ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ 8/2015

Нижние оценки количества висячих вершин в остовных деревьях

Д. В. Карпов [1]

Российская Академия Наук
Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В.А. Стеклова
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27
E-mail: dvk@pdmi.ras.ru

Аннотация

Пусть G — связный граф на $n \geq 2$ вершинах, в котором длина наибольшей цепочки последовательно соединённых вершин степени 2 не превосходит k а обхват не менее g. Обозначим через $u(G)$ максимальное количество листьев в остовном дереве графа G. В работе доказано, что $u(G) \geq \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2$, где $\alpha_{g,1} = \frac{\left[\frac{g+1}{2}\right]}{4\left[\frac{g+1}{2}\right]+1}$ и $\alpha_{g,k} = \frac{1}{2k+2}$ при $k \geq 2$.

Приводятся бесконечные серии примеров, показывающих точность доказанных оценок.

Ключевые слова: остовное дерево, количество висячих вершин.

[1]Исследования выполнены при поддержке правительства РФ (грант 14.Z50.31.0030), гранта Президента РФ НШ-3856.2014.1 и гранта РФФИ 14-01-00156

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

PREPRINTS

of the St.Petersburg Department
of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение. Основные обозначения

В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер — через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Везде в работе графы не содержат петель и кратных рёбер.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G, минимальную степень вершины графа G, как обычно, обозначим через $\delta(G)$. Окрестность множества вершин $W \subset V(G)$ (то есть, множество всех вершин графа G, смежных хотя бы с одной вершиной из W) обозначим через $\mathrm{N}_G(W)$. Через $g(G)$ обозначим *обхват* графа G (то есть, длину его наименьшего цикла).

Определение 1. Для связного графа G обозначим через $u(G)$ максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G.

Замечание 1. Очевидно, что если F — дерево, то $u(F)$ — количество его висячих вершин.

Опубликовано несколько работ, в которых доказываются оценки снизу на $u(G)$. Так, в 1981 году Сторер [1] предположил, что $u(G) > \frac{1}{4}v(G)$ при $\delta(G) \geq 3$. В 1981 году Линиал высказал более сильную гипотезу: $u(G) \geq \frac{\delta(G)-2}{\delta(G)+1}v(G) + c$ при $\delta(G) \geq 3$, где константа $c > 0$ зависит только от $\delta(G)$. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \geq 3$ легко придумать бесконечную серию примеров графов с минимальной степенью d, для которых $\frac{u(G)}{v(G)}$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$. Таким образом, оценка из гипотезы Линиала асимптотически точна в тех случаях, когда она верна.

Для $d = 3$ и $d = 4$ утверждение гипотезы доказали Клейтман и Вест ([3], 1991), для $d = 5$ — Григгс и Ву ([4], 1996). В обеих работах применялся метод *мёртвых вершин.* С развитием этого метода для $d \geq 6$ есть значительные проблемы, дальнейших результатов на настоящий момент нет. Из работ [5, 6, 7] следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, для малых значений $d > 5$ вопрос остается открытым.

В ряде работ рассматриваются остовные деревья в классе графов с дополнительными ограничениями вида запрета на какой-то подграф. Больше всего работ посвящено изучению остовных деревьев в графах без K_4^- (полного подграфа на 4 вершинах без одного ребра). Сначала ([2], 1989) было доказано, что $u(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$ в связном кубическом графе без K_4^-. Позже Бонсма ([8], 2008) доказал две интересные оценки для связного графа с $\delta(G) \geq 3$: $u(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$ для графа без треугольников (то есть, с $g(G) \geq 4$) и $u(G) \geq \frac{2v(G)+12}{7}$ для графа без K_4^-.

Эти результаты не дают ответа на вопрос, как оценить количество висячих вершин в связном графе с вершинами степеней 1 и 2. Недавно появились работы, в которых наличие вершин степени 1 и 2 в графе не мешает построению остовного дерева с достаточно большим количеством висячих вершин. В работе [9] для связного графа G с $g(G) \geq 4$ и v_3 вершинами степени хотя бы 3 доказана оценка $u(G) \geq \frac{v_3+4}{3}$ (на самом деле, в теореме 1 из [9] эта оценка сформулирована и доказана для более широкого класса графов). В работе [11] для связного графа G с v_3 вершинами степени 3 и v_4 вершинами степени хотя бы 4 доказана оценка $u(G) \geq \frac{2v_4}{5} + \frac{2v_3}{15}$.

Д. В. Карпов и А. В. Банкевич [13] доказали для связного графа G, в котором $v(G) \geq 2$ и s вершин имеют степень, отличную от 2, оценку $u(G) \geq \frac{1}{4}(s-2)+2$. В аналогичных обозначения для графа с $g(G) \geq 4$ (то есть, без треугольников) А. В. Банкевич [8] доказал оценку $u(G) \geq \frac{1}{3}(s-2)+2$. Обе эти оценки точные, существуют бесконечные серии примеров, на которых они достигаются. Глядя на эти результаты можно высказать предположение $u(G) \geq \frac{g-2}{2g-2}((2g-2)(s-2)+2$, однако, в работе [8] показано, что при $g \geq 10$ это не так.

Нам потребуется еще одно обозначение.

Определение 2. Обозначим через $\ell(G)$ количество вершин в максимальной цепочке последовательно соединённых вершин степени 2 в графе G.

В работе [12] для связного графа G с $\ell(G) \leq k$ (где $k \geq 1$) доказана оценка $u(G) > \frac{1}{2k+4}v(G) + \frac{3}{2}$. Эта оценка также точна, что подтверждается бесконечной серией примеров. Мы докажем две оценки, учитывающие одновременно обхват графа и длину максимальной цепочки последовательно соединённых вершин степени 2.

Теорема 1. *Пусть G — связный граф, $v(G) \geq 2$, $g(G) \geq g \geq 4$, $\ell(G) \leq k$, где $k \geq 1$ — целое число. Тогда $u(G) \geq \alpha_{g,k}(v(G)-k-2)+2$, где*

$$\alpha_{g,k} = \begin{cases} \frac{\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1}{4(\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1)+1} & \text{при } k = 1; \\ \frac{1}{2k+2} & \text{при } k \geq 2. \end{cases}$$

2 Несколько лемм

В этом разделе мы сформулируем некобходимые нам леммы из работ [13] и [12]. Эти леммы помогут редуцировать доказательство оценок в теоремах 1 и 2 в случаях к случям меньших графов и собирать экстремальные примеры для наших оценок, как из деталей конструктора.

Наш метод использует теорию блоков и точек сочленения. Для удобства мы приведем определения основных понятий. Подробнее классические результаты о блоках и точках сочленения изложены в [10] и других книгах.

Определение 3. *Точкой сочленения* связного графа G называется любая его вершина, при удалении которой теряется связность.

Двусвязным графом называется непустой связный граф без точек сочленения.

Блок графа G – это его максимальный по включению подграф без точек сочленения.

Мост графа G – это ребро, не входящее ни в один цикл.

Определение 4. 1) Пусть даны два графа G_1 и G_2, в которых выделены вершины $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ соответственно, $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$. *Склеить* графы G_1 и G_2 по вершинам x_1 и x_2 значит склеить две вершины x_1 и x_2 в одну вершину x, которой будут переданы все выходящие из x_1 и x_2 рёбра обоих графов. Остальные вершины и рёбра графов G_1 и G_2 войдут в полученный при склейке граф без изменений (см. рисунок 1).

2) Для любого ребра $e \in E(G)$ определим граф $G \cdot e$, в котором концы ребра $e = xy$ склеены в одну вершину, которой переданы все инцидентные x и y рёбра. Будем говорить, что граф $G \cdot e$ получен из G в результате *стягивания ребра* e.

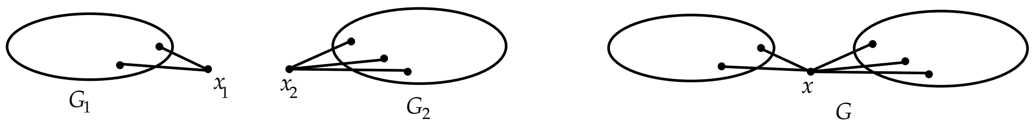

Рис. 1: Склеивание графов.

Замечание 2. 1) При стягивании мостов не образуется петель и кратных рёбер.

2) Пусть граф H получен из графа H' стягиванием нескольких мостов, не инцидентных висячим вершинам. Тогда, очевидно, $u(H) = u(H')$.

Следующая лемма — это лемма 1 из статьи [13].

Лемма 1. *Пусть G_1 и G_2 — связные графы с $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$, $v(G_1) \geq 2$, $v(G_2) \geq 2$ и висячими вершинами x_1 и x_2. Пусть G — граф,* *полученный из G_1 и G_2 склеиванием по вершинам x_1 и x_2 и последующим стягиванием $m'-1$ мостов, не инцидентных висячим вершинам. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $u(G) = u(G_1) + u(G_2) - 2$.

2) *Пусть*

$$u(G_1) \geq \alpha(v(G_1) - m) + 2, \quad u(G_2) \geq \alpha(v(G_2) - m) + 2 \quad \text{и } m' \geq m. \quad (1)$$

Тогда $u(G) \geq \alpha(v(G) - m) + 2$. Если все три неравенства из (1) обращаются в равенство, то $u(G) = \alpha(v(G) - m) + 2$.

Теперь приведем необходимые определения и формулировку леммы о расщеплении больших блоков из работы [12].

Определение 5. *Граница* блока B — это множество всех входящих в него точек сочленения графа G (обозначение: $\mathrm{Bound}(B)$). *Внутренность* блока B — это множество вершин $\mathrm{Int}(B) = V(B) \setminus \mathrm{Bound}(B)$. Вершины из $\mathrm{Int}(B)$ мы будем называть *внутренними вершинами* блока B.

Блок называется *пустым*, если у него нет внутренних вершин (то есть, $\mathrm{Int}(B) = \varnothing$.) Иначе блок называется *непустым*.

Блок B называется *большим*, если количество его внутренних вершин больше количества его граничных вершин (то есть, $|\mathrm{Int}(B)| > |\mathrm{Bound}(B)|$).

Лемма 2. *Пусть G — граф с более чем двумя вершинами. Тогда существует набор рёбер $F \subset E(G)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1° *граф $G - F$ связен;*

2° *у графа $G - F$ нет больших блоков;*

3° *если вершины x и y смежны в $G - F$ и $d_{G-F}(x) = d_{G-F}(y) = 2$, то $d_G(x) = d_G(y) = 2$.*

3 Доказательство теоремы 1

1. *Спуск*

Мы будем говорить, что граф G' *меньше* графа G если либо $u(G') < u(G)$, либо $u(G') = u(G)$ и $e(G') < e(G)$. В этой части мы разберём случаи, когда из утверждения теоремы 1 для всех меньших графов мы можем вывести утверждение для графа G.

Пусть *шип* — это неразветвлённое дерево (все невисячие вершины которого имеют степень 2), присоединённое ребром за одну из своих висячих вершин к точке сочленения a (которую мы назовём *основанием шипа*).

Назовём точку сочленения a графа G *несущественной*, если у графа $G - a$ ровно две компоненты связности, одна из которых является *шипом* с основанием a. В противном случае назовём точку сочленения *существенной*.

1.1. *В графе G есть существенная точка сочленения a.*
Если $d_G(a) = 2$, то вершина a принадлежит некоторой цепочке из последовательно соединённых вершин степени 2, пусть крайние вершины этой цепочки смежны с вершинами b и b' (степени которых не равны 2). Так как a — существенная точка сочленения, то $d_G(b) > 2$ и $d_G(b') > 2$, причем b и b' — также существенные точки сочленения.

Итак, рассмотрим случай $d_G(a) \geq 3$. Вершина a является существенной точкой сочленения графа G, поэтому существуют такие связные графы G_1 и G_2, что $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$ и $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$, причём ни один из графов G_1 и G_2 не является шипом с основанием a.

Построим из графа G_1 граф G_1'. Если $d_{G_1}(a) = 1$, то $G_1' = G_1$. Если же $d_{G_1}(a) \geq 2$, то присоединим к вершине a шип из $k+1$ вершины. Таким образом $\ell(G_1') \leq k$, $g(G_1') \geq g(G)$. Аналогично построим граф G_2'.

Поскольку $3 \leq d_G(a) = d_{G_1}(a) + d_{G_2}(a)$, то $d_{G_1}(a) \geq 2$ или $d_{G_2}(a) \geq 2$. Таким образом, при построении хотя бы одного из графов G_1' или G_2' мы добавили шип из $k+1$ вершины. Учитывая, что вершина a входит в оба графа, мы получаем неравенство

$$v(G_1') + v(G_2') \geq v(G) + k + 2.$$

Граф G получается из G_1' и G_2' склейкой двух висячих вершин (концов присоединённых шипов) и последующим стягиванием не менее, чем $k+1$ моста (в результате две копии вершины a в графах G_1' и G_2' склеятся в вершину a графа G). По пункту 1 леммы 1 мы имеем $u(G) = u(G_1') + u(G_2') - 2$. Поскольку графы G_1 и G_2 не являются шипами с основанием a, то $u(G_1'), u(G_2') \geq 3$ и следовательно $u(G_1') < u(G)$ и $u(G_2') < u(G)$. Тогда по индукционному предположению мы имеем

$$u(G_1') \geq \alpha_{g,k}(v(G_1') - k - 2) + 2, \quad u(G_2') \geq \alpha_{g,k}(v(G_2') - k - 2) + 2.$$

Теперь по пункту 2 леммы 1 получается, что $u(G) \geq \alpha_{g,k}(v(G)-k-2)+2$, что и требовалось доказать.

1.2. *В графе G есть большие блоки.*
По лемме 2 мы можем выбрать такой набор рёбер $F \subset E(G)$, что граф $G' = G-F$ связен, не имеет больших блоков и для любых двух смежных в G' вершин x и y из $d_{G'}(x) = d_{G'}(y) = 2$ следует $d_G(x) = d_G(y) = 2$. Тогда $\ell(G') = \max(\ell(G), 1) \leq k$. Очевидно, $g(G') \geq g(G) = g$, $u(G) \geq u(G')$.

Поэтому мы можем применить индукционное предположение для графа G'. Так как любое остовное дерево графа G' является остовным деревом графа G, то $u(G) \geq u(G') \geq \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2$, что и требовалось доказать.

2. *База.*
Будем уменьшать граф, выполняя шаги 1.1 и 1.2 до тех пор, пока это возможно. В результате останется проверить утверждение теоремы только для графов G, у которых нет существенных точек сочленения и больших блоков. Тогда каждая точка сочленения a графа G делит его на две компоненты связности, одна из которых — шип с основанием a.

Рассмотрим несколько случаев.

2.1. *Граф G — дерево.*
Если G имеет хотя бы две вершины степени более двух, то любая из них является существенной точкой сочленения, а мы рассматриваем случай, когда таковых нет. Действительно, пусть a и b — две вершины степени хотя бы 3. Докажем, что a является существенной точкой сочленения. Граф G_1 будет содержать ровно одну компоненту связности графа $G - a$ — ту, что содержит b (см. рисунок 2a). Понятно, что граф G_1 не является шипом. Граф G_2 будет содержать все остальные компоненты связности графа $G - a$, следовательно, a — невисячая вершина графа G_2 и он не является шипом с основанием a.

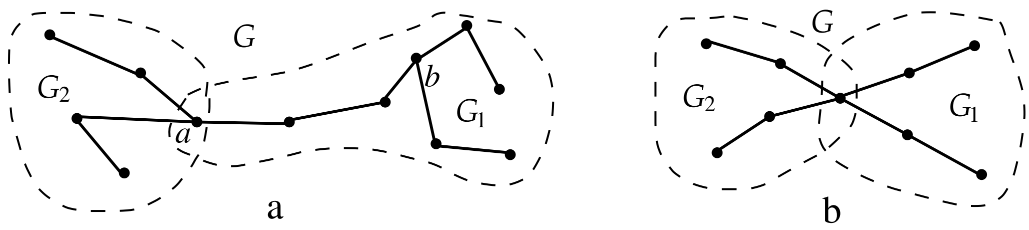

Рис. 2: Существенная точка сочленения у дерева.

В случае, когда граф имеет ровно одну вершину a степени более 2 и ее степень $m \geq 4$, вершина a также является существенной точкой сочленения (см. рисунок 2b).

Если $\Delta(G) \leq 2$, то G имеет две висячие вершины и не более чем $\ell(G) = k$ вершин степени 2. Тогда при любом $\alpha_{g,k}$ мы имеем

$$u(G) = 2 \geq \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2.$$

Остается случай, когда дерево имеет одну вершину степени 3, а все остальные вершины имеют степень не более 2. Тогда G имеет 3 висячих вершины и не более чем $3 \cdot \ell(G) = 3k$ вершин степени 2. Следовательно, $v(G) \le 3k+4$. Легко видеть, что в этом случае для $\delta_k = \frac{1}{2k+2}$ выполняется

$$u(G) = 3 \ge \delta_k(2k+2) + 2 \ge \delta_k(v(G) - k - 2) + 2.$$

2.2. *Граф G имеет цикл.*
Так как G не имеет существенных точек сочленения, каждая точка сочленения a графа G делит его на две компоненты связности, одна из которых — шип с основанием a. Пусть H — граф, полученный из G в результате удаления вершин всех этих шипов. Нетрудно понять, что граф H не имеет точек сочленения (любая точка сочленения графа H была бы существенной точкой сочленения графа G). Таким образом, граф H — блок графа G. Так как G имеет цикл, то цикл имеет и граф H.

Пусть $h = v(H)$, m — количество точек сочленения графа G. Поскольку H не является большим блоком графа G, то $m \ge \frac{h}{2}$. Каждая из m точек сочленения графа G отделяет от графа шип не более, чем из $\ell(G)+1 \le k+1$ вершин. Поэтому $v(G) \le h+(k+1)m$. Двусвязный граф H содержит цикл из не более, чем h вершин. Следовательно, $h \ge g(G) = g$. Рассмотрим два случая.

2.2.1. $m = h$.
Тогда $v(G) \le (k+2)h$, $u(G) \ge h$. Непосредственным вычислением проверяется, что в этом случае

$$u(G) \ge \beta_{h,k}(v(G) - k - 2) + 2 \quad \text{для} \quad \beta_{h,k} = \frac{h-2}{(h-1)(k+2)}.$$

Очевидно, $\beta_{h,k}$ возрастает с ростом $h \ge g \ge 4$, поэтому $\beta_{h,k} \ge \beta_{g,k} = \frac{g-2}{(g-1)(k+2)}$. Несложно проверить, что при $k \ge 2$

$$\beta_{g,k} \ge \frac{4-2}{(4-1)(k+2)} = \frac{2}{3k+6} \ge \frac{1}{2k+2} = \delta_k,$$

а при $g \ge 5$ и $k = 1$

$$\beta_{g,1} \ge \frac{5-2}{(5-1)(1+2)} = \frac{3}{12}1\frac{1}{4} = \delta_1.$$

Таким образом, в рассатриваемом случае $\alpha_{g,k} = \delta_k$ подходит при всех парах g, k, кроме $g = 4$ и $k = 1$. Последний случай мы рассмотрим позже.

2.2.2. $m < h$.

В рассматриваемом случае блок H — непустой, выберем вершину $u \in \mathrm{Int}(H)$. Несложно выделить в графе G остовное дерево, в котором висячими вершинами будут концы всех m шипов и вершина u, поэтому $u(G) \geq m+1$. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$u(G) \geq \gamma_{h,m,k}(v(G)-k-2)+2 \quad \text{для} \quad \gamma_{h,m,k} = \frac{m-1}{(k+1)(m-1)+h-1}. \quad (1)$$

Заметим, что $\gamma_{h,m,k}$ возрастает с ростом m. Так как $m \geq \lceil \frac{h}{2} \rceil$, получим, что

$$\gamma_{h,m,k} \geq \varepsilon_{h,k} = \frac{\lceil \frac{h}{2} \rceil - 1}{(\lceil \frac{h}{2} \rceil - 1)(k+1)+h-1}.$$

Отметим, что

$$\varepsilon_{2t,k} = \frac{t-1}{(t-1)(k+1)+2t-1} < \frac{t-1}{(t-1)(k+1)+2t-2} = \varepsilon_{2t-1,k}.$$

Кроме того, $\varepsilon_{2t,k} = \frac{t-1}{(k+3)(t-1)+1}$ возрастает с ростом t. Учитывая выше сказанное и $h \geq g$, получим, что в рассматриваемом случае минимальный кофэффициент в неравенстве (1) равен $\varepsilon_{2t,k}$, где $t = \lceil \frac{g}{2} \rceil$. Отметим, что

$$\varepsilon_{2t,k} = \frac{t-1}{(k+3)(t-1)+1} < \frac{1}{2k+2} = \delta_k \quad \iff$$
$$(1-k)(t-1) > -1 \quad \iff \quad k=1.$$

Тем самым, мы получили, что при $k \geq 2$ и всех $g \geq 4$ выполняется неравенство

$$u(G) \geq \frac{1}{2k+2}(v(G)-k-2)+2,$$

одно из утверждений теоремы доказано. При $k=1$ и $g \geq 5$ выполняется неравенство

$$u(G) \geq \frac{\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1}{4(\lceil \frac{g}{2} \rceil - 1)+1}(v(G)-3)+2, \quad (2)$$

что и требовалось доказать в теореме 1.

Остается случай $g=4$, $k=1$. Тогда, учитывая доказанное в пункте 2.2.1, мы имеем

$$\alpha_{4,1} \geq \min(\beta_{4,1}, \varepsilon_{4,1}) = \min\left(\frac{2}{9}, \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5} = \varepsilon_{4,1}.$$

Таким образом, для $g=4$ и $k=1$ также выполнено неравенство (2), теперь утверждение теоремы полностью доказано.

3.1 Экстремальные примеры

Мы приведем бесконечную серию примеров графов, подтверждающую точность оценки из теоремы 1. Логика построения примера достаточно проста: мы построим такой граф, для которого все доказанные в теореме неравенства станут равенствами. Пусть $\ell(G) = k$, $g(G) = g$. Разберём два случая.

1. $k = 1$.
Пусть $n = \lceil \frac{g+1}{2} \rceil - 1$. В рассматриваемом случае $\alpha_{g,1} = \frac{n}{4n+1}$. Пусть $B_{g,1}$ — это цикл длины $2n+2$, у которого отмечена $n+1$ вершина через одну. К каждой отмеченной вершине присоединим шип из 2 вершин. Отмеченные вершины будут точками сочленения в нашем графе. Очевидно, $\ell(B_{g,1}) = 1$, $g(B_{g,1}) = 2n+2 \geq g$, $v(B_{g,1}) = 4n+4$. На рисунке 3a изображен пример такого графа для $n = 2$ (то есть, $g = 5$ или $g = 6$).

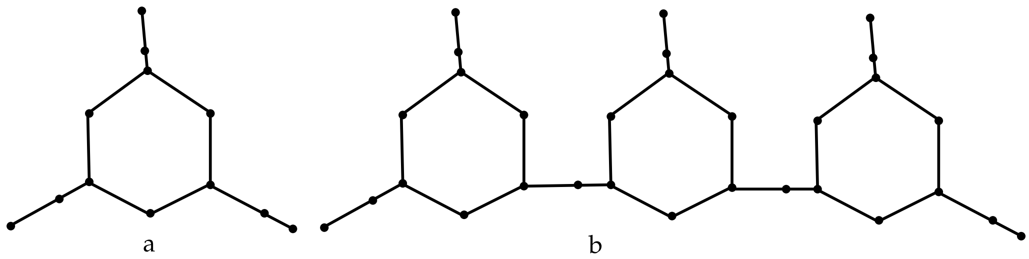

Рис. 3: Экстремальный пример при $k = 1$.

Найдём $u(B_{g,1})$. В остовном дереве графа $B_{g,1}$ висячими вершинами будут все $n+1$ висячие вершины этого графа (концы шипов). Так как удаление висячих вершин остовного дерева не должно нарушать связность, к ним можно добавить только одну вершину цикла, к которой не присоединен шип. Таким образом, $u(B_{g,1}) = n+2$. Несложно проверить, что

$$u(B_{g,1}) = n + 2 = 2 + \frac{n}{4n+1} \cdot (v(B_{g,1}) - 1 - 2).$$

Следовательно, для графа $B_{g,1}$ оценка из теоремы 1 точна.

2. $k \geq 2$.
В рассматриваемом случае $\alpha_{g,k} = \delta_k = \frac{1}{2k+2}$. Пусть $B_{g,k}$ — это следующее дерево: вершина степени 3, к которой присоединены три шипа длины $k+1$ каждый. Тогда $g(B_{g,k}) = \infty$, $v(B_{g,k}) = 3k+4$, $\ell(B_{g,k}) = k$, $u(B_{g,k}) = 3$. На рисунке 4a изображен пример такого графа для $k = 3$. Несложно проверить, что

$$u(B_{g,k}) = g = 2 + \frac{1}{2k+2} \cdot v(B_{g,k}) - k - 2).$$

Следовательно, для графа $B_{g,k}$ оценка из теоремы 1 точна.

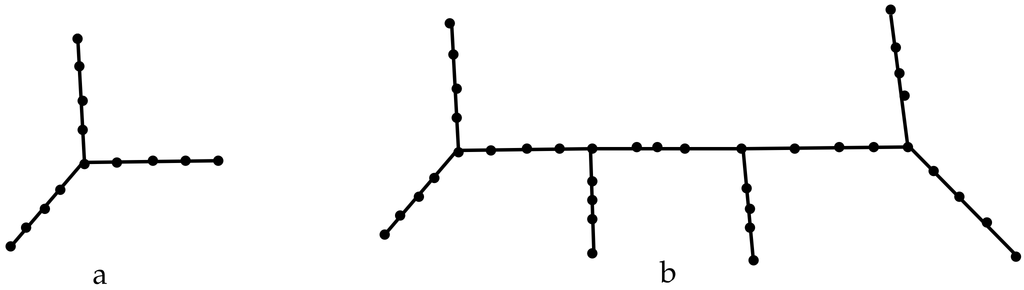

Рис. 4: Экстремальный пример при $k \geq 2$.

3. *Теперь покажем, как в обоих случаях собирать экстремальные примеры из графов $B_{g,k}$, как из деталей конструктора.*
Пусть G — граф, удовлетворяющей соотношениям

$$u(G) = \alpha_{g,k} \cdot (v(G) - k - 2) + 2, \quad g(G) \geq g, \quad \ell(G) \leq k,$$

имеющий хотя бы одну висячую вершину a. Построим граф G': склеим вершину a графа G с концом одного из шипов графа $B_{g,k}$ и стянем после этого $k+1$ мост (рёбра приклеенного шипа графа $B_{g,k}$). В результате получится граф G', удовлетворяющий соотношениям

$$v(G') = v(G) + v(B_{g,k}) - k - 2, \quad g(G') \geq g, \quad \ell(G') \leq k.$$

По пункту 2 леммы 1 мы имеем $u(G') = \alpha_{g,k} \cdot (v(G') - k - 2) + 2$, то есть, граф G' также является экстремальным примером, подтверждающим точность оценки в теореме 1. В качестве первого графа мы возьмём $G = B_{g,k}$, после чего можем построить сколь угодно большие экстремальные примеры, приклеивая каждый раз по очередному графу $B_{g,k}$. Два получающихся таким образом графа можно видеть на рисунках 3b и 4b.

Список литературы

[1] J. A. Storer. *Constructing full spanning trees for cubic graphs.* Inform. Process. Lett. 13 (1981), №1, p. 8-11.

[2] J. R. Griggs, D. J. Kleitman, A. Shastri. *Spanning trees with many leaves in cubic graphs.* J. Graph Theory 13 (1989) №6, p. 669-695.

[3] D. J. Kleitman, D. B. West. *Spanning trees with many leaves.* SIAM J. Discrete Math. 4 (1991), №1, p. 99-106.

[4] J. R. Griggs, M. Wu. *Spanning trees in graphs of minimum degree 4 or 5.* Discrete Math. 104 (1992), p. 167–183.

[5] N. Alon. *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* Graphs and Combinatorics 6 (1990), p. 1-4.

[6] G. Ding, T. Johnson, P. Seymour *Spanning trees with many leaves.* J. Graph Theory 37 (2001), №. 4, p. 189-197.

[7] Y. Caro, D. B. West, R. Yuster. Connected domination and spanning trees with many leaves. SIAM J. Discrete Math. 13 (2000), №. 2, p. 202-211.

[8] P. S. Bonsma *Spanning trees with many leaves in graphs with minimum degree three.* SIAM J. Discrete Math. 22 (2008), №. 3, p. 920-937.

[9] P. S. Bonsma, F. Zickfeld *Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms.* LATIN 2008: Theoretical informatics, p. 531-543, Lecture Notes in Comput. Sci., 4957, Springer, Berlin, 2008.

[10] Ф. Харари. *Теория графов.* Москва, "Мир", 1973. (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)

[11] Н. В. Гравин. *Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев.* Записки научных семинаров ПОМИ, т. 381 (2010), стр. 31-46. English translation in "Journal of Mathematical Sciences", to appear.

[12] Д. В. Карпов. *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* Записки научных семинаров ПОМИ т.381 (2010г.), стр.78-87. English translation in "Journal of Mathematical Sciences", to appear.

[13] А. В. Банкевич, Д. В. Карпов. *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях.* Записки научных семинаров ПОМИ т. 391 (2011г.) стр. 18-34.

[14] А. В. Банкевич. *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях в графах без треугольников.* Записки научных семинаров ПОМИ т. 391 (2011г.) стр. 5-17.