметим, что $K \cap T$ не может совпадать с T , поскольку в этом случае K совпадало бы с D_T в противоречие с предположением о том, что подконтинуум K — собственный. Итак, $K \cap T$ есть собственное связное G -инвариантное подмножество дерева T . В силу леммы 12.14 гипотеза о наличии в дендрите D_T собственного G -инвариантного подконтинуума входит в противоречие с предположением об отсутствии в T собственных G -инвариантных поддеревьев. Это доказывает, что дендрит D_T удовлетворяет условиям теорем 1.1 и 1.2. \square

12.14. Лемма. *Если в бесконечном дереве имеется связное собственное G -инвариантное подмножество, то в нем имеется и собственное G -инвариантное поддерево.*

Доказательство. Если G -инвариантное подмножество S не содержит ни одной вершины дерева, то, будучи связным, S содержится в некотором открытом ребре, замыкание которого дает собственное G -инвариантное поддереву.

Если S содержит хотя бы одну вершину дерева, пусть E — максимальный по включению клеточный подкомплекс дерева, содержащийся в S . Этот подкомплекс является собственным: он непуст, поскольку S содержит хотя бы одну вершину, и не совпадает со всем деревом, поскольку содержится в собственном подмножестве S . Подкомплекс G -инвариантен в силу G -инвариантности множества S . Наконец, E связан, поскольку S , будучи связным, с любыми двумя вершинами a и b дерева содержит и весь интервал $[a, b]$ (лемма 11.2), а в дереве этот интервал является клеточным подкомплексом и, следовательно, входит в E . Связный подкомплекс дерева является поддеревом. Итак, E является собственным G -инвариантным поддеревом. \square

Итак, дендрит D_T и действие группы G на нем удовлетворяют условиям теорем 1.1 и 1.2 (утверждение 12.13). По теореме 1.2, для произвольной невырожденной меры μ на G существует единственная μ -стационарная мера ν_μ на D_T .

12.15. Утверждение. Мера ν_μ сосредоточена на множестве $\text{Ends}(T)$.

Доказательство. Поскольку группа G счетна, а дерево T не содержит собственных G -инвариантных поддеревьев, T счетно и имеет счетное число вершин и ребер. Поскольку мера ν_μ непрерывна (теорема 1.2), она принимает нулевое значение на счетных множествах, в частности — на множестве вершин. Мера ν_μ принимает нулевое значение и на открытых ребрах дерева T . Действительно, рассмотрим на D_T меру ν' , определяемую следующим образом:

- для каждой вершины v дерева T полагаем $\nu'(v) = \nu_\mu(E(v))/2$, где $E(v)$ есть подмножество в T , образованное всеми ребрами, инцидентными вершине v ;
- на открытых ребрах дерева T мера ν' полагается нулевой;
- на множестве $\text{Ends}(T)$ мера ν' совпадает с ν_μ .

Как нетрудно видеть, мера ν' является, как и мера ν_μ , μ -стационарной и отличается от ν_μ , если последняя принимает ненулевые значения на открытых ребрах дерева T . Однако в силу теоремы 1.2 μ -стационарная мера на D_T единственна. Следовательно, $\nu' = \nu_\mu$ и, значит, ν_μ принимает нулевое значение и на всех открытых ребрах дерева T . Таким образом $\nu_\mu(T) = 0$, так что $\nu_\mu(\text{Ends}(T)) = 1$. \square

Итак, мы показали, что дендрит $D_T = T \cup \text{Ends}(T)$ и действие группы G на нем удовлетворяют условиям теорем 1.1 и 1.2 (утверждение 12.13), а μ -стационарная мера ν_μ на D_T , существование и единственность которой вытекает из теоремы 1.2, сосредоточена на множестве $\text{Ends}(T)$ (утверждение 12.15). Вместе с тем, в силу теоремы 1.2 для почти всякой траектории $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ правого случайного μ -блуждания найдется точка $z(\tau)$ в D_T такая, что для каждой внутренней точки $x \in D_T$ последовательность $(\tau_i(x))_{i \in \mathbb{N}_0}$ сходится к $z(\tau)$, а распределение пределов $z(\tau)$ задается мерой ν_μ . Поскольку $\nu_\mu(\text{Ends}(T)) = 1$, последнее

означает, что $z(\tau)$ почти наверняка лежит в $\text{Ends}(T)$, т. е. доказано, что для почти всякой траектории $\tau = (\tau_i)_{i \in \mathbb{N}_0}$ правого случайного μ -блуждания найдется точка $z(\tau)$ в $\text{Ends}(T)$ такая, что для каждой внутренней точки $x \in D_T$ последовательность $(\tau_i(x))_{i \in \mathbb{N}_0}$ сходится к $z(\tau)$, а распределение пределов $z(\tau)$ задается мерой ν_μ . Поскольку множество внутренних точек дендрита D_T совпадает с T (утверждение 12.10), а сходимости к конечным точкам в D_T влечет сходимость (в действительности, эти сходимости эквивалентны) в смысле определения 12.3 (утверждение 12.11), это доказывает первое утверждение следствия 1.3. Остальные утверждения следствия вытекают непосредственно из теорем 1.1 и 1.2 (за исключением утверждения о том, что носителем меры ν_μ является все пространство $\text{Ends}(T)$, — это утверждение вытекает из остовности меры ν_μ в силу леммы 4.9). \square

Список литературы

- [AN98] S. A. Adeleke, P. M. Neumann, *Relations related to betweenness: their structure and automorphisms*, Memoirs Amer. Math. Soc. **131**, no. 623, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [AB06] C. D. Aliprantis, K. C. Border, *Infinite Dimensional Analysis: a Hitchhiker's Guide*, 3rd ed., Springer-Verlag, Berlin, 2006.
- [ACCS01] D. Arévalo, W. J. Charatonik, P. P. Covarrubias, L. Simón, *Dendrites with a closed set of end points*, Topology and its Applications **115** (2001), 1–17.
- [Ban13] P. Bankston, *Road systems and betweenness*, Bull. Math. Sci. **3**(3) (2013), 389–408.
- [Blo15] A. Blokh, *Pointwise-recurrent maps on uniquely arcwise connected locally arcwise connected spaces*, Proceedings of Amer. Math. Soc. **143** (2015), 3985–4000.
- [Bow99] B. H. Bowditch, *Treelike structures arising from continua and convergence groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. **139**, no. 662, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [BC01] B. H. Bowditch and J. Crisp, *Archimedean actions on median pretrees*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **130** (2001), 383–400.
- [CS89] D. I. Cartwright, P. M. Soardi, *Convergence to ends for random walks on the automorphism group of a tree*, Proc. Amer. Math. Soc. **107** (1989), 817–823.
- [CSW93] D. I. Cartwright, P. M. Soardi, W. Woess, *Martin and end compactifications for nonlocally finite graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 679–693.

- [CCP94] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, J. R. Prajs, *Mapping hierarchy for dendrites*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) **333** (1994), 1–52.
- [Cha98] J. J. Charatonik, W. J. Charatonik, *Dendrites*, Aportaciones Mat. Comun. **22** (1998), 227–253.
- [ChWZ13] W. J. Charatonik, E. P. Wright, S. S. Zafiridou, *Dendrites with a countable set of end points and universality*, Houston J. Math. **39**(2) (2013), 651–666.
- [Chi01] I. M. Chiswell, *Introduction to Λ -trees*, World Scientific Publishing Co., 2001.
- [Cor74] J. L. Cornette, *Separable Menger regular curves are metrizable*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 281–284.
- [Fur63] H. Furstenberg, *A Poisson formula for semi-simple Lie groups*, Ann. of Math. **77**(2) (1963), 335–386.
- [Fur71] H. Furstenberg, *Random walks and discrete subgroups of Lie groups*, Adv. Probab. Related Topics **1** (1971), 3–63.
- [Fur73] H. Furstenberg, *Boundary theory and stochastic processes on homogeneous spaces*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 26, AMS, Providence, R.I., 1973, 193–229.
- [GM12] F. Gautero and F. Mathéus, *Poisson boundary of groups acting on \mathbb{R} -trees*, Israel J. Math. **191** (2012), 585–646.
- [GW13] E. Glasner, B. Weiss, *Weak mixing properties for nonsingular actions*, preprint arXiv:1308.0159
- [Hat02] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [KV83] V. A. Kaimanovich, A. M. Vershik, *Random walks on discrete groups: boundary and entropy*, Ann. Probab. **11** (1983), 457–490.
- [KM96] V. A. Kaimanovich, H. Masur, *The Poisson boundary of the mapping class group*, Invent. math. **125** (1996), 221–264.
- [Kai00] V. A. Kaimanovich, *The Poisson formula for groups with hyperbolic properties*, Annals of Math. **152** (2000), 659–692.
- [KE13] В. А. Кайманович, А. Г. Эршлер, *Непрерывность асимптотических характеристик для случайных блужданий на гиперболических группах*, Функц. анализ и его прил. **47**:2 (2013), 84–89.
- [Kar03] A. Karlsson, *Boundaries and random walks on finitely generated infinite group*, Ark. Mat. **41** (2003), 295–306.

- [Kur68] K. Kuratowski, *Topology*, vol. 2, Academic Press and PWN, New York, London and Warszawa 1968.
- [LW70] A. T. Lundell, S. Weingram, *The topology of CW complexes*, Van Nostrand University Series in Higher Mathematics, 1970.
- [MT14] J. Maher, G. Tiozzo, *Random walks on weakly hyperbolic groups*, (2014) preprint arXiv:1410.4173.
- [VM08] А. М. Вершик, А. В. Малютин, *Граница группы кос и нормальная форма Маркова–Ивановского*, Изв. РАН. Сер. матем. **72**(6) (2008), 105–132.
- [MNS12] A. Malyutin, T. Nagnibeda, D. Serbin, *Boundaries of \mathbb{Z}^n -free groups*, (2012) preprint arXiv:1211.3226.
- [Mal13] А. В. Малютин, *О группах, действующих на дендронах*, Зап. научн. сем. ПОМИ, том 415, стр. 62–74, 2013 г.
- [Mal14] А. В. Малютин, *Преддеревья и топология теней*, Алгебра и анализ, **26**:2 (2014), 45–118.
- [MS14] A. Malyutin, P. Svetlov, *Poisson–Furstenberg boundaries of fundamental groups of closed 3-manifolds*, (2014) preprint arXiv:1403.2135
- [Mar91] G. A. Margulis, *Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [Min15] A. Minasyan, *New examples of groups acting on real trees*, Journal of Topology, (2015), 1–22.
- [MS77] T. B. Muenzenberger, R. E. Smithson, *Semilattice structures on dendritic spaces*, Top. Proc. 2, no 1 (1977) pp. 243–260.
- [MSW82] T. B. Muenzenberger, R. E. Smithson, L. E. Ward, Jr., *Characterizations of arboroids and dendritic spaces*, Pacific J. Math. **102** (1982), 107–121.
- [New39] M. H. A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge University Press, Cambridge, 1939.
- [Nik89] J. Nikiel, *Topologies on pseudo-trees and applications*, Memoires Amer. Math. Soc. **82**, N. 416 (1989).
- [Par67] K. R. Parthasarathy, *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press, New York - London, 1967.
- [Pea74] B. J. Pearson, *Concerning the structure of dendritic spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **15**:2 (1974), 293–305.

- [vMW81] J. van Mill, E. Wattel, *Dendrons*, in “Topology and order structures”, Part 1, Math. Centre Tracts, vol. **142**, Math. Centrum, Amsterdam, 1981, pp. 59–81.
- [War75] L. E. Ward, Jr., *Recent developments in dendritic spaces and related topics*, Studies in topology (Proc. Conf., Univ. North Carolina, Charlotte, N.C., 1974; dedicated to Math. Sect. Polish Acad. Sci.), Academic Press, New York, 1975, pp. 601–647.
- [War80] L. E. Ward, Jr., *Axioms for cutpoints*, General topology and modern analysis (Proc. Conf., Univ. California, Riverside, Calif., 1980), Academic Press, New York, 1981, pp. 327–336.
- [Why42] G. T. Whyburn, *Analytic topology*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 28, Providence, 1942 (reprinted with corrections 1971).
- [Woe00] W. Woess, *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 138, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.