ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ - 10/ 2015

Линейная задача, возникающая при изучении задачи магнитной гидродинамики со свободной границей для двух жидкостей

Е.В. Фролова

Санкт-Петербургский Государственный
Электротехнический Университет
elenafr@mail.ru

Декабрь, 2015

Аннотация

Рассматривается линейная задача сопряжения для магнитного поля. Такая задача возникает при линеаризации задачи со свободной границей для двух жидкостей. Доказана однозначная разрешимость в пространствах Соболева-Слободецкого.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, линейная задача сопряжения, пространства Соболева.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

[1]

1 Постановка задачи со свободной границей

Рассматривается задача магнитной гидродинамики в ограниченной области $\Omega \subset R^3$. Задача описывает движение ограниченного объема вязкой несжимаемой жидкости внутри другой вязкой несжимаемой жидкости под действием магнитного поля. Граница раздела жидкостей также подлежит определению. Предположим, что область Ω_{1t}, заполненная жидкостью с плотностью d_1 и вязкостью ν_1 окружена областью Ω_{2t}, заполненной жидкостью с плотностью d_2 и вязкостью ν_2. Граница области Ω_{2t} состоит из двух непересекающихся замкнутых поверхностей - свободной границы Γ_t и внешней фиксированной границы $S = \partial\Omega$. Предполагается, что поверхность Γ_0, задающая положение свободной границы в начальный момент времени и S гомеоморфны сфере, $dist\{\Gamma_0, S\} \geq \delta > 0$.

Задача ставится следующим образом: при $t > 0$ надо найти границу Γ_t разделяющую жидкости, поле скоростей жидкости $\mathbf{v^{(i)}}$, давление $p^{(i)}$ и напряженность магнитного поля $\mathbf{H^{(i)}}$ в каждой из областей из следующей системы уравнений.

Уравнения в Ω_{it}

$$\begin{gathered}
\mathbf{v^{(i)}}_t + (\mathbf{v^{(i)}} \cdot \nabla)\mathbf{v^{(i)}} - \nabla \cdot T(\mathbf{v^{(i)}}, p) - \nabla \cdot T_M(\mathbf{H^{(i)}}) = 0, \\
\mu_i \mathbf{H^{(i)}}_t + \alpha_i^{-1} rotrot\mathbf{H^{(i)}} - \mu_i rot(\mathbf{v^{(i)}} \times \mathbf{H^{(i)}}) = 0, \\
\nabla \cdot \mathbf{v^{(i)}} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{H^{(i)}} = 0,
\end{gathered}$$

μ_i, - магнитная проницаемость, ν_i - вязкость, α_i - проводимость, d_i - плотность, $T_M(\mathbf{H}) = \mu(\mathbf{H} \otimes \mathbf{H} - \frac{1}{2} I |\mathbf{H}|^2)$ - магнитный тензор напряжений.

$$T(\mathbf{v}, p) = -\frac{1}{d_i} pI + \nu S(\mathbf{v})$$

тензор напряжений,

$$S(\mathbf{v}) = \nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T = \Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big)_{i,j=1,2,3}$$

.

Краевые условия на свободной границе

$$\begin{gathered}
\big([T(\mathbf{v}, p)] + [T_M(\mathbf{H})]\big)\mathbf{n} = \sigma\mathbf{n}\mathcal{H}, \\
\mathbf{V}_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, \qquad [\mathbf{v}] = 0, \\
[\tfrac{1}{\alpha} rot_\tau \mathbf{H}] = [\mu\mathbf{v} \times \mathbf{H}]_\tau \\
[\mu\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau] = 0, \quad x \in \Gamma_t,
\end{gathered}$$

[1]Работа поддержана грантом РФФИ 14-01-00534.

здесь σ - коэффициент поверхностного натяжения, $\mathcal{H}$ - удвоенное значение средней кривизны поверхности Γ_t, $\mathbf{V}_n$ - скорость движения поверхности Γ_t в направлении нормали $\mathbf{n}$ к Γ_t, внешней по отношению к области Ω_{1t}. Через $rot_\tau \mathbf{H}$ обозначена касательная составляющая ротора. Условие на скачок касательной составляющей ротора является следствием того, что на границе различных сред касательная составляющая вектора электрической напряженности непрерывна. Предполагается, что $\nu, \alpha, d, \sigma, \mu$ положительные постоянные.

Краевые условия на известной границе S Предполагаем, что поверхность S - идеальный проводник

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad rot_\tau \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{v} = 0, \quad x \in S,$$

Начальные условия

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \quad x \in \Omega_{10} \cup \Omega_{20},$$
$$\mathbf{H}(x, 0) = \mathbf{H}_0(x), \quad x \in \Omega_{10} \cup \Omega_{20}.$$

В [1], [2] исследовалась задача о движении изолированной массы вязкой несжимаемой электропроводящей жидкости, окруженной ограниченной областью вакуума. В частности, в [1] доказана локальная (по времени) разрешимость в пространствах Соболева - Слободецкого. При условии малости начальных данных и близости начального положения свободной границы к сфере, в [2] доказана разрешимость этой задачи на неограниченном интервале времени. Преобразование координат переводящее задачу со свободной границей в задачу в фиксированной области в работе [2] несколько отличается от использованного в [1]. Это вызвано необходимостью следить за смещением центра тяжести жидкости. Имея в виду последующее доказательство разрешимости на неограниченном интервале времени и для задачи о движении двух жидкостей разделенных свободной поверхностью в магнитном поле, также предположим, что в начальный момент времени свободная поверхность близка к сфере. Будем учитывать возможное смещение центра тяжести внутренней жидкости. Предположим, что

$$\Gamma_0 = \{x = y + \mathbf{N}(y)\rho_0(y), \quad y \in S_{R_0}\},$$

где S_{R_0} - сфера радиуса R_0,

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 = |\Omega_{10}|,$$

$\mathbf{N}(y) = \frac{y}{|y|}$ - внешняя нормаль к сфере, ρ_0 - заданная функция. Плотность жидкости в области Ω_{1t} будем считать равной 1. Функция

$$\xi(t) = \frac{1}{|\Omega_0|} \int\limits_{\Omega_{1t}} x dx = \frac{1}{|\Omega_0|} \int\limits_0^t \left(\int\limits_{\Omega_{1\tau}} \mathbf{v}(x, \tau) dx \right) d\tau,$$

определяет положение центра тяжести внутренней жидкости в момент времени t.

Будем искать свободную границу Γ_t в виде

$$\Gamma_t = \{x = y + \mathbf{N}(y)\rho(y,t) + \boldsymbol{\xi}(t), \quad y \in S_{R_0}\},$$

где $\rho(y,t)$, $\xi(t)$ - неизвестные функции.

Воспользуемся преобразованием координат

$$x = y + \mathbf{N}^*(y)\rho^*(y,t) + \chi(y)\xi(t) \equiv e_{\rho,\xi}(y), \quad y \in \Omega, \tag{1.1}$$

где $\chi(y)$ гладкая неотрицательная функция, равная единице в окрестности сферы S_{R_0} и обращающаяся в ноль в некоторой окрестности поверхности S. Через $\mathbf{N}^*(y)$, $\rho^*(y,t)$ обозначены продолжения с сохранением класса $\mathbf{N}$ и ρ с S_{R_0} в Ω, причем $\rho^*(y,t) = 0$ в некоторой окрестности поверхности S.

Преобразование (1.1) переводит задачу со свободной границей в нелинейную задачу в области $\Omega = \mathcal{F}_1 \cup S_{R_0} \cup \mathcal{F}_2$. где $\mathcal{F}_1$ - шар с границей S_{R_0}, $\mathcal{F}_2 = \Omega \setminus \overline{\mathcal{F}}_1$; $\partial\mathcal{F}_2 = S \cup S_{R_0}$.

Выделим линейную часть в этой задаче. Как и в случае движения жидкости в вакууме, линейная часть распадается на две задачи - магнитную и гидродинамическую. Гидродинамическая часть линейной задачи аналогична линеаризованной задаче о движении капли в потоке жидкости [3]. Докажем существование решения магнитной части.

2 Магнитная линейная задача

Рассмотрим магнитную часть задачи сопряжения, возникающую при линеаризации задачи в области с фиксированной границей, полученной после преобразавания (1.1).

$$\begin{gathered}
\mu_i \mathbf{H}_t^{(i)} + \frac{1}{\alpha_i} rot rot \mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)}, \quad \nabla \cdot \mathbf{H}^{(i)} = 0, \quad y \in \mathcal{F}_i, \\
[\mu \mathbf{H} \cdot \mathbf{N}]\Big|_{S_{R_0}} = 0, \quad [\mathbf{H}_\tau]\Big|_{S_{R_0}} = \mathbf{a}, \\
[\frac{1}{\alpha} rot_\tau \mathbf{H}]\Big|_{S_{R_0}} = \mathbf{g}, \\
\mathbf{H}^{(2)} \cdot \mathbf{n} = 0, \qquad rot_\tau \mathbf{H}^{(2)} = 0, \quad y \in S, \\
\mathbf{H}^{(i)}(y,0) = \mathbf{H}_0^{(i)}(y), \quad y \in \mathcal{F}_i.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Задача (2.1) сводится к задаче с $\mathbf{g} = 0,$, $\mathbf{a} = 0$ так же как в [1], где было построено решение вспомогательной задачи

$$\begin{gathered}
rot \mathbf{h}(y) = \mathbf{j}(y), \qquad \nabla \cdot \mathbf{h}(y) = 0, \qquad y \in \mathcal{F}_i, \\
[\mu \mathbf{h} \cdot \mathbf{n}]\Big|_{S_{R_0}} = 0, \quad [\mathbf{h}_\tau]\Big|_{S_{R_0}} = \mathbf{a}, \\
\mathbf{h} \cdot \mathbf{N}(y) = 0, \qquad y \in S.
\end{gathered}$$

Теорема 1. *Пусть в задаче (2.1)* $\mathbf{a} = 0$, $\mathbf{g} = 0$, $l \in [0, 1)$ *и выполняются следующие условия согласования*

$$\nabla \cdot \mathbf{f}^{(i)} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{H}_0^{(i)} = 0, \qquad y \in \mathcal{F}_i,$$
$$[\mu \mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{N}]\Big|_{S_{R_0}} = 0, \qquad [\mathbf{H}_{0\tau}]\Big|_{S_{R_0}} = 0, \qquad [\tfrac{1}{\alpha} rot_\tau \mathbf{H}_0]\Big|_{S_{R_0}} = 0, \qquad [\mathbf{f} \cdot \mathbf{N}]\Big|_{S_{R_0}} = 0$$
$$\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{n}\Big|_S = 0, \qquad rot_\tau \mathbf{H}_0^{(2)}\Big|_S = 0, \qquad \mathbf{f}^{(2)} \cdot \mathbf{n}\Big|_S = 0.$$

(Условие $\nabla \mathbf{f}^{(i)} = 0$ *предполагается выполненным в слабом смысле. Условия на касательную составляющую ротора на границе при* $t = 0$ *ставятся при* $l \geq 1/2$.*)*

Тогда задача (2.1) имеет единственное решение $\mathbf{H}^{(i)} \in W_2^{l+2,l/2+1}(Q_T^{(i)})$, $Q_T^{(i)} = \mathcal{F}_i \times [0, T]$, $i = 1, 2$. *Имеет место оценка*

$$\sum_{i=1}^{2} \| \mathbf{H}^{(i)} \|_{W_2^{l+2,l/2+1}(Q_T^{(i)})} \leq c \sum_{i=1}^{2} \Big(\| \mathbf{f}^{(i)} \|_{W_2^{l,l/2}(Q_T^{(i)})} + \| \mathbf{H}_0^{(i)} \|_{W_2^{l+1}(\mathcal{F}_i)} \Big) \tag{2.2}$$

Схема доказательства Теоремы 1.

Сначала доказывается существование слабого решения. Через $\mathcal{H}^1(\Omega)$, $\Omega = \mathcal{F}_1 \cup S_{R_0} \cup \mathcal{F}_2$ обозначим пространство соленоидальных векторных полей $\psi \in W_2^1(\mathcal{F}_i)$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих условиям

$$[\mu \psi \cdot \mathbf{N}]\Big|_{S_{R_0}} = 0, \qquad [\psi_\tau]\Big|_{S_{R_0}} = 0, \qquad (\psi \cdot \mathbf{n})\Big|_S = 0.$$

Обобщенным решением задачи (2.1) назовем

$$\mathbf{H} \in W_2^1(0, T; L_2(\Omega)) \cap L_2(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega)),$$

удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\begin{gathered}
\int_0^T \int_{\mathcal{F}_1} \mu_1 \mathbf{H}_t^{(1)} \cdot \psi dx dt + \int_0^T \int_{\mathcal{F}_2} \mu_2 \mathbf{H}_t^{(2)} \cdot \psi dx dt + \\
\int_0^T \int_{\mathcal{F}_1} \tfrac{1}{\alpha_1} rot \mathbf{H}^{(1)} \cdot rot \psi dx dt + \int_0^T \int_{\mathcal{F}_2} \tfrac{1}{\alpha_2} rot \mathbf{H}^{(2)} \cdot rot \psi dx dt = \\
\int_0^T \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \psi dx dt, \qquad \forall \psi \in L_2(0, T, \mathcal{H}^1(\Omega))
\end{gathered} \tag{2.3}$$

и начальным условиям.

Если существует классическое решение задачи (2.1), то оно удовлетворяет интегральному тождеству (2.3). Это можно показать, умножив первое уравнение в (2.1) скалярно на ψ и проинтегрировав по частям. Граничные интегралы обращаются в ноль вследствие условий

$$rot_\tau \mathbf{H}^{(2)}\Big|_S = 0, \qquad \frac{1}{\alpha_1} rot_\tau \mathbf{H}^{(1)}\Big|_{S_{R_0}} = \frac{1}{\alpha_2} rot_\tau \mathbf{H}^{(2)}\Big|_{S_{R_0}}.$$

Существование обобщенного решения доказывается методом Галеркина [4]. Для определения коэффициентов разложения $c_j(t)$ по ортонормированной системе векторов в $\mathcal{H}^1$ получается нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поскольку, если $\mathbf{H} \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, то

$$\sum_{i=1}^{2} \| \mathbf{H}^{(i)} \|_{W_2^1(\mathcal{F}_i)} \le c \sum_{i=1}^{2} \| rot\mathbf{H}^{(i)} \|_{L_2(\mathcal{F}_i)},$$

для обобщенного решения имеет место оценка

$$\| \mathbf{H}_t \|_{L_2(Q_T)} + \sum_{i=1}^{2} \| \mathbf{H}^{(i)} \|_{W_2^{1,0}(Q_T^{(i)})} \le \tag{2.4}$$

$$c \sum_{i=1}^{2} \left(\| \mathbf{f}^{(i)} \|_{L_2(Q_T^{(i)})} + \| \mathbf{H}_0^{(i)} \|_{W_2^1(\mathcal{F}_i)} \right).$$

Для оценки вторых производных решения будем решать задачу (2.1) в два этапа.

Обозначим $\zeta^{(i)} = \frac{1}{\alpha_i} rot\mathbf{H}^{(i)}$ и рассмотрим вспомогательную задачу

$$rot\mathbf{h}^{(i)} = \mathbf{f}^{(i)} - \mu_i \mathbf{H}_t^{(i)} = \mathbf{G}^{(i)}, \qquad y \in \mathcal{F}_i \tag{2.5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{h}^{(i)} = 0, \quad y \in \mathcal{F}_i, \qquad \mathbf{h}_\tau^{(2)}\Big|_S = 0, \qquad [\mathbf{h}_\tau]\Big|_{S_{R_0}} = 0, \qquad [\alpha \mathbf{h} \cdot \mathbf{N}]\Big|_{S_{R_0}} = 0.$$

Теорема 2. Если $\mathbf{G}^{(i)} \in W_2^r(\mathcal{F}_i)$ *и выполнены условия согласования*

$$\nabla \cdot \mathbf{G}^{(i)} = 0, \quad y \in \mathcal{F}_i, \qquad \mathbf{G}^{(2)} \cdot \mathbf{n}\Big|_S = 0, \qquad [\mathbf{G} \cdot \mathbf{N}]\Big|_{S_{R_0}} = 0,$$

(при $r < 1$ первое условие в слабом смысле) то задача (2.5) имеет единственное решение $\mathbf{h}^{(i)} \in W_2^{1+r}(\mathcal{F}_i)$. Для этого решения верна оценка

$$\sum_{i=1}^{2} \| \mathbf{h}^{(i)} \|_{W_2^{1+r}(\mathcal{F}_i)} \le c \sum_{i=1}^{2} \| \mathbf{G}^{(i)} \|_{W_2^r(\mathcal{F}_i)}.$$

Для доказательства единственности, покажем, что при $\mathbf{G}^{(i)} = 0$ задача имеет только тривиальное решение. Если $\mathbf{G}^{(i)} = 0$, то $\mathbf{h} = \nabla\phi$. ϕ является решением задачи

$$\triangle \phi^{(i)} = 0, \qquad x \in \mathcal{F}_i, \tag{2.6}$$

$$[\phi]\Big|_{S_{R_0}} = c_1, \qquad \phi\Big|_S = c_2, \qquad [\alpha \frac{\partial \phi}{\partial N}]\Big|_{S_{R_0}} = 0.$$

Значит ϕ кусочно-постоянна и $\mathbf{h}^{(i)} = \nabla\phi^{(i)} = 0$. Существование решения доказывается построением решения в виде суммы ротора от объемного потенциала и градиента гармонической функции, аналогично тому как это было сделано в [1], [2]. Вследствие интегрального тождества (2.3)

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (\mathbf{h} - \zeta) \cdot rot\psi dx dt = 0, \qquad \forall\psi \in L_2(0, T; \mathcal{H}^1(\Omega)).$$

Следовательно [4], $\mathbf{h} - \zeta = \nabla\phi$, где ϕ - решение (2.6). Значит $\mathbf{h} = \zeta = \frac{1}{\alpha} rot\mathbf{H}$.

Для $\mathbf{H}$ получаем задачу

$$\begin{gathered} rot\mathbf{H}^{(i)} = \alpha_i \zeta^{(i)}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{H}^{(i)} = 0, \qquad x \in \mathcal{F}_i, \\ [\mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{N}]\Big|_{S_{R_0}} = 0, \qquad [\mathbf{H}_\tau]\Big|_{S_{R_0}} = 0, \qquad \mathbf{H}\cdot\mathbf{n}\Big|_S = 0. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Теорема 3. ([1]) *Если* $\zeta^{(i)} \in W_2^{l+1}(\mathcal{F}_i)$ *и выполнены условия согласования*

$$\nabla\cdot\zeta^{(i)} = 0, \qquad x \in \mathcal{F}_i, \qquad [\alpha\zeta\cdot\mathbf{N}]\Big|_{S_{R_0}} = 0,$$

то задача (2.7) имеет единственное решение $\mathbf{H}^{(i)} \in W_2^{2+l}(\mathcal{F}_i)$ *и*

$$\sum_{i=1}^2 \| \mathbf{H}^{(i)} \|_{W_2^{l+2}(\mathcal{F}_i)} \le c \sum_{i=1}^2 \| \zeta^{(i)} \|_{W_2^{l+1}(\mathcal{F}_i)} .$$

С помощью Теоремы 2, Теоремы 3 ($l = 0$) и (2.4) получаем оценку вторых производных решения

$$\sum_{i=1}^2 \| \mathbf{H}^{(i)} \|_{W_2^{2,1}(Q_T^{(i)})} \le c \sum_{i=1}^2 \Big(\| \mathbf{f}^{(i)} \|_{L_2(Q_T^{(i)})} + \| \mathbf{H}_0^{(i)} \|_{W_2^1(\mathcal{F}_i)} \Big),$$

которая совпадает с (2.2) при $l = 0$. Дальнейшее повышение гладкости и доказательство оценки (2.2) при $l \in (0, 1)$ проводится по схеме предложенной в [1].

Список литературы

[1] М. Падула, В. А. Солонников , *О задаче магнитной гидродинамики со свободной границей.*- - Зап. научн. семин. ЛОМИ. **385**, (2010), 135-186.

[2] В. А. Солонников, Е. В. Фролова *Разрешимость задачи магнитной гидродинамики со свободной границей на бесконечном интервале времени.* - Зап. научн. семин. ЛОМИ. **410**, (2013), 131-167.

[3] И. В. Денисова, В. А. Солонников, *Разрешимость линеаризованной задачи о движении капли в потоке жидкости.* - Зап. научн. семин. ЛОМИ. **171**, (1989), 53-65.

[4] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости.* - Труды МИАН, **59** (1960), 115-173.

[5] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, *О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамаки.* - Зап. научн. семин. ЛОМИ. **38**, (1973), 46-93.