ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 5/2015

УСРЕДНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. А. Кукушкин, Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
Санкт-Петербург, 199034, Россия

e-mail: beslave@gmail.com
e-mail: t.suslina@spbu.ru

АННОТАЦИЯ

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ изучается самосопряженный сильно эллиптический оператор A_ε порядка $2p$, заданный выражением $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$, $\varepsilon > 0$. Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и положительно определенная $(m \times m)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, периодическая относительно некоторой решетки; $b(\mathbf{D}) = \sum_{|\alpha|=p}^{d} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha$ — дифференциальный оператор порядка p с постоянными коэффициентами; b_α — постоянные $(m \times n)$-матрицы. Предполагается, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет максимальный ранг. Для резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ получены аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с оценками погрешности в зависимости от ε и ζ.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 14-01-00760) и СПбГУ (проект 11.38.263.2014).

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
РАН

Введение

0.1. **Теоретико-операторный подход к теории усреднений.** Работа относится к теории усреднений периодических дифференциальных операторов (ДО) в пределе малого периода. Теория усреднений (гомогенизации) — широкая область теоретической и прикладной науки. Задачам усреднения посвящена обширная литература; укажем в первую очередь книги [BeLP], [BaPa], [ZhKO].

В серии работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1-4] был предложен теоретико-операторный подход к задачам теории усреднений. С помощью этого подхода изучался широкий класс самосопряженных матричных периодических операторов второго порядка, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающих факторизацию вида

$$\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{0.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — ограниченная и равномерно положительно определенная матрица размера $(m\times m)$, периодическая относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Через Ω обозначаем элементарную ячейку решетки Γ. Далее, $b(\mathbf{D})$ — $(m\times n)$-матричный однородный ДО первого порядка. Предполагается, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет ранг n при всех $0 \ne \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. При сделанных предположениях оператор $\mathcal{A}$ сильно эллиптичен. Простейший пример оператора (0.1) — скалярный эллиптический оператор $-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla$ (оператор акустики); оператор теории упругости также допускает запись в виде (0.1). Эти и другие примеры подробно рассмотрены в [BSu1,3,4].

Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Используем обозначение $F^\varepsilon(\mathbf{x}) := F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Рассмотрим оператор $\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, коэффициенты которого быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

В [BSu1] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте *эффективного оператора* $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$, где g^0 — постоянная *эффективная матрица*. Была получена оценка

$$\left\| (\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - \left(\mathcal{A}^0 + I\right)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

В [BSu2,3] была найдена более точная аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью порядка ε^2. В [BSu4] была получена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, с оценкой

$$\left\| (\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - \left(\mathcal{A}^0 + I\right)^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.3}$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon)$ — так называемый *корректор*. Оператор $\mathcal{K}(\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, а потому зависит от ε; при этом $\|\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(\varepsilon^{-1})$.

Оценки (0.2), (0.3) точны по порядку; постоянные контролируются явно в терминах данных задачи. Подобные результаты называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднений. Метод исследования в [BSu1-4] основан на масштабном преобразовании, разложении периодического оператора $\mathcal{A}$ в прямой интеграл (с помощью теории Флоке-Блоха) и аналитической теории возмущений. При этом было выяснено, что резольвенту оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ можно аппроксимировать в терминах пороговых характеристик оператора $\mathcal{A}$ на краю спектра. В этом смысле процедура гомогенизации является проявлением *спектрального порогового эффекта.*

Отметим также недавнюю работу [Su], в которой были получены аналоги оценок (0.2), (0.3) для резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ в произвольной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ с двупараметрическими оценками погрешности (в зависимости от ε и ζ).

Другой подход к получению операторных оценок погрешности (модифицированный метод первого приближения) был предложен В. В. Жиковым; этим методом в [Zh] и [ZhPas] были получены аналоги оценок (0.2) и (0.3) для операторов акустики и теории упругости.

Отдельный интерес представляет задача усреднения для периодических эллиптических ДО высокого чётного порядка. В работе [V] Н. А. Вениаминова метод, предложенный в [BSu1], был развит применительно к таким операторам. Изучалась задача усреднения для оператора

$$\mathcal{B}_\varepsilon = (\mathbf{D}^p)^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}^p. \tag{0.4}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — симметричный равномерно положительно определенный и равномерно ограниченный тензор порядка $2p$, периодический относительно решетки Γ. При $p = 2$ оператор вида (0.4) возникает в теории упругости пластин (см. [ZhKO]).

Эффективный оператор для $\mathcal{B}_\varepsilon$ имеет вид $\mathcal{B}^0 = (\mathbf{D}^p)^* g^0 \mathbf{D}^p$, где g^0 — *эффективный тензор.* В [V] получен аналог оценки (0.2):

$$\left\| (\mathcal{B}_\varepsilon + I)^{-1} - \left(\mathcal{B}^0 + I\right)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.5}$$

0.2. **Основные результаты.** Мы изучаем более общий класс эллиптических периодических ДО высокого порядка, чем (0.4). Рассмотрим оператор A вида

$$A = A(g) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{0.6}$$

где $g(\mathbf{x})$ — равномерно положительно определенная и ограниченная матрица-функция размера $(m \times m)$, периодическая относительно решетки Γ, а $b(\mathbf{D})$ — $(m \times n)$-матричный однородный ДО порядка p. Точное определение оператора (0.6) дается в п. 4.1. Для операторов $A_\varepsilon = A(g^\varepsilon)$ изучается задача усреднения.

Основные результаты работы — аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$, где $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, в различных операторных нормах с двупараметрическими оценками погрешности (в зависимости от ε и ζ). Теорема

8.1 дает аппроксимацию резольвенты по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (аналог оценки (0.5)):

$$\left\|(A_\varepsilon-\zeta I)^{-1}-\left(A^0-\zeta I\right)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_1(\zeta)\varepsilon; \tag{0.7}$$

в теореме 8.2 получена аппроксимация резольвенты в "энергетической" норме (т. е., по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$):

$$\left\|(A_\varepsilon-\zeta I)^{-1}-\left(A^0-\zeta I\right)^{-1}-\varepsilon^p K(\zeta;\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_2(\zeta)\varepsilon. \tag{0.8}$$

Показано, что эффективный оператор A^0 имеет такую же структуру, как исходный: $A^0=b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})$. Корректор $K(\zeta;\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители; при этом $\|K(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2\to H^p}=O(\varepsilon^{-p})$. Выяснен характер зависимости $C_1(\zeta)$ и $C_2(\zeta)$ от спектрального параметра ζ.

Помимо оценки (0.8) получена аппроксимация оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\left(A_\varepsilon-\zeta I\right)^{-1}$ (отвечающего "потоку") по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$.

В общем случае корректор $K(\zeta;\varepsilon)$ содержит вспомогательный сглаживающий оператор. Мы выделяем условие, при котором можно использовать стандартный корректор, не содержащий сглаживателя (см. теорему 8.6).

0.3. **Схема исследования.** Метод исследования представляет собой дальнейшее развитие теоретико-операторного подхода.

С помощью масштабного преобразования зависимость от параметра ε переносится из коэффициентов оператора в точку резольвенты. Именно, имеет место унитарная эквивалентность:

$$(A_\varepsilon-\zeta I)^{-1}\sim\varepsilon^{2p}\left(A-\zeta\varepsilon^{2p}I\right)^{-1},$$
$$\left(A^0-\zeta I\right)^{-1}\sim\varepsilon^{2p}\left(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}.$$

Тогда оценка (0.7) сводится к неравенству

$$\left\|\left(A-\zeta\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}-\left(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_1(\zeta)\varepsilon^{1-2p}. \tag{0.9}$$

Для доказательства оценки (0.8) мы используем (0.7) и вспомогательное неравенство

$$\left\|A_\varepsilon^{1/2}\big((A_\varepsilon-\zeta I)^{-1}-\left(A^0-\zeta I\right)^{-1}-\varepsilon^p K(\zeta;\varepsilon)\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_3(\zeta)\varepsilon.$$

Последнее также можно подвергнуть масштабному преобразованию. Получим эквивалентное неравенство

$$\left\|A^{1/2}\big(\left(A-\zeta\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}-\left(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}-\widetilde{K}(\zeta;\varepsilon)\big)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_3(\zeta)\varepsilon^{1-p}. \tag{0.10}$$

Неравенства (0.9), (0.10) с произвольным $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ выводятся из неравенств для случая $\zeta = -1$ с помощью подходящих тождеств для резольвент; этот прием заимствован из [Su]. Поэтому основные рассмотрения проводятся для случая $\zeta = -1$.

Оператор A раскладывается в прямой интеграл по операторам $A(\mathbf{k})$, действующим в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и зависящим от параметра $\mathbf{k}$ (*квазиимпульса*). Оператор $A(\mathbf{k})$ задаётся выражением $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ с периодическими граничными условиями. Следуя [BSu1], мы выделяем одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$, относительно которого семейство $A(\mathbf{k})$ представляет собой *полиномиальный операторный пучок* степени $2p$. В работе [V] для таких пучков была развита абстрактная схема. С её помощью мы доказываем неравенство (0.9) (при $\zeta = -1$). Чтобы проверить (0.10), мы развиваем абстрактную схему для полиномиальных пучков по аналогии с работой [BSu4].

0.4. **Структура работы.** В работе 8 параграфов. § 1–3 посвящены абстрактной схеме. В § 1 описывается факторизованное операторное семейство $A(t) = X(t)^* X(t)$, вводится спектральный росток. В § 2 описаны результаты работы [V] — пороговые аппроксимации и аппроксимация резольвенты $(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$ старшего порядка. § 3 посвящен дальнейшему развитию абстрактной схемы и получению аппроксимации резольвенты $(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$ при учете корректора. В § 4 введен изучаемый класс периодических дифференциальных операторов A, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, описано разложение оператора A в прямой интеграл операторов $A(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. В § 5 семейство операторов $A(\mathbf{k})$ изучается с помощью результатов абстрактной схемы, вводится эффективный оператор, описываются свойства эффективной матрицы. В § 6 на основе теорем абстрактной схемы получены аппроксимации резольвенты $(A(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$. В § 7 из результатов § 6 с помощью разложения оператора A в прямой интеграл выводятся теоремы об аппроксимации резольвенты $(A + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$; затем за счет использования подходящих тождеств для резольвент эти теоремы переносятся на случай резольвенты $(A - \zeta \varepsilon^{2p} I)^{-1}$ в произвольной точке $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Выделяется условие, при котором можно устранить сглаживающий оператор в корректоре. В § 8 с помощью масштабного преобразования из оценок § 7 выводятся основные результаты работы — теоремы об аппроксимациях резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ в различных операторных нормах.

0.5. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{G}$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означает норму, $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ — скалярное произведение в $\mathfrak{H}$; через $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{G}}$ обозначим норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$. Иногда для сокращения записи мы опускаем индексы. Если G — линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{G}$, то через $\operatorname{Dom} G$ обозначается область определения, а через $\operatorname{Ker} G$ ядро оператора G. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp$ — его ортогональное дополнение.

Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^n$ обозначены через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно, $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — матрица размера $m\times n$, то $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$.

Классы L_q вектор-функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1\leqslant q\leqslant\infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций (в области $\mathcal{O}\subseteq\mathbb{R}^d$) порядка s и степени суммирования q обозначаются через $W^s_q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $q=2$ используем обозначения $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $s\in\mathbb{R}$. В случае $n=1$ пишем $L_q(\mathcal{O})$, $W^s_q(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств векторнозначных или матричнозначных функций.

Жирным шрифтом обозначаются векторные величины. Используем обозначения $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $iD_j=\partial_j=\partial/\partial x_j$, $j=1,\dots,d$, $\mathbf{D}=-i\nabla=(D_1,\dots,D_d)$. Далее, если $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{Z}^d_+$ — мультииндекс и $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$, то $|\alpha|=\sum_{j=1}^d\alpha_j$, $\mathbf{k}^\alpha=k_1^{\alpha_1}\cdots k_d^{\alpha_d}$, $\mathbf{D}^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_d^{\alpha_d}$. Для двух мультииндексов α,β запись $\beta\leqslant\alpha$ означает, что $\beta_j\leqslant\alpha_j$, $j=1,\dots,d$; для числа сочетаний используем обозначение $C^\beta_\alpha=C^{\beta_1}_{\alpha_1}\cdots C^{\beta_d}_{\alpha_d}$.

Используем обозначение $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$. Через C, B, c, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные.

§ 1. Абстрактная схема. Спектральный росток

1.1. **Полиномиальные пучки вида $X(t)^*X(t)$.** Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Задано семейство (полиномиальный пучок) операторов

$$X(t)=\sum_{j=0}^{p}X_jt^j,\quad t\in\mathbb{R},\quad p\in\mathbb{N},\quad p\geqslant 2.$$

(Случай $p=1$ был подробно изучен в [BSu1,2,4].) Операторы $X(t)$ и X_j действуют из пространства $\mathfrak{H}$ в пространство $\mathfrak{H}_*$:

$$X(t),\,X_j:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*.$$

Предполагается, что оператор X_0 *плотно определен и замкнут*, X_p *ограничен.* Дополнительно наложим следующее условие на области определения.

Условие 1.1.

$$\operatorname{Dom}X(t)=\operatorname{Dom}X_0\subset\operatorname{Dom}X_j\subset\operatorname{Dom}X_p=\mathfrak{H},\quad j=1,\dots,p-1,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Мы также предполагаем, что промежуточные операторы X_j при $j=1,\dots,p-1$ подчинены X_0.

Условие 1.2. *Для $j=0,\dots,p-1$ и для любого $u\in\operatorname{Dom}X_0$ выполнено*

$$\|X_ju\|_{\mathfrak{H}_*}\leqslant\widetilde{C}\,\|X_0u\|_{\mathfrak{H}_*}\,,\tag{1.1}$$

где $\widetilde{C}$ — некоторая константа (очевидно, $\widetilde{C}\geqslant 1$).

Заметим, что при $j = 0$ оценка (1.1) тривиальна. При сделанных предположениях оператор $X(t)$ *замкнут* на области $\operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0$.

Из условия 1.2 следует, что

$$\operatorname{Ker} X_0 \subset \operatorname{Ker} X_j, \quad j = 1, \dots, p-1. \tag{1.2}$$

Наш основной объект — семейство неотрицательных самосопряженных в $\mathfrak{H}$ операторов

$$A(t) = X(t)^* X(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.3}$$

Оператор (1.3) порождается замкнутой в $\mathfrak{H}$ квадратичной формой

$$a(t)[u, u] = \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0.$$

Обозначим $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$, и положим

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0, \qquad \mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} A_0^* = \operatorname{Ker} X_0^*.$$

Через P и P_* будем обозначать ортопроекторы пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$ соответственно.

Условие 1.3. *Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора A_0, причем*

$$n := \dim \mathfrak{N} < \infty, \quad n \leqslant n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leqslant \infty.$$

Расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора A_0 обозначим через d^0. Через $F(t, s)$ будем обозначать спектральный проектор оператора $A(t)$ для отрезка $[0, s]$, и положим $\mathfrak{F}(t, s) := F(t, s)\mathfrak{H}$. Зафиксируем положительное число $\delta \leqslant \min\{d^0/36,\, 1/4\}$ и обозначим

$$t^0 = \delta^{1/2} (\widehat{C})^{-1}, \tag{1.4}$$

где

$$\widehat{C} = \max\left\{ (p-1)\,\widetilde{C}, \|X_p\| \right\}. \tag{1.5}$$

Здесь $\widetilde{C}$ — постоянная из (1.1). Отметим, что автоматически $t^0 \leqslant 1$.

В [V, лемма 3.9] показано, что условие 1.2 влечет оценку

$$\|X_0 f\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant 2 \left(\|X(t) f\|_{\mathfrak{H}_*} + \sqrt{\delta}\, \|f\|_{\mathfrak{H}} \right), \quad f \in \operatorname{Dom} X_0, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{1.6}$$

Оказывается (см. [V, предложение 3.10]), что при $|t| \leqslant t^0$ выполнено

$$F(t, \delta) = F(t, 3\delta), \quad \operatorname{rank} F(t, \delta) = n. \tag{1.7}$$

Это означает, что при $|t| \leqslant t^0$ на промежутке $[0, \delta]$ оператор $A(t)$ имеет ровно n собственных значений (с учетом кратностей), а промежуток $(\delta, 3\delta)$ свободен от спектра. Для удобства будем использовать сокращенные обозначения

$$F(t) := F(t, \delta), \quad \mathfrak{F}(t) := \mathfrak{F}(t, \delta).$$

1.2. **Операторы Z, R и спектральный росток S.** Положим $\mathcal{D} = \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Условие изолированности точки $\lambda_0 = 0$ в спектре A_0 позволяет воспринимать $\mathcal{D}$ как гильбертово пространство со скалярным произведением $(X_0\varphi, X_0\eta)_{\mathfrak{H}_*}$, $\varphi, \eta \in \mathcal{D}$. Пусть $u \in \mathfrak{H}_*$. Рассмотрим уравнение $X_0^*(X_0\psi - u) = 0$ относительно $\psi \in \mathcal{D}$, понимаемое в слабом смысле:

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = (u, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}. \tag{1.8}$$

Правая часть в (1.8) является антилинейным непрерывным функционалом над $\zeta \in \mathcal{D}$, поэтому решение ψ существует, единственно, и выполнена оценка $\|X_0\psi\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant \|u\|_{\mathfrak{H}_*}$. Пусть теперь

$$\omega \in \mathfrak{N}, \quad u = -X_p\omega; \tag{1.9}$$

в этом случае решение уравнения (1.8) обозначим через $\psi(\omega)$. Определим ограниченный оператор $Z : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$, действующий по формуле

$$Z\omega = \psi(\omega),\ \omega \in \mathfrak{N}; \quad Z\varphi = 0,\ \varphi \in \mathfrak{N}^\perp. \tag{1.10}$$

Чтобы оценить норму оператора Z, запишем (1.8) при $u = -X_p\omega$ и $\zeta = \psi(\omega)$:

$$\|X_0\psi(\omega)\|^2_{\mathfrak{H}_*} = -\left(X_p\omega, X_0\psi(\omega)\right)_{\mathfrak{H}_*} \leqslant \|X_0\psi(\omega)\|_{\mathfrak{H}_*} \|X_p\omega\|_{\mathfrak{H}_*},$$

откуда следует, что

$$\left(A_0\psi(\omega), \psi(\omega)\right)_{\mathfrak{H}} \leqslant \|X_p\|^2 \|\omega\|^2_{\mathfrak{H}}.$$

Вспоминая, что $d^0 \geqslant 36\delta$ и $\psi(\omega) \in \mathfrak{N}^\perp$, получаем

$$36\delta \|\psi(\omega)\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant \left(A_0\psi(\omega), \psi(\omega)\right)_{\mathfrak{H}} \leqslant \|X_p\|^2 \|\omega\|^2_{\mathfrak{H}}.$$

Следовательно,

$$\|Z\| \leqslant (1/6)\delta^{-1/2} \|X_p\|. \tag{1.11}$$

Положим теперь

$$\omega_* := X_0\psi(\omega) + X_p\omega \in \mathfrak{N}_* \tag{1.12}$$

и определим оператор R

$$R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*, \quad R\omega = \omega_*. \tag{1.13}$$

Его можно представить также в виде

$$R = P_* X_p|_{\mathfrak{N}}. \tag{1.14}$$

Спектральным ростком операторного семейства $A(t)$ при $t = 0$ мы называем самосопряженный оператор

$$S = R^*R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}. \tag{1.15}$$

Из (1.14) и (1.15) вытекает представление

$$S = PX_p^* P_* X_p|_{\mathfrak{N}}.$$

Росток S будем называть *невырожденным*, если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$, что эквивалентно $\operatorname{rank} R = n$.

1.3. **Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов оператора** $A(t)$**.** С помощью аналитической теории возмущений в [V, п. 3.3] были получены важные свойства первых n собственных значений и соответствующих собственных элементов оператора $A(t)$ при достаточно малом t. Именно, при $|t| \leqslant t^0$ существуют вещественно-аналитические функции $\lambda_j(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_j(t)$ (ветви собственных векторов) такие, что

$$A(t)\varphi_j(t) = \lambda_j(t)\varphi_j(t), \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{1.16}$$

и набор $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^n$ образует ортонормированный базис в $\mathfrak{F}(t)$. Если $t_* \leqslant t^0$ достаточно мало, то при $|t| \leqslant t_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения (см. [V, теорема 3.15]):

$$\lambda_j(t) = \gamma_j t^{2p} + \dots, \quad \gamma_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t_*, \tag{1.17}$$

$$\varphi_j(t) = \omega_j + t\varphi_j^{(1)} + t^2\varphi_j^{(2)} + \dots, \quad j = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t_*. \tag{1.18}$$

При этом $\{\omega_j\}_{j=1}^n$ образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Числа γ_j и векторы ω_j являются собственными для спектрального ростка S, т. е.,

$$S\omega_j = \gamma_j\omega_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Имеем

$$P = \sum_{j=1}^n (\cdot, \omega_j)_{\mathfrak{H}}\, \omega_j, \tag{1.19}$$

$$SP = \sum_{j=1}^n \gamma_j\, (\cdot, \omega_j)_{\mathfrak{H}}\, \omega_j. \tag{1.20}$$

Как показано в [V, п. 3.3], для элементов $\varphi_j^{(i)}$ из (1.18) выполнено

$$\varphi_j^{(i)} \in \mathfrak{N}, \quad j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, p-1; \tag{1.21}$$

$$\varphi_j^{(p)} - \psi(\omega_j) \in \mathfrak{N}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{1.22}$$

С учетом (1.7) из (1.16) получаем

$$F(t) = \sum_{j=1}^n (\cdot, \varphi_j(t))_{\mathfrak{H}}\, \varphi_j(t), \quad |t| \leqslant t^0, \tag{1.23}$$

$$A(t)F(t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(t)\, (\cdot, \varphi_j(t))_{\mathfrak{H}}\, \varphi_j(t), \quad |t| \leqslant t^0. \tag{1.24}$$

Подставляя в (1.23), (1.24) разложения (1.17), (1.18) и учитывая (1.19) и (1.20), находим, что при $|t| \leqslant t_*$ (где $t_* \leqslant t^0$ достаточно мало) справедливы степенные разложения

$$F(t) = P + tF_1 + \dots, \quad |t| \leqslant t_*,$$
$$A(t)F(t) = t^{2p}SP + \dots, \quad |t| \leqslant t_*.$$

Нам, однако, нужны не сами эти разложения, а аппроксимации операторов $F(t)$ и $A(t)F(t)$ с одним или несколькими первыми членами (*пороговые аппроксимации*), но с оценками погрешности на всем промежутке $|t| \leqslant t^0$.

§ 2. Абстрактная схема: пороговые аппроксимации

В этом параграфе кратко излагаются основные результаты абстрактной схемы, полученные в [V].

2.1. **Вспомогательный материал.** Нам понадобится вариант резольвентного тождества в случае, когда области определения двух операторов не обязаны совпадать, но совпадают области определения соответствующих квадратичных форм. Нужная модификация резольвентного тождества была найдена в [BSu1, гл. 1, § 2].

Пусть a, b — две замкнутые неотрицательные квадратичные формы в пространстве $\mathfrak{H}$, заданные на общей области определения

$$\mathfrak{d} := \operatorname{Dom} a = \operatorname{Dom} b, \tag{2.1}$$

которая плотна в $\mathfrak{H}$. Операторы, отвечающие формам a и b, обозначим A и B, соответственно. Рассмотрим полуторалинейную форму

$$a_\gamma\,[u,v] = a\,[u,v] + \gamma\,(u,v)_{\mathfrak{H}}\,, \quad \gamma > 0. \tag{2.2}$$

Соответствующая квадратичная форма положительно определена. Аналогично вводится форма b_γ. Линеал $\mathfrak{d}$ является гильбертовым пространством $\mathfrak{d}\,(a_\gamma)$ относительно скалярного произведения (2.2). Норму пространства $\mathfrak{d}\,(a_\gamma)$ обозначим через $\|\cdot\|_{\mathfrak{d}}$:

$$\|u\|_{\mathfrak{d}} = a_\gamma\,[u,u]^{1/2}\,, \quad u \in \mathfrak{d}. \tag{2.3}$$

В силу совпадения областей определения (2.1) форма b_γ непрерывна в $\mathfrak{d}\,(a_\gamma)$ и порождает там эквивалентную норму. Пусть постоянная $\alpha > 0$ определена соотношением

$$\alpha^2 = \sup_{0 \neq u \in \mathfrak{d}} \frac{a_\gamma\,[u,u]}{b_\gamma\,[u,u]}.$$

Рассмотрим теперь форму $\mathfrak{t} = b - a$. Очевидно, она a_γ-непрерывна, и ей отвечает самосопряженный в $\mathfrak{d}(a_\gamma)$ оператор T_γ:

$$\mathfrak{t}\,[u,v] = a_\gamma\,[T_\gamma u, v]\,, \quad u,\, v \in \mathfrak{d}.$$

Введем обозначение

$$\Omega_z(A) := I + (z+\gamma)\,R_z(A) = (A + \gamma I)\,R_z(A),$$

где $R_z(A) = (A - zI)^{-1}$ — резольвента оператора A в точке $z \in \rho\,(A)$. (Здесь $\rho(A)$ — резольвентное множество оператора A.) Аналогичные обозначения вводятся и для оператора B. Тогда справедливо тождество

$$R_z(B) - R_z(A) = -\Omega_z(A) T_\gamma R_z(B), \quad z \in \rho(A) \cap \rho(B), \tag{2.4}$$

см. [BSu1, гл. 1, § 2]. Непосредственно из определения нормы (2.3) в пространстве $\mathfrak{d}$ следуют неравенства

$$\|u\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \gamma^{-1/2} \|u\|_{\mathfrak{d}}, \tag{2.5}$$

$$\|R_z(A)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{d}} \leqslant \gamma^{-1/2} \|\Omega_z(A)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}, \tag{2.6}$$

$$\|R_z(A)\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}} \leqslant \gamma^{-1} \|\Omega_z(A)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}},$$

$$\|\Omega_z(A)\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}} \leqslant 1 + |z+\gamma|\,\gamma^{-1} \|\Omega_z(A)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}. \tag{2.7}$$

Из них, в свою очередь, в [V] выводится ряд оценок.

2.2. **Оценки для разности резольвент. Пороговые аппроксимации.** В данном пункте мы формулируем необходимые для дальнейшего оценки из [V, п. 4.2].

Пусть $\Gamma_\delta \subset \mathbb{C}$ — контур, эквидистантно охватывающий отрезок вещественной оси $[0, \delta]$ на расстоянии δ. Напомним, что число δ было выбрано в п. 1.1. Пусть $z \in \Gamma_\delta$ и $|t| \leqslant t^0$. В качестве операторов A и B будут выступать операторы $A_0 = A(0)$ и $A(t)$. Для краткости будем писать $R_z(t)$ вместо $R_z(A(t))$ и $\Omega_z(t)$ вместо $\Omega_z(A(t))$.

Применим схему п. 2.1, полагая

$$\gamma = \delta, \quad \mathfrak{d} = \operatorname{Dom} X_0, \quad a[u,u] = \|X_0 u\|^2_{\mathfrak{H}_*}, \quad b[u,u] = \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}.$$

Нетрудно убедиться, что $\alpha \leqslant 3$. Очевидно, $|z| \leqslant 2\delta$ при $z \in \Gamma_\delta$. В силу (1.7) выполнено $\|R_z(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \delta^{-1}$ при $z \in \Gamma_\delta$ и $|t| \leqslant t^0$. Следовательно,

$$\|\Omega_z(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 4, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{2.8}$$

Отсюда и из (2.6) вытекает оценка

$$\|R_z(0)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{d}} \leqslant 4\delta^{-1/2}, \quad z \in \Gamma_\delta. \tag{2.9}$$

Аналогично, из (2.7) и (2.8) получаем

$$\|\Omega_z(0)\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}} \leqslant 13. \tag{2.10}$$

Рассмотрим теперь форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}[u,u] &= \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} - \|X_0 u\|^2_{\mathfrak{H}_*} \\ &= 2\mathrm{Re}\left((tX_1 + \dots + t^p X_p)\,u, X_0 u\right)_{\mathfrak{H}_*} + \|(tX_1 + \dots + t^p X_p)\,u\|^2_{\mathfrak{H}_*}. \end{aligned}$$

Этой квадратичной форме в пространстве $\mathfrak{d}$ с метрикой, порождаемой формой a_δ, соответствует оператор $T_\delta = T_\delta(t)$, который можно записать в виде

$$T_\delta(t) = \sum_{j=1}^{2p} t^j T_\delta^{(j)}, \tag{2.11}$$

где операторы $T_\delta^{(j)}$ не зависят от t. Нормы операторов $T_\delta(t)$ и $T_\delta^{(j)}$ оценены в [V, предложения 4.3, 4.4].

Предложение 2.1. *Пусть* t^0 *— число* (1.4). *Выполнены оценки*

$$\|T_\delta(t)\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}} \leqslant C_\circ|t|, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.12}$$

$$\left\|T_\delta^{(j)}\right\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}} \leqslant \widetilde{B}, \quad j = 1, \dots, 2p, \tag{2.13}$$

где постоянные $C_\circ$ *и* $\widetilde{B}$ *заданы равенствами*

$$C_\circ = 5\widehat{C}\delta^{-1/2} = 5(t^0)^{-1}, \tag{2.14}$$

$$\widetilde{B} = p\widetilde{C}^2 + \|X_p\|^2\,\delta^{-1}, \tag{2.15}$$

а $\widetilde{C}$ *— постоянная из* (1.1) (*очевидно,* $\widetilde{B} \geqslant 1$).

Мы будем использовать следующее неравенство, равносильное (2.12):

$$\left|\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} - \|X_0u\|^2_{\mathfrak{H}_*}\right| \leqslant \left(\|X_0u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \delta\,\|u\|^2_{\mathfrak{H}}\right) C_\circ\,|t|\,, \quad u \in \mathfrak{d}, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{2.16}$$

На основе тождества (2.4) в [V, (4.16)] получено неравенство

$$\|R_z(t) - R_z(0)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 48C_\circ\delta^{-1}|t|, \quad |t| \leqslant t^0, \quad z \in \Gamma_\delta. \tag{2.17}$$

Оценки разности резольвент позволяют получить *пороговые аппроксимации* для операторов $F(t)$ и $A(t)F(t)$. Для спектрального проектора $F(t)$ справедливо представление (см. [K])

$$F(t) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\delta} R_z(t)\,dz,$$

где контур Γ_δ обходится в положительном направлении. Тогда

$$F(t) - P = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_\delta} \left(R_z(t) - R_z(0)\right)\,dz. \tag{2.18}$$

Учитывая, что длина контура Γ_δ равна $2\delta + 2\pi\delta$, из (2.17) и (2.18) получаем

$$\|F(t) - P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1\,|t|\,, \quad |t| \leqslant t^0, \quad C_1 = 48\left(1 + \pi^{-1}\right)C_\circ. \tag{2.19}$$

Также была найдена (см. [V, (4.25), (4.27)]) следующая аппроксимация для оператора $A(t)F(t)$:

$$\left\|A(t)F(t) - t^{2p}SP\right\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_2\,|t|^{2p+1}\,, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.20}$$

где

$$C_2 = c(p)(\widetilde{B}^{2p} + C_\circ^{2p+1}), \tag{2.21}$$

$C_\circ$, $\widetilde{B}$ определены в (2.14), (2.15), а постоянная $c(p)$ зависит только от p.

2.3. **Аппроксимация резольвенты** $(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$**.** В данном пункте мы устанавливаем теорему об аппроксимации резольвенты $(A(t) + \varepsilon^{2p} I)^{-1}$. Для этого понадобится еще одно условие.

Условие 2.2. *Для собственных значений* $\lambda_j(t)$ *оператора* $A(t)$ *выполнено*

$$\lambda_j(t) \geqslant c_* t^{2p}, \quad j = 1, \dots, n, \quad c_* > 0, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Из условия 2.2 и соотношений (1.17), (1.20) следует неравенство

$$S \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}} \tag{2.22}$$

для спектрального ростка, что заведомо обеспечивает его невырожденность.

Следующее утверждение было установлено в [V, предложение 4.9]; для полноты изложения мы приведем его с доказательством.

Предложение 2.3. *При* $\varepsilon > 0$ *и* $|t| \leqslant t^0$ *справедлива оценка*

$$\varepsilon^{2p-1} \left\| \left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} F(t) - \left(t^{2p} SP + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} P \right\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant C_3. \tag{2.23}$$

Постоянная $C_3 = c_*^{-\frac{1}{2p}} \left(2C_1 + c_*^{-1} C_2\right)$ *зависит лишь от* p, δ, *постоянной* $\widetilde{C}$ *из* (1.1), *нормы* $\|X_p\|$ *и* c_*.

Доказательство. Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} G(t,\varepsilon) &:= \left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} F(t) - \left(t^{2p} SP + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} P \\ &= \left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} F(t)(F(t) - P) + (F(t) - P) \left(t^{2p} SP + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} P \\ &- F(t) \left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} (A(t)F(t) - t^{2p} SP) \left(t^{2p} SP + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} P. \end{aligned} \tag{2.24}$$

При условии 2.2 справедливы оценки

$$\| \left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} \|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{2.25}$$

$$\| \left(t^{2p} SP + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} P \|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}. \tag{2.26}$$

Из (2.19), (2.20), (2.24)–(2.26) следует неравенство

$$\|G(t,\varepsilon)\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant 2C_1 |t| (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1} + C_2 |t|^{2p+1} (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-2}, \quad |t| \leqslant t^0,$$

откуда непосредственно вытекает (2.23). $\square$

С учетом (1.7) очевидно, что при $\varepsilon > 0$ и $|t| \leqslant t^0$ выполнено

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{2p-1} \| \left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} F(t)^{\perp} \|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \\ &\leqslant \varepsilon^{2p-1} \| \left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1+1/2p} \| \| \left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1/2p} F(t)^{\perp} \| \leqslant (3\delta)^{-1/2p}. \end{aligned}$$

Отсюда и из предложения 2.3 вытекает следующий результат.

Теорема 2.4. *Пусть* $A(t)$ *— операторное семейство* (1.3), *причем выполнены условия п.* 1.1, *а также условие* 2.2. *Пусть* P *— ортопроектор* *на подпространство* $\mathfrak{N}$, *а* S — *спектральный росток семейства* $A(t)$ *при* $t = 0$. *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *и* $|t| \leqslant t^0$ *справедлива оценка*

$$\varepsilon^{2p-1} \left\| \left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} - \left(t^{2p} SP + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} P \right\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_A. \qquad (2.27)$$

Здесь δ *выбрано в п.* 1.1, *число* t^0 *определено соотношением* (1.4). *Постоянная* C_A *определена равенством*

$$C_A = C_3 + (3\delta)^{-1/2p} = c_*^{-\frac{1}{2p}} \left(2C_1 + c_*^{-1} C_2\right) + (3\delta)^{-1/2p} \qquad (2.28)$$

и зависит лишь от p, δ, *постоянной* $\widetilde{C}$ *из* (1.1), *нормы* $\|X_p\|$ *и* c_*.

Замечание 2.5. Для постоянной C_A можно выписать громоздкое явное выражение, если воспользоваться соотношениями (1.5), (2.14), (2.15), (2.19), (2.21) и (2.28). Для дальнейшего применения к дифференциальным операторам важен характер зависимости этой постоянной от данных задачи. После возможного завышения постоянную C_A можно считать многочленом от переменных $\widetilde{C}$, $\|X_p\|$, $\delta^{-1/2p}$ и $c_*^{-1/2p}$ с положительными коэффициентами, зависящими лишь от p.

§ 3. Абстрактная схема: аппроксимация резольвенты $\left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1}$ с учетом корректора

В данном параграфе мы получаем аппроксимацию резольвенты $\left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1}$ при учете корректора. Наша цель — доказать следующую теорему.

Теорема 3.1. *Пусть* $A(t)$ — *операторное семейство* (1.3), *причем выполнены условия п.* 1.1, *а также условие* 2.2. *Пусть* P — *ортопроектор на подпространство* $\mathfrak{N}$, Z — *оператор* (1.10), *а* S — *спектральный росток семейства* $A(t)$ *при* $t = 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{p-1} \left\| A(t)^{1/2} \left(\left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} - (I + t^p Z) \left(t^{2p} SP + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} P \right) \right\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \\ &\leqslant \check{C}_A, \quad \varepsilon > 0, \quad |t| \leqslant t^0. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Здесь t^0 *определено в* (1.4). *Постоянная* $\check{C}_A$ *зависит лишь от* p, δ, *постоянной* $\widetilde{C}$ *из* (1.1), *нормы* $\|X_p\|$ *и* c_*.

3.1. **Доказательство теоремы 3.1: первый этап.** Для краткости обозначим

$$\mathfrak{A}_\varepsilon(t) = A(t)^{1/2} \left(A(t) + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1}, \qquad (3.2)$$

$$\Xi\,(t, \varepsilon) = \left(t^{2p} SP + \varepsilon^{2p} I\right)^{-1} P. \qquad (3.3)$$

Нам нужно оценить оператор

$$\Upsilon(t, \varepsilon) := \mathfrak{A}_\varepsilon(t) - A(t)^{1/2} \left(I + t^p Z\right) \Xi(t, \varepsilon). \qquad (3.4)$$

Сразу отметим, что для оператора (3.3) выполнено неравенство (2.26).

Представим оператор (3.4) в виде суммы четырех слагаемых:

$$\Upsilon(t,\varepsilon) = J_1(t,\varepsilon) + J_2(t,\varepsilon) + J_3(t,\varepsilon) + J_4(t,\varepsilon), \tag{3.5}$$

где

$$J_1(t,\varepsilon) := \mathfrak{A}_\varepsilon(t)F(t)^\perp, \tag{3.6}$$

$$J_2(t,\varepsilon) := \mathfrak{A}_\varepsilon(t)F(t)(F(t)-P), \tag{3.7}$$

$$J_3(t,\varepsilon) := F(t)\mathfrak{A}_\varepsilon(t)P - F(t)A(t)^{1/2}\Xi(t,\varepsilon), \tag{3.8}$$

$$J_4(t,\varepsilon) := A(t)^{1/2}(F(t)-P)\Xi(t,\varepsilon) - t^p A(t)^{1/2} Z\Xi(t,\varepsilon). \tag{3.9}$$

Для оценки оператора (3.6) воспользуемся неравенством Юнга в форме

$$\left(\lambda + \varepsilon^{2p}\right)^{-1} \leqslant \lambda^{-1/2-1/2p}\varepsilon^{1-p}, \quad \lambda > 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{3.10}$$

С учетом (1.7), (3.2), (3.6) и (3.10) имеем

$$\|J_1(t,\varepsilon)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \sup_{\lambda \geqslant 3\delta} \lambda^{1/2}\left(\lambda + \varepsilon^{2p}\right)^{-1} \leqslant (3\delta)^{-1/2p}\,\varepsilon^{1-p}, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{3.11}$$

Из условия 2.2 и (3.10) следует оценка

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{A}_\varepsilon(t)F(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} &= \sup_{1\leqslant l\leqslant n} \sqrt{\lambda_l(t)}\left(\lambda_l(t) + \varepsilon^{2p}\right)^{-1} \\ &\leqslant \varepsilon^{1-p} \sup_{1\leqslant l\leqslant n} \lambda_l(t)^{-1/2p} \leqslant c_*^{-1/2p}|t|^{-1}\varepsilon^{1-p}, \quad 0 < |t| \leqslant t^0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Вместе с (2.19) это влечет оценку оператора (3.7):

$$\|J_2(t,\varepsilon)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1 c_*^{-1/2p}\varepsilon^{1-p}, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{3.13}$$

Далее, для рассмотрения оператора (3.8) воспользуемся следующим аналогом резольвентного тождества

$$\begin{aligned} &F(t)\left(A\left(t\right) + \varepsilon^{2p}I\right)^{-1}P - F(t)\Xi(t,\varepsilon) \\ &= -F(t)\left(A(t) + \varepsilon^{2p}I\right)^{-1}\left(A(t)F(t) - t^{2p}SP\right)\Xi(t,\varepsilon) \end{aligned}$$

и домножим его слева на $A(t)^{1/2}$. Тогда оператор (3.8) запишется в виде

$$J_3(t,\varepsilon) = -F(t)\mathfrak{A}_\varepsilon(t)\left(A(t)F(t) - t^{2p}SP\right)\Xi(t,\varepsilon).$$

Отсюда в силу (2.20), (2.26) и (3.12) получаем

$$\begin{aligned} \|J_3(t,\varepsilon)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} &\leqslant C_2 c_*^{-1/2p}(c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}|t|^{2p+1}|t|^{-1}\varepsilon^{1-p} \\ &\leqslant C_2 c_*^{-1/2p-1}\varepsilon^{1-p}, \quad |t| \leqslant t^0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

В итоге из (3.5), (3.11), (3.13) и (3.14) вытекает неравенство

$$\|\Upsilon(t,\varepsilon)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_4\varepsilon^{1-p} + \|J_4(t,\varepsilon)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{3.15}$$

где

$$C_4 = (3\delta)^{-1/2p} + C_1 c_*^{-1/2p} + C_2 c_*^{-1/2p-1}. \tag{3.16}$$

Тем самым доказательство оценки (3.1) сведено к оцениванию оператора (3.9).

3.2. **Итерационная процедура.** Перепишем резольвентное тождество (2.4) в виде

$$R_z(t) = R_z(0) - \Omega_z(0) T_\delta(t) R_z(t), \tag{3.17}$$

и будем подставлять это равенство само в себя (итерировать), учитывая разложение (2.11) для $T_\delta(t)$. После p итераций получим

$$R_z(t) - R_z(0) = t\Psi_1(z) + \dots + t^p \Psi_p(z) + \Psi_*(t,z). \tag{3.18}$$

Отсюда и из (2.18) вытекает представление

$$F(t) - P = tF_1 + \dots + t^p F_p + F_*(t), \tag{3.19}$$

где

$$F_i = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\delta} \Psi_i(z)\, dz, \quad i = 1, \dots, p, \tag{3.20}$$

$$F_*(t) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\delta} \Psi_*(t,z)\, dz. \tag{3.21}$$

В силу (3.19) оператор (3.9) запишется в виде

$$J_4(t,\varepsilon) = J_4^{(1)}(t,\varepsilon) + J_4^{(2)}(t,\varepsilon) + J_4^{(3)}(t,\varepsilon), \tag{3.22}$$

где

$$J_4^{(1)}(t,\varepsilon) := \sum_{i=1}^{p-1} t^i A(t)^{1/2} F_i \Xi(t,\varepsilon), \tag{3.23}$$

$$J_4^{(2)}(t,\varepsilon) := t^p A(t)^{1/2} (F_p - Z) \Xi(t,\varepsilon), \tag{3.24}$$

$$J_4^{(3)}(t,\varepsilon) := A(t)^{1/2} F_*(t) \Xi(t,\varepsilon). \tag{3.25}$$

3.3. **Оценки операторов F_i.** Найдем выражения для операторов F_i в терминах коэффициентов разложений (1.18) для собственных элементов $\varphi_j(t)$. Согласно (1.23) имеем:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \varphi_j(t))_{\mathfrak{H}}\, \varphi_j(t) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left(\cdot, \omega_j + t\varphi_j^{(1)} + \dots + t^p \varphi_j^{(p)}\right)_{\mathfrak{H}} \left(\omega_j + t\varphi_j^{(1)} + \dots + t^p \varphi_j^{(p)}\right) + O\left(t^{p+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (\cdot, \omega_j)_{\mathfrak{H}}\, \omega_j + t \sum_{j=1}^{n} \left\{ (\cdot, \omega_j)_{\mathfrak{H}}\, \varphi_j^{(1)} + \left(\cdot, \varphi_j^{(1)}\right)_{\mathfrak{H}} \omega_j \right\} + \dots \\
&+ t^p \sum_{j=1}^{n} \left\{ (\cdot, \omega_j)_{\mathfrak{H}}\, \varphi_j^{(p)} + \left(\cdot, \varphi_j^{(1)}\right)_{\mathfrak{H}} \varphi_j^{(p-1)} + \dots + \left(\cdot, \varphi_j^{(p)}\right)_{\mathfrak{H}} \omega_j \right\} + F_*(t).
\end{aligned}$$

В соответствии с представлением (3.19)

$$F_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{i} \left(\cdot, \varphi_j^{(k)} \right) \varphi_j^{(i-k)}, \quad i = 0, \ldots, p, \tag{3.26}$$

где для удобства считается, что $\varphi_j^{(0)} = \omega_j$, $j = 1, \ldots, n$, и $F_0 = P$.

В силу (1.21) имеем $\varphi_j^{(l)} \in \mathfrak{N}$, $l = 0, \ldots, p-1$, $j = 1, \ldots, n$. Следовательно, операторы F_i при $i = 1, \ldots, p-1$ переводят $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$, а $\mathfrak{N}^{\perp}$ в $\{0\}$. Последнее поможет нам оценить норму оператора (3.23) через $O(\varepsilon^{-p+1})$.

Чтобы оценить операторы F_i, используем инвариантные представления (3.20) для этих операторов в виде контурных интегралов. Оценим равномерно по z подынтегральные выражения. Для этого сначала найдем инвариантные же представления для операторов $\Psi_i(z)$. Будем итерировать тождество (3.17), учитывая (2.11). Значок "$\sim$" используем вместо "$=$", если отбрасываем члены порядка выше p по t. Имеем:

$$\begin{aligned}
R_z(t) &= R_z(0) - \Omega_z(0) T_\delta(t) \left(R_z(0) - \Omega_z(0) T_\delta(t) R_z(t) \right) \\
&\sim R_z(0) - \Omega_z(0) \sum_{i_1=1}^{p} t^{i_1} T_\delta^{(i_1)} R_z(0) + \left(\Omega_z(0) T_\delta(t) \right)^2 R_z(t) \\
&\sim R_z(0) - \Omega_z(0) \sum_{i_1=1}^{p} t^{i_1} T_\delta^{(i_1)} R_z(0) \\
&+ \Omega_z(0) \sum_{i_1=1}^{p-1} t^{i_1} T_\delta^{(i_1)} \Omega_z(0) \sum_{i_2=1}^{p-1} t^{i_2} T_\delta^{(i_2)} R_z(0) - \left(\Omega_z(0) T_\delta(t) \right)^3 R_z(t) \\
&\sim R_z(0) - \Omega_z(0) \sum_{i_1=1}^{p} t^{i_1} T_\delta^{(i_1)} R_z(0) \\
&+ \Omega_z(0) \sum_{i_1=1}^{p-1} t^{i_1} T_\delta^{(i_1)} \Omega_z(0) \sum_{i_2=1}^{p-1} t^{i_2} T_\delta^{(i_2)} R_z(0) \\
&- \Omega_z(0) \sum_{i_1=1}^{p-2} t^{i_1} T_\delta^{(i_1)} \Omega_z(0) \sum_{i_2=1}^{p-2} t^{i_2} T_\delta^{(i_2)} \Omega_z(0) \sum_{i_3=1}^{p-2} t^{i_3} T_\delta^{(i_3)} R_z(0) \\
&+ \left(\Omega_z(0) T_\delta(t) \right)^4 R_z(t).
\end{aligned}$$

Эту итерационную процедуру следует продолжать до тех пор, пока не получим последним слагаемым $(\Omega_z(0)T_\delta(t))^{p+1} R_z(t)$. Окончательное выражение имеет вид

$$
\begin{aligned}
R_z(t) \sim R_z(0) &- \Omega_z(0) \sum_{i_1=1}^{p} t^{i_1} T_\delta^{(i_1)} R_z(0) \\
&+ \Omega_z(0) \sum_{i_1=1}^{p-1} t^{i_1} T_\delta^{(i_1)} \Omega_z(0) \sum_{i_2=1}^{p-1} t^{i_2} T_\delta^{(i_2)} R_z(0) + \dots \\
&+ (-1)^k \Omega_z(0) \sum_{i_1=1}^{p+1-k} t^{i_1} T_\delta^{(i_1)} \cdots \Omega_z(0) \sum_{i_k=1}^{p+1-k} t^{i_k} T_\delta^{(i_k)} R_z(0) + \dots \\
&+ (-1)^p t^p \left(\Omega_z(0) T_\delta^{(1)}\right)^p R_z(0).
\end{aligned}
$$

Выделим $\Psi_i(z)$. Для упрощения громоздкого выражения будем использовать следующие обозначения. Пусть $\gamma^k = \left(\gamma_1^k, \dots, \gamma_k^k\right)$ — мультииндекс длины k такой, что $\gamma_i^k \geqslant 1$, $i = 1, \dots, k$. Обозначим

$$
\left(\Omega_z(0) T_\delta^{(\cdot)}\right)^{\gamma^k} = \Omega_z(0) T_\delta^{(\gamma_1^k)} \cdots \Omega_z(0) T_\delta^{(\gamma_k^k)}.
$$

Тогда $\Psi_i(z)$ запишется в виде

$$
\Psi_i(z) = \sum_{k=1}^{i} (-1)^k \sum_{|\gamma^k|=i} \left(\Omega_z(0) T_\delta^{(\cdot)}\right)^{\gamma^k} R_z(0), \quad i = 1, \dots, p. \tag{3.27}
$$

Теперь из (2.5), (2.9), (2.10) и (2.13) вытекает оценка операторов (3.27):

$$
\begin{aligned}
&\|\Psi_i(z)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \delta^{-1/2} \|\Psi_i(z)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{d}} \leqslant \\
&\leqslant \delta^{-1/2} \sum_{k=1}^{i} \sum_{|\gamma^k|=i} \left\| \left(\Omega_z(0) T_\delta^{(\cdot)}\right)^{\gamma^k} R_z(0) \right\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{d}} \leqslant \\
&\leqslant 4\delta^{-1} \sum_{k=1}^{i} \sum_{|\gamma^k|=i} \left(13\widetilde{B}\right)^k, \quad i = 1, \dots, p.
\end{aligned}
$$

С учетом $\widetilde{B} \geqslant 1$ можно оценить $\left(13\widetilde{B}\right)^k$, $k = 1, \dots, i$, через $\left(13\widetilde{B}\right)^i$, что влечет оценку

$$
\|\Psi_i(z)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 4\delta^{-1} \left(13\widetilde{B}\right)^i \left(\sum_{k=1}^{i} \sum_{|\gamma^k|=i} 1 \right), \quad i = 1, \dots, p.
$$

Используя (3.20) и учитывая, что длина контура Γ_δ равна $2\pi\delta + 2\delta$, получаем

$$\|F_i\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 4\left(13\widetilde{B}\right)^i \left(\sum_{k=1}^{i}\sum_{|\gamma^k|=i} 1\right)\left(\pi^{-1}+1\right) := C^{(i)}, \quad i=1,\ldots,p. \tag{3.28}$$

3.4. **Оценка оператора** $J_4^{(1)}(t,\varepsilon)$**.** Пусть $u \in \mathfrak{H}$, обозначим $v = \Xi(t,\varepsilon)u \in \mathfrak{N}$. Оценим норму

$$\left\|A(t)^{1/2}F_i\Xi\left(t,\varepsilon\right)u\right\|_{\mathfrak{H}} = \|X(t)F_iv\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad i=1,\ldots,p-1. \tag{3.29}$$

Как уже отмечалось, операторы F_i, $i=1,\ldots,p-1$, переводят $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$, а $\mathfrak{N}^\perp$ в $\{0\}$. Вместе с (1.2) это позволяет заметно упростить выражение под знаком нормы в правой части (3.29):

$$\begin{aligned}X(t)F_iv &= \left(X_0+tX_1+\cdots+t^{p-1}X_{p-1}+t^pX_p\right)F_iv = \\ &= t^pX_pF_iv, \quad v\in\mathfrak{N}, \quad i=1,\ldots,p-1.\end{aligned}$$

Следовательно, с учетом (2.26) и (3.28)

$$\|X(t)F_iv\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant C^{(i)}\,|t|^p\,\|X_p\|\,\|v\|_{\mathfrak{H}} \leqslant C^{(i)}\,|t|^p\,\|X_p\|\,(c_*t^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1}\,\|u\|_{\mathfrak{H}}\,. \tag{3.30}$$

В силу неравенства Юнга (3.10)

$$(c_*t^{2p}+\varepsilon^{2p})^{-1} \leqslant c_*^{-1/2-1/2p}|t|^{-1-p}\varepsilon^{1-p}. \tag{3.31}$$

Вместе с (3.29) и (3.30) при учете неравенства $t^0\leqslant 1$ это влечет следующую оценку для оператора (3.23):

$$\|J_4^{(1)}(t,\varepsilon)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_5\varepsilon^{1-p}, \quad |t|\leqslant t^0. \tag{3.32}$$

где

$$C_5 = c_*^{-1/2-1/2p}\|X_p\|\left(\sum_{i=1}^{p-1}C^{(i)}\right). \tag{3.33}$$

3.5. **Оценка оператора** $J_4^{(2)}(t,\varepsilon)$**.** Рассмотрим теперь оператор F_p. Согласно (3.26)

$$F_p = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=0}^{p}\left(\cdot,\varphi_j^{(i)}\right)\varphi_j^{(p-i)}.$$

Обозначим $\widetilde{\omega}_j := \varphi_j^{(p)} - Z\omega_j$. В силу (1.10) и (1.22) имеем $\widetilde{\omega}_j\in\mathfrak{N}$. Представим F_p в виде

$$F_p = \check{F}_p + \widetilde{F}_p, \tag{3.34}$$

где

$$\check{F}_p = \sum_{j=1}^{n} \left((\cdot, \omega_j)\, Z\omega_j + (\cdot, Z\omega_j)\, \omega_j \right), \tag{3.35}$$

$$\widetilde{F}_p = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{p-1} \left(\cdot, \varphi_j^{(i)} \right) \varphi_j^{(p-i)} + \sum_{j=1}^{n} \left((\cdot, \omega_j)\, \widetilde{\omega}_j + (\cdot, \widetilde{\omega}_j)\, \omega_j \right). \tag{3.36}$$

Включение $\widetilde{\omega}_j \in \mathfrak{N}$ вместе с (1.21) показывает, что оператор (3.36) переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$, а $\mathfrak{N}^{\perp}$ в $\{0\}$.

Используя (3.35) и запись проектора P в виде (1.19), находим $\check{F}_p = ZP + PZ^*$, а вспоминая определение (1.10) оператора Z, замечаем, что $PZ = 0$, а тогда $Z^*P = 0$. Следовательно, $(\check{F}_p - Z)P = 0$. Отсюда и из (3.34) следует, что

$$(F_p - Z)P = \widetilde{F}_p P, \tag{3.37}$$

а потому оператор (3.24) запишется в виде

$$J_4^{(2)}(t, \varepsilon) = t^p A(t)^{1/2} \widetilde{F}_p \Xi(t, \varepsilon). \tag{3.38}$$

Из (1.11), (3.28) и (3.37) вытекает оценка

$$\|\widetilde{F}_p P\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant (1/6)\delta^{-1/2} \|X_p\| + C^{(p)}. \tag{3.39}$$

Пусть снова $u \in \mathfrak{H}$ и $v = \Xi\,(t, \varepsilon)\, u \in \mathfrak{N}$. Тот факт, что $\widetilde{F}_p$ переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$, вместе с (1.2) позволяет упростить выражение для $X(t)\widetilde{F}_p v$:

$$X(t)\widetilde{F}_p v = \left(X_0 + tX_1 + \cdots + t^{p-1} X_{p-1} + t^p X_p \right) \widetilde{F}_p v = t^p X_p \widetilde{F}_p v.$$

Следовательно, с учетом (2.26), (3.38) и (3.39)

$$\begin{aligned} \left\| J_4^{(2)}(t, \varepsilon) u \right\|_{\mathfrak{H}} &= |t|^p \left\| X(t) \widetilde{F}_p v \right\|_{\mathfrak{H}_*} = t^{2p} \left\| X_p \widetilde{F}_p v \right\|_{\mathfrak{H}_*} \\ &\leqslant t^{2p} \left\| X_p \right\| \left(C^{(p)} + (1/6)\delta^{-1/2} \left\| X_p \right\| \right) (c_* t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1} \left\| u \right\|_{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Вместе с неравенством (3.31) при учете того, что $t^0 \leqslant 1$, это влечет оценку

$$\left\| J_4^{(2)}(t, \varepsilon) u \right\|_{\mathfrak{H}} \leqslant C_6 \varepsilon^{1-p}, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{3.40}$$

где

$$C_6 = \left\| X_p \right\| \left(C^{(p)} + (1/6)\delta^{-1/2} \left\| X_p \right\| \right) c_*^{-1/2 - 1/2p}. \tag{3.41}$$

3.6. **Оценка оператора $J_4^{(3)}(t, \varepsilon)$.** Чтобы оценить оператор (3.25), воспользуемся представлением (3.21). Вначале получим оценку для оператора $A(t)^{1/2}\Psi_*(t, z)$, равномерную по $z \in \Gamma_\delta$. Для этого нам понадобятся вспомогательные утверждения.

Лемма 3.2. *Выполнено неравенство*

$$\left\| A(t)^{1/2} \right\|_{\mathfrak{d} \to \mathfrak{H}} \leqslant \sqrt{6}, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{d}$. В силу определения оператора $A(t)^{1/2}$ имеем $\left\|A(t)^{1/2}u\right\|_{\mathfrak{H}} = \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}$. Воспользуемся неравенством (2.16):

$$\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} \leqslant \|X_0u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \left(\|X_0u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \delta\,\|u\|^2_{\mathfrak{H}}\right) C_\circ\,|t|\,, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Вспоминая определение нормы $\|u\|^2_{\mathfrak{d}} = \|X_0u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \delta\,\|u\|^2_{\mathfrak{H}}$ и учитывая (2.14), получаем

$$\left\|A(t)^{1/2}u\right\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant (1 + C_\circ t^0)\|u\|^2_{\mathfrak{d}} = 6\|u\|^2_{\mathfrak{d}}, \quad u \in \mathfrak{d}, \quad |t| \leqslant t^0.$$

□

Лемма 3.3. *Выполнено неравенство*

$$\|R_z(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{d}} \leqslant (2\sqrt{3} + 3)\delta^{-1/2}, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{3.42}$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathfrak{H}$. В силу определения нормы в $\mathfrak{d}$ имеем

$$\|R_z(t)u\|_{\mathfrak{d}} \leqslant \delta^{1/2}\,\|R_z(t)u\|_{\mathfrak{H}} + \|X_0R_z(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}\,.$$

Вместе с (1.6) это влечет

$$\begin{aligned} &\|R_z(t)u\|_{\mathfrak{d}} \leqslant 2\,\|X(t)R_z(t)u\|_{\mathfrak{H}_*} + 3\delta^{1/2}\,\|R_z(t)u\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \\ &\leqslant 2\,\|X(t)R_z(t)u\|_{\mathfrak{H}_*} + 3\delta^{-1/2}\,\|u\|_{\mathfrak{H}}\,, \quad |t| \leqslant t^0, \quad z \in \Gamma_\delta. \end{aligned} \tag{3.43}$$

В силу условия $z \in \Gamma_\delta$ выполнено $|z| \leqslant 2\delta$, а потому

$$\begin{aligned} &\|X(t)R_z(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} = (A(t)R_z(t)u, R_z(t)u)_{\mathfrak{H}} \\ &= (u, R_z(t)u)_{\mathfrak{H}} + z\,\|R_z(t)u\|^2_{\mathfrak{H}} \\ &\leqslant \|R_z(t)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\,\|u\|^2_{\mathfrak{H}} + 2\delta\,\|R_z(t)\|^2_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}\,\|u\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant 3\delta^{-1}\,\|u\|^2_{\mathfrak{H}}\,. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Объединяя (3.43) и (3.44), приходим к искомому неравенству (3.42). □

Оценим теперь оператор $\Psi_*(t,z)$ по $(\mathfrak{H} \to \mathfrak{d})$-норме. Для этого мы снова проведем итерационную процедуру, целью которой на этот раз является выделение члена $\Psi_*(t,z)$ в разложении (3.18). Как и прежде, мы итерируем тождество (3.17), учитывая (2.11). Наша цель сейчас — оценить нормы всех операторов при t в степени большей p. Поэтому вместо знака равенства мы иногда будем использовать знак соответствия $\sim$, отбрасывая члены порядка p и ниже. Первая итерация:

$$\begin{aligned} &R_z(t) = R_z(0) - \Omega_z(0)T_\delta(t)\left(R_z(0) - \Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t)\right) \\ &= R_z(0) - \Omega_z(0)\left(tT^{(1)}_\delta + \cdots + t^pT^{(p)}_\delta\right)R_z(0) \\ &- \Omega_z(0)\left(t^{p+1}T^{(p+1)}_\delta + \cdots + t^{2p}T^{(2p)}_\delta\right)R_z(0) + \left(\Omega_z(0)T_\delta(t)\right)^2 R_z(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$R_z(t) \sim -\Omega_z(0)\left(t^{p+1}T^{(p+1)}_\delta + \cdots + t^{2p}T^{(2p)}_\delta\right)R_z(0) + \left(\Omega_z(0)T_\delta(t)\right)^2 R_z(t). \tag{3.45}$$

Первое слагаемое в правой части (3.45) обозначим через $\mathcal{I}_1(t,z)$ и оценим, используя (2.9), (2.10), (2.13) и неравенство $t^0 \leqslant 1$:

$$\|\mathcal{I}_1(t,z)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{d}} \leqslant C_{(1)}|t|^{p+1}, \quad |t| \leqslant t^0, \quad C_{(1)} = 52\delta^{-1/2}p\widetilde{B}.$$

Выпишем неучтенные члены для второй итерации, оставляя опять лишь члены с t в степени большей p:

$$\begin{aligned}
&(\Omega_z(0)T_\delta(t))^2 R_z(t) = (\Omega_z(0)T_\delta(t))^2 (R_z(0) - \Omega_z(0)T_\delta(t)R_z(t)) \\
&= t^2\Omega_z(0)\left(T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\right)R_z(0) \\
&+ t^3\Omega_z(0)\left(T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(2)} + T_\delta^{(2)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\right)R_z(0) + \dots \\
&+ t^p\Omega_z(0)\left(T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(p-1)} + \dots + T_\delta^{(p-1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\right)R_z(0) \\
&+ t^{p+1}\Omega_z(0)\left(T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(p)} + \dots + T_\delta^{(p)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\right)R_z(0) + \dots \\
&+ t^{4p}\Omega_z(0)\left(T_\delta^{(2p)}\Omega_z(0)T_\delta^{(2p)}\right)R_z(0) - (\Omega_z(0)T_\delta(t))^3 R_z(t) \\
&\sim t^{p+1}\Omega_z(0)\left(T_\delta^{(1)}\Omega_z(0)T_\delta^{(p)} + \dots + T_\delta^{(p)}\Omega_z(0)T_\delta^{(1)}\right)R_z(0) + \dots \\
&+ t^{4p}\Omega_z(0)\left(T_\delta^{(2p)}\Omega_z(0)T_\delta^{(2p)}\right)R_z(0) - (\Omega_z(0)T_\delta(t))^3 R_z(t) \\
&=: \mathcal{I}_2(t,z) - (\Omega_z(0)T_\delta(t))^3 R_z(t).
\end{aligned}$$

Опять оценим выделенный член $\mathcal{I}_2(t,z)$ с помощью (2.9), (2.10), (2.13) и неравенства $t^0 \leqslant 1$:

$$\|\mathcal{I}_2(t,z)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{d}} \leqslant C_{(2)}|t|^{p+1}, \quad |t| \leqslant t^0,$$

где

$$C_{(2)} = 4\cdot 13^2\delta^{-1/2}c_p^{(2)}\widetilde{B}^2, \quad c_p^{(2)} = p + (p+1) + \dots + 2p + (2p-1) + \dots + 1.$$

Неучтенным теперь остался оператор $-(\Omega_z(0)T_\delta(t))^3 R_z(t)$.

Эту итерационную процедуру следует продолжать аналогичным образом до тех пор, пока не останется неучтенный член $(-1)^{p+1}(\Omega_z(0)T_\delta(t))^{p+1} R_z(t) =: \mathcal{I}^0(t,z)$. Все члены $\mathcal{I}_j(t,z)$, $j = 1,\dots,p$, выделяемые при последовательных итерациях, оценятся следующим образом:

$$\|\mathcal{I}_j(t,z)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{d}} \leqslant C_{(j)}|t|^{p+1}, \quad |t| \leqslant t^0, \quad j = 1,\dots,p, \tag{3.46}$$

где

$$C_{(j)} = 4\cdot 13^j\delta^{-1/2}c_p^{(j)}\widetilde{B}^j, \tag{3.47}$$

а $c_p^{(j)}$ зависит только от p и номера j. Наконец, член $\mathcal{I}^0(t,z)$ оценится на основании (2.10), (2.12) и леммы 3.3

$$\left\|\mathcal{I}^0(t,z)\right\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{d}} \leqslant C_{(p+1)}|t|^{p+1}, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{3.48}$$

где

$$C_{(p+1)} = (2\sqrt{3}+3)\cdot 13^{p+1}\delta^{-1/2}C_\circ^{p+1}. \tag{3.49}$$

Ясно, что $\Psi_*(t,z) = \mathcal{I}_1(t,z) + \dots + \mathcal{I}_p(t,z) + \mathcal{I}^0(t,z)$. В итоге, из (3.46) и (3.48) следует оценка

$$\|\Psi_*(t,z)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{d}} \leqslant C_7|t|^{p+1}, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{3.50}$$

где

$$C_7 = \sum_{j=1}^{p+1} C_{(j)}. \tag{3.51}$$

Теперь из леммы 3.2 и оценки (3.50) вытекает неравенство

$$\left\| A(t)^{1/2}\Psi_*(t,z) \right\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \sqrt{6}C_7|t|^{p+1}, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Вместе с (3.21) и оценкой длины контура Γ_δ через $2\pi\delta + 2\delta \leqslant 2\pi + 2$ это влечет

$$\left\| A(t)^{1/2}F_*(t) \right\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant (1+\pi^{-1})\sqrt{6}C_7|t|^{p+1}, \quad |t| \leqslant t^0. \tag{3.52}$$

В результате из (2.26) и (3.52) получаем оценку оператора (3.25):

$$\left\| J_4^{(3)}(t,\varepsilon) \right\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant (1+\pi^{-1})\sqrt{6}C_7|t|^{p+1}(c_*t^{2p} + \varepsilon^{2p})^{-1}, \quad |t| \leqslant t^0.$$

Учитывая (3.31), отсюда выводим

$$\left\| J_4^{(3)}(t,\varepsilon) \right\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_8\varepsilon^{1-p}, \quad |t| \leqslant t^0, \tag{3.53}$$

где

$$C_8 = (1+\pi^{-1})\sqrt{6}C_7c_*^{-1/2-1/2p}. \tag{3.54}$$

3.7. **Завершение доказательства теоремы 3.1.** Из (3.4), (3.15), (3.22), (3.32), (3.40) и (3.53) вытекает искомая оценка (3.1) с постоянной

$$\check{C}_A = C_4 + C_5 + C_6 + C_8. \tag{3.55}$$

Замечание 3.4. Для постоянной $\check{C}_A$ можно выписать громоздкое явное выражение, если воспользоваться соотношениями (1.5), (2.14), (2.15), (2.19), (2.21), (3.16), (3.28), (3.33), (3.41), (3.47), (3.49), (3.51), (3.54), (3.55). Для дальнейшего применения к дифференциальным операторам важен характер зависимости этой постоянной от данных задачи. После возможного завышения постоянную $\check{C}_A$ можно считать многочленом от переменных $\widetilde{C}$, $\|X_p\|$, $\delta^{-1/2p}$ и $c_*^{-1/2p}$ с положительными коэффициентами, зависящими лишь от p.

§ 4. Периодические дифференциальные операторы в $\mathbb{R}^d$. Разложение в прямой интеграл

4.1. **Факторизованные операторы порядка $2p$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.** В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматриваются дифференциальные операторы, формально заданные выражением

$$A = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{4.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — равномерно положительно определенная и ограниченная матрица-функция размера $m \times m$ (вообще говоря, $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами):

$$\begin{gathered} g,\, g^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d), \\ g(\mathbf{x}) \geqslant c\mathbf{1}_m, \quad c > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Оператор $b(\mathbf{D})$ задан выражением

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha, \tag{4.3}$$

где b_α — постоянные $(m \times n)$-матрицы, вообще говоря, с комплексными элементами. Предполагается, что $m \geqslant n$, а символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \boldsymbol{\xi}^\alpha$ подчинен условию

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Это условие равносильно следующим оценкам

$$\begin{gathered} \alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \\ 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Без ограничения общности будем считать, что нормы матриц b_α ограничены константой $\alpha_1^{1/2}$:

$$|b_\alpha| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad |\alpha| = p. \tag{4.5}$$

Строгое определение оператора A дается через квадратичную форму. В силу условий (4.2) матрицу g можно факторизовать

$$g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x});$$

причем $h,\, h^{-1} \in L_\infty$. Например, можно положить $h = g^{1/2}$.

Рассмотрим оператор X, действующий из пространства $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ по правилу

$$(X\mathbf{u})(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom} X = H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),$$

и квадратичную форму

$$a[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|X\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D})\mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n). \tag{4.6}$$

С помощью преобразования Фурье и соотношений (4.2) и (4.4) легко проверить справедливость оценок

$$c_0 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a\,[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}^p \mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{4.7}$$

где использовано обозначение $|\mathbf{D}^p\mathbf{u}|^2 := \sum_{|\alpha|=p} |\mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}|^2$. Действительно, в силу равенства Парсеваля

$$\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi})\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a\,[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi})\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi},$$

где $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Отсюда и из (4.4) получаем

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a\,[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi}. \tag{4.8}$$

Используя элементарные неравенства

$$c'_p \sum_{|\alpha|=p} |\boldsymbol{\xi}^\alpha|^2 \leqslant |\boldsymbol{\xi}|^{2p} \leqslant c''_p \sum_{|\alpha|=p} |\boldsymbol{\xi}^\alpha|^2, \tag{4.9}$$

где постоянные c'_p, c''_p зависят лишь от d и p, приходим к искомым неравенствам (4.7) с постоянными

$$c_0 = c'_p \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}, \quad c_1 = c''_p \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}. \tag{4.10}$$

Следовательно, форма (4.6) замкнута и неотрицательна. Отвечающий ей самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ мы и обозначаем через A.

4.2. **Решетки в $\mathbb{R}^d$.** Всюду ниже мы предполагаем, что матрицы-функции g, h *периодичны* относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$:

$$g(\mathbf{x}+\mathbf{n}) = g(\mathbf{x}), \qquad h(\mathbf{x}+\mathbf{n}) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{n} \in \Gamma.$$

Пусть $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d$ — базис в $\mathbb{R}^d$, порождающий решетку Γ:

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{n} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{n} = \sum_{i=1}^d l_i \mathbf{n}_i,\ l_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^d t_i \mathbf{n}_i,\ 0 < t_i < 1 \right\}.$$

Двойственный по отношению к $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_d$ базис $\mathbf{s}^1, \dots, \mathbf{s}^d$ в $\mathbb{R}^d$ определяется соотношениями $\left\langle \mathbf{s}^i, \mathbf{n}_j \right\rangle_{\mathbb{R}^d} = 2\pi \delta^i_j$. Этот базис порождает *решетку* $\widetilde{\Gamma}$, *двойственную к решетке* Γ:

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{ \mathbf{s} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{s} = \sum_{i=1}^d q_i \mathbf{s}^i,\ q_i \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Вместо ячейки двойственной решетки нам удобнее рассматривать *центральную зону Бриллюэна*

$$\widetilde{\Omega} = \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \,:\, |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{s}| \,,\, 0 \neq \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma} \right\},$$

которая является фундаментальным множеством решетки $\widetilde{\Gamma}$. Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes}\widetilde{\Omega}$ и отметим, что $|\Omega|\,|\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Пусть r_0 — радиус наибольшего шара, содержащегося в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$, тогда

$$2r_0 = \min|\mathbf{s}| \,, \quad 0 \neq \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}. \tag{4.11}$$

Обозначим

$$\mathcal{B}\,(r) = \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \,:\, |\mathbf{k}| \leqslant r \right\}, \quad r > 0.$$

С решеткой Γ связано дискретное преобразование Фурье $\{\widehat{v}_{\mathbf{s}}\}_{\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}} \mapsto v$:

$$v(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}} \widehat{v}_{\mathbf{s}} \exp\left(i\,\langle \mathbf{s}, \mathbf{x}\rangle\right), \quad \mathbf{x} \in \Omega,$$

которое унитарно отображает $l_2(\widetilde{\Gamma})$ на $L_2(\Omega)$:

$$\int\limits_{\Omega} |v\,(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}} |\widehat{v}_{\mathbf{s}}|^2 \,.$$

Через $\widetilde{W}^s_q(\Omega;\mathbb{C}^n)$ обозначим подпространство тех функций из $W^s_q(\Omega;\mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $W^s_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. При $q = 2$ используем обозначение $\widetilde{H}^s(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

4.3. **Операторы $X(\mathbf{k})$ и $A(\mathbf{k})$ в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$.** Пусть $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Определим оператор $X\,(\mathbf{k}) \,:\, L_2\,(\Omega;\mathbb{C}^n) \to L_2\,(\Omega;\mathbb{C}^m)$, заданный на области определения

$$\operatorname{Dom} X\,(\mathbf{k}) = \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$$

соотношением

$$(X(\mathbf{k})\mathbf{u})(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{4.12}$$

Рассмотрим квадратичную форму $a\,(\mathbf{k})$, заданную выражением

$$a(\mathbf{k})\,[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|X(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}, b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{4.13}$$

С помощью дискретного преобразования Фурье и соотношений (4.2) и (4.4) легко проверить, что при всех $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ выполнены оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} a_*(\mathbf{k})\,[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant a(\mathbf{k})\,[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} a_*(\mathbf{k})\,[\mathbf{u},\mathbf{u}]\,, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n), \tag{4.14}$$

где

$$a_*(\mathbf{k})\,[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \sum_{\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{s}+\mathbf{k}|^{2p}|\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}|^2, \quad \mathbf{u}\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{4.15}$$

Отсюда с учетом (4.9) получаем

$$c_0\int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p\mathbf{u}|^2\,d\mathbf{x} \leqslant a(\mathbf{k})\,[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1\int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p\mathbf{u}|^2\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n),$$

где постоянные c_0, c_1 определены в (4.10). Следовательно, оператор $X(\mathbf{k})$ замкнут, а форма (4.13) замкнута и неотрицательна. Самосопряженный оператор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, отвечающий форме $a(\mathbf{k})$, обозначим через $A(\mathbf{k})$. Формально можно записать

$$A(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}).$$

4.4. **Разложение оператора A в прямой интеграл.** На классе Шварца $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ определим преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ соотношением

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})\,(\mathbf{k},\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2}\sum_{\mathbf{n}\in\Gamma}\exp(-i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{n}\rangle)\mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{n}),$$

$$\mathbf{v}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d.$$

Тогда выполнено

$$\int_{\widetilde{\Omega}}\int_\Omega |\widetilde{\mathbf{v}}\,(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}, \quad \widetilde{\mathbf{v}} = \mathcal{U}\mathbf{v},$$

и $\mathcal{U}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{U}\,:\,L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to\int_{\widetilde{\Omega}}\oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)d\mathbf{k} =: \mathcal{K}. \tag{4.16}$$

Включение $\mathbf{v}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$ при п. в. $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и

$$\int_{\widetilde{\Omega}}\int_\Omega \left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})^p\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\right)\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную Г-периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ под действием $\mathcal{U}$ переходит в оператор умножения на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$ из (4.16). Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

С учетом сказанного форму (4.6) можно разложить в интеграл

$$a\,[\mathbf{v},\mathbf{v}] = \int_{\widetilde{\Omega}} a(\mathbf{k})\,[\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot),\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)]\;d\mathbf{k}, \quad \mathbf{v}\in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Это означает, что преобразование Гельфанда осуществляет унитарную эквивалентность между оператором A и прямым интегралом операторов $A(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{U}A\mathcal{U}^{-1} = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus A(\mathbf{k})d\mathbf{k}. \tag{4.17}$$

§ 5. Дифференциальные операторы $A(\mathbf{k})$ на ячейке Ω. Применение абстрактной схемы

5.1. **Исследование операторов $X(\mathbf{k})$ и $A(\mathbf{k})$.** Наша цель — проверить, что к операторам $A(\mathbf{k})$ применима абстрактная схема. Следуя [BSu1], положим $t := |\mathbf{k}|$ и $\boldsymbol{\theta} := \mathbf{k}/t$. Операторы $X(\mathbf{k}) =: X(t,\boldsymbol{\theta})$ и $A(\mathbf{k}) =: A(t,\boldsymbol{\theta})$ зависят от одномерного параметра t и от дополнительногот параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ (который отсутствовал в абстрактной схеме). Мы будем заботиться о том, чтобы построения и оценки были равномерными относительно $\boldsymbol{\theta}$.

Согласно (4.3) и (4.12) имеем:

$$X(\mathbf{k}) = h\sum_{|\alpha|=p} b_\alpha\,(\mathbf{D}+\mathbf{k})^\alpha = h\sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \sum_{\beta\leqslant\alpha} C_\alpha^\beta \mathbf{k}^{\alpha-\beta}\mathbf{D}^\beta$$
$$= h\sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \sum_{\beta\leqslant\alpha} C_\alpha^\beta t^{|\alpha-\beta|}\boldsymbol{\theta}^{\alpha-\beta}\mathbf{D}^\beta.$$

Следовательно, оператор $X(\mathbf{k})$ допускает запись в виде

$$X(\mathbf{k}) = X(t,\boldsymbol{\theta}) = X_0 + \sum_{j=1}^{p} t^j X_j(\boldsymbol{\theta}). \tag{5.1}$$

Здесь оператор

$$X_0 = h\sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \mathbf{D}^\alpha = hb(\mathbf{D}) \tag{5.2}$$

замкнут на области определения

$$\operatorname{Dom} X_0 = \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n), \tag{5.3}$$

"промежуточные" операторы $X_j(\boldsymbol{\theta})$, $j = 1,\dots,p-1$, заданы соотношениями

$$X_j(\boldsymbol{\theta}) = h\sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \sum_{\beta\leqslant\alpha,\,|\beta|=p-j} C_\alpha^\beta \boldsymbol{\theta}^{\alpha-\beta}\mathbf{D}^\beta \tag{5.4}$$

на областях определения

$$\operatorname{Dom} X_j(\boldsymbol{\theta}) = \widetilde{H}^{p-j}(\Omega;\mathbb{C}^n), \tag{5.5}$$

а оператор

$$X_p(\boldsymbol{\theta}) = h\sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \boldsymbol{\theta}^\alpha = hb(\boldsymbol{\theta})$$

ограничен из $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$.

Из (5.3) и (5.5) видно, что условие 1.1 выполнено:

$$\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} X_j(\boldsymbol{\theta}) \subset \operatorname{Dom} X_p(\boldsymbol{\theta}) = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad j = 1,\dots,p-1.$$

В силу (4.4) справедлива оценка

$$\|X_p(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{5.6}$$

Рассмотрим теперь ядра операторов $X_j(\boldsymbol{\theta})$.

Предложение 5.1. *Ядро оператора X_0 состоит из постоянных вектор-функций:*

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} X_0 = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) : \ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}. \tag{5.7}$$

При $j = 1,\dots,p-1$ выполнены соотношения

$$\mathfrak{N} \subset \operatorname{Ker} X_j(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{5.8}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{u} \in \mathfrak{N}$. Это равносильно тому, что $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и $b(\mathbf{D})\mathbf{u} = 0$. Равенство Парсеваля для рядов Фурье позволяет записать это условие в виде

$$0 = \int_\Omega |b(\mathbf{D})\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}} |b(\mathbf{s})\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{s}|^2 = \sum_{\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}} \langle b(\mathbf{s})^* b(\mathbf{s})\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{s}, \widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{s}\rangle_{\mathbb{C}^n}. \tag{5.9}$$

В силу (4.4) соотношение (5.9) равносильно тому, что

$$|\mathbf{s}|^{2p}\, |\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{s}|^2 = 0, \quad \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma},$$

что в свою очередь эквивалентно равенству нулю всех коэффициентов Фурье $\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{s}$, кроме $\widehat{\mathbf{u}}_\mathbf{0}$, то есть, $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$.

С учетом (5.4) включения (5.8) очевидны. □

Ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\mathfrak{N}$ действует как усреднение по ячейке:

$$P\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n).$$

Пусть $n_* = \operatorname{Ker} X_0^*$. Соотношение $m \geqslant n$ обеспечивает выполнение условия $n_* \geqslant n$. Более того, поскольку

$$\mathfrak{N}_* = \operatorname{Ker} X_0^* = \{\mathbf{q} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^m) : \ h^*\mathbf{q} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^m) : \ b(\mathbf{D})^* h^* \mathbf{q} = 0\},$$

то реализуется альтернатива: либо $n_* = \infty$ (если $m > n$), либо $n_* = n$ (если $m = n$).

Проверим теперь выполнение условия 1.2.

Предложение 5.2. *При $j = 1,\dots,p-1$ справедливы оценки*

$$\|X_j(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{C}_j \|X_0\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{5.10}$$

Здесь постоянные $\widetilde{C}_j$ не зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, а зависят лишь от d, p, j, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 и r_0.

Доказательство. В силу (4.5) и (5.4)

$$\|X_j(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_1^{1/2}\,\|g\|_{L_\infty}^{1/2} \sum_{|\alpha|\leqslant p} \sum_{\beta\leqslant\alpha,\,|\beta|=p-j} C_\alpha^\beta \|\mathbf{D}^\beta \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}. \qquad (5.11)$$

Разложим функцию $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в ряд Фурье

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}} \widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}} e^{i\langle \mathbf{x},\mathbf{s}\rangle}. \qquad (5.12)$$

С учетом (4.11) при $j = 1,\dots,p-1$ выполнено

$$|\mathbf{s}^\beta|^2 \leqslant |\mathbf{s}|^{2|\beta|} \leqslant (2r_0)^{-2j}\,|\mathbf{s}|^{2p}, \quad \mathbf{0} \neq \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}, \quad |\beta| = p-j. \qquad (5.13)$$

Из равенства Парсеваля для рядов Фурье и из (5.13) вытекает оценка

$$\|\mathbf{D}^\beta\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{\mathbf{0}\neq\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{s}^\beta\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}|^2 \leqslant (2r_0)^{-2j} \sum_{\mathbf{0}\neq\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{s}|^{2p}|\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}|^2, \quad |\beta| = p-j. \qquad (5.14)$$

Далее, из определения (5.2), (5.3) оператора X_0, разложения (5.12) и нижней оценки (4.4) следует, что

$$\|X_0\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant \left\|g^{-1}\right\|^{-1}_{L_\infty} \alpha_0 \sum_{\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{s}|^{2p}\,|\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{s}}|^2\,, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n). \qquad (5.15)$$

В итоге, объединяя (5.11), (5.14) и (5.15), приходим к искомому неравенству (5.10) с постоянной

$$\widetilde{C}_j = \alpha_1^{1/2}\alpha_0^{-1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}(2r_0)^{-j}\Bigg(\sum_{|\alpha|\leqslant p} \sum_{\beta\leqslant\alpha,\,|\beta|=p-j} C_\alpha^\beta\Bigg). \qquad (5.16)$$

□

В силу компактности вложения $\operatorname{Dom} a(0) = \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n)$ в пространство $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ спектр оператора $A(0)$ дискретен. Точка $\lambda_0 = 0$ является изолированным собственным значением оператора $A(0) = X_0^*X_0$ кратности n; соответствующее собственное подпространство $\mathfrak{N}$ состоит из постоянных вектор-функций (см. (5.7)) . Оценим расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $A(0)$. Из (4.11) и (5.15) следует, что

$$a(0)[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \alpha_0 \left\|g^{-1}\right\|^{-1}_{L_\infty} (2r_0)^{2p}\,\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}\,,$$
$$\mathbf{u} \in \widetilde{H}^p(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Таким образом,

$$d^0 \geqslant \alpha_0 \left\|g^{-1}\right\|^{-1}_{L_\infty} (2r_0)^{2p}\,. \qquad (5.17)$$

Следуя абстрактной схеме, зафиксируем положительное число $\delta \leqslant \min\left\{d^0/36,\ 1/4\right\}$. С учетом (5.17) положим

$$\delta = \min\left\{\alpha_0 \left\|g^{-1}\right\|^{-1}_{L_\infty} (2r_0)^{2p}/36,\ 1/4\right\}. \qquad (5.18)$$

Неравенства (5.10) позволяют в качестве постоянной $\widetilde{C}$ из (1.1) принять

$$\widetilde{C} = \max\left\{1,\, \widetilde{C}_1,\, \dots,\, \widetilde{C}_{p-1}\right\}, \tag{5.19}$$

где константы $\widetilde{C}_j$ определены в (5.16).

Постоянная $\widehat{C} = \max\left\{(p-1)\,\widetilde{C},\, \|X_p\,(\boldsymbol{\theta})\|\right\}$ (см. (1.5)) сейчас зависит от $\boldsymbol{\theta}$. С учетом (5.6) примем завышенное значение

$$\widehat{C} = \max\left\{(p-1)\,\widetilde{C},\, \alpha_1^{1/2}\,\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\right\},$$

не зависящее от $\boldsymbol{\theta}$. В соответствии с (1.4) положим

$$t^0 = \frac{\delta^{1/2}}{\widehat{C}} = \frac{\delta^{1/2}}{\max\left\{(p-1)\,\widetilde{C},\, \alpha_1^{1/2}\,\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\right\}}. \tag{5.20}$$

5.2. **Включение операторов $A(t,\boldsymbol{\theta})$ в абстрактную схему.** Будем применять абстрактную схему, полагая

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m).$$

В качестве полиномиального пучка $X(t)$ возьмем $X(t,\boldsymbol{\theta}) := X(\mathbf{k}) = X(t\boldsymbol{\theta})$ (см. (5.1)); этот пучок зависит также от параметра $\boldsymbol{\theta}$. Выполнение условий 1.1 и 1.2 было проверено в п. 5.1. Роль оператора $A(t)$ играет $A(t,\boldsymbol{\theta}) := A\,(\mathbf{k}) = A\,(t\boldsymbol{\theta})$. Согласно определению оператора $A(\mathbf{k})$ (см. п. 4.3) имеем

$$A(t,\boldsymbol{\theta}) = X(t,\boldsymbol{\theta})^* X(t,\boldsymbol{\theta}).$$

Выполнение условия 1.3 проверено выше в п. 5.1. Ядро $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} A(0) = \operatorname{Ker} X_0$ описано в (5.7).

Остается проверить справедливость условия 2.2. Обозначим через $E_j(\mathbf{k})$, $j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$, последовательные собственные значения оператора $A(\mathbf{k})$, занумерованные с учетом кратностей.

Воспользуемся двусторонними оценками (4.14) формы $a(\mathbf{k})$ через вспомогательную форму (4.15). Самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, отвечающий форме (4.15), обозначим через $A_*(\mathbf{k})$, а его последовательные собственные значения — через $E_j^0\,(\mathbf{k})$, $j \in \mathbb{N}$. При другом способе нумерации собственные значения оператора $A_*(\mathbf{k})$ определяются из представления (4.15) — это числа $|\mathbf{s}+\mathbf{k}|^{2p}$, $\mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}$, причем каждое такое собственное значение имеет кратность n (они занумерованы значком $\mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}$). Отсюда легко следуют соотношения

$$E_l^0\,(\mathbf{k}) = |\mathbf{k}|^{2p}\,, \quad l = 1,\dots,n, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \tag{5.21}$$

$$E_1^0\,(\mathbf{k}) \geqslant r^{2p}, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}\,(r)\,, \quad 0 < r \leqslant r_0. \tag{5.22}$$

Учитывая нижнюю оценку (4.14), из (5.21) и (5.22) получаем

$$E_l\,(\mathbf{k}) \geqslant \alpha_0\,\left\|g^{-1}\right\|_{L_\infty}^{-1} |\mathbf{k}|^{2p}\,, \quad l = 1,\dots,n, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega},$$

$$E_1\,(\mathbf{k}) \geqslant \alpha_0\,\left\|g^{-1}\right\|_{L_\infty}^{-1} r^{2p}, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega} \setminus \mathcal{B}\,(r)\,, \quad 0 < r \leqslant r_0, \tag{5.23}$$

откуда и следует выполнение условия 2.2 с постоянной

$$c_* = \alpha_0 \left\| g^{-1} \right\|_{L_\infty}^{-1}. \tag{5.24}$$

5.3. **Построение спектрального ростка.** Операторы Z, R и S, введенные в п. 1.2, сейчас зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Для их построения введем вспомогательный оператор Λ. Пусть

$$\mathfrak{M} = \{\mathbf{w} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^m) : \ \mathbf{w}(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \in \mathbb{C}^m\}$$

— подпространство постоянных вектор-функций в $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m)$.

Оператор $\Lambda : \mathfrak{M} \to \mathfrak{H}$ сопоставляет вектору $\mathbf{C} \in \mathfrak{M}$ *слабое* Γ-*периодическое решение* $\mathbf{v}_\mathbf{C} \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n)$ задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\mathbf{C}(\mathbf{x}) + \mathbf{C} \right) = 0, \qquad \int\limits_\Omega \mathbf{v}_\mathbf{C}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{5.25}$$

Задача (5.25) при $\mathbf{C} = b(\boldsymbol{\theta})\mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{C}^n$, является реализацией задачи (1.8), (1.9) (сейчас $\omega = \mathbf{c} \in \mathfrak{N}$). Опишем, как действует оператор Λ. Пусть $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m$ — стандартные орты в $\mathbb{C}^m$ и $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_{\mathbf{e}_j}$. В стандартном базисе в $\mathbb{C}^n$ вектор-функции $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$ записываются как столбцы длины n. Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — $(n \times m)$-матрица со столбцами $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{v}_m(\mathbf{x})$. Тогда оператор Λ есть оператор умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$. Отметим, что матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right) = 0, \qquad \int\limits_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{5.26}$$

В соответствии с (1.10) получаем:

$$(Z(\boldsymbol{\theta})\mathbf{c})(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) b(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n = \mathfrak{N},$$
$$Z(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{N}^\perp.$$

Таким образом,

$$Z(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda b(\boldsymbol{\theta}) P. \tag{5.27}$$

Оператор $R(\boldsymbol{\theta})$, определенный согласно (1.12), (1.13), принимает вид

$$(R(\boldsymbol{\theta})\mathbf{c})(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right) b(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{c}, \quad \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n = \mathfrak{N}.$$

Тогда спектральный росток $S(\boldsymbol{\theta}) = R(\boldsymbol{\theta})^* R(\boldsymbol{\theta}) : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ задается соотношением

$$S(\boldsymbol{\theta}) = P b(\boldsymbol{\theta})^* \left(b(\mathbf{D}) \Lambda + \mathbf{1}_m \right)^* g \left(b(\mathbf{D}) \Lambda + \mathbf{1}_m \right) b(\boldsymbol{\theta})|_\mathfrak{N}$$

и действует как умножение на матрицу $b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$, где

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega \left(b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right)^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right) d\mathbf{x}. \tag{5.28}$$

Учитывая уравнение (5.26), запишем g^0 в виде

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int\limits_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{5.29}$$

где
$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m\right). \tag{5.30}$$
Постоянная матрица (5.29) называется *эффективной матрицей.* Она автоматически положительно определена, что легко усмотреть из представления (5.28). Тем самым, мы показали, что спектральный росток операторного семейства $A(t,\boldsymbol{\theta})$ представим в виде
$$S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}).$$

Как отмечалось в п. 2.3, из условия 2.2 вытекает неравенство
$$S(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}, \tag{5.31}$$
с постоянной c_*, определенной в (5.24) и не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$. Таким образом, спектральный росток $S(\boldsymbol{\theta})$ невырожден.

5.4. **Эффективный оператор. Свойства эффективной матрицы.** Положим
$$S(\mathbf{k}) = t^{2p} S(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^d; \tag{5.32}$$
это символ дифференциального оператора
$$A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \tag{5.33}$$
с постоянными коэффициентами, называемого *эффективным оператором* для оператора A. Из (5.31) и (5.32) вытекает оценка для символа эффективного оператора:
$$b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) \geqslant c_* |\mathbf{k}|^{2p} \mathbf{1}_n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{5.34}$$

Отметим некоторые свойства эффективной матрицы g^0.

Предложение 5.3. *Обозначим*
$$\overline{g} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \underline{g} := \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$
Тогда эффективная матрица g^0 удовлетворяет неравенствам
$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{5.35}$$
В случае, когда $m = n$, имеет место равенство $g^0 = \underline{g}$.

Доказательство похоже на доказательство теоремы 1.5 из [BSu1, гл. 3], где рассматривались ДО второго порядка. Пусть $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m$ и $\mathbf{v}_\mathbf{C}$ — периодическое решение задачи (5.25). Очевидно,
$$h\mathbf{C} = h(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} + \mathbf{C}) - hb(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C}. \tag{5.36}$$
Слагаемые в правой части (5.36) ортогональны друг другу в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$, поскольку первое слагаемое принадлежит $\operatorname{Ker} X_0^*$, а второе принадлежит $\operatorname{Ran} X_0$. Следовательно,
$$\|h(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} + \mathbf{C})\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|h\mathbf{C}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^m.$$
С учетом (5.28) это влечет
$$\langle g^0 \mathbf{C}, \mathbf{C}\rangle \leqslant \langle \overline{g}\mathbf{C}, \mathbf{C}\rangle, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^m,$$

что равносильно верхней оценке (5.35).

Для получения нижней оценки заметим, что $\mathfrak{P} := (h^*)^{-1}\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}_* = \operatorname{Ker} X_0^*$. Положим

$$Q\mathbf{w} = |\Omega|^{-1}(h^*)^{-1}\underline{g}\int\limits_\Omega h^{-1}\mathbf{w}\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{w} \in \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m).$$

Элементарно проверяется, что $Q\mathbf{w} \in \mathfrak{P}$ при $\mathbf{w} \in \mathfrak{H}_*$; $Q\mathbf{w} = \mathbf{w}$ при $\mathbf{w} \in \mathfrak{P}$; и выполнено

$$(Q\mathbf{w},\mathbf{w})_{\mathfrak{H}_*} = |\Omega|^{-1}\langle \underline{g}\mathbf{C}_\mathbf{w}, \mathbf{C}_\mathbf{w}\rangle, \quad \mathbf{C}_\mathbf{w} = \int\limits_\Omega h^{-1}\mathbf{w}\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{w} \in \mathfrak{H}_*. \tag{5.37}$$

Сказанное означает, что Q — ортопроектор в $\mathfrak{H}_*$ на подпространство $\mathfrak{P}$. Применим проектор Q к равенству (5.36). Поскольку $hb(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} \in \operatorname{Ran} X_0 = \mathfrak{N}_*^\perp$, получаем $Qh\mathbf{C} = Qh(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} + \mathbf{C})$. Следовательно, с учетом представления (5.28),

$$\begin{aligned} &\|Qh\mathbf{C}\|^2_{\mathfrak{H}_*} = \|Qh(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} + \mathbf{C})\|^2_{\mathfrak{H}_*} \\ &\leqslant \|h(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} + \mathbf{C})\|^2_{\mathfrak{H}_*} = |\Omega|\langle g^0\mathbf{C},\mathbf{C}\rangle, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^m. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Из (5.37) при $\mathbf{w} = h\mathbf{C}$ следует, что

$$\|Qh\mathbf{C}\|^2_{\mathfrak{H}_*} = (Qh\mathbf{C}, h\mathbf{C})_{\mathfrak{H}_*} = |\Omega|\langle \underline{g}\mathbf{C},\mathbf{C}\rangle. \tag{5.39}$$

Вместе с (5.38) это влечет нижнюю оценку (5.35).

В случае, когда $m = n$, имеем $n_* = m = n$. Тогда выполнено $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{N}_*$, $\dim \mathfrak{P} = m = n$, $\dim \mathfrak{N}_* = n_* = n$. Следовательно, $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}_*$. Поскольку $h(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} + \mathbf{C}) \in \mathfrak{N}_*$, то в (5.38) неравенство переходит в равенство. Это означает, что $g^0 = \underline{g}$. $\square$

Оценки вида (5.35) известны в теории усреднений для конкретных ДО как вилка Фойгта-Рейсса. Из них вытекают оценки нормы эффективной матрицы и обратной к ней:

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad \left|\left(g^0\right)^{-1}\right| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{5.40}$$

Выделим теперь случаи, когда в (5.35) какое-либо из неравенств превращается в равенство. Следующие два утверждения аналогичны предложениям 1.6 и 1.7 из [BSu1, гл. 3].

Предложение 5.4. *Пусть $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1,\dots,m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$. Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^*\mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1,\dots,m. \tag{5.41}$$

Доказательство. В силу представления (5.28) равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношению

$$\|h(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} + \mathbf{C})\|^2_{\mathfrak{H}_*} = \|h\mathbf{C}\|^2_{\mathfrak{H}_*}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^m. \tag{5.42}$$

Как уже отмечалось, в правой части (5.36) слагаемые ортогональны друг другу, а потому (5.42) эквивалентно равенству $hb(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} = 0$ при любом

$\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m$. В силу (5.25) это выполнено в том и только том случае, когда $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})\mathbf{C} = 0$ при любом $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m$. Последнее равносильно (5.41). $\square$

Предложение 5.5. *Пусть* $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})^{-1}$. *Равенство* $g^0 = \underline{g}$ *равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{v}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{v}_k \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n); \quad k = 1, \dots, m. \tag{5.43}$$

Доказательство. В соответствии с (5.38), (5.39) равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно тому, что $h(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} + \mathbf{C}) \in \mathfrak{P}$ при любом $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m$. Другими словами, для всякого $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m$ найдется вектор $\mathbf{C}_* \in \mathbb{C}^m$ такой, что выполнено $h(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C} + \mathbf{C}) = (h^*)^{-1}\mathbf{C}_*$. Последнее означает, что

$$g(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{C}_* = b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\mathbf{C}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}, \quad \mathbf{C} \in \mathbb{C}^m. \tag{5.44}$$

Интегрируя по Ω, получаем $\underline{g}^{-1}\mathbf{C}_* = \mathbf{C}$.

Равенство (5.44) выполнено при всех $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^m$ тогда и только тогда, когда оно выполнено при $\mathbf{C} = \underline{g}^{-1}\mathbf{e}_k$ (т. е., $\mathbf{C}_* = \mathbf{e}_k$), $k = 1, \dots, m$. Последнее равносильно представлениям (5.43) для столбцов $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$. $\square$

Замечание 5.6. Из доказательства предложения 5.5 видно, что при условии $g^0 = \underline{g}$ матрица (5.30) постоянна: $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$.

5.5. **Оценки матрицы-функции Λ.** Ниже нам понадобятся оценки норм матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$.

Лемма 5.7. *Пусть* $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, m$, *— столбцы матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$, *являющейся* Γ*-периодическим решением задачи* (5.26). *Тогда выполнены оценки*

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad j = 1, \dots, m, \tag{5.45}$$

$$\|\mathbf{v}_j\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_0^{-1/2}(2r_0)^{-p}|\Omega|^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad j = 1, \dots, m. \tag{5.46}$$

Доказательство. Напомним, что функция $\mathbf{v}_j \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n)$ удовлетворяет тождеству

$$(g(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j + \mathbf{e}_j), b(\mathbf{D})\mathbf{w})_{L_2(\Omega)} = 0, \quad \mathbf{w} \in \widetilde{H}^p(\Omega; \mathbb{C}^n), \tag{5.47}$$

а также условию $\int_\Omega \mathbf{v}_j\, d\mathbf{x} = 0$. Из (5.47) следует, что

$$\|hb(\mathbf{D})\mathbf{v}_j\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \|h\mathbf{e}_j\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad j = 1, \dots, m,$$

откуда вытекает (5.45).

Чтобы оценить $\|\mathbf{v}_j\|_{L_2(\Omega)}$, используем ряд Фурье, (4.4), (4.11) и условие $\int_\Omega \mathbf{v}_j\, d\mathbf{x} = 0$. Тогда получим

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j\|_{L_2(\Omega)}^2 \geqslant \alpha_0 \sum_{\mathbf{0} \neq \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{s}|^{2p}|\widehat{\mathbf{v}}_{j,\mathbf{s}}|^2 \geqslant \alpha_0(2r_0)^{2p}\|\mathbf{v}_j\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad j = 1, \dots, m, \tag{5.48}$$

где $\widehat{\mathbf{v}}_{j,\mathbf{s}}$, $\mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}$, — коэффициенты Фурье функции $\mathbf{v}_j$. Из (5.45) и (5.48) следует оценка (5.46). $\square$

Следствие 5.8. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *является* Γ-*периодическим решением задачи* (5.26). *Тогда выполнены оценки*

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} C_\Lambda^{(1)}, \tag{5.49}$$

$$\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} C_\Lambda^{(2)}, \tag{5.50}$$

$$\|\Lambda\|_{H^p(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} C_\Lambda, \tag{5.51}$$

где

$$\begin{aligned} C_\Lambda^{(1)} &:= m^{1/2} \alpha_0^{-1/2} (2r_0)^{-p} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \\ C_\Lambda^{(2)} &:= m^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \\ C_\Lambda &:= C_\Lambda^{(2)} \alpha_0^{-1/2} \Big(\sum_{|\beta| \leqslant p} (2r_0)^{-2(p-|\beta|)} \Big)^{1/2}. \end{aligned}$$

Доказательство. Неравенства (5.49) и (5.50) являются очевидным следствием (5.46) и (5.45) соответственно.

Чтобы проверить (5.51), воспользуемся рядом Фурье. Аналогично (5.14) с учетом (4.4) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}^\beta \Lambda\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leqslant (2r_0)^{-2(p-|\beta|)} \sum_{\mathbf{0} \neq \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{s}|^{2p} |\widehat{\Lambda}_\mathbf{s}|^2 \\ &\leqslant (2r_0)^{-2(p-|\beta|)} \alpha_0^{-1} \sum_{\mathbf{0} \neq \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}} |b(\mathbf{s}) \widehat{\Lambda}_\mathbf{s}|^2 \\ &= (2r_0)^{-2(p-|\beta|)} \alpha_0^{-1} \|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad |\beta| \leqslant p. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\Lambda\|_{H^p(\Omega)}^2 \leqslant \alpha_0^{-1} \|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)}^2 \Big(\sum_{|\beta| \leqslant p} (2r_0)^{-2(p-|\beta|)} \Big).$$

Вместе с (5.50) это влечет (5.51). $\square$

§ 6. Аппроксимация резольвенты $\big(A(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I\big)^{-1}$

6.1. **Аппроксимация резольвенты** $\big(A(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I\big)^{-1}$ **по операторной норме в** $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$**.** Мы применим к операторному семейству $A(t, \boldsymbol{\theta})$ теорему 2.4. Число t^0 определено в (5.20) и не зависит от $\boldsymbol{\theta}$. За счет присутствия проектора P на подпространство (5.7) постоянных вектор-функций, из (5.32) вытекает соотношение

$$t^{2p} S(\boldsymbol{\theta}) P = S(\mathbf{k}) P = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) P = b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) P = A^0(\mathbf{k}) P. \tag{6.1}$$

Следовательно, оператор под знаком нормы в (2.27) принимает вид $(A(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} - (A^0(\mathbf{k}) + \varepsilon^{2p} I)^{-1} P$. Постоянная C_A сейчас зависит от

$\boldsymbol{\theta}$. Согласно замечанию 2.5, эта постоянная — многочлен от переменных $\widetilde{C}$, $\|X_p(\boldsymbol{\theta})\|$, $\delta^{-1/2p}$, $c_*^{-1/2p}$ с положительными коэффициентами, зависящими лишь от p. Соотношения (5.16), (5.18), (5.19), (5.24) показывают, что постоянные δ, $\widetilde{C}$ и c_* не зависят от $\boldsymbol{\theta}$; в силу (5.6) можно заменить $\|X_p(\boldsymbol{\theta})\|$ на величину $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}$. Таким образом, после возможного завышения постоянную C_A можно считать не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$; она зависит только от d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Применяя теорему 2.4, приходим к неравенству

$$\begin{gathered}\varepsilon^{2p-1}\|(A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_A,\\ \varepsilon>0,\quad |\mathbf{k}|\leqslant t^0.\end{gathered}\tag{6.2}$$

Покажем, что под знаком нормы в (6.2) можно заменить проектор P тождественным оператором; это приведет лишь к изменению постоянной справа. Используя дискретное преобразование Фурье, убеждаемся, что

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{2p-1}\|(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P^\perp\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &=\varepsilon^{2p-1}\sup_{\mathbf{0}\neq\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}}\left|(b(\mathbf{s}+\mathbf{k})^*g^0b(\mathbf{s}+\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}\mathbf{1}_n)^{-1}\right|\\ &\leqslant\varepsilon^{2p-1}\sup_{\mathbf{0}\neq\mathbf{s}\in\widetilde{\Gamma}}\left(c_*|\mathbf{s}+\mathbf{k}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-1}\leqslant c_*^{-1/2p}r_0^{-1},\quad \varepsilon>0,\quad |\mathbf{k}|\leqslant t^0.\end{aligned}$$

Мы учли (5.34) и (4.11). Отсюда и из (6.2) получаем

$$\begin{gathered}\varepsilon^{2p-1}\|(A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ \leqslant C_A+c_*^{-1/2p}r_0^{-1},\quad \varepsilon>0,\quad |\mathbf{k}|\leqslant t^0.\end{gathered}\tag{6.3}$$

При $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0)$ оценки тривиальны. Каждое слагаемое под знаком нормы в (6.3) оценивается по-отдельности за счет оценки (5.23) для наименьшего собственного значения оператора $A(\mathbf{k})$ и аналогичного неравенства для случая эффективного оператора. Имеем

$$\begin{gathered}\varepsilon^{2p-1}\|(A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant c_*^{-1/2p}(t^0)^{-1},\\ \varepsilon^{2p-1}\|(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant c_*^{-1/2p}(t^0)^{-1},\\ \varepsilon>0,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).\end{gathered}\tag{6.4}$$

Объединяя (6.3) и (6.4) и обозначая

$$\widetilde{C}_A=\max\{C_A+c_*^{-1/2p}r_0^{-1},2c_*^{-1/2p}(t^0)^{-1}\},$$

приходим к следующему результату.

Теорема 6.1. *Пусть оператор* $A(\mathbf{k})=b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*gb(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ *определен в п.* 4.3, *и пусть* $A^0(\mathbf{k})=b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*g^0b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$, *где* g^0 *— эффективная матрица, определенная в п.* 5.3. *Тогда справедлива оценка*

$$\begin{gathered}\|(A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\widetilde{C}_A\varepsilon^{1-2p},\\ \varepsilon>0,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{gathered}$$

Постоянная $\widetilde{C}_A$ *зависит лишь от* d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

6.2. **Аппроксимация резольвенты** $\left(A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}$ **по энергетической норме.** Теперь мы применим к операторному семейству $A(t,\boldsymbol{\theta})$ теорему 3.1. Аналогично (6.1) из (5.27) следует, что

$$t^p Z(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda b(\mathbf{k})P = \Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})P. \tag{6.5}$$

С учетом (6.1) и (6.5) оператор под знаком нормы в (3.1) сейчас принимает вид

$$\mathcal{E}(\mathbf{k},\varepsilon) := A(\mathbf{k})^{1/2}\left((A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1} - (I+\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k}))(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P\right). \tag{6.6}$$

Согласно замечанию 3.4 и соотношениям (5.6), (5.16), (5.18), (5.19), (5.24) после возможного завышения постоянную $\check{C}_A$ можно считать не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$; она зависит только от d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Применяя теорему 3.1, приходим к неравенству

$$\varepsilon^{p-1}\left\|\mathcal{E}(\mathbf{k},\varepsilon)\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \check{C}_A, \quad \varepsilon>0, \quad |\mathbf{k}|\leqslant t^0. \tag{6.7}$$

Оценим теперь норму оператора (6.6) при $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0)$. Оператор (6.6) представим в виде суммы трех слагаемых:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{k},\varepsilon) = A(\mathbf{k})^{1/2}(A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1} - A(\mathbf{k})^{1/2}(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P\\ - A(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda P_m b(\mathbf{D}+\mathbf{k})(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P,\end{aligned} \tag{6.8}$$

где P_m — ортопроектор на подпространство $\mathfrak{M}$ постоянных векторфункций в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$.

Из (5.23) следует оценка первого слагаемого

$$\begin{aligned}\varepsilon^{p-1}\|A(\mathbf{k})^{1/2}(A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant c_*^{-1/2p}(t^0)^{-1},\\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).\end{aligned} \tag{6.9}$$

Используя присутствие проектора P, а также (4.4) и (5.34), для второго слагаемого получаем

$$\begin{aligned}&\|A(\mathbf{k})^{1/2}(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &= \|hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\left|b(\mathbf{k})\left(b(\mathbf{k})^*g^0b(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}\mathbf{1}_n\right)^{-1}\right|\\ &\leqslant \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}|\mathbf{k}|^p\left(c_*|\mathbf{k}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{6.10}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{p-1}\|A(\mathbf{k})^{1/2}(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\leqslant \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}c_*^{-1/2-1/2p}(t^0)^{-1}, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0).\end{aligned} \tag{6.11}$$

Для третьего члена в правой части (6.8) аналогично (6.10) имеем:

$$\begin{aligned}&\|A(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda P_m b(\mathbf{D}+\mathbf{k})(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\&\leqslant \|A(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda P_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\&\leqslant \alpha_1^{1/2}|\mathbf{k}|^p\left(c_*|\mathbf{k}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-1}\|A(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda P_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned}&\|A(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda P_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \|hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})\Lambda P_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\&\leqslant |\Omega|^{-1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\Lambda\|_{L_2(\Omega)}.\end{aligned}\tag{6.13}$$

Для $\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)}$ справедлива оценка (5.50). В силу (4.4) и (5.49)

$$\|b(\mathbf{k})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\mathbf{k}|^p\alpha_1^{1/2}|\Omega|^{1/2}C_\Lambda^{(1)} \leqslant r_1^p\alpha_1^{1/2}|\Omega|^{1/2}C_\Lambda^{(1)}, \quad \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}, \tag{6.14}$$

где $2r_1 = \operatorname{diam}\widetilde{\Omega}$. Из (5.50), (6.13) и (6.14) вытекает неравенство

$$\|A(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda P_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\left(C_\Lambda^{(2)}+r_1^p\alpha_1^{1/2}C_\Lambda^{(1)}\right), \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{6.15}$$

Теперь из (6.12) и (6.15) вытекает оценка нормы третьего члена в (6.8) при $|\mathbf{k}|>t^0$:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{p-1}\|A(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda P_m b(\mathbf{D}+\mathbf{k})(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_9,\\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0),\end{aligned}\tag{6.16}$$

где $C_9 := \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\left(C_\Lambda^{(2)}+r_1^p\alpha_1^{1/2}C_\Lambda^{(1)}\right)c_*^{-1/2-1/2p}(t^0)^{-1}$.

В итоге из (6.8), (6.9), (6.11) и (6.16) следует оценка оператора (6.6) при $|\mathbf{k}|>t^0$:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{p-1}\|\mathcal{E}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{C}_A, \quad \varepsilon>0, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}\setminus\mathcal{B}(t^0),\\&\widehat{C}_A := c_*^{-1/2p}(t^0)^{-1}\left(1+c_*^{-1/2}\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\right)+C_9.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Неравенства (6.7) и (6.17) приводят к следующему результату.

Теорема 6.2. *Пусть оператор $A(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*gb(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ определен в п. 4.3, и пусть $A^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^*g^0b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$, где g^0 — эффективная матрица, определенная в п. 5.3. Пусть P — ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство (5.7). Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи (5.26). Тогда при $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$ справедлива оценка*

$$\begin{aligned}\big\|A(\mathbf{k})^{1/2}\big((A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\\ -(I+\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k}))(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}P\big)\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_A^\circ\varepsilon^{1-p}.\end{aligned}$$

Постоянная $C_A^\circ = \max\{\check{C}_A, \widehat{C}_A\}$ зависит лишь от m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

§ 7. Аппроксимация резольвенты оператора A

7.1. Аппроксимация резольвенты $(A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Вернемся к оператору A, действующему в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В силу разложения (4.17) выполнено

$$\left(A+\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}=\mathcal{U}^{-1}\left(\int_{\widetilde{\Omega}}\oplus(A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\,d\mathbf{k}\right)\mathcal{U}. \tag{7.1}$$

Аналогичное разложение имеет место и для оператора $\left(A^0+\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&\|\left(A+\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}-\left(A^0+\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&=\operatorname*{ess\text{-}sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}}\|(A(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(A^0(\mathbf{k})+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из теоремы 6.1 вытекает следующий результат.

Теорема 7.1. *Пусть оператор $A=b(\mathbf{D})^*gb(\mathbf{D})$ определен в п. 4.1, и пусть $A^0=b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор. Тогда справедлива оценка*

$$\|(A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\widetilde{C}_A\varepsilon^{1-2p},\quad\varepsilon>0. \tag{7.2}$$

Постоянная $\widetilde{C}_A$ зависит лишь от d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

7.2. Аппроксимация резольвенты $\left(A+\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}$ по энергетической норме. Теперь мы получим аппроксимацию резольвенты $\left(A+\varepsilon^{2p}I\right)^{-1}$ при учете корректора, опираясь на теорему 6.2 и разложение (7.1). Напомним, что под действием преобразования Гельфанда оператор $b(\mathbf{D})$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$; а оператор умножения на периодическую матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$ (см. (4.16)). Нам потребуется также оператор $\Pi:=\mathcal{U}^{-1}[P]\mathcal{U}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь $[P]$ — оператор в $\mathcal{K}$, действующий послойно как оператор P. Легко видеть (см. [BSu3, (6.8)]), что Π есть ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$, где $\chi_{\widetilde{\Omega}}$ — характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}$, т. е.,

$$(\Pi\mathbf{u})(\mathbf{x})=(2\pi)^{-d/2}\int\limits_{\widetilde{\Omega}}e^{i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}. \tag{7.3}$$

(Отметим, что Π — сглаживающий оператор.)

Из сказанного следует, что оператор

$$\mathcal{E}(\varepsilon):=A^{1/2}\left((A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(I+\Lambda b(\mathbf{D}))(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\right)$$

раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{E}(\mathbf{k},\varepsilon)$ (см. (6.6)). Поэтому из теоремы 6.2 вытекает оценка

$$\varepsilon^{p-1}\|\mathcal{E}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_A^\circ,\quad\varepsilon>0. \tag{7.4}$$

Из (7.4) мы выводим следующий результат.

Теорема 7.2. *Пусть оператор* $A = b(\mathbf{D})^* g b(\mathbf{D})$ *определен в п.* 4.1, *и пусть* $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — *эффективный оператор. Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ-*периодическое решение задачи* (5.26), *а* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (5.30). *Пусть* Π — *оператор* (7.3). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\|(A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(I+\Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_A^{(1)}\varepsilon^{1-2p}, \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned}&\|A^{1/2}\left((A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(I+\Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_A^{(2)}\varepsilon^{1-p},\end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\|gb(\mathbf{D})(A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-\widetilde{g}b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_A^{(3)}\varepsilon^{1-p}. \quad (7.7)$$

Постоянные $C_A^{(1)}$, $C_A^{(2)}$, $C_A^{(3)}$ *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. Для проверки неравенства (7.5) используем (7.2) и оценим оператор

$$\Lambda b(\mathbf{D})\Pi(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1} = \Lambda\Pi_m b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi.$$

Здесь Π_m — ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. Оператор $[\Lambda]\Pi_m$ унитарно эквивалентен прямому интегралу от операторов $[\Lambda]P_m$, а потому

$$\|[\Lambda]\Pi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \|[\Lambda]P_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda^{(1)}. \quad (7.8)$$

Мы учли (5.49). Далее, используя (4.4), (5.34) и (7.3), получаем

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{2p-1}\|b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &=\varepsilon^{2p-1}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}}\left|b(\boldsymbol{\xi})(b(\boldsymbol{\xi})^*g^0b(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^{2p}\mathbf{1}_n)^{-1}\right|\\ &\leqslant\varepsilon^{2p-1}\alpha_1^{1/2}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}}|\boldsymbol{\xi}|^p\left(c_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-1}\\ &\leqslant\alpha_1^{1/2}c_*^{-1/2p}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}}|\boldsymbol{\xi}|^{p-1}\leqslant\alpha_1^{1/2}c_*^{-1/2p}r_1^{p-1},\quad\varepsilon>0.\end{aligned} \quad (7.9)$$

В итоге из (7.2), (7.8) и (7.9) вытекает оценка (7.5) с постоянной $C_A^{(1)} = \widetilde{C}_A + C_\Lambda^{(1)}\alpha_1^{1/2}c_*^{-1/2p}r_1^{p-1}$.

Докажем теперь оценку (7.6), опираясь на (7.4). В силу (4.4), (5.34) и (7.3) имеем

$$\begin{aligned}&\|A^{1/2}(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}(I-\Pi)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &=\|hb(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}(I-\Pi)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\sup_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant r_0}\left|b(\boldsymbol{\xi})\left(b(\boldsymbol{\xi})^*g^0b(\boldsymbol{\xi})+\varepsilon^{2p}\mathbf{1}_n\right)^{-1}\right|\\ &\leqslant\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\sup_{|\boldsymbol{\xi}|\geqslant r_0}|\boldsymbol{\xi}|^p\left(c_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-1}.\end{aligned} \quad (7.10)$$

Следовательно,

$$\varepsilon^{p-1}\|A^{1/2}(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}(I-\Pi)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}c_*^{-1/2-1/2p}r_0^{-1}.$$

Отсюда и из (7.4) вытекает оценка (7.6) с постоянной $C_A^{(2)} = C_A^\circ + \alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}c_*^{-1/2-1/2p}r_0^{-1}$.

Перейдем к доказательству неравенства (7.7). Обозначим

$$\mathcal{G}(\varepsilon) := gb(\mathbf{D})\left((A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(I+\Lambda b(\mathbf{D}))(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\right). \tag{7.11}$$

Из (7.4) вытекает оценка

$$\varepsilon^{p-1}\|\mathcal{G}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_A^\circ\|g\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad \varepsilon>0. \tag{7.12}$$

Используя (4.3), заметим, что для любой достаточно гладкой функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$ выполнено

$$b(\mathbf{D})(\Lambda\mathbf{u}) = (b(\mathbf{D})\Lambda)\mathbf{u} + \sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \sum_{\beta\leqslant\alpha:\,|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)\mathbf{D}^\beta\mathbf{u}.$$

Тогда с учетом обозначения (5.30) оператор (7.11) можно представить в виде

$$\mathcal{G}(\varepsilon) = gb(\mathbf{D})(A+\varepsilon^{2p}I)^{-1} - \widetilde{g}b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi - \widetilde{\mathcal{G}}(\varepsilon), \tag{7.13}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{G}}(\varepsilon) := g\sum_{|\alpha|=p} b_\alpha \sum_{\beta\leqslant\alpha:\,|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta(\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda)\Pi_m\mathbf{D}^\beta b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi.$$

Аналогично (7.8) имеем

$$\|[\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda]\Pi_m\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|\mathbf{D}^{\alpha-\beta}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_\Lambda. \tag{7.14}$$

В последнем переходе мы учли (5.51). В силу (4.5) и (7.14) имеем

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\mathcal{G}}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}C_\Lambda\sum_{|\alpha|=p}\sum_{\beta\leqslant\alpha:\,|\beta|\geqslant 1} C_\alpha^\beta\|\mathbf{D}^\beta b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\|_{L_2\to L_2}.\end{aligned} \tag{7.15}$$

Аналогично (7.9) из (4.4), (5.34) и (7.3) следует оценка

$$\|\mathbf{D}^\beta b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}}|\boldsymbol{\xi}|^{p+|\beta|}\left(c_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-1},$$

откуда

$$\begin{aligned}&\varepsilon^{p-1}\|\mathbf{D}^\beta b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \alpha_1^{1/2}c_*^{-1/2-1/2p}r_1^{|\beta|-1}, \quad |\beta|\geqslant 1.\end{aligned} \tag{7.16}$$

Неравенства (7.15) и (7.16) влекут

$$\varepsilon^{p-1}\|\widetilde{\mathcal{G}}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{10}, \quad \varepsilon>0, \tag{7.17}$$

где

$$C_{10} := \|g\|_{L_\infty} \alpha_1 C_\Lambda c_*^{-1/2-1/2p} \Big(\sum_{|\alpha|=p} \sum_{\beta \leqslant \alpha:\, |\beta| \geqslant 1} C_\alpha^\beta r_1^{|\beta|-1} \Big).$$

В итоге, из соотношений (7.12), (7.13) и (7.17) вытекает искомое неравенство (7.7) с постоянной $C_A^{(3)} = C_A^\circ \|g\|_{L_\infty}^{1/2} + C_{10}$. $\square$

Выделим специальные случаи. Если $g^0 = \overline{g}$, то выполнены условия (5.41), а тогда решение Λ задачи (5.26) равно нулю. Поэтому (7.6) упрощается, и мы приходим к следующему утверждению.

Предложение 7.3. *Если* $g^0 = \overline{g}$ (*т. е., выполнены условия* (5.41)), *то справедлива оценка*

$$\|A^{1/2} \left((A + \varepsilon^{2p} I)^{-1} - (A^0 + \varepsilon^{2p} I)^{-1} \right) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_A^{(2)} \varepsilon^{1-p}, \quad \varepsilon > 0. \tag{7.18}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $g^0 = \underline{g}$.

Предложение 7.4. *Если* $g^0 = \underline{g}$ (*т. е., справедливы представления* (5.43)), *то справедлива оценка*

$$\|g b(\mathbf{D})(A+\varepsilon^{2p} I)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p} I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{C}_A^{(3)} \varepsilon^{1-p}, \quad \varepsilon > 0. \tag{7.19}$$

Постоянная $\widetilde{C}_A^{(3)}$ *зависит лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. В силу замечания 5.6 в рассматриваемом случае выполнено $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Тогда неравенство (7.7) принимает вид

$$\|g b(\mathbf{D})(A + \varepsilon^{2p} I)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(A^0 + \varepsilon^{2p} I)^{-1} \Pi\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_A^{(3)} \varepsilon^{1-p} \tag{7.20}$$

при $\varepsilon > 0$. Аналогично (7.10) с учетом (5.40) имеем

$$\begin{aligned} &\|g^0 b(\mathbf{D})(A^0 + \varepsilon^{2p} I)^{-1}(I - \Pi)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \sup_{|\boldsymbol{\xi}| \geqslant r_0} |\boldsymbol{\xi}|^p \left(c_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p} + \varepsilon^{2p} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varepsilon^{p-1} \|g^0 b(\mathbf{D})(A^0 + \varepsilon^{2p} I)^{-1}(I - \Pi)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} c_*^{-1/2-1/2p} r_0^{-1}. \tag{7.21}$$

Из (7.20) и (7.21) вытекает неравенство (7.19) с постоянной $\widetilde{C}_A^{(3)} = C_A^{(3)} + \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} c_*^{-1/2-1/2p} r_0^{-1}$. $\square$

7.3. **Аппроксимация резольвенты** $\left(A - \zeta \varepsilon^{2p} I \right)^{-1}$ **при** $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Перенесем теперь результаты теорем 7.1 и 7.2 на случай резольвенты в произвольной регулярной точке, не лежащей на $\mathbb{R}_+$. Для этого используем подходящие тождества для резольвент (ср. [Su]).

Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$. Положим $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi}$, $0<\varphi<2\pi$, и введем обозначение

$$c(\varphi) = \begin{cases} |\sin\varphi|^{-1}, & \varphi \in (0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi) \\ 1, & \varphi\in[\pi/2,3\pi/2] \end{cases}. \tag{7.22}$$

Теорема 7.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.1. *Пусть* $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ *и* $c(\varphi)$ *определено в* (7.22). *При* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$\|(A-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\varphi)^2\varepsilon^{1-2p}|\zeta|^{1/2p-1}. \tag{7.23}$$

Постоянная $\mathcal{C}_1 = 4\widetilde{C}_A$ *зависит лишь от* d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. Пусть $\widehat{\zeta} = e^{i\varphi}$, $0<\varphi<2\pi$. Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned}&(A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} = (A+\varepsilon^{2p}I)(A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\\ &\times\left((A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right)(A^0+\varepsilon^{2p}I)(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}.\end{aligned} \tag{7.24}$$

Поскольку спектр оператора A содержится в $\mathbb{R}_+$, то

$$\begin{aligned}&\|(A+\varepsilon^{2p}I)(A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sup_{x\geqslant 0}(x+\varepsilon^{2p})\left|x-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}\right|^{-1}\\ &= \sup_{y\geqslant 0}(y+1)\left|y-\widehat{\zeta}\right|^{-1}\leqslant 2c(\varphi).\end{aligned} \tag{7.25}$$

Аналогично,

$$\|(A^0+\varepsilon^{2p}I)(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant 2c(\varphi). \tag{7.26}$$

Из (7.2), (7.24)–(7.26) вытекает неравенство

$$\|(A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant 4c(\varphi)^2\widetilde{C}_A\varepsilon^{1-2p},\quad \varepsilon>0. \tag{7.27}$$

Заменяя ε на $\varepsilon|\zeta|^{1/2p}$ в (7.27), приходим к искомому неравенству (7.23). $\square$

Теорема 7.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.2. *Пусть* $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ *и* $c(\varphi)$ *определено в* (7.22). *При* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|(A-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(I+\Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2\varepsilon^{1-2p}|\zeta|^{1/2p-1},\end{aligned} \tag{7.28}$$

$$\begin{aligned}&\|A^{1/2}\left((A-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(I+\Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \mathcal{C}_3 c(\varphi)^2\varepsilon^{1-p}|\zeta|^{1/2p-1/2},\end{aligned} \tag{7.29}$$

$$\begin{aligned}&\|gb(\mathbf{D})(A-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}-\widetilde{g}b(\mathbf{D})(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \mathcal{C}_4 c(\varphi)^2\varepsilon^{1-p}|\zeta|^{1/2p-1/2}.\end{aligned} \tag{7.30}$$

Постоянные $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. Пусть $\widehat{\zeta} = e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$. Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned}&(A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0 - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} = (A + \varepsilon^{2p}I)(A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} \\ &\times \left((A + \varepsilon^{2p}I)^{-1} - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0 + \varepsilon^{2p}I)^{-1}\right)(A^0 + \varepsilon^{2p}I)(A^0 - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} \\ &+ \varepsilon^{2p}(\widehat{\zeta} + 1)(A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Lambda b(\mathbf{D})\Pi(A^0 - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}.\end{aligned} \tag{7.31}$$

Слагаемые в правой части (7.31) обозначим через $\mathcal{J}_1(\widehat{\zeta}, \varepsilon)$, $\mathcal{J}_2(\widehat{\zeta}, \varepsilon)$.

Из (7.5), (7.25) и (7.26) вытекает оценка

$$\varepsilon^{2p-1}\|\mathcal{J}_1(\widehat{\zeta}, \varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 4c(\varphi)^2 C_A^{(1)}. \tag{7.32}$$

Для второго члена имеем

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{J}_2(\widehat{\zeta}, \varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\varepsilon^{2p}\|(A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \\ &\times \|\Lambda\Pi_m b(\mathbf{D})(A^0 + \varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\|_{L_2\to L_2}\|(A^0 + \varepsilon^{2p}I)(A^0 - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2\to L_2}.\end{aligned} \tag{7.33}$$

Заметим, что норма резольвенты $(A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}$ оценивается через величину, обратную к расстоянию от точки $\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}$ до $\mathbb{R}_+$:

$$\|(A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{-2p}c(\varphi). \tag{7.34}$$

Объединяя (7.8), (7.9), (7.26), (7.33) и (7.34), получаем

$$\varepsilon^{2p-1}\|\mathcal{J}_2(\widehat{\zeta}, \varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 4c(\varphi)^2 C_\Lambda^{(1)}\alpha_1^{1/2}c_*^{-1/2p}r_1^{p-1}. \tag{7.35}$$

Соотношения (7.31), (7.32) и (7.35) влекут оценку

$$\begin{aligned}&\|(A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0 - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2\varepsilon^{1-2p}, \quad \varepsilon > 0,\end{aligned} \tag{7.36}$$

с постоянной $\mathcal{C}_2 = 4C_A^{(1)} + 4C_\Lambda^{(1)}\alpha_1^{1/2}c_*^{-1/2p}r_1^{p-1}$. Заменяя ε на $\varepsilon|\zeta|^{1/2p}$ в (7.36), приходим к (7.28).

Для проверки неравенства (7.29), применим оператор $A^{1/2}$ к обеим частям равенства (7.31). Имеем

$$A^{1/2}\left((A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0 - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right) = \mathcal{T}_1(\widehat{\zeta}, \varepsilon) + \mathcal{T}_2(\widehat{\zeta}, \varepsilon), \tag{7.37}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_1(\widehat{\zeta}, \varepsilon) &= (A + \varepsilon^{2p}I)(A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} \\ &\times A^{1/2}\left((A + \varepsilon^{2p}I)^{-1} - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0 + \varepsilon^{2p}I)^{-1}\right) \\ &\times (A^0 + \varepsilon^{2p}I)(A^0 - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}, \\ \mathcal{T}_2(\widehat{\zeta}, \varepsilon) &= \varepsilon^{2p}(\widehat{\zeta} + 1)A^{1/2}(A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Lambda b(\mathbf{D})\Pi(A^0 - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}.\end{aligned}$$

Оценка первого члена следует из (7.6), (7.25) и (7.26):

$$\varepsilon^{p-1}\|\mathcal{T}_1(\widehat{\zeta},\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 4C_A^{(2)}c(\varphi)^2, \quad \varepsilon>0. \tag{7.38}$$

Оценим второй член:

$$\|\mathcal{T}_2(\widehat{\zeta},\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\varepsilon^{2p}\|A^{1/2}(A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2\to L_2}$$
$$\times \|\Lambda\Pi_m b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\|_{L_2\to L_2}\|(A^0+\varepsilon^{2p}I)(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2\to L_2}. \tag{7.39}$$

В силу (4.4), (5.34), (7.3) и (7.8)

$$\|\Lambda\Pi_m b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\|_{L_2\to L_2} \leqslant C_\Lambda^{(1)}\alpha_1^{1/2}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}}|\boldsymbol{\xi}|^p\left(c_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-1}. \tag{7.40}$$

С учетом (7.25) выполнено

$$\|A^{1/2}(A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant 2c(\varphi)\|A^{1/2}(A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant 2c(\varphi)\varepsilon^{-p}. \tag{7.41}$$

Теперь из (7.26) и (7.39)–(7.41) вытекает оценка

$$\varepsilon^{p-1}\|\mathcal{T}_2(\widehat{\zeta},\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 8c(\varphi)^2C_\Lambda^{(1)}\alpha_1^{1/2}\varepsilon^{2p-1}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\widetilde{\Omega}}|\boldsymbol{\xi}|^p\left(c_*|\boldsymbol{\xi}|^{2p}+\varepsilon^{2p}\right)^{-1}$$
$$\leqslant 8c(\varphi)^2C_\Lambda^{(1)}\alpha_1^{1/2}c_*^{-1/2p}r_1^{p-1}, \quad \varepsilon>0. \tag{7.42}$$

В итоге соотношения (7.37), (7.38) и (7.42) приводят к неравенству

$$\|A^{1/2}\left((A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(I+\Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leqslant \mathcal{C}_3c(\varphi)^2\varepsilon^{1-p}, \quad \varepsilon>0, \tag{7.43}$$

с постоянной $\mathcal{C}_3 = 4C_A^{(2)}+8C_\Lambda^{(1)}\alpha_1^{1/2}c_*^{-1/2p}r_1^{p-1}$. Заменяя ε на $\varepsilon|\zeta|^{1/2p}$ в (7.43), приходим к искомому неравенству (7.29).

Остается проверить (7.30). Воспользуемся тождеством

$$gb(\mathbf{D})(A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}-\widetilde{g}b(\mathbf{D})(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi$$
$$=\left(gb(\mathbf{D})(A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}-\widetilde{g}b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\right)(A^0+\varepsilon^{2p}I)(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}$$
$$+(\widehat{\zeta}+1)\varepsilon^{2p}gb(\mathbf{D})(A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\left((A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right). \tag{7.44}$$

Обозначим слагаемые в правой части (7.44) через $\mathcal{L}_1(\widehat{\zeta},\varepsilon)$, $\mathcal{L}_2(\widehat{\zeta},\varepsilon)$. Из (7.7) и (7.26) следует оценка

$$\|\mathcal{L}_1(\widehat{\zeta},\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2C_A^{(3)}c(\varphi)\varepsilon^{1-p}. \tag{7.45}$$

Второй член оценим с помощью (7.27):

$$\|\mathcal{L}_2(\widehat{\zeta},\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 8\varepsilon c(\varphi)^2 \widetilde{C}_A \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|A^{1/2}(A+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant 8\varepsilon^{1-p} c(\varphi)^2 \widetilde{C}_A \|g\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{7.46}$$

Теперь из (7.44)–(7.46) вытекает оценка

$$\|gb(\mathbf{D})(A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} - \widetilde{g}b(\mathbf{D})(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1}\Pi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_4 c(\varphi)^2\varepsilon^{1-p} \tag{7.47}$$

при $\varepsilon>0$ с постоянной $\mathcal{C}_4 = 2C_A^{(3)} + 8\widetilde{C}_A\|g\|_{L_\infty}^{1/2}$. Заменяя ε на $\varepsilon|\zeta|^{1/2p}$ в (7.47), получаем неравенство (7.30). $\square$

7.4. **Специальные случаи.** Установим аналоги предложений 7.3, 7.4 для резольвенты $(A-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}$. Следующее утверждение прямо вытекает из (7.29) и из того, что $\Lambda=0$ при $g^0=\overline{g}$.

Предложение 7.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.5. *Если* $g^0=\overline{g}$ (*т. е., выполнены условия* (5.41)), *то справедлива оценка*

$$\|A^{1/2}\left((A-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1} - (A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_3 c(\varphi)^2\varepsilon^{1-p}|\zeta|^{1/2p-1/2}, \quad \varepsilon>0.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $g^0=\underline{g}$.

Предложение 7.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.5. *Если* $g^0=\underline{g}$ (*т. е., справедливы представления* (5.43)), *то справедлива оценка*

$$\|gb(\mathbf{D})(A-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_4^\circ c(\varphi)^2\varepsilon^{1-p}|\zeta|^{1/2p-1/2}, \quad \varepsilon>0. \tag{7.48}$$

Постоянная $\mathcal{C}_4^\circ$ *зависит лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. В силу замечания 5.6 в рассматриваемом случае выполнено $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Рассмотрим сначала резольвенту в точке $\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}$, где $\widehat{\zeta}=e^{i\varphi}$. Справедлив следующий аналог тождества (7.44):

$$gb(\mathbf{D})(A-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} - g^0b(\mathbf{D})(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1} = \mathcal{L}_1^\circ(\widehat{\zeta},\varepsilon) + \mathcal{L}_2(\widehat{\zeta},\varepsilon)$$

где

$$\mathcal{L}_1^\circ(\widehat{\zeta},\varepsilon) = \left(gb(\mathbf{D})(A+\varepsilon^{2p}I)^{-1} - g^0b(\mathbf{D})(A^0+\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right) \times (A^0+\varepsilon^{2p}I)(A^0-\widehat{\zeta}\varepsilon^{2p}I)^{-1},$$

а второй член $\mathcal{L}_2(\widehat{\zeta},\varepsilon)$ — тот же, что в (7.44).

Из (7.19) и (7.26) вытекает оценка

$$\|\mathcal{L}_1^\circ(\widehat{\zeta},\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2c(\varphi)\widetilde{C}_A^{(3)}\varepsilon^{1-p}, \quad \varepsilon>0.$$

Отсюда и из (7.46) следует, что при $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\| g b(\mathbf{D})(A - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p} I)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(A^0 - \widehat{\zeta}\varepsilon^{2p} I)^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_4^\circ c(\varphi)^2 \varepsilon^{1-p}, \tag{7.49}$$

где $\mathcal{C}_4^\circ = 2\widetilde{C}_A^{(3)} + 8\widetilde{C}_A \|g\|_{L_\infty}^{1/2}$. Заменяя ε на $\varepsilon|\zeta|^{1/2p}$ в (7.49), приходим к (7.48). $\square$

7.5. **Устранение сглаживающего оператора.** Оказывается, при дополнительных предположениях относительно свойств матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ можно избавиться от сглаживающего оператора Π в аппроксимациях (7.28)–(7.30). Однако, порядок оценки членов, содержащих $I - \Pi$, отличается от порядка оценок (7.28)–(7.30); см. ниже предложение 7.12.

Условие 7.9. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* $\Lambda \in \widetilde{H}^p(\Omega)$ *задачи* (5.26) *ограничено и является мультипликатором из* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *в* $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\Lambda \in L_\infty(\mathbb{R}^d) \cap M(H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m) \to H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)).$$

Ввиду периодичности матрицы-функции Λ, условие 7.9 равносильно тому, что $\Lambda \in L_\infty(\Omega) \cap M(H^p(\Omega;\mathbb{C}^m) \to H^p(\Omega;\mathbb{C}^n))$. Норму оператора $[\Lambda]$ умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ обозначим через

$$M_\Lambda := \|[\Lambda]\|_{H^p(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{7.50}$$

Описание пространства мультипликаторов в классах Соболева можно найти в книге [MSh]. Можно указать достаточные условия выполнения условия 7.9.

Предложение 7.10. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих двух предположений*:
1°. $2p > d$;
2°. $g^0 = \underline{g}$, *т. е. имеют место представления* (5.43).
Тогда условие 7.9 *заведомо выполнено, причем* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и мультипликаторная норма* (7.50) *контролируются через* m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметры решетки* Γ.

Доказательство. Из теоремы вложения С. Л. Соболева и из теоремы пункта 1.3.3 книги [MSh], следует, что при условии $2p > d$ условие 7.9 выполнено автоматически за счет включения $\Lambda \in \widetilde{H}^p(\Omega)$. При этом величины $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и M_Λ оцениваются через $C\|\Lambda\|_{H^p(\Omega)}$, где C зависит от m, n, d, p и от области Ω. С учетом оценки (5.51) получаем первое утверждение.

При доказательстве второго утверждения будем считать, что $2p \leqslant d$ (иначе применимо первое утверждение). Предположим теперь, что $g^0 = \underline{g}$. В силу замечания 5.6 в этом случае выполнено $\widetilde{g} = g(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1}_m) = g^0$.

Тогда $\Lambda \in \widetilde{H}^p(\Omega)$ является Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})^{-1} g^0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{7.51}$$

Оператор $b(\mathbf{D})^* b(\mathbf{D})$ — матричный эллиптический оператор с постоянными коэффициентами. Поэтому решение задачи (7.51) можно описать в терминах коэффициентов Фурье:

$$\widehat{\Lambda}_{\mathbf{0}} = 0; \quad \widehat{\Lambda}_{\mathbf{s}} = (b(\mathbf{s})^* b(\mathbf{s}))^{-1}\, b(\mathbf{s})^* \widehat{(g^{-1})}_{\mathbf{s}} g^0, \quad \mathbf{0} \neq \mathbf{s} \in \widetilde{\Gamma}.$$

Поскольку $g^{-1} g^0 \in L_\infty \subset L_q(\Omega)$ при любом $q < \infty$, то в силу известной теоремы Марцинкевича о мультипликаторах для рядов Фурье (см. [Ma]) выполнено $\Lambda \in \widetilde{W}^p_q(\Omega)$ при любом $q < \infty$. Фиксируем q такое, что $pq > d$ (например, $q = p^{-1}(d+1)$). Из теоремы Марцинкевича следует оценка нормы $\|\Lambda\|_{W^p_q(\Omega)}$ в терминах m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ и $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$. Далее, из теоремы вложения С. Л. Соболева и следствия 1 пункта 1.3.4 книги [MSh] следует, что условие 7.9 выполнено за счет включения $\Lambda \in \widetilde{W}^p_q(\Omega)$. При этом величины $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и M_Λ оцениваются через $C\|\Lambda\|_{W^p_q(\Omega)}$, где C зависит от m, n, d, p и от области Ω. Это завершает доказательство второго утверждения. $\square$

Оценим теперь оператор $b(\mathbf{D})(I - \Pi)(A^0 - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1}$ по $(L_2 \to H^p)$-норме.

Лемма 7.11. *При $\varepsilon > 0$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ справедлива оценка*

$$\|b(\mathbf{D})(I - \Pi)(A^0 - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{11} c(\varphi), \tag{7.52}$$

где $C_{11} = 2\alpha_1^{1/2} c_*^{-1} \left(1 + r_0^{-2}\right)^{p/2}$.

Доказательство. Используя (4.4), (5.34) и (7.3), получаем:

$$\begin{aligned} &\|b(\mathbf{D})(I - \Pi)(A^0 + |\zeta|\varepsilon^{2p} I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^p(\mathbb{R}^d)} \\ &= \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d} (1 - \chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{p/2} \left| b(\boldsymbol{\xi}) \left(b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) + |\zeta|\varepsilon^{2p} \mathbf{1}_n \right)^{-1} \right| \\ &\leqslant \alpha_1^{1/2} \sup_{|\boldsymbol{\xi}| \geqslant r_0} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^{p/2} |\boldsymbol{\xi}|^p \left(c_* |\boldsymbol{\xi}|^{2p} + |\zeta|\varepsilon^{2p} \right)^{-1} \leqslant \alpha_1^{1/2} c_*^{-1} \left(1 + r_0^{-2}\right)^{p/2}. \end{aligned} \tag{7.53}$$

Далее, очевидна оценка

$$\begin{aligned} &\|(A^0 + |\zeta|\varepsilon^{2p} I)(A^0 - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sup_{x \geqslant 0} (x + |\zeta|\varepsilon^{2p}) |x - \zeta\varepsilon^{2p}|^{-1} \\ &= \sup_{y \geqslant 0} (y + 1) |y - \widehat{\zeta}|^{-1} \leqslant 2c(\varphi). \end{aligned} \tag{7.54}$$

Из (7.53) и (7.54) вытекает (7.52). $\square$

Предложение 7.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.6, *а также условие* 7.9. *Тогда при $\varepsilon > 0$ справедливы оценки*

$$\|\Lambda b(\mathbf{D})(I - \Pi)(A^0 - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_5 c(\varphi), \tag{7.55}$$

$$\|A^{1/2}\left(\Lambda b(\mathbf{D})(I-\Pi)(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_6 c(\varphi), \tag{7.56}$$

$$\|\widetilde{g}b(\mathbf{D})(I-\Pi)(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_7 c(\varphi), \tag{7.57}$$

Постоянные $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$ *и* $\mathcal{C}_7$ *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ, *а также от* M_Λ *и* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Доказательство. Оценка (7.55) с постоянной $\mathcal{C}_5=\|\Lambda\|_{L_\infty}C_{11}$ вытекает из условия 7.9 и оценки (7.52).

Для доказательства (7.56) заметим, что

$$\begin{aligned}&\|A^{1/2}\left(\Lambda b(\mathbf{D})(I-\Pi)(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \|g\|^{1/2}_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\|\Lambda b(\mathbf{D})(I-\Pi)(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{7.58}$$

Из условия 7.9 и неравенств (7.52), (7.58) вытекает (7.56) с постоянной $\mathcal{C}_6=\alpha_1^{1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}M_\Lambda C_{11}$.

Для доказательства неравенства (7.57) заметим, что в силу леммы 1 пункта 1.3.2 книги [MSh] из условия 7.9 вытекает, что $b(\mathbf{D})\Lambda$ является мультипликатором из $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем норма соответствующего оператора умножения оценивается в терминах α_1, $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и M_Λ:

$$\|[b(\mathbf{D})\Lambda]\|_{H^p(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda = \mathfrak{C}_\Lambda(\alpha_1, \|\Lambda\|_{L_\infty}, M_\Lambda).$$

Тогда и матрица $\widetilde{g}=g(b(\mathbf{D})\Lambda+\mathbf{1}_m)$ является мультипликатором из $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем $\|[\widetilde{g}]\|_{H^p(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \|g\|_{L_\infty}(\mathfrak{C}_\Lambda+1)$. Отсюда и из (7.52) вытекает оценка (7.57) с постоянной $\mathcal{C}_7=\|g\|_{L_\infty}(\mathfrak{C}_\Lambda+1)C_{11}$. $\square$

Теперь теорема 7.6 и предложение 7.12 влекут следующий результат.

Теорема 7.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.6, *а также условие* 7.9. *Тогда при* $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|(A-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(I+\Lambda b(\mathbf{D}))(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2\varepsilon^{1-2p}|\zeta|^{1/2p-1}+\mathcal{C}_5 c(\varphi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|A^{1/2}\left((A-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}-(I+\Lambda b(\mathbf{D}))(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \mathcal{C}_3 c(\varphi)^2\varepsilon^{1-p}|\zeta|^{1/2p-1/2}+\mathcal{C}_6 c(\varphi),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|gb(\mathbf{D})(A-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}-\widetilde{g}b(\mathbf{D})(A^0-\zeta\varepsilon^{2p}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \mathcal{C}_4 c(\varphi)^2\varepsilon^{1-p}|\zeta|^{1/2p-1/2}+\mathcal{C}_7 c(\varphi).\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ. *Постоянные* $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$, $\mathcal{C}_7$ *зависят от тех же величин, а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ.

§ 8. Усреднение оператора A_ε

8.1. **Аппроксимация резольвенты оператора A_ε по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.** Для всякой Γ-периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение

$$\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0.$$

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор A_ε, $\varepsilon > 0$, формально заданный дифференциальным выражением

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{8.1}$$

Как обычно, строгое определение оператора A_ε дается через соответствующую замкнутую квадратичную форму

$$a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Форма a_ε подчинена оценкам, аналогичным (4.8):

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^{2p} |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi}. \tag{8.2}$$

При малом ε коэффициенты оператора (8.1) быстро осциллируют. Типичная задача усреднения применительно к оператору (8.1) состоит в аппроксимации резольвенты при малом ε. Используя результаты §7 и масштабное преобразование, мы выводим теоремы об аппроксимации резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$.

Пусть T_ε — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования, заданный соотношением

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) := \varepsilon^{d/2} \mathbf{u}(\varepsilon \mathbf{x}).$$

Легко проверить следующее тождество

$$A_\varepsilon = \varepsilon^{-2p} T_\varepsilon^* A T_\varepsilon,$$

где A — оператор (4.1). Тогда

$$(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} = \varepsilon^{2p} T_\varepsilon^* (A - \zeta \varepsilon^{2p} I)^{-1} T_\varepsilon. \tag{8.3}$$

Аналогичное тождество верно и для оператора A^0:

$$(A^0 - \zeta I)^{-1} = \varepsilon^{2p} T_\varepsilon^* (A^0 - \zeta \varepsilon^{2p} I)^{-1} T_\varepsilon. \tag{8.4}$$

Вычитая (8.4) из (8.3) и пользуясь унитарностью оператора T_ε, получаем

$$\begin{aligned} &\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \varepsilon^{2p} \|(A - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1} - (A^0 - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Теорема 7.5 вместе с тождеством (8.5) приводят к следующему результату.

Теорема 8.1. *Пусть* A_ε — *оператор* (8.1) *и* A^0 — *эффективный оператор* (5.33). *Пусть* $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *и* $c(\varphi)$ *определено в* (7.22). *При* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{1/2p-1}. \tag{8.6}$$

Постоянная $\mathcal{C}_1$ *зависит лишь от* d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

8.2. **Аппроксимация резольвенты оператора A_ε по энергетической норме.** Теперь с помощью теоремы 7.6 мы получим аппроксимацию резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, а также аппроксимацию операторов $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ (отвечающих "потокам") по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$.

Пусть Π_ε — ПДО в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$, т. е.,

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int\limits_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle} \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\, d\boldsymbol{\xi}. \tag{8.7}$$

Операторы (7.3) и (8.7) связаны соотношением

$$\Pi_\varepsilon = T_\varepsilon^* \Pi T_\varepsilon. \tag{8.8}$$

Положим

$$K(\zeta;\varepsilon) := \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}\Pi_\varepsilon. \tag{8.9}$$

Оператор (8.9) называют *корректором*; этот оператор непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть* Π_ε — *оператор* (8.8), $K(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (8.9), *а* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (5.30). *При* $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^{2p} K(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon c(\varphi)^2 |\zeta|^{1/2p} \left(\mathcal{C}'|\zeta|^{-1} + \mathcal{C}''|\zeta|^{-1/2}\right), \end{aligned} \tag{8.10}$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}\Pi_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon c(\varphi)^2 \mathcal{C}_4 |\zeta|^{1/2p-1/2}. \end{aligned} \tag{8.11}$$

Постоянные $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$, $\mathcal{C}_4$ *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. Аналогично (8.3) с учетом (8.8) имеем

$$K(\zeta;\varepsilon) = \varepsilon^p T_\varepsilon^* \Lambda b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1} \Pi T_\varepsilon. \tag{8.12}$$

Из (8.3), (8.4) и (8.12) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \varepsilon^{2p}\|(A - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1} - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0 - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{8.13}$$

В силу (7.28) и (8.13) при $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{1/2p-1}. \tag{8.14}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}&\|A_\varepsilon^{1/2}\left((A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K(\zeta;\varepsilon)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \varepsilon^p \|A^{1/2}\left((A - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1} - (I + \Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(A^0 - \zeta\varepsilon^{2p} I)^{-1}\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (7.29) выводится неравенство

$$\begin{aligned}&\|A_\varepsilon^{1/2}\left((A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K(\zeta;\varepsilon)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \mathcal{C}_3 c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{1/2p-1/2}.\end{aligned} \tag{8.15}$$

Поскольку $(1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^p \leqslant 2^{p-1}(1 + |\boldsymbol{\xi}|^{2p})$, с учетом нижней оценки (8.2) для любой функции $\mathbf{u} \in H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}\|^2_{H^p(\mathbb{R}^d)} &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^p |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant 2^{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^d} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^{2p}) |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \\ &\leqslant 2^{p-1}\left(\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|A_\varepsilon^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right).\end{aligned}$$

Отсюда и из (8.14), (8.15) вытекает (8.10) с постоянными

$$\mathcal{C}' = 2^{(p-1)/2}\mathcal{C}_2, \quad \mathcal{C}'' = 2^{(p-1)/2}\mathcal{C}_3 \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}.$$

Неравенство (8.11) прямо следует из (7.30) с помощью масштабного преобразования. $\square$

Замечание 8.3. 1) При фиксированном $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ оценки из теорем 8.1, 8.2 имеют точный порядок $O(\varepsilon)$. При большом $|\zeta|$ порядок оценок улучшается за счет присутствия множителей вида $|\zeta|^{-s}$ (при $s > 0$) в правых частях. 2) Оценки (8.6), (8.10), (8.11) равномерны по углу φ в любом секторе вида $\{\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \ \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \varphi_0\}$ со сколь угодно малым φ_0.

8.3. **Специальные случаи.** Если $g^0 = \overline{g}$, то $\Lambda = 0$ и корректор (8.9) обращается в ноль. В этом случае (8.10) упрощается.

Предложение 8.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть* $g^0 = \overline{g}$ (*т. е., выполнены условия* (5.41)). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon c(\varphi)^2 |\zeta|^{1/2p}\left(\mathcal{C}'|\zeta|^{-1} + \mathcal{C}''|\zeta|^{-1/2}\right).\end{aligned}$$

Следующее утверждение выводится из предложения 7.8 масштабным преобразованием.

Предложение 8.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Если* $g^0 = \underline{g}$ (*т. е., справедливы представления* (5.43)), *то при* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(A - \zeta I)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_4^\circ c(\varphi)^2 \varepsilon |\zeta|^{1/2p-1/2}.$$

8.4. **Устранение сглаживающего оператора.** Предположим теперь, что выполнено условие 7.9. Тогда вместо корректора (8.9) можно использовать оператор

$$K^0(\zeta;\varepsilon) := \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}, \tag{8.16}$$

который в этом случае непрерывно переводит $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Отметим, что оператор (8.16) — традиционный корректор, применяемый в теории усреднений.

Из теоремы 7.13 масштабным преобразованием выводится следующий результат (ср. с выводом теоремы 8.2).

Теорема 8.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1, *а также условие* 7.9. *Пусть* $K^0(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (8.16), *а* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (5.30). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (A^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon^p K^0(\zeta;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^p(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon c(\varphi)^2 |\zeta|^{1/2p}\left(\mathcal{C}'|\zeta|^{-1} + \mathcal{C}''|\zeta|^{-1/2}\right) + \mathcal{C}_8 \varepsilon^p c(\varphi),\end{aligned} \tag{8.17}$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(A - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(A^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon \mathcal{C}_4 c(\varphi)^2 |\zeta|^{1/2p-1/2} + \mathcal{C}_7 \varepsilon^p c(\varphi).\end{aligned} \tag{8.18}$$

Постоянные $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$, $\mathcal{C}_4$ *зависят лишь от* m, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ. *Постоянные* $\mathcal{C}_7$ *и* $\mathcal{C}_8$ *зависят от тех же величин, а также от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* M_Λ.

Отметим, что в теореме 8.6 мы наложили ограничение $0 < \varepsilon \leqslant 1$, поскольку при выводе (8.17) используется, что $\varepsilon^{2p} \leqslant \varepsilon^p$. Кроме того, оценки (8.17), (8.18) представляют интерес при малом ε. Выражение для постоянной $\mathcal{C}_8$ имеет вид $\mathcal{C}_8 = 2^{(p-1)/2}\left(\mathcal{C}_5 + \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\mathcal{C}_6\right)$.

Сопоставляя предложение 7.10 и теорему 8.6, приходим к следующему утверждению.

Следствие 8.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть* $K^0(\zeta;\varepsilon)$ — *оператор* (8.16), *а* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (5.30). *Кроме того, пусть выполнено хотя бы одно из следующих двух предположений*:
1°. $2p > d$;
2°. $g^0 = \underline{g}$, *т. е. имеют место представления* (5.43).
Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедливы оценки* (8.17) *и* (8.18). *При этом все постоянные в этих оценках зависят лишь от* m, n, d, p, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Замечание 8.8. 1) При фиксированном $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ оценки из теоремы 8.6 имеют точный порядок $O(\varepsilon)$. 2) Оценки (8.17) и (8.18) равномерны по углу φ в любом секторе вида $\{\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} \in \mathbb{C} : \ \varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \varphi_0\}$ со сколь угодно малым φ_0. 3) Условия следствия 8.7 выполнены в следующих интересных для приложений случаях: а) когда $p = 2$ и $d = 2$ или $d = 3$, выполнено $2p > d$; б) когда $m = n$, выполнено $g^0 = \underline{g}$. Например, это верно для оператора $A_\varepsilon = \Delta g^\varepsilon(\mathbf{x})\Delta$.

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного операторного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 5, 69–90.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[V] Вениаминов Н. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов высокого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 5, 69–103.

[Zh] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), № 3, 305–308.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.

[ZhPas] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[MSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1986.

[Ma] Marcinkiewicz J., *Sur les multiplicateurs des series de Fourier*, Studia Math. **8** (1939), 78–91.

[Su] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), вып. 4, 87–166.