

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

Дифракция на вытянутом теле

В. Б. Филиппов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

E-mail: vbph@mail.ru
Декабрь, 2015

В работе предлагается метод для получения асимптотики для задачи дифракции на теле, размеры которого малы по сравнению с длиной волны падающего поля в поперечном направлении и велики в продольном. Рассматривается случай задачи Дирихле. В явном виде получены выражения для тока и диаграммы направленности в главном приближении.

Ключевые слова: дифракция, задача Дирихле, краевая задача для уравнения Гельмгольца, асимптотика ток, диаграмма направленности.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, А. А. Иванов, Л. Ю. Колотилина, В. Н. Кублановская, Г. В. Кузьмина,
П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецевтаев, С. И. Репин,
Г. А. Серегин, В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

1 Введение

Рассмотрим задачу дифракции лучевого поля на идеальноотражающем теле Ω . Для определенности рассмотрим случай задачи Дирихле:

$$(\Delta + k^2)u = 0 \quad \text{in } R^3/\Omega \quad (1)$$

$$u = 0 \quad \text{on } S \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o\left(\frac{1}{r}\right) \text{ for } r \rightarrow \infty \quad (3)$$

где S граница тела Ω

Будем считать, что размеры тела малы по сравнению с длиной волны в поперечном направлении и велики в продольном направлении, т.е.

$$ka \gg 1 \quad (4)$$

$$kd \ll 1 \quad (5)$$

где k волновое число падающего поля, $2a$ длина тела, d максимальный диаметр поперечного сечения.

Будем считать, что падающее поле является плоской волной

$$u^{inc} = \exp(i\mathbf{kx})$$

где $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ - волновой вектор, $\mathbf{x} \in R^3/\Omega$.

Известно, что значение волнового поля u выражается через значение тока $\Psi()$ на границе тела:

$$u(\mathbf{x}) = u^{inc}(\mathbf{x}) - c \int_S \frac{\exp ikR}{R} \Psi(\mathbf{x}') dS \quad (6)$$

где $R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$,

$$\Psi() = \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{n=0}$$

ток на границе тела, $c = 1/2\pi$.

Неизвестный пока ток Ψ может быть найден из интегрального уравнения:

$$u^{inc}(\mathbf{x}) = c \int_S \frac{\exp ikR}{R} \Psi(\mathbf{x}') dS \quad (7)$$

где $\mathbf{x} \in S$.

2 Асимптотика тока

Интегральное уравнение (7) допускает точное решение лишь для простейших случаев, когда граница тела имеет простую геометрическую форму (круговой бесконечный цилиндр, шар и т.д.), поэтому особую важность приобретают асимптотические методы для вычисления тока. Возможно получение асимптотики в случае, когда размеры тела малы (длинноволновая асимптотика) или велики (коротковолновая асимптотика) по сравнению с длиной волны падающего поля. Возможен ещё третий случай, когда асимптотика может быть получена в явном виде, а именно случай, когда выполняются условия (4,5). В работе рассматривается именно этот случай. Итак, считаем, что выполнены условия (4,5). Будем также

предполагать, что поверхность тела является гладкой (производные ограничены и изменяются не слишком быстро) поверхностью вращения.

Разобъем интеграл в (7) на три слагаемых в соответствии с формулой:

$$\frac{\exp(ikR)}{R} = \frac{1}{R} + i\frac{\sin(kR)}{R} - \frac{1 - \cos(kR)}{R} \quad (8)$$

Тогда интегральное уравнение (7) запишется в следующем виде:

$$u^{inc}(\mathbf{x}) = c \left[\int_S \frac{1}{R} \Psi(\mathbf{x}') dS + i \int_S \frac{\sin(kR)}{R} \Psi(\mathbf{x}') dS - \int_S \frac{1 - \cos(kR)}{R} \Psi(\mathbf{x}') dS \right] \quad (9)$$

Введем декартовы координаты так, чтобы ось z была направлена вдоль оси вращения, а оси x и y соответственно поперек. Тогда на границе S будут выполняться условия:

$$|z| < a, \quad |x| < d, \quad |y| < d$$

Имеем:

$$u^{inc}(\mathbf{x}) = \exp(ik\mathbf{x}) = \exp(ik_3 z)[1 + O(kd)] \quad (10)$$

Введем два коэффициента для продольного и поперечного масштабов:

$$M = ka, \quad \varepsilon = kd \quad (11)$$

В дальнейшем будет показано, что первый член в правой части интегрального уравнения (9) является основным и дает главный член в асимптотике тока.

Рассмотрим интегральное уравнение:

$$\exp(ik_3 z) = c \int_S \frac{1}{R} \Psi(\mathbf{x}') dS \quad (12)$$

Очевидно, что функция $\Psi()$ является производной по нормали на границе решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } R^3 / \Omega \quad (13)$$

$$u = 0 \quad \text{on } S \quad (14)$$

Предположим, что точка наблюдения находится не слишком близко к вершинам тела:

$$k(a - |z|) \gg kd \quad (15)$$

Обозначим через $S_0(z)$ бесконечный цилиндр с сечением равным сечению границы в точке z . Рассмотрим интегральное уравнение:

$$\exp(ik_3 z) = c \int_{S_0(z)} \frac{1}{R} \Psi_0(\mathbf{x}') dS \quad (16)$$

Ток Ψ_0 есть производная по нормали решения задачи (13,14) с границей $S_0(z)$. Его мы получим, как предел решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца при $k\rho \rightarrow 0$. Это решение известно:

$$u(r, \varphi) = e^{k_3 z} \sum_{m=0}^{\infty} [J_m(k' r) - \frac{J_m(k' \rho)}{H_m^{(1)}(k' \rho)} H_m^{(1)}(k' r)] \cos(m\varphi) \quad (17)$$

где k' - поперечное волновое число $k' = \sqrt{k^2 - k_3^2}$.

Очевидно, что в главном приближении решение не будет зависеть от φ , т.е нам понадобится только слагаемое при $m = 0$. При $|x| \ll 1$ имеем:

$$J_0(x) = 1 + O(x)$$

$$H_0^{(1)}(x) \sim \frac{2i}{\pi} \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Тогда из (17) получим:

$$u(r, \varphi) \sim e^{ik_3 z} \left[1 - \frac{\ln(k' r)}{\ln(k' \rho)} \right]$$

Отсюда для тока в главном приближении получаем формулу:

$$\Psi_0(s) = \left[\frac{\partial u}{\partial r} \right]_{r=\rho} \sim e^{ik_3 z} \frac{1}{\rho \ln(k' \rho)} \quad (18)$$

Очевидно, что при выполнении условий (4,5) и (15) решение интегрального уравнения (12) в главном приближении будет совпадать с решением уравнения (16).

2 В случае, когда точка наблюдения приближается к одной из вершин тела формула (18) для тока перестает выполняться. Рассмотрим этот случай отдельно. Асимптотика тока может быть получена, как предельное выражение для задачи дифракции на параболоиде вращения, когда $ka \rightarrow \infty$ и точка наблюдения близка к вершине $(0, 0, -a)$. Пусть имеется параболоид, заданный уравнением:

$$x^2 + y^2 - 2bz - b^2 = 0$$

здесь и далее будем писать z вместо $z + a - b$. Введем растянутые параболические координаты (u, v, φ) . Декартовы координаты выражаются через них следующим образом:

$$x = \frac{1}{k} \sqrt{uv} \cos(\varphi), \quad y = \frac{1}{k} \sqrt{uv} \sin(\varphi), \quad z = \frac{1}{k}(u - v) \quad (19)$$

Область, в которой рассматривается задача определяется условиями

$$v > v_0 = kb, \quad 0 < u < \infty$$

Известно, что задача Дирихле для уравнения Гельмгольца на параболоиде допускает разделения переменных и может быть получено точное решение в виде кратных рядов или интегралов от некоторых специальных функций, поведение которых изучалось в литературе. Воспользуемся некоторыми формулами. Пусть:

$$\hat{u} = U(u)V(v)e^{is\varphi} \quad (20)$$

Функции U, V являются решениями следующих обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$u \frac{d^2 U}{du^2} + \frac{dU}{du} - \left(\frac{u}{4} - \frac{s^2}{4u} + \frac{t}{2} \right) U = 0 \quad (21)$$

$$v \frac{d^2 V}{dv^2} + \frac{dV}{dv} - \left(\frac{v}{4} - \frac{s^2}{4v} - \frac{t}{2} \right) V = 0 \quad (22)$$

где t параметр разделения.

Для того чтобы построить решение задачи (1-3) в параболических координатах следует сначала представить падающее поле в виде разложения по функциям, представляющим решения уравнений (21,22). Мы рассматриваем случай, когда падающее поле является плоской волной:

$$u^{inc} = e^{ik(x \sin \delta + z \cos \delta)} = e^{\frac{1}{2}(u-v) \cos \delta + \sqrt{uv} \sin \delta \cos \varphi} \quad (23)$$

В [1] приводится это разложение:

$$u^{inc} = \frac{1}{2\pi \sin \delta} \int_{-\infty}^{\infty} [\psi(u, 0, t) \psi(v, 0, -t) + 2 \sum_{s=1}^{\infty} i^s \psi(u, s, t) \psi(v, s, -t) \cos(s\varphi)] (\operatorname{tg} \frac{\delta}{2})^{it} dt \quad (24)$$

где функция $\psi(u, s, t)$ решение уравнения (21) конечное при $u = 0$

$$\psi(u, s, t) = \Gamma(\frac{s+1+it}{2}) \xi(u, s, t) \quad (25)$$

$$\xi(u, s, t) = \frac{u^{\frac{s}{2}} e^{-i\frac{u}{2}}}{\Gamma(\frac{su}{2}) \Gamma(\frac{s+1-it}{2})} \int_0^1 e^{iuz} z^{\frac{s-1+it}{2}} (1-z)^{\frac{s-1-it}{2}} dz \quad (26)$$

Решение задачи Дирихле для параболоида вращения выглядит следующим образом:

$$\hat{u}(u, v, \varphi) = \frac{1}{2\pi \sin \delta} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} c_s \psi(u, s, t) [\psi(v, s, -t) - \frac{\psi(v_0, s, -t)}{\zeta_1(v_0, s, -t)} \zeta_1(v, s, -t)] \cos(s\varphi) (\operatorname{tg} \frac{\delta}{2})^{it} dt \quad (27)$$

где $c_s = 1$ для $s = 0$ и $c_s = 2$ для $s > 0$,

функция $\zeta_1(u, s, t)$ есть решение уравнения (21), имеющее при больших u множитель $\exp(iu/2)$, это решение может быть выражено через решение $\xi(u, s, t)$ уравнения (21), регулярное при $u = 0$

$$\zeta_1(u, s, t) = \frac{i\pi}{\sin(s\pi)} e^{-t\frac{\pi}{2}} \left[\frac{e^{-i\frac{s\pi}{2}}}{\Gamma(\frac{-s+1-it}{2})} \xi(u, s, t) - \frac{1}{\Gamma(\frac{s+1-it}{2})} \xi(u, -s, t) \right] \quad (28)$$

Напомним, что мы занимаемся нахождением асимптотики задачи (1-3), когда выполняются условия (4,5), т.е., когда тело имеет сильно вытянутую форму. Мы хотим найти ток на границе вблизи вершины тела и для этой цели мы рассматриваем задачу дифракции на параболоиде вращения как модельную. Для того, чтобы понять характер поведения тока вблизи вершины, нам надо изучить решение (28) при малых u . Разлагая экспоненту в (26) в ряд по степеням, получим следующее представление для функции $\xi()$

$$\xi(u, s, t) = e^{-i\frac{u}{2}} u^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\Gamma(s+1)} F\left(\frac{s+1+it}{2}, s+1, iu\right); \quad (29)$$

где $F()$ - вырожденная гипергеометрическая функция

$$F(\alpha, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{x}{1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \dots; \quad (30)$$

Получим оценку для функции $\psi(u, s, t)$ при малых u . Заметим, что в первом приближении ток не будет зависеть от φ и следовательно можно ограничиться первым членом в (27) при $s = 0$. Из (25) и (26) получаем следующую оценку для функции $\psi(u, 0, t)$

$$\psi(u, 0, t) = \frac{e^{-i\frac{u}{2}}}{\Gamma(\frac{1+it}{2})} \left[1 + \frac{1+it}{2} iu + O((tu)^2) \right] \quad (31)$$

Чтобы получить оценку для функции $\zeta_1(u, s, t)$ при малых u воспользуемся формулой (28). Когда $s \rightarrow 0$ возникает неопределенность типа 0/0. Разложим функции, входящие в (28) в ряд по степеням s с сохранением двух первых членов. Для функции $\xi(u, 0, t)$ из (26) получаем:

$$\xi(u, s, t) = e^{-i\frac{u}{2}} u^{\frac{s}{2}} \frac{1}{\Gamma(s+1)} [1 + \frac{s+1+it}{2(s+1)} iu + O((tu)^2)] \quad (32)$$

Имеем:

$$\Gamma(x+s) = \Gamma(x) + \Psi(x)s + O(s^2) \quad (33)$$

где $\Psi()$ - пси-функция Эйлера ($\Psi(1) = -C$ постоянная Эйлера). Тогда из (28) и (32) получаем:

$$\zeta_1(u, s, t) = [\ln(\frac{u}{2}) - C + \frac{tu}{2}] \psi(u, 0, t) \Psi(\frac{1+it}{2}) + O(s) \quad (34)$$

Нам нужно выражение для тока на границе.

Из (27) находим:

$$\Psi_0(u, v) = [\frac{\partial \hat{u}}{\partial v}]_{v=v_0} \sim \frac{1}{2\pi \sin \delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(u, 0, t)}{\zeta_1(v_0, 0, -t)} W(\psi, \zeta_1)_{v=v_0} (tg \frac{\delta}{2})^{it} dt \quad (35)$$

где

$$W(\psi, \zeta_1) = \frac{\partial}{\partial v} \psi(v, 0, t) \zeta_1(v, 0, -t) - \psi(v, 0, t) \frac{\partial}{\partial v} \zeta_1(v, 0, t) \quad (36)$$

Получим оценку для Вронскиана функций $\psi(), \zeta_1()$, для этого воспользуемся асимптотическими формулами, справедливыми для больших t

$$\psi(u, 0, t) \sim \Gamma(\frac{1+it}{2}) J_0(\sqrt{2ut}); \quad (37)$$

$$\zeta_1(u, 0, t) \sim \frac{\pi e^{-t\frac{\pi}{2}}}{\Gamma(\frac{1-it}{2})} H_0^{(1)}(\sqrt{2ut}); \quad (38)$$

Учитывая (31) и (34), а также, что

$$\frac{d}{dz} J_0(z) = -J_1(z) \quad (39)$$

$$\frac{d}{dz} H_0^{(1)}(z) = -H_1^{(1)}(z) \quad (40)$$

$$J_0(z) H_1^{(1)}(z) - J_1(z) H_0^{(1)}(z) = -\frac{2i}{\pi z} \quad (41)$$

$$\Gamma(\frac{1}{2} + iz) \Gamma(\frac{1}{2} - iz) = \frac{\pi}{\cosh \pi z} \quad (42)$$

для Вронскиана получим следующую оценку:

$$W(\psi, \zeta_1) \sim \Gamma^2(\frac{1+it}{2}) [J_0'(\sqrt{2tv}) H_0^{(1)}(\sqrt{2tv}) - J_0(\sqrt{2tv}) H_0^{(1)'}(\sqrt{2tv})] \sqrt{\frac{t}{2v}} = \Gamma^2(\frac{1+it}{2}) \frac{\sqrt{t}}{\pi v} \quad (43)$$

Видно, что интеграл (35) быстро сходится, поскольку подынтегральное выражение экспоненциально убывает при $t \rightarrow \infty$.

Тогда, учитывая (31) и (34) при малых u получим следующую оценку для тока на границе:

$$\Psi_0(u) \sim e^{ik_3 z} \frac{c}{kv \ln(kv)} \quad (44)$$

где $v = v_0 = kb$ -приведенное фокусное расстояние параболоида, c - постоянная.

3. Покажем, что второй и третий члены в (9) дают поправки к главному значению для тока, определяемому формулами (18) и (44). Сначала предположим, что точка наблюдения не близка к вершинам тела, тогда, подставляя выражение (18) в (9), получим:

$$\int_S \frac{\sin(kR)}{R} \Psi_0(\mathbf{x}') dS = \frac{2\pi}{\ln\rho} \int_{-a}^a e^{ik_3 z'} \frac{\sin(k|z-z'|)}{|z-z'|} dz' = \frac{c_1}{\ln(k\rho)} \quad (45)$$

Рассмотрим третий интеграл а (9):

$$\int_S \frac{1-\cos(kR)}{R} \Psi_0(\mathbf{x}') dS \frac{2\pi}{\ln\rho} \sim \int_{-a}^a e^{ik_3 z'} \frac{1-\cos(k|z-z'|)}{|z-z'|} dz' = \frac{c_2}{\ln(k\rho)} \quad (46)$$

Аналогичные оценки можно получить и для случая, когда точка наблюдения приближается к вершине тела. Таким образом мы видим, что второй и третий члены в (9) будут поправочными.

3 Диаграмма направленности

Зная асимптотику тока, можно найти асимптотику диаграммы направленности. Как и прежде возьмем декартову систему координат с вершиной в области Ω , так что на границе выполняются условия

$$|z| < a, |x| < \rho, |y| < \rho$$

Возьмем точку наблюдения достаточно далеко от тела Ω

$$\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

Вторую точку \mathbf{x} возьмем на границе тела. Расстояние между точками будет равно:

$$R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

Учитывая условия (4,5), для приведенного расстояния kR при $kR \gg 1$ получим разложение:

$$kR = kR_0 + kz \cos\gamma + kx \cos\alpha + ky \cos\beta + \frac{kz^2}{2R_0} + \dots \quad (47)$$

где α, β, γ соответственно углы между направлением падающего поля и осями x, y, z

Рассеянное поле вне тела Ω при $kR \gg 1$ определяется диаграммой направленности $A(\theta, \varphi)$.

$$u^{sc} = u - u^{inc} \sim \frac{e^{ikR_0}}{R_0} A(\theta, \varphi) \quad (48)$$

Заменяя kR на выражение (47) и учитывая (6), получим:

$$A(\theta, \varphi) = \int_S e^{ikz'} \Psi(\mathbf{x} dS) \quad (49)$$

В предыдущей главе было показано, что ток для задачи (1-3) в главном приближении совпадает с током для задачи (13,14)

$$A() = \int_S e^{ikz' \cos \gamma} \Psi_0(\mathbf{x}') dS \quad (50)$$

где функция $\Psi_0()$ определяется формулой (18) вне окрестности вершин и формулой (44) в окрестности вершин. Имеем:

$$A() \sim \int_S e^{ikz' (\cos \gamma + \cos \delta)} F() dS \quad (51)$$

Главный вклад в интеграл дает случай, когда направление наблюдения совпадает с направлением отраженного луча, т.е. когда

$$\cos \gamma = -\cos \delta \quad (52)$$

В этом случае мы получаем :

$$A() \sim A_0 = \int_S F() dS \quad (53)$$

Величина A_0 определяется геометрией тела и в случае гладкой границы в главном приближении определяется формулой:

$$A_0 \sim \int_{-a}^a \ln^{-1}(k\rho(z)) dz \quad (54)$$

где $\rho(z)$ радиус кривизны поперечного сечения границы в точке $(0, 0, z)$

Найдем краевую волну, например от вершины $(0, 0, -a)$

В предыдущей главе мы рассматривали вопрос получения тока, когда точка приближается к вершине тела на примере выраждающегося параболоида вращения. Получим для этого случая выражение для краевой волны. Для этого воспользуемся параболическими координатами (19). Получим выражение для элемента площади в этих координатах:

$$dS = \sqrt{EG - F^2} \quad (55)$$

где

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{v}{u} + 1 \right) \quad (56)$$

$$G = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 + z_\varphi^2 = \frac{uv}{k^2} \quad (57)$$

$$F = x_u x_\varphi + y_u y_\varphi + z_u z_\varphi = 0 \quad (58)$$

Тогда из (49), учитывая (18,44) и (56,57), получим:

$$A() \sim I_1 + I_2 \quad (59)$$

$$I_1 = \frac{e^{-\frac{1}{2}iv \cos \delta}}{2kv \ln(v)} \int_{S_1} e^{\frac{1}{2}iu(\cos \gamma + \cos \delta)} \sqrt{\left(\frac{v}{u} + 1 \right) uv} du d\varphi \quad (60)$$

$$I_2 = \int_{S_2} e^{iz(\cos \gamma + \cos \delta)} \Psi_0() dS \quad (61)$$

где S_1 часть поверхности на которой выполняется условие $u \ll 1$, S_2 -остальная часть границы. Заметим, что здесь и далее $v = v_0 = kb$ где b фокусное расстояние параболоида и ввиду (5) выполняется условие $kb \ll 1$.

Рассмотрим первый интеграл (60). Подинтегральное выражение не зависит от φ Беря интеграл по φ , получим для него следующее выражение:

$$I_1 = \frac{\pi e^{-\frac{1}{2}iv \cos \delta}}{k \ln(v)} \int_0^U e^{i\frac{u}{2}(\cos \gamma + \cos \delta)} \sqrt{1 + uv} du \quad (62)$$

где U - величина удовлетворяет условию $U \ll 1$. Очевидно, что для интеграла I_1 имеет место оценка:

$$I_1 = O\left(\frac{U}{k}\right) \ll 1 \quad (63)$$

Рассмотрим второй интеграл (61). Поскольку область отдалена от вершины для тока можно воспользоваться формулой (18). Тогда, учитывая что:

$$dS \sim \rho(z) d\varphi dz \quad (64)$$

и беря интеграл по φ получим:

$$I_2 \sim 2\pi \int_0^{2a} e^{ikz(\cos \gamma + \cos \delta)} \frac{1}{\ln k\rho(z)} dz \quad (65)$$

Поскольку имеет место условие $ka \gg 1$, интеграл (65) асимптотически совпадает со следующим интегралом:

$$I_2 \sim 2\pi \int_0^{2a} e^{-kz(\cos \gamma + \cos \delta)} \frac{1}{\ln(k\rho(z-a))} dz \quad (66)$$

Если угол наблюдения не близок к направлению отраженного луча, значение интеграла определяется следующей величиной:

$$I_2 \sim \frac{2\pi}{k(\cos \gamma + \cos \delta)} B_1 \quad (67)$$

где

$$B_1 = k\sigma \int_0^{2a} e^{-kz\sigma} \frac{1}{\ln(k\rho(z-a))} dz; \quad (68)$$

величина, определяемая геометрией тела, $\sigma = \cos \gamma + \cos \delta$. Можно показать, что для гладких тел величина B_1 имеет оценку $B_1 \ll 1$. Таким образом диаграмма направленности краевой волны определяется формулой:

$$A_1 \sim \frac{2\pi}{k(\cos \gamma + \cos \delta)} B_1 \quad (69)$$

Если сравнить эту величину с величиной диаграммы направленности, соответствующей отраженной волне (54), то видим, что она будет в ka раз меньше.

Список литературы

1. В. А.Фок, *Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн*. Советское радио. Москва. 1970.