

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ – 4/2015

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ  
ПРИ УСРЕДНЕНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ВТОРОГО ПОРЯДКА В  $\mathbb{R}^d$   
С ВКЛЮЧЕНИЕМ МЛАДШИХ ЧЛЕНОВ

Ю. М. Мешкова<sup>1,2</sup>, Т. А. Суслина<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,  
14 линия ВО, д. 29Б  
Санкт-Петербург, 199178, Россия

<sup>2</sup>Санкт-Петербургский государственный университет,  
Физический факультет,  
Ульяновская ул., д. 3, Петродворец,  
Санкт-Петербург, 198504, Россия

e-mail: juliavmeshke@yandex.ru  
e-mail: suslina@list.ru

25 августа 2015 г.

АННОТАЦИЯ

В  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  рассматривается самосопряженный оператор  $\mathcal{B}_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ , порожденный дифференциальным выражением  $b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d(a_j(\mathbf{x}/\varepsilon)D_j + D_ja_j(\mathbf{x}/\varepsilon)^*) + Q(\mathbf{x}/\varepsilon)$ , где  $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$  – дифференциальный оператор первого порядка, а  $g, a_j, Q$  – матрицы-функции в  $\mathbb{R}^d$ , периодические относительно некоторой решетки  $\Gamma$ . При этом  $g$  ограничена и положительно определена, а коэффициенты  $a_j, Q$ , вообще говоря, неограничены. Изучается обобщенная резольвента  $(\mathcal{B}_\varepsilon - \zeta Q_0(\mathbf{x}/\varepsilon))^{-1}$ , где  $Q_0$  –  $\Gamma$ -периодическая, ограниченная и положительно определенная матрица-функция, а  $\zeta$  – комплексный параметр. Получены аппроксимации обобщенной резольвенты по  $(L_2 \rightarrow L_2)$ - и  $(L_2 \rightarrow H^1)$ -нормам с двухпараметрическими оценками погрешности (относительно параметров  $\varepsilon$  и  $\zeta$ ).

**Ключевые слова:** периодические дифференциальные операторы, эллиптические системы, усреднение, корректор, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 14-01-00760) и СПбГУ (проект 11.38.263.2014). Первый автор поддержан Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ, дог. 11.G34.31.0026, и ОАО „Газпром-нефть“.

**ПРЕПРИНТЫ**

Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
РАН

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

С. В. Кисляков

**РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, В. Н. Кублановская,  
Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич,  
Н. Ю. Нецевтаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин, В. Н. Судаков, О. М. Фоменко.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
§ 1. Класс операторов. Аппроксимация обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$	8
§ 2. Вспомогательные утверждения	18
§ 3. Сглаживание по Стеклову. Другая аппроксимация обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$	24
§ 4. Основные результаты работы	27
§ 5. Доказательство теоремы 4.1	29
§ 6. Доказательство теорем 4.2 и 4.4	33
§ 7. Устранение сглаживающего оператора. Специальные случаи	41
§ 8. Другая аппроксимация обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$	47
§ 9. Примеры применения общих результатов	54
Список литературы	61

## ВВЕДЕНИЕ

Статья относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов (ДО). Теории усреднения посвящена обширная литература. В первую очередь укажем книги [BeLPap, BaPan, ZhKO].

**0.1. Постановка задачи.** В работе изучаются матричные эллиптические ДО  $\mathcal{B}_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ , действующие в пространстве  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Пусть  $\Gamma$  — решетка в  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Omega$  — ячейка решетки  $\Gamma$ . Для  $\Gamma$ -периодических функций в  $\mathbb{R}^d$  используем обозначения  $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ ,  $\bar{\psi} := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ .

Старшая часть  $\mathcal{A}_\varepsilon$  оператора  $\mathcal{B}_\varepsilon$  задается в факторизованной форме

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad (0.1)$$

где  $b(\mathbf{D})$  — матричный однородный ДО первого порядка и  $g(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодическая матрица-функция в  $\mathbb{R}^d$ , ограниченная и положительно определенная. (Точные условия на  $b(\mathbf{D})$  и  $g(\mathbf{x})$  приведены ниже в п. 1.3.) Простейший пример оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  — оператор акустики  $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla$ ; оператор теории упругости также допускает запись в требуемом виде. Задача усреднения для оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  подробно исследовалась в серии работ [BSu1, BSu2, BSu3], а также в [Su5, Su7]. Сейчас мы рассматриваем более общий самосопряженный ДО  $\mathcal{B}_\varepsilon$ , включающий младшие члены:

$$\mathcal{B}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (0.2)$$

Здесь  $a_j(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодические матрицы-функции, вообще говоря, неограниченные. В общем случае коэффициент  $Q(\mathbf{x})$  — обобщенная функция, порожденная некоторой периодической мерой со значениями

в классе эрмитовых матриц. (Точные условия на коэффициенты даны ниже в п. 1.4, 1.5.) Точное определение оператора  $\mathcal{B}_\varepsilon$  дается через соответствующую квадратичную форму.

Коэффициенты оператора (0.2) быстро осциллируют при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . *Типичная задача теории усреднения применительно к оператору  $\mathcal{B}_\varepsilon$  состоит в аппроксимации при  $\varepsilon \rightarrow 0$  резольвенты  $(\mathcal{B}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$  либо обобщенной резольвенты  $(\mathcal{B}_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ .* Здесь  $Q_0(\mathbf{x})$  — Г-периодическая матрица-функция, положительно определенная и ограниченная.

**0.2. Обзор результатов по операторным оценкам погрешности.** Задача усреднения для оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  изучалась в цикле работ [BSu1, BSu2, BSu3] М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной. В [BSu1] была получена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.3)$$

Здесь  $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$  — эффективный оператор с постоянной эффективной матрицей  $g^0$ . Определение эффективной матрицы (см. п. 1.8 ниже) хорошо известно в теории усреднения. Далее, в [BSu3] была найдена аппроксимация резольвенты  $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  по норме операторов, действующих из  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в класс Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ :

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.4)$$

Здесь  $\mathcal{K}(\varepsilon)$  — корректор. Корректор представляет собой оператор нулевого по  $\varepsilon$  порядка, но содержит быстро осциллирующие множители, поэтому  $\|\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2 \rightarrow H^1} = O(\varepsilon^{-1})$ . Оценки вида (0.3), (0.4), получившие название *операторных оценок погрешности*, имеют точный порядок  $O(\varepsilon)$ ; постоянные в оценках контролируются явно через данные задачи. Метод работ [BSu1, BSu2, BSu3] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Впоследствии метод [BSu1, BSu2, BSu3] был обобщен Т. А. Суслиной [Su1, Su2, Su6] на случай оператора (0.2). В работе [Su2] установлены аналоги оценок (0.3), (0.4):

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon + \lambda Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}^0 + \lambda \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon, \quad (0.5)$$

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon + \lambda Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}^0 + \lambda \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.6)$$

Здесь вещественная постоянная  $\lambda$  выбрана так, чтобы оператор  $\mathcal{B}_\varepsilon + \lambda Q_0^\varepsilon$  был положительно определен;  $\mathcal{B}^0$  — соответствующий эффективный оператор с постоянными коэффициентами. Оценки (0.5), (0.6) имеют точный порядок  $O(\varepsilon)$ , постоянные допускают контроль через данные задачи и  $|\lambda|$  (но задача о получении оценок с оптимальной зависимостью констант от спектрального параметра  $\lambda$  не ставилась).

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в теории усреднения был предложен В. В. Жиковым. В работах [Zh1, Zh2] и [ZhPas] были получены оценки вида (0.3), (0.4) для операторов акустики и теории упругости. Метод основан на анализе первого приближения к решению и введении дополнительного параметра. Помимо задач в  $\mathbb{R}^d$  в

[Zh1, Zh2, ZhPas] изучались задачи в ограниченной области  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  при условии Дирихле либо Неймана на границе.

Также операторные оценки погрешности для задач Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения второго порядка (без младших членов) в ограниченной области изучались различными методами в работах [Gr1, Gr2], [KeLiS], [PSu], [Su3, Su4, Su5, Su7]; см. подробный обзор во введении к работам [Su4, Su7].

В присутствии членов первого и нулевого порядков задача усреднения для оператора вида (0.2) в  $\mathbb{R}^d$  изучалась в статье [Bo] Д. И. Борисова. В [Bo] было найдено выражение для эффективного оператора  $\mathcal{B}^0$  и получены оценки погрешности вида (0.5), (0.6). При этом предполагалось, что коэффициенты оператора зависят не только от быстрой, но и от медленной переменной. Однако в [Bo] коэффициенты оператора предполагались достаточно гладкими.

До сих пор речь шла об аппроксимации резольвент в фиксированной регулярной точке. Аппроксимация оператора  $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$  в зависимости от  $\varepsilon$  и  $\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  получена в недавних работах [Su5, Su7]:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\phi)|\zeta|^{-1/2}\varepsilon, \quad (0.7)$$

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(\phi)(1 + |\zeta|^{-1/2})\varepsilon. \quad (0.8)$$

Была прослежена зависимость констант в оценках (0.7), (0.8) от угла  $\phi$ . Оценки (0.7), (0.8) являются двухпараметрическими (относительно  $\varepsilon$  и  $|\zeta|$ ); они равномерны по  $\phi$  в секторе  $\phi \in [\phi_0, 2\pi - \phi_0]$  при сколь угодно малом  $\phi_0 > 0$ . В работах [Su5, Su7] также получены двухпараметрические оценки погрешности при усреднении резольвент операторов  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}, \mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  вида (0.1), действующих в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана на границе.

Стимулом к получению двухпараметрических оценок вида (0.7), (0.8) послужило изучение усреднения параболических задач, основанное на представлении операторной экспоненты в виде

$$e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t} = -(2\pi i)^{-1} \int_\gamma e^{-\zeta t} (\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} d\zeta, \quad \dagger = D, N,$$

где  $\gamma \subset \mathbb{C}$  — контур, обходящий спектр оператора  $\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}$  в положительном направлении. (Подробнее см. [MSu1, MSu2].)

**0.3. Основные результаты.** Прежде чем формулировать результаты, удобно перейти к неотрицательному оператору  $B_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon + cQ_0^\varepsilon$ , выбирая подходящую постоянную  $c$ . Тогда  $B^0 = \mathcal{B}^0 + c\overline{Q_0}$  — соответствующий эффективный оператор. Цель работы — получение аппроксимаций обобщенной резольвенты  $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$  в зависимости от  $\varepsilon$  и спектрального параметра  $\zeta$ .

Основные результаты работы — оценки

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\phi) \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \quad (0.9)$$

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(\phi) \varepsilon, \quad (0.10)$$

справедливые при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , и  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Прослежена зависимость констант в оценках от угла  $\phi = \arg \zeta$ . Двухпараметрические оценки (0.9) и (0.10) равномерны по  $\phi$  в любой области вида  $\{\zeta = |\zeta| e^{i\phi} \in \mathbb{C} : |\zeta| \geq 1, \phi_0 \leq \phi \leq 2\pi - \phi_0\}$  при сколь угодно малом  $\phi_0 > 0$ .

Корректор в (0.10) в общем случае содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем случаи, когда можно использовать более простой корректор.

Помимо оценок для обобщенной резольвенты мы находим аппроксимацию по  $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норме операторов вида  $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ , отвечающих потокам.

Оценки (0.9), (0.10) обобщают результаты (0.7), (0.8) из [Su5, Su7] на оператор  $B_\varepsilon$ , включающий младшие члены. Однако есть и отличие: оценки (0.7), (0.8) справедливы во всей области  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ , в то время как в (0.9), (0.10) дополнительно предполагается, что  $|\zeta| \geq 1$ . Это связано с присутствием членов первого и нулевого порядков.

Для полноты изложения мы находим аппроксимацию оператора  $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ , справедливую в более широкой области изменения параметра  $\zeta$  с оценками погрешности, имеющими другое поведение относительно  $\zeta$ . (Подробнее см. §8 ниже.)

**0.4. Метод исследования.** Метод основан на применении результатов (0.5), (0.6) в фиксированной точке  $\lambda$  к операторному семейству  $B_\varepsilon(\vartheta)$ , зависящему от дополнительного параметра  $0 < \vartheta \leq 1$ . Оператор  $B_\varepsilon(\vartheta)$  получается из оператора  $B_\varepsilon$  домножением коэффициентов  $a_j^\varepsilon(\mathbf{x})$  на  $\vartheta$ , а коэффициентов  $Q^\varepsilon(\mathbf{x})$  и  $Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})$  на  $\vartheta^2$ . Оценки (0.5), (0.6) справедливы для  $(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda Q_0^\varepsilon)^{-1}$  с общими постоянными при всех  $0 < \vartheta \leq 1$ .

Обсудим доказательство оценки (0.9). Применяя (0.5) к  $B_\varepsilon(\vartheta)$  и делая масштабное преобразование, получаем оценку

$$\begin{aligned} &\|(B(\varepsilon; \vartheta) + \lambda \varepsilon^2 Q_0)^{-1} - (B^0(\varepsilon; \vartheta) + \lambda \varepsilon^2 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \varepsilon^{-1}, \quad 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}. \end{aligned} \quad (0.11)$$

(При  $1 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}$  используются грубые оценки.) Здесь

$$\begin{aligned} B(\varepsilon; \vartheta) &= b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \vartheta \varepsilon \sum_{j=1}^d (a_j(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j(\mathbf{x})^*) \\ &\quad + \vartheta^2 \varepsilon^2 Q(\mathbf{x}) + \vartheta^2 \varepsilon^2 c Q_0(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

оператор  $B^0(\varepsilon; \vartheta)$  получается из эффективного оператора  $B^0$  аналогичным образом. С помощью подходящего тождества для обобщенных резольвент мы переносим оценку (0.11) в точку  $\widehat{\zeta} = e^{i\phi}$ ,  $\phi \in (0, 2\pi)$ :

$$\|(B(\varepsilon; \vartheta) - \widehat{\zeta}\varepsilon^2 Q_0)^{-1} - (B^0(\varepsilon; \vartheta) - \widehat{\zeta}\varepsilon^2 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\phi)\varepsilon^{-1}.$$

В полученном неравенстве полагаем  $\varepsilon = \widetilde{\varepsilon}|\zeta|^{1/2}$ ,  $\vartheta = |\zeta|^{-1/2}$ , где  $0 < \widetilde{\varepsilon} \leq 1$ . Ограничение  $|\zeta| \geq 1$  обеспечивает выполнение условия  $0 < \vartheta \leq 1$ . Делая обратное масштабное преобразование и переобозначая  $\widetilde{\varepsilon} := \varepsilon$ , приходим к (0.9). Оценка (0.10) проверяется на том же пути.

Прием, основанный на масштабном преобразовании и использовании резольвентных тождеств, ранее использовался в [Su5, Su7]. Необходимость введения дополнительного параметра в настоящей работе обусловлена присутствием членов первого и нулевого порядков.

Применению полученных результатов к усреднению эллиптических систем в ограниченной области  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  авторы планируют посвятить отдельную статью [MSu3].

**0.5. Структура работы.** Работа состоит из девяти параграфов. В §1 вводится класс операторов, описывается эффективный оператор и формулируются результаты из [Su2]. В §2 содержится вспомогательный материал. В §3 из (0.6) выводится аналогичная оценка, но с другим сглаживающим оператором в корректоре (мы переходим к сглаживанию по Стеклову, более удобному для последующего применения к задачам в ограниченной области). Основные результаты работы сформулированы в §4. Доказательство оценки (0.9) приведено в §5; в §6 устанавливается оценка (0.10), а также аппроксимация „потока”  $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ . В §7 выделяются случаи, когда сглаживатель в корректоре удается устранить, и обсуждаются специальные случаи. Аппроксимации обобщенной резольвенты, справедливые в более широкой области изменения параметра  $\zeta$ , установлены в §8. В §9 приводятся примеры применения общих результатов. Рассмотрен скалярный эллиптический оператор вида

$$\mathcal{B}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}),$$

который можно трактовать как периодический оператор Шрёдингера с быстро осциллирующими метрикой  $g^\varepsilon$ , магнитным потенциалом  $\mathbf{A}^\varepsilon$  и электрическим потенциалом  $\varepsilon^{-1} v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon$ , содержащим сингулярное первое слагаемое. Также рассмотрен периодический оператор Шрёдингера, содержащий сильно сингулярный потенциал  $\varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon$ .

**0.6. Обозначения.** Пусть  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H}_*$  — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы  $(\cdot, \cdot)_\mathfrak{H}$  и  $|\cdot|_\mathfrak{H}$  означают скалярное произведение и норму в  $\mathfrak{H}$ ; символ  $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*}$  означает норму линейного непрерывного оператора из  $\mathfrak{H}$  в  $\mathfrak{H}_*$ .

Символы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и  $|\cdot|$  означают соответственно скалярное произведение и норму в  $\mathbb{C}^n$ ;  $\mathbf{1}_n$  — единичная  $(n \times n)$ -матрица. Для  $z \in \mathbb{C}$  через  $z^*$  обозначается комплексно сопряженное число. (Мы используем такое

нестандартное обозначение, так как верхняя черта означает среднее значение периодической функции по ячейке периодов.) Если  $a — (m \times n)$ -матрица, то символ  $|a|$  означает норму матрицы  $a$  как оператора из  $\mathbb{C}^n$  в  $\mathbb{C}^m$ . Используем обозначения  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ ,  $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$ . Классы  $L_p$  вектор-функций в  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  со значениями в  $\mathbb{C}^n$  обозначаем через  $L_p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Классы Соболева  $\mathbb{C}^n$ -значных функций в области  $\mathcal{O}$  обозначаются через  $H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . При  $n = 1$  пишем просто  $L_p(\mathcal{O})$ ,  $H^s(\mathcal{O})$ , но, если это не ведет к недоразумениям, мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций.

Используем обозначение  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ . Различные оценочные постоянные обозначаются символами  $c$ ,  $\mathfrak{c}$ ,  $C$ ,  $\mathfrak{C}$  (возможно, с индексами и значениями).

## § 1. КЛАСС ОПЕРАТОРОВ. АППРОКСИМАЦИЯ ОБОВЩЕННОЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$

В этом параграфе вводится рассматриваемый класс операторов, описывается эффективный оператор и формулируются результаты из [Su2].

**1.1. Решетки в  $\mathbb{R}^d$ .** Пусть  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  — решетка, порожденная базисом  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$ :

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d \nu_j \mathbf{a}_j, \nu_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Пусть  $\Omega$  — элементарная ячейка решетки  $\Gamma$ :

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \tau_j \mathbf{a}_j, -\frac{1}{2} < \tau_j < \frac{1}{2} \right\}.$$

Обозначим  $|\Omega| = \text{mes } \Omega$ ,  $2r_1 = \text{diam } \Omega$ .

Базис  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d \in \mathbb{R}^d$ , двойственный к  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$ , определяется из соотношений  $\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_i \rangle = 2\pi\delta_{ji}$ , где  $\delta_{ji}$  — символ Кронекера. Двойственной к решетке  $\Gamma$  называется решетка, порожденная двойственным базисом:

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b} = \sum_{j=1}^d \mu_j \mathbf{b}_j, \mu_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

В качестве фундаментальной области двойственной решетки  $\tilde{\Gamma}$  удобно взять первую зону Бриллюэна:

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, 0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma} \right\}.$$

Пусть  $r_0$  — радиус шара, вписанного в  $\text{clos } \tilde{\Omega}$ , т. е.  $2r_0 = \min_{0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\mathbf{b}|$ .

Для Г-периодических измеримых матриц-функций систематически используются следующие обозначения:

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}/\varepsilon), \quad \varepsilon > 0;$$

$$\bar{f} := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \underline{f} := \left( |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} f(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

Здесь при определении  $\bar{f}$  предполагается, что  $f \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ , а при определении  $\underline{f}$  считается, что матрица  $f$  квадратная и неособая, причем  $f^{-1} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ . Через  $[f^\varepsilon]$  обозначается оператор умножения на матрицу-функцию  $f^\varepsilon(\mathbf{x})$ .

Через  $\tilde{H}^1(\Omega)$  обозначается подпространство тех функций из  $H^1(\Omega)$ , Г-периодическое продолжение которых на  $\mathbb{R}^d$  принадлежит  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ .

**1.2. Сглаживающий оператор  $\Pi_\varepsilon$ .** Через  $\Pi_\varepsilon^{(k)}$ ,  $\varepsilon > 0$ , обозначим ПДО с символом  $\chi_{\tilde{\Omega}/\varepsilon}(\xi)$ , действующий в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$  (где  $k \in \mathbb{N}$ ):

$$(\Pi_\varepsilon^{(k)} \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\tilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x}, \xi \rangle} \hat{\mathbf{u}}(\xi) d\xi, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k). \quad (1.1)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{u}}$  — Фурье-образ функции  $\mathbf{u}$ . Отметим, что при  $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$  выполнено  $\Pi_\varepsilon^{(k)} \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{D}^\alpha \Pi_\varepsilon^{(k)} \mathbf{u}$  для любого мультииндекса  $\alpha$  длины  $|\alpha| \leq s$ . В дальнейшем мы будем опускать в обозначениях зависимость оператора  $\Pi_\varepsilon^{(k)}$  от  $k$  и писать просто  $\Pi_\varepsilon$ .

Ниже нам потребуются следующие свойства оператора  $\Pi_\varepsilon$ , установленные в [PSu, предложение 1.4] и [BSu3, п. 10.2].

**Предложение 1.1.** Для любой функции  $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$  при  $\varepsilon > 0$  выполнена оценка

$$\|\Pi_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon r_0^{-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

**Предложение 1.2.** Пусть  $f$  — Г-периодическая функция в  $\mathbb{R}^d$  такая, что  $f \in L_2(\Omega)$ . Тогда оператор  $[f^\varepsilon] \Pi_\varepsilon$  непрерывен в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$  и при  $\varepsilon > 0$  выполнена оценка

$$\|[f^\varepsilon] \Pi_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

**1.3. Оператор  $\mathcal{A}$ .** Рассмотрим оператор  $\mathcal{A}$  в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь  $g$  — Г-периодическая матрица-функция размера  $m \times m$ , вообще говоря, с комплексными элементами. Считаем, что

$$g(\mathbf{x}) > 0, \quad g, g^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \quad (1.2)$$

Далее,  $b(\mathbf{D})$  — дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l. \quad (1.3)$$

Здесь  $b_l$ ,  $l = 1, \dots, d$ , — постоянные  $(m \times n)$ -матрицы, вообще говоря, с комплексными элементами. Считаем, что  $m \geq n$ , и что символ  $b(\xi) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$  оператора  $b(\mathbf{D})$  имеет максимальный ранг:

$$\operatorname{rank} b(\xi) = n, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Это условие равносильно существованию таких положительных постоянных  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ , что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\theta)^* b(\theta) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \theta \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty. \quad (1.4)$$

Отметим неравенство, вытекающее из (1.4):

$$|b_l| \leq \alpha_1^{1/2}, \quad l = 1, \dots, d. \quad (1.5)$$

Точное определение:  $\mathcal{A}$  есть самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , порожденный квадратичной формой

$$\mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}(\mathbf{x}), b(\mathbf{D}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

Замкнутость и неотрицательность формы  $\mathfrak{a}$  подтверждают оценки

$$\begin{aligned} \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}, \\ \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \end{aligned} \quad (1.6)$$

вытекающие из (1.2) и (1.4).

**1.4. Операторы  $\mathcal{Y}$  и  $\mathcal{Y}_2$ .** Рассмотрим замкнутый оператор  $\mathcal{Y}$ , действующий из  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$  по правилу

$$\mathcal{Y}\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \operatorname{col} \{D_1\mathbf{u}, \dots, D_d\mathbf{u}\}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

Согласно нижней оценке (1.6) выполнено

$$\|\mathcal{Y}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq c_1^2 \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}], \quad c_1 = \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (1.7)$$

Пусть в  $\mathbb{R}^d$  заданы  $\Gamma$ -периодические  $(n \times n)$ -матрицы-функции  $a_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, \dots, d$ , вообще говоря, с комплексными элементами, причем

$$a_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geq 2; \quad j = 1, \dots, d. \quad (1.8)$$

Рассмотрим оператор  $\mathcal{Y}_2 : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$ , действующий как умножение на  $(dn \times n)$ -матрицу-функцию, составленную из матриц  $a_j(\mathbf{x})^*$ ,  $j = 1, \dots, d$ :

$$\mathcal{Y}_2\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \operatorname{col} \{a_1(\mathbf{x})^* \mathbf{u}(\mathbf{x}), \dots, a_d(\mathbf{x})^* \mathbf{u}(\mathbf{x})\}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

Применяя неравенство Гельдера и теорему вложения Соболева, можно показать (см. [Su2, (5.11)–(5.14)]), что для любого  $\nu > 0$  найдутся такие постоянные  $C_j(\nu) > 0$ , что

$$\|a_j^* \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \nu \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + C_j(\nu) \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

$$\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad j = 1, \dots, d.$$

Суммируя по  $j$  и учитывая нижнюю оценку (1.6), заключаем, что для любого  $\nu > 0$  найдется такая постоянная  $C(\nu) > 0$ , что

$$\|\mathcal{Y}_2 \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \nu \mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + C(\nu) \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (1.9)$$

При фиксированном  $\nu$  постоянная  $C(\nu)$  зависит лишь от  $d$ ,  $\rho$ ,  $\alpha_0$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от норм  $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$ ,  $j = 1, \dots, d$ , и от параметров решетки  $\Gamma$ .

**1.5. Форма  $q$ .** Пусть в  $\mathbb{R}^d$  задана  $\Gamma$ -периодическая  $\sigma$ -конечная борелевская мера  $d\mu(\mathbf{x}) = \{d\mu_{jl}(\mathbf{x})\}$ ,  $j, l = 1, \dots, n$ , со значениями в классе эрмитовых  $(n \times n)$ -матриц. Иначе говоря,  $d\mu_{jl}(\mathbf{x})$  — комплексная  $\Gamma$ -периодическая мера в  $\mathbb{R}^d$ , причем  $d\mu_{jl} = d\mu_{lj}^*$ . Предположим, что мера  $d\mu$  такова, что при любом  $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$  функция  $|u(\mathbf{x})|^2$  суммируема по каждой из мер  $d\mu_{jl}$ .

В  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  рассмотрим квадратичную форму

$$q[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \sum_{j,l=1}^n \int_{\mathbb{R}^d} u_l(\mathbf{x}) u_j(\mathbf{x})^* d\mu_{jl}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (1.10)$$

На меру  $d\mu$  наложим следующее условие.

**Условие 1.3.** Найдутся такие постоянные  $c_0 \geq 0$ ,  $\tilde{c}_2 \geq 0$ ,  $c_3 \geq 0$  и  $0 \leq \tilde{c} < \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}$ , что выполнена оценка

$$\begin{aligned} -\tilde{c} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 - c_0 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq \int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \\ &\leq \tilde{c}_2 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_3 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^n). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Записав неравенства вида (1.11) по сдвинутым ячейкам и просуммировав, получаем похожие неравенства для функций из  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . В силу (1.6) отсюда вытекают оценки

$$\begin{aligned} -(1 - \kappa) \mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] - c_0 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \leq q[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq c_2 \mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + c_3 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \end{aligned} \quad (1.12)$$

где

$$c_2 = \tilde{c}_2 \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \kappa = 1 - \tilde{c} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad 0 < \kappa \leq 1. \quad (1.13)$$

Примеры форм вида (1.10) приведены в [Su2, п. 5.5]. Здесь мы ограничимся только основным примером (см. [Su2, пример 5.3]).

**Пример 1.4.** Предположим, что мера  $d\mu$  абсолютно непрерывна относительно меры Лебега:  $d\mu(\mathbf{x}) = Q(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , где  $Q(\mathbf{x})$  — Г-периодическая эрмитова  $(n \times n)$ -матрица-функция такая, что

$$Q \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geq 2. \quad (1.14)$$

Тогда  $q[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = (Q\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}$  при  $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , и для любого  $\nu > 0$  найдется постоянная  $C_Q(\nu) > 0$  такая, что

$$\int_{\Omega} |\langle Q(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle| d\mathbf{x} \leq \nu \int_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + C_Q(\nu) \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^n).$$

При фиксированном  $\nu$  постоянная  $C_Q(\nu)$  контролируется через  $d$ ,  $s$ ,  $\|Q\|_{L_s(\Omega)}$  и параметры решетки  $\Gamma$ . Выбрав  $\nu = 2^{-1}\alpha_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}$ , находим, что условие 1.3 выполнено при  $\tilde{c} = \nu$ ,  $c_0 = C_Q(\nu)$ ,  $\tilde{c}_2 = 1$  и  $c_3 = C_Q(1)$ . В (1.13) сейчас  $c_2 = \alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\kappa = 1/2$ .

**1.6. Оператор  $\mathcal{B}(\varepsilon)$ .** В  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  рассмотрим операторное семейство  $\mathcal{B}(\varepsilon)$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ , формально заданное дифференциальным выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\varepsilon) &= \mathcal{A} + \varepsilon(\mathcal{Y}_2^*\mathcal{Y} + \mathcal{Y}^*\mathcal{Y}_2) + \varepsilon^2 Q \\ &= b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d (a_j(\mathbf{x})D_j + D_ja_j(\mathbf{x})^*) + \varepsilon^2 Q(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

где  $Q(\mathbf{x})$  следует интерпретировать как обобщенный матричный потенциал, порожденный мерой  $d\mu(\mathbf{x})$ . Точное определение оператора  $\mathcal{B}(\varepsilon)$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\varepsilon \operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2 q[\mathbf{u}, \mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (1.15)$$

Проверим замкнутость и полуограниченность снизу формы (1.15). В силу (1.7) и (1.9) выполнено

$$\begin{aligned} 2\varepsilon|\operatorname{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| &\leq \frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + c_4\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \\ \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad c_4 &= 4\kappa^{-1}c_1^2C(\nu_0) \text{ при } \nu_0 = \kappa^2(16c_1^2)^{-1}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Теперь из нижней оценки (1.12) и (1.16) с учетом  $0 < \varepsilon \leq 1$  получаем оценку снизу для формы (1.15):

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq \frac{\kappa}{2}\mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] - (c_0 + c_4)\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

С учетом нижней оценки (1.6) это влечет

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &\geq c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - (c_0 + c_4)\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \\ \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leq 1; \quad c_* &:= \frac{\kappa}{2}\alpha_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Объединяя (1.7), (1.9) при  $\nu = 1$  и верхнюю оценку (1.12), приходим к неравенству

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq (2 + c_1^2 + c_2)\mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + (C(1) + c_3)\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

Вместе с верхней оценкой (1.6) это дает

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &\leq C_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + (C(1) + c_3)\varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \\ \mathbf{u} &\in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leq 1; \quad C_* := (2 + c_1^2 + c_2)\alpha_1 \|g\|_{L_\infty}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

**1.7. Оператор  $\mathcal{B}_\varepsilon$ .** Пусть  $T_\varepsilon, \varepsilon > 0$ , — унитарный в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  оператор масштабного преобразования, действующий по правилу

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2} \mathbf{u}(\varepsilon \mathbf{x}), \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad \varepsilon > 0. \quad (1.19)$$

Пусть  $\mathcal{A}_\varepsilon$  — самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , отвечающий квадратичной форме

$$\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] := \varepsilon^{-2} \mathfrak{a}[T_\varepsilon \mathbf{u}, T_\varepsilon \mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}, b(\mathbf{D}) \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

Формально,  $\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ .

Пусть  $\mathcal{Y}_{2,\varepsilon}$  — оператор, действующий по правилу

$$(\mathcal{Y}_{2,\varepsilon} \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \text{col} \{a_1^\varepsilon(\mathbf{x})^* \mathbf{u}(\mathbf{x}), \dots, a_d^\varepsilon(\mathbf{x})^* \mathbf{u}(\mathbf{x})\}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

Пусть  $d\mu$  — мера из п. 1.5. Определим меру  $d\mu^\varepsilon$  следующим образом. Для любого борелевского множества  $\Delta \subset \mathbb{R}^d$  рассмотрим множество  $\varepsilon^{-1}\Delta := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \varepsilon \mathbf{x} \in \Delta\}$  и положим  $\mu^\varepsilon(\Delta) := \varepsilon^d \mu(\varepsilon^{-1}\Delta)$ . Форма  $q_\varepsilon$  определяется равенством

$$q_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

Положим  $\mathcal{B}_\varepsilon := \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{B}(\varepsilon) T_\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Иными словами,  $\mathcal{B}_\varepsilon$  — самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , отвечающий квадратичной форме

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &:= \varepsilon^{-2} \mathfrak{b}(\varepsilon)[T_\varepsilon \mathbf{u}, T_\varepsilon \mathbf{u}] \\ &= \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\text{Re} (\mathcal{Y} \mathbf{u}, \mathcal{Y}_{2,\varepsilon} \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + q_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \end{aligned} \quad (1.20)$$

С учетом (1.20) из (1.17), (1.18) вытекают оценки

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - (c_0 + c_4) \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad (1.21)$$

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq C_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + (C(1) + c_3) \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n),$$

при  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Таким образом, форма  $\mathfrak{b}_\varepsilon$  замкнута и полуограничена снизу. Формально можно написать

$$\mathcal{B}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (1.22)$$

Здесь  $Q^\varepsilon$  следует интерпретировать как обобщенный матричный потенциал, порожденный мерой  $d\mu^\varepsilon$ . Мы видим, что коэффициенты оператора  $\mathcal{B}_\varepsilon$  быстро осциллируют при малом  $\varepsilon$ .

**1.8. Эффективная матрица.** Эффективный оператор для  $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$  задается дифференциальным выражением  $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ . Здесь  $g^0$  — постоянная эффективная матрица размера  $m \times m$ . Определение  $g^0$  дается в терминах решения вспомогательной задачи на ячейке. Пусть  $\Gamma$ -периодическая  $(n \times m)$ -матрица-функция  $\Lambda(\mathbf{x})$  является решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.23)$$

(Уравнение понимается в слабом смысле.) Тогда эффективная матрица определена равенством

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.24)$$

где

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \quad (1.25)$$

Можно показать, что  $g^0$  положительно определена.

Ниже нам потребуются следующие оценки для  $\Lambda$ , установленные в [BSu2, (6.28) и п. 7.3]:

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2} M_1, \quad M_1 := m^{1/2} (2r_0)^{-1} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad (1.26)$$

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2} M_2, \quad M_2 := m^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \quad (1.27)$$

Отметим оценки для эффективной матрицы, известные в теории усреднения как вилка Фойгта–Рейсса (см. [BSu1, гл. 3, теорема 1.5]).

**Предложение 1.5.** *Пусть  $g^0$  — эффективная матрица (1.24). Тогда*

$$\underline{g} \leq g^0 \leq \bar{g}. \quad (1.28)$$

*В случае  $m = n$  всегда выполнено  $\underline{g} = \bar{g}$ .*

Из (1.28) вытекают неравенства

$$|g^0| \leq \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leq \|g^{-1}\|_{L_\infty}.$$

Опишем случаи, когда в (1.28) реализуется верхняя или нижняя грань (см. [BSu1, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7]).

**Предложение 1.6.** *Равенство  $g^0 = \bar{g}$  равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.29)$$

*где  $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ ,  $k = 1, \dots, m$ , — столбцы матрицы  $g(\mathbf{x})$ .*

**Предложение 1.7.** *Равенство  $g^0 = \underline{g}$  равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.30)$$

*где  $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$ ,  $k = 1, \dots, m$ , — столбцы матрицы  $g(\mathbf{x})^{-1}$ .*

1.9. **Эффективный оператор  $\mathcal{B}^0$ .** Эффективный оператор для  $\mathcal{B}_\varepsilon$  вводился в [Su2].

Пусть Г-периодическая  $(n \times n)$ -матрица-функция  $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})$  является (слабым) решением задачи

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_{\Omega} \tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.31)$$

Определим постоянные матрицы  $V$  и  $W$  равенствами

$$V = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (1.32)$$

$$W = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (1.33)$$

Тогда эффективный оператор для оператора (1.22) задан выражением

$$\mathcal{B}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) D_j - W + \overline{Q}. \quad (1.34)$$

Оператор  $\mathcal{B}^0$  — эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами.

Согласно [Su6, (5.7)] при условии  $\lambda > c_0 + c_4$  символ  $L_\lambda(\xi)$  оператора  $\mathcal{B}^0 + \lambda I$  удовлетворяет оценке  $L_\lambda(\xi) \geq c_\lambda(|\xi|^2 + 1)\mathbf{1}_n$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , где  $c_\lambda = \min\{c_*; \lambda - c_0 - c_4\}$ . Полагая  $\lambda_* := c_0 + c_4 + c_*$ , получаем оценку для символа  $L_*(\xi)$  оператора  $\mathcal{B}^0 + \lambda_* I$ :

$$L_*(\xi) \geq c_*(|\xi|^2 + 1)\mathbf{1}_n, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Следовательно, для квадратичной формы  $b^0$  оператора  $\mathcal{B}^0$  выполнено неравенство

$$b^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + \lambda_* \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \geq c_* \left( \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right), \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

С учетом выражения для  $\lambda_*$  отсюда получаем

$$b^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - (c_0 + c_4) \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (1.35)$$

Ниже нам потребуются следующие неравенства для  $\tilde{\Lambda}$ , установленные в [Su2, (7.52) и (7.51)]:

$$\|\tilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leq (2r_0)^{-1} C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad (1.36)$$

$$\|\mathbf{D}\tilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leq C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad (1.37)$$

где  $C_a^2 = \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} |a_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ .

**1.10. Обобщенная резольвента.** Пусть  $Q_0(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодическая матрица-функция размера  $n \times n$  такая, что

$$Q_0(\mathbf{x}) > 0, \quad Q_0, Q_0^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d).$$

Мы изучаем обобщенную резольвенту оператора  $\mathcal{B}_\varepsilon$ , т. е. оператор вида  $(\mathcal{B}_\varepsilon - zQ_0^\varepsilon)^{-1}$ , опираясь на результаты статьи [Su2], где получены аппроксимации этой резольвенты в фиксированной вещественной точке  $z$ . Прежде чем формулировать эти результаты, нам удобно перейти от оператора  $\mathcal{B}_\varepsilon$  к неотрицательному оператору

$$B_\varepsilon := \mathcal{B}_\varepsilon + c_5 Q_0^\varepsilon, \quad (1.38)$$

полагая  $c_5 := (c_0 + c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$ . В силу (1.21) выполнено  $B_\varepsilon \geq 0$ . Отметим, что оператор  $B_\varepsilon$  можно рассматривать как оператор вида (1.22) с прежними коэффициентами  $g^\varepsilon$ ,  $a_j^\varepsilon$  и „новым” матричным потенциалом  $\check{Q}^\varepsilon = Q^\varepsilon + c_5 Q_0^\varepsilon$ . Соответствующая форма  $\int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + c_5 \int_\Omega \langle Q_0(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}$  удовлетворяет условию 1.3 с  $\check{c}_0 = 0$  в роли  $c_0$ , постоянной  $\check{c}_3 = c_3 + c_5\|Q_0\|_{L_\infty}$  в роли  $c_3$  и прежними  $\check{c}_1$  и  $\check{c}_2$ .

Фиксируем число  $\lambda_0$  следующим образом (ср. [Su2, (5.27)])

$$\lambda_0 = 2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} c_4. \quad (1.39)$$

Оператор  $B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon$  положительно определен, а потому обобщенная резольвента  $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$  — ограниченный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ .

**Замечание 1.8.** В работе [Su2] изучалась обобщенная резольвента  $(B_\varepsilon + \lambda Q_0^\varepsilon)^{-1}$  при  $\lambda \geq \lambda_0$ , в [Su6] — при более свободном условии  $\lambda > 0$ . Для наших целей достаточно привести результаты в фиксированной точке  $\lambda$ ; для удобства ссылок на [Su2] используем условие (1.39).

Для удобства дальнейших ссылок назовем „исходными данными” следующие величины

$$\begin{aligned} d, m, n, \rho; \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}, j = 1, \dots, d, \\ \check{c}, c_0, \check{c}_2, c_3 \text{ из условия 1.3}; \|Q_0\|_{L_\infty}, \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}; \text{ параметры решетки } \Gamma. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Отметим, что постоянные  $c_1$ ,  $C(1)$ ,  $\kappa$ ,  $c_2$ ,  $c_4$  полностью определяются исходными данными.

Для оператора (1.38) эффективный оператор имеет вид

$$B^0 = \mathcal{B}^0 + c_5 \overline{Q_0}. \quad (1.41)$$

Отметим, что из (1.35) вытекает оценка снизу для квадратичной формы  $b^0$  оператора  $B^0$ :

$$b^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (1.42)$$

Это равносильно следующей оценке для символа  $L_0(\xi)$  оператора  $B^0$ :

$$L_0(\xi) \geq c_* |\xi|^2 \mathbf{1}_n, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \quad (1.43)$$

Оператор  $B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0}$  представляет собой ДО второго порядка с постоянными коэффициентами с символом

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\xi}) &= L_0(\boldsymbol{\xi}) + \lambda_0 \overline{Q_0} \\ &= b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi})^* V - V^* b(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) \xi_j + \overline{Q} - W + (c_5 + \lambda_0) \overline{Q_0}. \end{aligned}$$

Из (1.43) с учетом (1.39) вытекает оценка

$$L(\boldsymbol{\xi}) \geq \check{c}_* (|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1) \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d; \quad \check{c}_* = \min\{c_*, 2c_4\}. \quad (1.44)$$

**1.11. Аппроксимация оператора**  $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$ . Применение теоремы 9.2 из [Su2] к оператору (1.38) дает следующий результат.

**Теорема 1.9** ([Su2]). *Пусть выполнены условия п. 1.3–1.10. Пусть число  $\lambda_0$  определено в (1.39). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедлива оценка*

$$\|(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 \varepsilon.$$

*Постоянная  $C_1$  контролируется через исходные данные (1.40).*

Чтобы аппроксимировать оператор  $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$  по  $(L_2 \rightarrow H^1)$ -операторной норме, введем корректор

$$K(\varepsilon) = \left( [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) \Pi_\varepsilon (B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}. \quad (1.45)$$

Здесь  $\Pi_\varepsilon$  — оператор (1.1). Корректор (1.45) ограничен как оператор, действующий из  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Это нетрудно установить с помощью предложения 1.2 и включений  $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ . При этом  $\|\varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} = O(1)$ .

В теореме 9.7 из [Su2] установлен следующий результат.

**Теорема 1.10** ([Su2]). *Пусть выполнены условия теоремы 1.9. Пусть  $K(\varepsilon)$  — оператор (1.45). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедлива оценка*

$$\|(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 \varepsilon.$$

*Постоянная  $C_2$  контролируется через исходные данные (1.40).*

**Замечание 1.11.** *Ниже в §5 и §6 нам предстоит с помощью теорем 1.9 и 1.10 (точнее, вместо теоремы 1.10 там будет применен ее аналог — теорема 3.3) аппроксимировать обобщенную резольвенту  $(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$  семейства операторов  $B_\varepsilon(\vartheta)$ , зависящих от параметра  $\vartheta \in (0, 1]$ , с масштабированными коэффициентами  $\vartheta a_j^\varepsilon, \vartheta^2 \check{Q}^\varepsilon$  (см. п. 5.2). Заметим, что форма  $\vartheta^2 (\int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + c_5 \int_\Omega \langle Q_0(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x})$  при всех  $\vartheta \in (0, 1]$  удовлетворяет условию 1.3 с одними и теми же постоянными  $\check{c}_0 = 0$  в роли  $c_0$ ,  $\check{c}_3 = c_3 + c_5 \|Q_0\|_{L_\infty}$  в роли  $c_3$  и прежними  $\tilde{c}$  и  $\tilde{c}_2$ . Далее, постоянная  $\nu_0 = \kappa^2 (16c_1^2)^{-1}$  от  $\vartheta$  не зависит. Домножая (1.9) с  $\nu = \nu_0$  на  $\vartheta^2$ , убеждаемся в справедливости неравенства вида (1.9) (в случае коэффициентов  $\vartheta a_j$ ) с одной и той же постоянной  $C(\nu_0)$  при всех  $\vartheta \in (0, 1]$ . Следовательно, постоянную  $c_4$  (см. (1.16)),*

а тогда и число  $\lambda_0$  (см. (1.39)) можно считать не зависящими от  $\vartheta$ . Учтем также, что нормы коэффициентов  $a_j$  в  $L_\rho(\Omega)$  мажорируются нормами  $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$  при всех  $\vartheta \in (0, 1]$ . В [Su2] прослежена зависимость постоянных  $C_1$  и  $C_2$  от данных задачи (в частности, эти постоянные растут с ростом норм  $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$ ). Вместе со сказанным выше это позволяет выбрать постоянные  $C_1$  и  $C_2$  при аппроксимации оператора  $(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$  не зависящими от параметра  $\vartheta$ .

## § 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

**2.1. Свойства матрицы-функции  $\Lambda$ .** Нам потребуется результат [PSu, лемма 2.3]:

**Лемма 2.1.** *Пусть  $\Lambda$  —  $\Gamma$ -периодическое решение задачи (1.23). Тогда для любой функции  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  при  $\varepsilon > 0$  выполнена оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \beta_1 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \beta_2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Постоянны  $\beta_1$  и  $\beta_2$  зависят от  $m$ ,  $d$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$  и  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ .

Из леммы 2.1 в силу плотности множества  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d)$  вытекает следующее утверждение.

**Следствие 2.2.** *Пусть  $\Lambda$  —  $\Gamma$ -периодическое решение задачи (1.23). Пусть дополнительно известно, что  $\Lambda \in L_\infty$ . Тогда для любой функции  $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$  при  $\varepsilon > 0$  выполнена оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \beta_1 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \beta_2 \varepsilon^2 \|\Lambda\|_{L_\infty}^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

**2.2. Свойства матрицы-функции  $\tilde{\Lambda}$ .** Доказательство следующего утверждения похоже на доказательство леммы 2.1 из [PSu].

**Лемма 2.3.** *Пусть  $\tilde{\Lambda}$  —  $\Gamma$ -периодическое решение задачи (1.31). Тогда для любой функции  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \tilde{\beta}_1 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 + \tilde{\beta}_2 \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.1)$$

Постоянны  $\tilde{\beta}_1$  и  $\tilde{\beta}_2$  определены ниже в (2.12) и зависят только от  $n$ ,  $d$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\rho$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от норм  $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$ ,  $j = 1, \dots, d$ , а также от параметров решетки  $\Gamma$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathbf{w}_k(\mathbf{x})$ ,  $k = 1, \dots, n$ , — столбцы матрицы  $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ . В силу (1.31) для любой функции  $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  такой, что при каком-либо  $R > 0$  выполнено  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = 0$  при  $|\mathbf{x}| > R$ , справедливо тождество

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left( \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_k(\mathbf{x}), b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \rangle + \sum_{j=1}^d \langle a_j(\mathbf{x})^* \mathbf{e}_k, D_j \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) \rangle \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь  $\mathbf{e}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , — стандартные орты в  $\mathbb{C}^n$ .

Пусть  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Положим  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) := \mathbf{w}_k(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2$ . Тогда с учетом (1.3) имеем

$$b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = (b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}))|u(\mathbf{x})|^2 + \sum_{l=1}^d b_l \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) D_l |u(\mathbf{x})|^2, \quad (2.3)$$

$$D_j \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = (D_j \mathbf{w}_k(\mathbf{x}))|u(\mathbf{x})|^2 + \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) D_j |u(\mathbf{x})|^2. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.2), находим

$$\begin{aligned} J &:= \int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_k(\mathbf{x}), b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) \rangle |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \langle a_j(\mathbf{x})^* \mathbf{e}_k, D_j \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) \rangle |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{l=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \langle g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_k(\mathbf{x}), b_l \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) \rangle (u^* D_l u + u D_l u^*) d\mathbf{x} \\ &\quad + \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \langle a_j(\mathbf{x})^* \mathbf{e}_k, \mathbf{w}_k(\mathbf{x}) \rangle (u^* D_j u + u D_j u^*) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Обозначим слагаемые в правой части (2.5) через  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$ . Имеем

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq 4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})^* \mathbf{e}_k|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &\quad + \frac{1}{4} (4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty})^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D} \mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

С учетом условия (1.8) на коэффициенты  $a_j$  выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})^* \mathbf{e}_k|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq C_{\Omega, \rho}^2 \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}^2 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где  $C_{\Omega, \rho}$  — константа вложения  $H^1(\Omega) \subset L_{2\rho/(\rho-2)}(\Omega)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq 4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} C_{\Omega, \rho}^2 \sum_{j=1}^d \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}^2 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{4} (4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty})^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D} \mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Далее, с учетом (1.5) и (2.5) выполнено

$$\begin{aligned} |J_2| &\leq 2 \int_{\mathbb{R}^d} |g(\mathbf{x})^{1/2} b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_k(\mathbf{x})| |u(\mathbf{x})| \left( \sum_{l=1}^d |g(\mathbf{x})^{1/2} b_l \mathbf{w}_k(\mathbf{x})| |D_l u(\mathbf{x})| \right) d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{1}{2} J + 2d\alpha_1 \|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Оценим, наконец,  $J_3$ :

$$\begin{aligned} |J_3| &\leq 2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})| |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})| |u(\mathbf{x})| |D_j u(\mathbf{x})| d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} + \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

С учетом (2.6) получаем

$$|J_3| \leq C_{\Omega,\rho}^2 \sum_{j=1}^d \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}^2 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 + \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \quad (2.9)$$

Объединяя (2.5), (2.7)–(2.9), находим

$$\begin{aligned} J &\leq 2 (4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L^\infty} + 1) C_{\Omega,\rho}^2 \sum_{j=1}^d \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}^2 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &+ \frac{1}{2} (4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L^\infty})^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &+ 2 (2d\alpha_1 \|g\|_{L^\infty} + 1) \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Покажем теперь, как из (2.10) выводится требуемая оценка. В силу (1.4) выполнено

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{w}_k u)(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \alpha_0^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_k u)(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Согласно (1.3),  $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$ , поэтому

$$b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_k u) = (b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k)u + \sum_{l=1}^d b_l \mathbf{w}_k D_l u.$$

С учетом (1.5) и выражения для  $J$  (см. (2.5)), имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{w}_k u)(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &\leqslant 2\alpha_0^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} |b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &+ 2\alpha_0^{-1}\alpha_1 d \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &\leqslant 2\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} J + 2\alpha_0^{-1}\alpha_1 d \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &\leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}(\mathbf{w}_k u)(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \\ &+ 2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.10), (2.11) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &\leqslant 16\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} (4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} + 1) C_{\Omega,\rho}^2 \sum_{j=1}^d \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}^2 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &+ (16\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} (2d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} + 1) + 8\alpha_0^{-1}\alpha_1 d + 4) \\ &\times \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{w}_k(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Суммируя по  $k$ , приходим к неравенству (2.1) при

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1 &= 16n\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} (4\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} + 1) C_{\Omega,\rho}^2 \sum_{j=1}^d \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}^2, \\ \tilde{\beta}_2 &= 16\alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} (2d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} + 1) + 8\alpha_0^{-1}\alpha_1 d + 4. \end{aligned} \quad (2.12)$$

□

Применяя масштабное преобразование, на основании леммы 2.3 получаем следующий результат.

**Лемма 2.4.** *В условиях леммы 2.3 при  $0 < \varepsilon \leqslant 1$  справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\tilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leqslant \tilde{\beta}_1 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 + \tilde{\beta}_2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{\Lambda}^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}.$$

Ниже в §7 нам понадобится следующее простое утверждение.

**Лемма 2.5.** *Пусть  $f(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодическая функция в  $\mathbb{R}^d$ , причем*

$$f \in L_p(\Omega), \quad p = 2 \text{ при } d = 1, \quad p > 2 \text{ при } d = 2, \quad p = d \text{ при } d \geqslant 3. \quad (2.13)$$

Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  оператор  $[f^\varepsilon]$  непрерывно переводит  $H^1(\mathbb{R}^d)$  в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ , причем

$$\|[f^\varepsilon]\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} C_\Omega^{(p)},$$

где  $C_\Omega^{(p)}$  — норма оператора вложения  $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_{2(p/2)'}(\Omega)$ . Здесь  $(p/2)' = \infty$  при  $d = 1$ ,  $(p/2)' = p(p-2)^{-1}$  при  $d \geq 2$ .

*Доказательство.* Пусть  $d \geq 2$  и  $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ . Используя замены  $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y}$ ,  $u(\mathbf{x}) = v(\mathbf{y})$ , неравенство Гельдера и теорему вложения Соболева, при  $0 < \varepsilon \leq 1$  получаем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} &= \varepsilon^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(\mathbf{y})|^2 |v(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \\ &= \varepsilon^d \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma} \int_{\Omega + \mathbf{a}} |f(\mathbf{y})|^2 |v(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \\ &\leq \varepsilon^d \|f\|_{L_p(\Omega)}^2 \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma} \left( \int_{\Omega + \mathbf{a}} |v(\mathbf{y})|^{2(p/2)'} d\mathbf{y} \right)^{1/(p/2)'} \\ &\leq \varepsilon^d \|f\|_{L_p(\Omega)}^2 (C_\Omega^{(p)})^2 \|v\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|f\|_{L_p(\Omega)}^2 (C_\Omega^{(p)})^2 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Здесь  $(p/2)^{-1} + ((p/2)')^{-1} = 1$ . При  $d = 1$  доказательство аналогично (нужные изменения в выкладке очевидны).  $\square$

Из лемм 2.4 и 2.5 вытекает следующее следствие.

**Следствие 2.6.** Пусть  $\tilde{\Lambda}$  —  $\Gamma$ -периодическое решение задачи (1.31). Пусть дополнительно известно, что  $\tilde{\Lambda}$  удовлетворяет условию вида (2.13). Тогда при любом  $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$  и  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\tilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \leq \tilde{\beta}_1 \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 + \tilde{\beta}_2 \varepsilon^2 \|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}^2 (C_\Omega^{(p)})^2 \|\mathbf{D}u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2.$$

**2.3. Лемма о  $Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}$ .** В этом пункте мы докажем лемму, необходимую при проверке основных результатов работы.

**Лемма 2.7.** Пусть  $Q_0(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодическая  $(n \times n)$ -матрица-функция такая, что  $Q_0 \in L_\infty$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  оператор  $[Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}]$  умножения на  $Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}$  непрерывно переводит  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $H^{-1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , причем

$$\|[Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}]\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leq C_{Q_0} \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.14)$$

Постоянная  $C_{Q_0}$  контролируется через  $d$ ,  $\|Q_0\|_{L_\infty}$  и параметры решетки  $\Gamma$ .

*Доказательство.* Поскольку  $Q_0 - \overline{Q_0} \in L_\infty$  и

$$\int_{\Omega} (Q_0(\mathbf{x}) - \overline{Q_0}) d\mathbf{x} = 0, \quad (2.15)$$

справедливо представление

$$Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) - \overline{Q}_0 = -\varepsilon \sum_{j=1}^d D_j h_j^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (2.16)$$

где  $h_j$  —  $\Gamma$ -периодические  $(n \times n)$ -матрицы-функции такие, что  $h_j \in L_\infty$ .

Поясним выбор  $h_j$ . Пусть  $\Phi(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодическое решение задачи

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = Q_0(\mathbf{x}) - \overline{Q}_0, \quad \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

В силу (2.15) условие разрешимости выполнено. Так как правая часть  $Q_0 - \overline{Q}_0 \in L_\infty$ , решение  $\Phi \in W_p^2(\Omega)$  при любом  $1 \leq p < \infty$ . При этом

$$\|\Phi\|_{W_p^2(\Omega)} \leq \mathfrak{c}_1(p) \|Q_0 - \overline{Q}_0\|_{L_p(\Omega)} \leq \tilde{\mathfrak{c}}_1(p) \|Q_0\|_{L_\infty(\Omega)}. \quad (2.17)$$

Постоянные  $\mathfrak{c}_1(p)$ ,  $\tilde{\mathfrak{c}}_1(p)$  зависят лишь от  $p$  и параметров решетки  $\Gamma$ . Это вытекает из теоремы Марцинкевича о мультипликаторах для рядов Фурье [Ma].

Положим  $h_j(\mathbf{x}) = D_j \Phi(\mathbf{x})$ . Тогда выполнено

$$Q_0(\mathbf{x}) - \overline{Q}_0 = - \sum_{j=1}^d D_j h_j(\mathbf{x}),$$

и  $h_j \in W_p^1(\Omega)$  при всех  $1 \leq p < \infty$ . Возьмем  $p = d + 1$ . Тогда по теореме вложения  $h_j \in L_\infty$ , и в силу (2.17) справедлива оценка

$$\|h_j\|_{L_\infty} \leq \mathfrak{c}_2 \|h_j\|_{W_p^1(\Omega)} \leq \mathfrak{c}_2 \|\Phi\|_{W_p^2(\Omega)} \leq \mathfrak{c}_2 \tilde{\mathfrak{c}}_1(d+1) \|Q_0\|_{L_\infty}.$$

(Здесь  $\mathfrak{c}_2$  — норма соответствующего оператора вложения.)

Пусть  $\mathbf{F} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . С учетом (2.16) выполнено

$$\begin{aligned} \|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q}_0)\mathbf{F}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &= \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \frac{\left| ((Q_0^\varepsilon - \overline{Q}_0)\mathbf{F}, \mathbf{v})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}} \\ &\leq \varepsilon \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \frac{\sum_{j=1}^d \left| ((D_j h_j^\varepsilon)\mathbf{F}, \mathbf{v})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Используя равенство  $(D_j h_j^\varepsilon)\mathbf{F} = D_j(h_j^\varepsilon \mathbf{F}) - h_j^\varepsilon D_j \mathbf{F}$  и интегрируя по частям, находим

$$((D_j h_j^\varepsilon)\mathbf{F}, \mathbf{v})_{L_2(\mathbb{R}^d)} = (h_j^\varepsilon \mathbf{F}, D_j \mathbf{v})_{L_2(\mathbb{R}^d)} - (h_j^\varepsilon D_j \mathbf{F}, \mathbf{v})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Отсюда и из (2.18) следует, что

$$\begin{aligned} \|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\mathbf{F}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \varepsilon \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \frac{\sum_{j=1}^d \left| (h_j^\varepsilon \mathbf{F}, D_j \mathbf{v})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}} \\ &\quad + \varepsilon \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)} \frac{\sum_{j=1}^d \left| (h_j^\varepsilon D_j \mathbf{F}, \mathbf{v})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^d \left| (h_j^\varepsilon \mathbf{F}, D_j \mathbf{v})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right| \leqslant C_h \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{D}\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.20)$$

$$\sum_{j=1}^d \left| (h_j^\varepsilon D_j \mathbf{F}, \mathbf{v})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right| \leqslant C_h \|\mathbf{D}\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.21)$$

где  $C_h^2 := \text{ess sup}_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d |h_j(\mathbf{x})|^2$ . Отметим, что  $C_h \leqslant \mathfrak{c}_3 \|Q_0\|_{L_\infty}$ , где постоянная  $\mathfrak{c}_3$  зависит только от  $d$  и от параметров решетки  $\Gamma$ .

Теперь из (2.19)–(2.21) вытекает оценка (2.14) с постоянной  $C_{Q_0} = 2C_h$ .  $\square$

### § 3. СГЛАЖИВАНИЕ ПО СТЕКЛОВУ. ДРУГАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОБОБЩЕННОЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$

**3.1. Оператор сглаживания по Стеклову.** Рассмотрим оператор сглаживания по Стеклову  $S_\varepsilon^{(k)}$ ,  $\varepsilon > 0$ , действующий в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$  (где  $k \in \mathbb{N}$ ) по правилу

$$(S_\varepsilon^{(k)} \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k). \quad (3.1)$$

Зависимость  $S_\varepsilon^{(k)}$  от  $k$  мы будем опускать в обозначениях, и писать просто  $S_\varepsilon$ . Очевидно,  $S_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u}$  при  $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$  для любого мультииндекса  $\alpha$  такого, что  $|\alpha| \leqslant s$ .

Нам понадобятся следующие свойства оператора  $S_\varepsilon$  (см. [ZhPas, леммы 1.1 и 1.2] или [PSu, предложения 3.1 и 3.2]).

**Предложение 3.1.** Для любой функции  $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^k)$  при  $\varepsilon > 0$  выполнена оценка

$$\|S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где  $2r_1 = \text{diam } \Omega$ .

**Предложение 3.2.** Пусть  $f$  —  $\Gamma$ -периодическая функция в  $\mathbb{R}^d$  такая, что  $f \in L_2(\Omega)$ . Тогда оператор  $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$  непрерывен в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  и при  $\varepsilon > 0$  справедлива оценка

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

3.2. **Другая аппроксимация оператора**  $(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$ . Положим

$$\tilde{K}(\varepsilon) = \left( [\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\tilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) S_\varepsilon (B^0 + \lambda_0 \overline{Q}_0)^{-1}. \quad (3.2)$$

Оператор  $\tilde{K}(\varepsilon)$  непрерывно переводит  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Это нетрудно проверить с помощью предложения 3.2 и включений  $\Lambda, \tilde{\Lambda} \in \tilde{H}^1(\Omega)$ .

Наряду с теоремой 1.10 справедлив следующий результат.

**Теорема 3.3.** Пусть выполнены условия теоремы 1.9. Пусть  $\tilde{K}(\varepsilon)$  — оператор (3.2). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедлива оценка

$$\|(B_\varepsilon + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 + \lambda_0 \overline{Q}_0)^{-1} - \varepsilon \tilde{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_3 \varepsilon.$$

Постоянная  $C_3$  зависит лишь от исходных данных (1.40).

**Замечание 3.4.** Теоремы 1.10 и 3.3 демонстрируют, что для задач усреднения в  $\mathbb{R}^d$  можно использовать различные сглаживающие операторы в корректоре (как  $\Pi_\varepsilon$ , так и  $S_\varepsilon$ ). Однако для задач усреднения в ограниченной области (см., например, [ZhPas], [PSu], [Su3, Su4, Su7]) удобнее использовать сглаживание по Стеклову. Поскольку мы нацелены на применение результатов настоящей работы к исследованию задач усреднения в ограниченной области [MSu3], мы перешли к сглаживанию по Стеклову.

**Замечание 3.5.** В условиях замечания 1.11 постоянную  $C_3$  можно выбрать не зависящей от параметра  $\vartheta \in (0, 1]$ .

3.3. **Доказательство теоремы 3.3.** Мы выводим теорему 3.3 из теоремы 1.10.

**Лемма 3.6.** При любом  $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$  и  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\tilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u|^2 d\mathbf{x} &\leq \tilde{\beta}_1 \|(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &+ \tilde{\beta}_2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{\Lambda}^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{D}u|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

*Доказательство.* В силу предложений 1.2, 3.2 и включения  $\tilde{\Lambda} \in \tilde{H}^1(\mathbb{R}^d)$  все члены неравенства (3.3) — непрерывные функционалы относительно  $u$  в  $H^1(\mathbb{R}^d)$ -норме. Поэтому оценку (3.3) достаточно доказать на плотном множестве — при  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Фиксируем функцию  $F \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$  такую, что  $0 \leq F(t) \leq 1$ ,  $F(t) = 1$  при  $0 \leq t \leq 1$  и  $F(t) = 0$  при  $t \geq 2$ . Определим функцию

$F_R(\mathbf{x}) := F(|\mathbf{x}|/R)$  в  $\mathbb{R}^d$ . Здесь  $R > 0$  — параметр. Если  $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ , то  $F_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  и в силу леммы 2.4 выполнена оценка

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\tilde{\Lambda})^\varepsilon|^2 |F_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u|^2 d\mathbf{x} &\leq \tilde{\beta}_1 \|F_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &+ \tilde{\beta}_1 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |(\partial_j F_R)(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u + F_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\partial_j u|^2 d\mathbf{x} \\ &+ \tilde{\beta}_2 \varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{\Lambda}^\varepsilon|^2 |(\partial_j F_R)(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)u + F_R(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\partial_j u|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

С учетом оценки  $\max |\partial_j F_R| \leq c/R$  неравенство (3.3) получается отсюда предельным переходом при  $R \rightarrow \infty$  на основании теоремы Лебега.  $\square$

Теперь мы можем доказать теорему 3.3. Очевидно,

$$\begin{aligned} \varepsilon \|K(\varepsilon) - \tilde{K}(\varepsilon)\|_{L_2 \rightarrow H^1} &\leq \varepsilon \|[\Lambda^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})(B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow H^1} \\ &+ \varepsilon \|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)(B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow H^1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Начнем с оценки первого слагаемого в правой части (3.4):

$$\begin{aligned} \varepsilon \|[\Lambda^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})(B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow H^1} \\ \leq \varepsilon \|[\Lambda^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\|_{H^2 \rightarrow H^1} \|(B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow H^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В силу (1.44)

$$\|(B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^d)} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} (|\xi|^2 + 1)|L(\xi)^{-1}| \leq \check{c}_*^{-1}. \quad (3.6)$$

Записав результат [PSu, лемма 3.5] в операторных терминах, получаем

$$\varepsilon \|[\Lambda^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_\Lambda \varepsilon, \quad (3.7)$$

где постоянная  $C_\Lambda$  зависит только от  $m, d, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \alpha_0, \alpha_1$  и от параметров решетки  $\Gamma$ . Объединяя (3.5)–(3.7), приходим к оценке

$$\varepsilon \|[\Lambda^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})(B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \check{c}_*^{-1} C_\Lambda \varepsilon. \quad (3.8)$$

Оценим теперь второе слагаемое в правой части (3.4). С учетом (3.6) выполнено

$$\varepsilon \|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)(B^0 + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow H^1} \leq \varepsilon \check{c}_*^{-1} \|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\|_{H^2 \rightarrow H^1}. \quad (3.9)$$

Пусть  $\Phi \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \|\tilde{\Lambda}^\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \varepsilon \|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|[(\mathbf{D}\tilde{\Lambda})^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon \|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{D}\Phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Применяя предложения 1.2, 3.2 и учитывая оценку (1.36), находим

$$\|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq |\Omega|^{-1/2}(2r_0)^{-1}C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty} =: \tilde{M}_1, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.11)$$

$$\|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \tilde{M}_1, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.12)$$

В силу (3.11) и (3.12) выполнено

$$\|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\Phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\tilde{M}_1\|\Phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (3.13)$$

$$\|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{D}\Phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\tilde{M}_1\|\mathbf{D}\Phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (3.14)$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (3.10) при  $0 < \varepsilon \leq 1$  используем лемму 3.6:

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{D}\tilde{\Lambda})^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\Phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \tilde{\beta}_1 \|(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\Phi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + \tilde{\beta}_2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{\Lambda}^\varepsilon|^2 |(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{D}\Phi|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Применяя предложения 1.1 и 3.1, получаем

$$\|(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\Phi\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon(r_0^{-1} + r_1)\|\Phi\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из (3.14), (3.15) вытекает оценка

$$\|(\mathbf{D}\tilde{\Lambda})^\varepsilon(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\Phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon \left( \tilde{\beta}_1(r_0^{-1} + r_1)^2 + 4\tilde{\beta}_2\tilde{M}_1^2 \right)^{1/2} \|\Phi\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (3.16)$$

Объединяя (3.10), (3.13), (3.14) и (3.16), заключаем, что

$$\|\varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\tilde{\Lambda}}\varepsilon, \quad (3.17)$$

где  $C_{\tilde{\Lambda}} = 4\tilde{M}_1 + \left( \tilde{\beta}_1(r_0^{-1} + r_1)^2 + 4\tilde{\beta}_2\tilde{M}_1^2 \right)^{1/2}$ . Комбинируя (3.9) и (3.17), приходим к оценке

$$\varepsilon\|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)(B^0 + \lambda_0\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \check{c}_*^{-1}C_{\tilde{\Lambda}}\varepsilon. \quad (3.18)$$

Теперь из теоремы 1.10 и оценок (3.4), (3.8), (3.18) вытекает искомое.  $\square$

## § 4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

**4.1. Формулировка результатов.** В настоящем пункте формулируются основные результаты работы.

**Теорема 4.1.** *Пусть выполнены условия п. 1.3–1.10. Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$ ,  $\phi \in (0, 2\pi)$ , причем  $|\zeta| \geq 1$ . Положим*

$$c(\phi) = \begin{cases} |\sin \phi|^{-1}, & \phi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ 1, & \phi \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases} \quad (4.1)$$

*Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедлива оценка*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4\varepsilon c(\phi)^2|\zeta|^{-1/2}. \quad (4.2)$$

*Постоянная  $C_4$  зависит только от исходных данных (1.40).*

Чтобы сформулировать результаты об аппроксимации по  $(L_2 \rightarrow H^1)$ -операторной норме, введем корректор

$$K(\varepsilon; \zeta) = ([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\tilde{\Lambda}^\varepsilon])S_\varepsilon(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \quad (4.3)$$

Здесь  $S_\varepsilon$  — оператор слаживания по Стеклову (3.1). Оператор (4.3) непрерывно переводит  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Это несложно проверить на основании предложения 3.2, так как  $\Lambda, \tilde{\Lambda} \in \tilde{H}^1(\Omega)$ .

**Теорема 4.2.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Пусть  $K(\varepsilon; \zeta)$  — оператор (4.3). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , выполнены оценки*

$$\begin{aligned} \| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq C_5 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \| \mathbf{D} ((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta)) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq C_6 c(\phi)^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Постоянные  $C_5$  и  $C_6$  контролируются через исходные данные (1.40).

Из теоремы 4.2 непосредственно вытекает следующий результат.

**Следствие 4.3.** *В условиях теоремы 4.2 справедлива оценка*

$$\begin{aligned} \| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \\ \leq (C_5 + C_6) c(\phi)^2 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \end{aligned}$$

На основании теоремы 4.2 можно получить результат об аппроксимации операторов  $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ , отвечающих „потокам”.

**Теорема 4.4.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Пусть  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  — матрица-функция (1.25). Положим*

$$G(\varepsilon; \zeta) := \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \quad (4.6)$$

Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , выполнено

$$\| g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G(\varepsilon; \zeta) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_7 c(\phi)^2 \varepsilon. \quad (4.7)$$

Постоянная  $C_7$  зависит только от исходных данных (1.40).

**4.2. Обсуждение результатов.** Для оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  усреднение резольвенты в зависимости от спектрального параметра изучалось в [Su7]. Полученные в теоремах 4.1, 4.2 и 4.4 двухпараметрические оценки погрешности имеют то же поведение, что и оценки из [Su7, теоремы 2.2, 2.4 и 2.6].

Однако есть и отличие от упомянутых результатов [Su7]. Для оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  удалось получить аппроксимации резольвенты  $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$  с оценками вида (4.2), (4.4), (4.5), (4.7) во всей области  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . А для оператора  $B_\varepsilon$  в теоремах 4.1, 4.2, 4.4 дополнительно предполагается, что  $|\zeta| \geq 1$ . Это связано с присутствием членов первого и нулевого порядков. Ниже в §8 мы расширим область изменения параметра  $\zeta$ , однако характер оценок будет менее точным (относительно  $\zeta$ ).

### § 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4.1

**5.1. Оператор  $B(\varepsilon; \vartheta)$ .** Доказательство теорем 4.1 и 4.2 основано на результатах теорем 1.9 и 3.3 и рассмотрении вспомогательного операторного семейства, зависящего от дополнительного параметра  $0 < \vartheta \leq 1$ . В этом и трех следующих пунктах вводятся необходимые определения.

Условия п. 1.3–1.5 считаем выполненными. Пусть  $Q_0$  — матрица-функция из п. 1.10, и пусть  $c_5 = (c_0 + c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$ . В  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} b(\varepsilon; \vartheta)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &= \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\vartheta\varepsilon \operatorname{Re} (\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \vartheta^2\varepsilon^2 q[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + \vartheta^2\varepsilon^2 c_5(Q_0\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь  $\varepsilon > 0$  и  $0 < \vartheta \leq 1$ . Считаем, что  $0 < \varepsilon\vartheta \leq 1$ .

Заметим, что согласно (1.15) и (5.1) при всех  $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  выполнено  $b(\varepsilon; \vartheta)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mathfrak{b}(\varepsilon\vartheta)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + c_5\varepsilon^2\vartheta^2(Q_0\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2}$ . С учетом выбора  $c_5$  отсюда и из (1.17), (1.18) вытекает, что форма  $b(\varepsilon; \vartheta)$  замкнута и неотрицательна, причем

$$\begin{aligned} c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq b(\varepsilon; \vartheta)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq C_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + (C(1) + c_3 + c_5\|Q_0\|_{L_\infty})\varepsilon^2\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Отвечающий ей самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  обозначим через  $B(\varepsilon; \vartheta)$ . Формально,

$$\begin{aligned} B(\varepsilon; \vartheta) &= b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D}) + \vartheta\varepsilon \sum_{j=1}^d (a_j(\mathbf{x})D_j + D_ja_j(\mathbf{x})^*) \\ &\quad + \vartheta^2\varepsilon^2 Q(\mathbf{x}) + \vartheta^2\varepsilon^2 c_5 Q_0(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.3)$$

**5.2. Оператор  $B_\varepsilon(\vartheta)$ .** В  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(\vartheta)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &= \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\vartheta\operatorname{Re} (\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_{2,\varepsilon}\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \vartheta^2 q_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \\ &\quad + \vartheta^2 c_5(Q_0^\varepsilon\mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \end{aligned} \quad (5.4)$$

где  $0 < \vartheta \leq 1$  и  $0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}$ . Справедливо тождество

$$b_\varepsilon(\vartheta)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \varepsilon^{-2}b(\varepsilon; \vartheta)[T_\varepsilon\mathbf{u}, T_\varepsilon\mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad (5.5)$$

где  $T_\varepsilon$  — оператор масштабного преобразования (1.19). С учетом (5.2) из (5.5) вытекает, что форма (5.4) замкнута и неотрицательна, причем

$$\begin{aligned} c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq b_\varepsilon(\vartheta)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq c_6\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2, \\ \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon &\leq \vartheta^{-1}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где  $c_6 = \max\{C_*, C(1) + c_3 + c_5\|Q_0\|_{L_\infty}\}$ . Отвечающий форме (5.5) самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  обозначим через  $B_\varepsilon(\vartheta)$ .

Мы рассмотрим обобщенную резольвенту  $(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$ , где число  $\lambda_0$  определено в (1.39), и применим теорему 1.9 (см. замечание 1.11).

**5.3. Операторы  $B^0(\vartheta)$  и  $B^0(\varepsilon; \vartheta)$ .** Легко видеть (см. (1.23)–(1.25), (1.31)–(1.34)), (1.41), что эффективный оператор для  $B_\varepsilon(\vartheta)$  принимает вид

$$\begin{aligned} B^0(\vartheta) = & \mathcal{A}^0 + \vartheta \left( -b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) D_j \right) \\ & + \vartheta^2 (\overline{Q} + c_5 \overline{Q_0} - W). \end{aligned}$$

В соответствии с (1.42) для квадратичной формы  $b^0(\vartheta)$  оператора  $B^0(\vartheta)$  верна оценка

$$b^0(\vartheta)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (5.7)$$

Это равносильно следующей оценке для символа  $L_0(\xi; \vartheta)$  оператора  $B^0(\vartheta)$ :

$$L_0(\xi; \vartheta) \geq c_* |\xi|^2 \mathbf{1}_n, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \vartheta \leq 1. \quad (5.8)$$

Тогда с учетом (1.39) для символа

$$\begin{aligned} L(\xi; \vartheta) = & b(\xi)^* g^0 b(\xi) - \vartheta b(\xi)^* V - \vartheta V^* b(\xi) \\ & + \vartheta \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) \xi_j + \vartheta^2 (\overline{Q} + c_5 \overline{Q_0}) - \vartheta^2 W + \lambda_0 \overline{Q_0} \end{aligned}$$

оператора  $B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0}$  справедлива оценка

$$L(\xi; \vartheta) \geq \check{c}_* (|\xi|^2 + 1) \mathbf{1}_n, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \vartheta \leq 1, \quad \check{c}_* = \min\{c_*; 2c_4\}. \quad (5.9)$$

Отметим тождество

$$B^0(\vartheta) = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* B^0(\varepsilon; \vartheta) T_\varepsilon,$$

где  $B^0(\varepsilon; \vartheta)$  — самосопряженный оператор в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , определенный равенством

$$\begin{aligned} B^0(\varepsilon; \vartheta) = & \mathcal{A}^0 + \varepsilon \vartheta \left( -b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) D_j \right) \\ & + \varepsilon^2 \vartheta^2 (\overline{Q} - W + c_5 \overline{Q_0}). \end{aligned} \quad (5.10)$$

**5.4. Операторы  $\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)$  и  $\tilde{B}^0(\vartheta)$ .** Факторизуем

$$Q_0(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})^*)^{-1} f(\mathbf{x})^{-1}, \quad (5.11)$$

$\overline{Q_0} = f_0^{-2}$ . Заметим, что

$$|f_0| \leq \|f\|_{L_\infty} = \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad |f_0^{-1}| \leq \|f^{-1}\|_{L_\infty} = \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}. \quad (5.12)$$

Пусть  $\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)$  — самосопряженный в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  оператор, порожденный квадратичной формой

$$\tilde{b}_\varepsilon(\vartheta)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] := b_\varepsilon(\vartheta)[f^\varepsilon \mathbf{u}, f^\varepsilon \mathbf{u}], \quad (5.13)$$

заданной на области определения

$$\text{Dom } \tilde{b}_\varepsilon(\vartheta) = \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) : f^\varepsilon \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)\}.$$

Здесь  $0 < \vartheta \leq 1$  и  $0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}$ . Так как оператор  $B_\varepsilon(\vartheta)$  неотрицателен, оператор  $\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)$  также неотрицателен.

Пусть  $\tilde{B}^0(\vartheta) = f_0 B^0(\vartheta) f_0$ . Отметим равенства

$$(B_\varepsilon(\vartheta) - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} = f^\varepsilon (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \zeta I)^{-1} (f^\varepsilon)^*, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+, \quad (5.14)$$

$$(B^0(\vartheta) - \zeta \overline{Q_0})^{-1} = f_0 (\tilde{B}^0(\vartheta) - \zeta I)^{-1} f_0, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+. \quad (5.15)$$

**5.5. Доказательство теоремы 4.1.** Применяя теорему 1.9 к оператору  $B_\varepsilon(\vartheta)$  и учитывая замечание 1.11, находим

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 \varepsilon, \\ & 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Распространим эту оценку на  $0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}$ . С учетом (5.14) имеем

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L_\infty}^2 \|(\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \lambda_0^{-1} \|f\|_{L_\infty}^2. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Аналогично из (5.15) и (5.12) вытекает, что

$$\| (B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \lambda_0^{-1} \|f\|_{L_\infty}^2. \quad (5.18)$$

Из (5.17), (5.18) следует, что левая часть (5.16) не превосходит  $2\lambda_0^{-1} \|f\|_{L_\infty}^2 \varepsilon$  при  $1 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}$ . Отсюда и из (5.16) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_1 \varepsilon, \\ & 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

с постоянной  $\widehat{C}_1 = \max\{C_1; 2\lambda_0^{-1} \|f\|_{L_\infty}^2\}$ .

Теперь получим аналог оценки (5.19) для  $(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}$ , где  $\widehat{\zeta} = e^{i\phi}$  при  $\phi \in (0, 2\pi)$ . Воспользуемся тождеством

$$\begin{aligned} & (B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1} \\ & = (B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} (B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon) \\ & \times ((B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}) \\ & \times (B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1} \\ & + (\lambda_0 + \widehat{\zeta})(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} (Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

С учетом (5.14) имеем

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} (B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & = \|f^\varepsilon (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} I)^{-1} (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I) (f^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \|(\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} I)^{-1} (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Поскольку  $\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|(\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}I)^{-1}(\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0I)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \sup_{\nu \geq 0} \frac{\nu + \lambda_0}{|\nu - \widehat{\zeta}|} \\ &\leq \sup_{\nu \geq 0} \frac{\nu + \lambda_0}{\nu + 1} \sup_{\nu \geq 0} \frac{\nu + 1}{|\nu - \widehat{\zeta}|} \leq 2(1 + \lambda_0)c(\phi). \end{aligned} \quad (5.22)$$

Здесь  $c(\phi)$  — величина (4.1). Теперь из (5.21) и (5.22) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0Q_0^\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq 2(1 + \lambda_0)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}c(\phi). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \|(B^0(\vartheta) + \lambda_0\overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq 2(1 + \lambda_0)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}c(\phi). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Оценим норму второго слагаемого в правой части (5.20):

$$\begin{aligned} \|(\widehat{\zeta} + \lambda_0)(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq (1 + \lambda_0)\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \times \|Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^d)}\|(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

По двойственности получаем

$$\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^*Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (5.26)$$

С учетом (5.14) выполнено

$$\begin{aligned} \|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^*Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|f\|_{L_\infty}^2 \|(\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^*I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|f\|_{L_\infty}^2 c(\phi). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Оценим  $\|\mathbf{D}(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^*Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}$ . Применяя нижнюю оценку (5.6), (5.13) и (5.14), находим

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^*Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq c_*^{-1/2} \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^*Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ = c_*^{-1/2} \|\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}^*I)^{-1}(f^\varepsilon)^*\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leq c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} \sup_{\nu \geq 0} \frac{\nu^{1/2}}{|\nu - \widehat{\zeta}^*|} \leq c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} c(\phi). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Отсюда и из (5.26), (5.27) видно, что

$$\|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_1 c(\phi), \quad (5.29)$$

где  $\mathfrak{C}_1 := \|f\|_{L_\infty}^2 + c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty}$ .

Оценим теперь  $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норму оператора  $(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1}$ , действуя по аналогии с (5.27), (5.28) и учитывая (5.7), (5.12) и (5.15):

$$\|(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_1 c(\phi). \quad (5.30)$$

Объединяя (2.14), (5.25), (5.29), (5.30), находим

$$\|(\widehat{\zeta} + \lambda_0)(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_2 \varepsilon c(\phi)^2,$$

где  $\mathfrak{C}_2 = (1 + \lambda_0)C_{Q_0} \mathfrak{C}_1^2$ . Отсюда и из (5.19), тождества (5.20), (5.23) и (5.24) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 \varepsilon c(\phi)^2, \\ & 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}, \quad \widehat{\zeta} = e^{i\phi}, \quad \phi \in (0, 2\pi), \end{aligned} \quad (5.31)$$

с постоянной  $C_4 = 4(1 + \lambda_0)^2 \|f\|_{L_\infty}^2 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 \widehat{C}_1 + \mathfrak{C}_2$ .

Масштабным преобразованием из (5.31) получаем

$$\| (B(\varepsilon; \vartheta) - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 Q_0)^{-1} - (B^0(\varepsilon; \vartheta) - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 c(\phi)^2 \varepsilon^{-1}. \quad (5.32)$$

Здесь в качестве  $\varepsilon$  возьмем величину  $\widetilde{\varepsilon} |\zeta|^{1/2}$ , считая, что  $0 < \widetilde{\varepsilon} \leq 1$ ,  $\zeta = |\zeta| e^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $\phi \in (0, 2\pi)$ ,  $|\zeta| \geq 1$ . В качестве  $\vartheta$  возьмем  $|\zeta|^{-1/2}$ . Тогда автоматически  $0 < \vartheta \leq 1$  и  $0 < \varepsilon \vartheta \leq 1$ . Имеем (см. (5.3), (5.10))

$$\begin{aligned} & B(\widetilde{\varepsilon} |\zeta|^{1/2}; |\zeta|^{-1/2}) = B(\widetilde{\varepsilon}; 1), \\ & B^0(\widetilde{\varepsilon} |\zeta|^{1/2}; |\zeta|^{-1/2}) = B^0(\widetilde{\varepsilon}; 1). \end{aligned}$$

Поэтому из (5.32) следует оценка

$$\begin{aligned} & \| (B(\widetilde{\varepsilon}; 1) - \zeta \widetilde{\varepsilon}^2 Q_0)^{-1} - (B^0(\widetilde{\varepsilon}; 1) - \zeta \widetilde{\varepsilon}^2 \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_4 c(\phi)^2 \widetilde{\varepsilon}^{-1} |\zeta|^{-1/2}, \quad 0 < \widetilde{\varepsilon} \leq 1, \quad \zeta = |\zeta| e^{i\phi}, \quad |\zeta| \geq 1, \quad 0 < \phi < 2\pi. \end{aligned}$$

Отсюда переобозначением  $\varepsilon := \widetilde{\varepsilon}$  и обратным масштабным преобразованием получаем (4.2). Это завершает доказательство теоремы 4.1.

□

## § 6. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 4.2 И 4.4

**6.1. Оператор  $\mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)$ .** Пусть по-прежнему  $0 < \vartheta \leq 1$  и  $0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}$ . Рассмотрим обобщенную резольвенту  $(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$ . С учетом вида задач для  $\Lambda$  и  $\tilde{\Lambda}$  (см. (1.23) и (1.31)) аналог корректора (3.2) для обобщенной резольвенты  $(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}$  имеет вид

$$\mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta) = \left( [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + \vartheta [\tilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) S_\varepsilon (B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}. \quad (6.1)$$

Оператор  $\mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)$  непрерывно переводит  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Это видно из следующей леммы.

**Лемма 6.1.** Пусть  $\mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)$  — оператор (6.1). Тогда при  $0 < \vartheta \leq 1$  и  $\varepsilon > 0$  оператор  $\mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)$  непрерывен из  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  и выполнены оценки

$$\|\mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_K^{(1)}, \quad (6.2)$$

$$\|\varepsilon \mathbf{D}\mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_K^{(2)}\varepsilon + C_K^{(3)}. \quad (6.3)$$

Постоянные  $C_K^{(1)}$ ,  $C_K^{(2)}$ ,  $C_K^{(3)}$  зависят лишь от исходных данных (1.40).

*Доказательство.* Оценим  $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норму корректора:

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \|[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & + \|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \|(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Применяя предложение 3.2 и учитывая (1.26), находим

$$\|[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq M_1. \quad (6.5)$$

Согласно (1.4)

$$\begin{aligned} & \|b(\mathbf{D})(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Так как символ оператора  $B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0}$  подчинен оценке (5.9), имеем

$$\|\mathbf{D}(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \check{c}_*^{-1} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \frac{|\xi|}{|\xi|^2 + 1} \leq (2\check{c}_*)^{-1}. \quad (6.7)$$

Используя (3.12), (5.18) и (6.4)–(6.7), получаем оценку (6.2) с постоянной  $C_K^{(1)} = \alpha_1^{1/2}(2\check{c}_*)^{-1}M_1 + \lambda_0^{-1}\widetilde{M}_1\|f\|_{L_\infty}^2$ .

Проверим теперь неравенство (6.3). Очевидно,

$$\begin{aligned} \varepsilon D_j \mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta) &= [(D_j \Lambda)^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} \\ &+ \varepsilon [\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_j(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} \\ &+ \vartheta [(D_j \widetilde{\Lambda})^\varepsilon]S_\varepsilon(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} \\ &+ \varepsilon \vartheta [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon D_j(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \|\varepsilon \mathbf{D}\mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq 4\|[(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & + 4\|\varepsilon [\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_j(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & + 4\|[(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon]S_\varepsilon(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & + 4\|\varepsilon [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon D_j(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Применяя предложение 3.2 и (1.27), (1.37), находим

$$\|[(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq M_2, \quad (6.9)$$

$$\|[(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq |\Omega|^{-1/2}C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty} =: \widetilde{M}_2. \quad (6.10)$$

В силу (1.4) и (5.8) выполнено

$$\|b(\mathbf{D})(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \alpha_1^{1/2}c_*^{-1}. \quad (6.11)$$

Объединяя (3.12), (5.18), (6.5)–(6.11), приходим к оценке (6.3) с постоянными

$$\begin{aligned} C_K^{(2)} &= (4\alpha_1 M_1^2 c_*^{-2} + \widetilde{M}_1^2 \tilde{c}_*^{-2})^{1/2}, \\ C_K^{(3)} &= (\alpha_1 M_2^2 \tilde{c}_*^{-2} + 4\lambda_0^{-2} \|f\|_{L_\infty}^4 \widetilde{M}_2^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

□

**6.2. Доказательство теоремы 4.2.** С учетом замечания 3.5 для  $B_\varepsilon(\vartheta)$  справедлив результат теоремы 3.3:

$$\begin{aligned} \|(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq C_3 \varepsilon, \\ 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Распространим эту оценку на  $0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}$ . При  $1 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}$  воспользуемся грубыми оценками. Действуя по аналогии с (5.27), (5.28), находим

$$\|(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_3, \quad (6.13)$$

где  $\mathfrak{C}_3 = \lambda_0^{-1} \|f\|_{L_\infty}^2 + \frac{1}{2} \lambda_0^{-1/2} c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty}$ .

Аналогично с учетом (5.7) и (5.12) имеем

$$\|(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_3. \quad (6.14)$$

При  $1 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}$  воспользуемся леммой 6.1 и неравенствами (6.13), (6.14), при  $0 < \varepsilon \leq 1$  — оценкой (6.12). В итоге получаем

$$\begin{aligned} \|(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq \widehat{C}_3 \varepsilon, \\ 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}, \end{aligned} \quad (6.15)$$

где  $\widehat{C}_3 = \max\{C_3; 2\mathfrak{C}_3 + C_K^{(1)} + C_K^{(2)} + C_K^{(3)}\}$ .

Положим

$$K(\varepsilon; \vartheta; \zeta) := \left( [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + \vartheta [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) S_\varepsilon (B^0(\vartheta) - \zeta \overline{Q_0})^{-1}, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+. \quad (6.16)$$

Отметим, что  $K(\varepsilon; \vartheta; -\lambda_0) = \mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)$ .

Установим аналог оценки (6.15) для оператора  $(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}$ , где  $\widehat{\zeta} = e^{i\phi}$  при  $\phi \in (0, 2\pi)$ , с помощью тождества

$$\begin{aligned} & (B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta}) \\ &= (B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon) \\ &\quad \times ((B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \vartheta; -\lambda_0)) \\ &\quad \times (B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} \\ &\quad + \varepsilon(\lambda_0 + \widehat{\zeta})(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}Q_0^\varepsilon K(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta}) \\ &\quad + (\lambda_0 + \widehat{\zeta})(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части через  $\mathcal{J}_l(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta})$ ,  $l = 1, 2, 3$ . Сначала оценим  $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норму каждого слагаемого. В силу (5.11), (6.1) и (6.16) имеем

$$\begin{aligned} \|Q_0^\varepsilon K(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 \|\mathcal{K}(\varepsilon; \vartheta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\times \|(B^0(\vartheta) + \lambda_0 \overline{Q_0})(B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (5.24) и (6.2) следует, что

$$\|Q_0^\varepsilon K(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2(1 + \lambda_0)C_K^{(1)} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^3 c(\phi). \quad (6.18)$$

Из (5.27) и (6.18) следует оценка оператора  $\mathcal{J}_2(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta})$ :

$$\|\mathcal{J}_2(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\varepsilon(\lambda_0 + 1)^2 \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^3 C_K^{(1)} c(\phi)^2.$$

Для оценки  $(L_2 \rightarrow L_2)$ -нормы оператора  $\mathcal{J}_1(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta})$  используем (5.23), (5.24) и (6.15), для оценки  $\mathcal{J}_3(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta})$  — (2.14), (5.25), (5.29) и (5.30). В результате получаем

$$\begin{aligned} & \|(B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_5 \varepsilon c(\phi)^2, \quad 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}, \quad \widehat{\zeta} = e^{i\phi}, \quad 0 < \phi < 2\pi. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_5 &= 4(1 + \lambda_0)^2 \|f\|_{L_\infty}^2 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 \widehat{C}_3 + 2(1 + \lambda_0)^2 \|f\|_{L_\infty}^3 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^3 C_K^{(1)} \\ &\quad + (1 + \lambda_0) C_{Q_0} \mathfrak{C}_1^2. \end{aligned}$$

Применим теперь к левой и правой частям (6.17) оператор  $B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}$ :

$$\begin{aligned} & B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} \left( (B_\varepsilon(\vartheta) - \widehat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \widehat{\zeta}\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta}) \right) \\ &= B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} \mathcal{J}_1(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta}) + B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} \mathcal{J}_2(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta}) + B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} \mathcal{J}_3(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta}). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Оценим  $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норму каждого слагаемого в правой части.

С учетом (5.13) при всех  $\mathbf{w} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  выполнено

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} \mathbf{w}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = b_\varepsilon(\vartheta)[\mathbf{w}, \mathbf{w}] \\ &= \widetilde{b}_\varepsilon(\vartheta)[(f^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}, (f^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}] = \|\widetilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} (f^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Далее, из (5.14) следует, что

$$(f^\varepsilon)^*(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon) = (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I)(f^\varepsilon)^{-1}. \quad (6.22)$$

Используя (5.14), (5.22), (6.21) и (6.22), получаем

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 Q_0^\varepsilon)\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \|(\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}I)^{-1}(\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) + \lambda_0 I)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \quad \times \|\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(f^\varepsilon)^{-1}\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq 2(\lambda_0 + 1)c(\phi)\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Теперь из верхней оценки (5.6), (5.24), (6.15) и (6.23) вытекает оценка первого слагаемого в правой части (6.20):

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_1(\varepsilon; \vartheta; \hat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_4\varepsilon c(\phi)^2, \\ & 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}, \quad \hat{\zeta} = e^{i\phi}, \quad 0 < \phi < 2\pi, \end{aligned} \quad (6.24)$$

где  $\mathfrak{C}_4 := 4(1 + \lambda_0)^2 c_6^{1/2} \hat{C}_3 \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ .

Далее,

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_2(\varepsilon; \vartheta; \hat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \varepsilon(\lambda_0 + 1)\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \|Q_0^\varepsilon K(\varepsilon; \vartheta; \hat{\zeta})\|_{L_2 \rightarrow L_2}. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Учитывая (5.14) и (6.21), находим

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & = \|\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}I)^{-1}(f^\varepsilon)^*\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Очевидно,

$$\|\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{\nu \geq 0} \frac{\nu^{1/2}}{|\nu - \hat{\zeta}|} \leq c(\phi). \quad (6.27)$$

В силу (6.26) и (6.27)

$$\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}(B_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L_\infty} c(\phi). \quad (6.28)$$

Из (6.18), (6.25) и (6.28) вытекает оценка второго слагаемого в правой части (6.20):

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\mathcal{J}_2(\varepsilon; \vartheta; \hat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_5\varepsilon c(\phi)^2, \\ & 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}, \quad \hat{\zeta} = e^{i\phi}, \quad 0 < \phi < 2\pi, \end{aligned} \quad (6.29)$$

где  $\mathfrak{C}_5 := 2(1 + \lambda_0)^2 C_K^{(1)} \|f\|_{L_\infty}^2 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^3$ .

Перейдем к рассмотрению третьего слагаемого в правой части (6.20). Очевидно,

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} \mathcal{J}_3(\varepsilon; \vartheta; \hat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq (\lambda_0 + 1) \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} (B_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \times \| [Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}] \|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \| (B^0(\vartheta) - \hat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Используя (5.14), (6.21) и соображения двойственности, имеем

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} (B_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & = \|\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta} I)^{-1} (f^\varepsilon)^*\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & = \|f^\varepsilon (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}^* I)^{-1} \tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \\ & = \|f^\varepsilon \tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

В силу нижней оценки (5.6) и тождества (5.13)

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{D}[f^\varepsilon] \tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq c_*^{-1/2} \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} f^\varepsilon \tilde{B}_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & = c_*^{-1/2} \|\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Очевидно,

$$\|\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) (\tilde{B}_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta}^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{\nu \geq 0} \frac{\nu}{|\nu - \hat{\zeta}^*|} \leq c(\phi). \quad (6.33)$$

Теперь из (6.27) в точке  $\hat{\zeta}^*$ , (6.31)–(6.33) следует, что

$$\|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} (B_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (\|f\|_{L_\infty} + c_*^{-1/2}) c(\phi). \quad (6.34)$$

Неравенства (2.14), (5.30), (6.30) и (6.34) влекут

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} \mathcal{J}_3(\varepsilon; \vartheta; \hat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_6 \varepsilon c(\phi)^2, \\ & 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}, \quad \hat{\zeta} = e^{i\phi}, \quad 0 < \phi < 2\pi, \end{aligned} \quad (6.35)$$

где  $\mathfrak{C}_6 := (1 + \lambda_0)(\|f\|_{L_\infty} + c_*^{-1/2}) C_{Q_0} \mathfrak{C}_1$ .

В итоге из (6.20), (6.24), (6.29) и (6.35) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon(\vartheta)^{1/2} ((B_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \hat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \vartheta; \hat{\zeta}))\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ & \leq \widehat{C}_6 \varepsilon c(\phi)^2, \quad 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}, \quad \hat{\zeta} = e^{i\phi}, \quad 0 < \phi < 2\pi, \end{aligned} \quad (6.36)$$

с постоянной  $\widehat{C}_6 = \mathfrak{C}_4 + \mathfrak{C}_5 + \mathfrak{C}_6$ . С учетом нижней оценки (5.6) из (6.36) следует, что

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{D}((B_\varepsilon(\vartheta) - \hat{\zeta} Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0(\vartheta) - \hat{\zeta} \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \vartheta; \hat{\zeta}))\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_6 \varepsilon c(\phi)^2, \quad 0 < \vartheta \leq 1, \quad 0 < \varepsilon \leq \vartheta^{-1}, \quad \hat{\zeta} = e^{i\phi}, \quad 0 < \phi < 2\pi, \end{aligned} \quad (6.37)$$

где  $C_6 = c_*^{-1/2} \widehat{C}_6$ .

Масштабным преобразованием из (6.19) и (6.37) получаем

$$\begin{aligned} & \| (B(\varepsilon; \vartheta) - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 Q_0)^{-1} - (B^0(\varepsilon; \vartheta) - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 \overline{Q_0})^{-1} - \check{K}(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta}) \|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ & \leq C_5 \varepsilon^{-1} c(\phi)^2, \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{D}((B(\varepsilon; \vartheta) - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 Q_0)^{-1} - (B^0(\varepsilon; \vartheta) - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 \overline{Q_0})^{-1} - \check{K}(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta})) \|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ & \leq C_6 c(\phi)^2, \end{aligned} \quad (6.39)$$

где

$$\check{K}(\varepsilon; \vartheta; \widehat{\zeta}) := ([\Lambda] b(\mathbf{D}) + \varepsilon \vartheta [\widetilde{\Lambda}]) S_1 (B^0(\varepsilon; \vartheta) - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 \overline{Q_0})^{-1}.$$

Как и при доказательстве теоремы 4.1, возьмем в (6.38) и (6.39) в качестве  $\varepsilon$  величину  $\tilde{\varepsilon} |\zeta|^{1/2}$ , считая, что  $0 < \tilde{\varepsilon} \leq 1$ ,  $\zeta = |\zeta| e^{i\phi}$  и  $|\zeta| \geq 1$ . В качестве  $\vartheta$  возьмем  $|\zeta|^{-1/2}$ . Далее, переобозначим  $\tilde{\varepsilon} =: \varepsilon$  и выполним обратное масштабное преобразование, учитывая, что

$$\varepsilon K(\varepsilon; \zeta) = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* \check{K}(\varepsilon |\zeta|^{1/2}; |\zeta|^{-1/2}; \widehat{\zeta}) T_\varepsilon, \quad \zeta = |\zeta| e^{i\phi}.$$

Здесь  $T_\varepsilon$  — оператор (1.19),  $K(\varepsilon; \zeta)$  — оператор (4.3). Это приводит к искомым оценкам (4.4), (4.5) и завершает доказательство теоремы 4.2.  $\square$

**6.3. Доказательство теоремы 4.4.** Теперь мы выведем утверждение теоремы 4.4 из теоремы 4.2. С учетом (1.4) из (4.5) следует, что

$$\begin{aligned} & \| g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \\ & - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \left( I + \varepsilon \left( [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) S_\varepsilon \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ & \leq \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} C_6 c(\phi)^2. \end{aligned} \quad (6.40)$$

В силу (1.3) справедливо тождество

$$\begin{aligned} & \varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \left( [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) S_\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \\ & = g^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \\ & + \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \left( [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon D_l \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Из (1.4), (1.5), (3.12) и (6.5) вытекает оценка для третьего слагаемого в правой части (6.41):

$$\begin{aligned}
& \left\| \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \left( [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l + [\tilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon D_l \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\
& \leq \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} M_1 \sum_{l=1}^d \|b(\mathbf{D}) D_l (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\
& \quad + \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \widetilde{M}_1 \sum_{l=1}^d \|D_l (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\
& \leq \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1 d^{1/2} M_1 \|\mathbf{D}^2 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\
& \quad + \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} d^{1/2} \widetilde{M}_1 \|\mathbf{D} (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2}.
\end{aligned} \tag{6.42}$$

Воспользуемся оценкой (1.43):

$$\|\mathbf{D}^2 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq c_*^{-1} \|B^0 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2}. \tag{6.43}$$

Учитывая неравенства (5.12) и связь операторов  $B^0 = B^0(1)$  и  $\tilde{B}^0 = \tilde{B}^0(1)$  (см. п. 5.4), находим

$$\begin{aligned}
& \|B^0 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} = \|f_0^{-1} \tilde{B}^0 (\tilde{B}^0 - \zeta I)^{-1} f_0\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\
& \leq \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \sup_{\nu \geq 0} \frac{\nu}{|\nu - \zeta|} \leq \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} c(\phi).
\end{aligned} \tag{6.44}$$

Отсюда и из (6.43) получаем

$$\|\mathbf{D}^2 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq c_*^{-1} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} c(\phi). \tag{6.45}$$

Аналогично, используя (1.42), находим, что

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{D} (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq c_*^{-1/2} \|(B^0)^{1/2} (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\
& = c_*^{-1/2} \|(\tilde{B}^0)^{1/2} (\tilde{B}^0 - \zeta I)^{-1} f_0\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\
& \leq c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} \sup_{\nu \geq 0} \frac{\nu^{1/2}}{|\nu - \zeta|} \leq c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} c(\phi) |\zeta|^{-1/2}.
\end{aligned} \tag{6.46}$$

Теперь из (6.42), (6.45) и (6.46) следует, что при  $|\zeta| \geq 1$  выполнено

$$\left\| \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \left( [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l + [\tilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon D_l \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \mathfrak{C}_7 \varepsilon c(\phi), \tag{6.47}$$

где

$$\mathfrak{C}_7 = \|g\|_{L_\infty} d^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \left( \alpha_1 M_1 c_*^{-1} \|f^{-1}\|_{L_\infty} + \alpha_1^{1/2} \widetilde{M}_1 c_*^{-1/2} \right).$$

Заметим, что в силу предложения 3.1, (1.4) и (6.45) выполнено

$$\begin{aligned} & \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I - S_\varepsilon)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \|g\|_{L_\infty} \varepsilon r_1 \|\mathbf{D}b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \varepsilon r_1 \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}^2(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_8 \varepsilon c(\phi), \end{aligned} \quad (6.48)$$

где  $\mathfrak{C}_8 := r_1 \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} c_*^{-1} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ .

Теперь из (1.25), (6.40), (6.41), (6.47) и (6.48) следует оценка (4.7) с постоянной  $C_7 = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} C_6 + \mathfrak{C}_7 + \mathfrak{C}_8$ . Это завершает доказательство теоремы 4.4.

□

## § 7. УСТРАНЕНИЕ СГЛАЖИВАЮЩЕГО ОПЕРАТОРА. СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

**7.1. Устранение  $S_\varepsilon$  в корректоре.** Оказывается, сглаживающий оператор  $S_\varepsilon$  в корректоре может быть устранен, если наложить на матрицы-функции  $\Lambda(\mathbf{x})$  и  $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})$  дополнительные условия.

**Условие 7.1.** Пусть Г-периодическая матрица-функция  $\Lambda(\mathbf{x})$ , являющаяся решением задачи (1.23), ограничена:  $\Lambda \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ .

Случай, когда условие 7.1 выполнено автоматически, выделены в [BSu3, лемма 8.7].

**Предложение 7.2** ([BSu3]). Условие 7.1 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений:*

- 1°) размерность не превосходит двух, т. е.  $d \leq 2$ ;
- 2°) оператор  $\mathcal{A}_\varepsilon$  имеет вид  $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}$  при вещественной матрице  $g(\mathbf{x})$ ,  $d \geq 1$ ;
- 3°) размерность  $d$  произвольна, и для эффективной матрицы справедливо равенство  $g^0 = \underline{g}$ , т. е. выполнено (1.30).

Для устранения  $S_\varepsilon$  в члене корректора, содержащем  $\tilde{\Lambda}^\varepsilon$ , достаточно наложить на матрицу-функцию  $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})$  следующее условие.

**Условие 7.3.** Пусть Г-периодическая матрица-функция  $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ , являющаяся решением задачи (1.31), удовлетворяет условию

$$\tilde{\Lambda} \in L_p(\Omega), \quad p = 2 \text{ при } d = 1, \quad p > 2 \text{ при } d = 2, \quad p = d \text{ при } d \geq 3.$$

В [Su2, предложение 8.11] получен следующий результат.

**Предложение 7.4** ([Su2]). Условие 7.3 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений:*

- 1°)  $d \leq 4$ ;
- 2°) размерность  $d$  произвольна, а оператор  $\mathcal{A}_\varepsilon$  имеет вид  $\mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}$  при вещественной матрице  $g(\mathbf{x})$ .

**Замечание 7.5.** В случае, когда  $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}$  с вещественной матрицей-функцией  $g(\mathbf{x})$ , из теоремы 13.1 гл. III книги [LaU] следует, что норма  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$  оценивается величиной, зависящей от  $d$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$  и  $\Omega$ , а норма  $\|\tilde{\Lambda}\|_{L_\infty}$  оценивается величиной, зависящей от  $d$ ,  $\rho$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\|a_j\|_{L_p(\Omega)}$ ,  $j = 1, \dots, d$ , и  $\Omega$ . При этом одновременно выполнены условия 7.1 и 7.3.

Наша цель в этом пункте — доказать следующую теорему.

**Теорема 7.6.** Пусть выполнены условия теоремы 4.1.

1°. Пусть выполнено условие 7.1. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C'_8 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \\ & \| \mathbf{D}((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C'_9 c(\phi)^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Постоянные  $C'_8$  и  $C'_9$  зависят лишь от исходных данных (1.40) и от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

2°. Пусть справедливо условие 7.3. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , выполнено

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})S_\varepsilon + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C''_8 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \\ & \| \mathbf{D}((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})S_\varepsilon + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C''_9 c(\phi)^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Постоянныи  $C''_8$  и  $C''_9$  контролируются через исходные данные (1.40), и норму  $\|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ .

3°. Пусть выполнены условия 7.1 и 7.3. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_8 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \\ & \| \mathbf{D}((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_9 c(\phi)^2 \varepsilon. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Постоянныи  $C_8$  и  $C_9$  зависят от исходных данных (1.40), от  $p$  и от норм  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$  и  $\|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ .

Ограниченнность операторов под знаком нормы в оценках теоремы 7.6 (при соответствующих условиях) вытекает из следствия 2.2, леммы 2.5 и

следствия 2.6. Утверждения теоремы 7.6 вытекают из (4.4), (4.5) и лемм 7.7, 7.8, установленных ниже.

**Лемма 7.7.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.1 и условие 7.1. Тогда при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедливы оценки*

$$\varepsilon \|[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_\Lambda^{(1)} \varepsilon c(\phi) |\zeta|^{-1/2}, \quad (7.2)$$

$$\varepsilon \|\mathbf{D}[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_\Lambda^{(2)} \varepsilon c(\phi). \quad (7.3)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_\Lambda^{(1)}$  и  $\mathfrak{C}_\Lambda^{(2)}$  зависят только от исходных данных (1.40) и от  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

*Доказательство.* Для проверки (7.2) воспользуемся неравенствами (1.4) и (6.46):

$$\begin{aligned} & \|[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq 2\alpha_1^{1/2} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_\Lambda^{(1)} c(\phi) |\zeta|^{-1/2}, \end{aligned}$$

где  $\mathfrak{C}_\Lambda^{(1)} = 2\alpha_1^{1/2} c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

Теперь проверим (7.3). Имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_j [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} &= [(\partial_j \Lambda)^\varepsilon](S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \\ &+ \varepsilon [\Lambda^\varepsilon](S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \partial_j (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \|\mathbf{D}[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq 2 \|[(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon](S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & + 2\varepsilon^2 \|\Lambda\|_{L_\infty}^2 \sum_{j=1}^d \|(S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \partial_j (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

С учетом следствия 2.2 это влечет

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \|\mathbf{D}[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq 2\beta_1 \|(S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & + 2\varepsilon^2 \|\Lambda\|_{L_\infty}^2 (\beta_2 + 1) \sum_{j=1}^d \|(S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \partial_j (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Применяя предложение 3.1 для оценки первого слагаемого справа и учитывая (1.4), находим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \|\mathbf{D}[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \varepsilon^2 \alpha_1 (2r_1^2 \beta_1 + 8(\beta_2 + 1) \|\Lambda\|_{L_\infty}^2) \|\mathbf{D}^2(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

С учетом (6.45) отсюда вытекает искомое неравенство (7.3) с постоянной

$$\mathfrak{C}_\Lambda^{(2)} = \alpha_1^{1/2} c_*^{-1} (2r_1^2 \beta_1 + 8(\beta_2 + 1) \|\Lambda\|_{L_\infty}^2)^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}.$$

□

**Лемма 7.8.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.1 и условие 7.3. Тогда при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , и  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедливы оценки*

$$\varepsilon \|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_{\tilde{\Lambda}}^{(1)} \varepsilon c(\phi) |\zeta|^{-1/2}, \quad (7.5)$$

$$\varepsilon \|\mathbf{D}[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_{\tilde{\Lambda}}^{(2)} \varepsilon c(\phi). \quad (7.6)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_{\tilde{\Lambda}}^{(1)}$  и  $\mathfrak{C}_{\tilde{\Lambda}}^{(2)}$  зависят от исходных данных (1.40), от  $p$  и от  $\|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ .

*Доказательство.* Из леммы 2.5 и условия 7.3 вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \|[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq 2C_\Omega^{(p)} \|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} \|(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Учитывая связь операторов  $B^0 = B^0(1)$  и  $\tilde{B}^0 = \tilde{B}^0(1)$  (см. п. 5.4), а также (5.12), получаем

$$\begin{aligned} & \|(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq |f_0|^2 \|(\tilde{B}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \|f\|_{L_\infty}^2 c(\phi) |\zeta|^{-1}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Объединяя (6.46), (7.7) и (7.8), приходим к (7.5) при

$$\mathfrak{C}_{\tilde{\Lambda}}^{(1)} = 2C_\Omega^{(p)} \|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} (\|f\|_{L_\infty}^2 + c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty}).$$

Теперь докажем (7.6). Аналогично (7.4)

$$\begin{aligned} \varepsilon \partial_j [\tilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} &= [(\partial_j \tilde{\Lambda})^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \\ &+ \varepsilon [\tilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I) \partial_j (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом следствия 2.6 и леммы 2.5 вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \|\mathbf{D}[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq 2\tilde{\beta}_1 \|(S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & + 2(\tilde{\beta}_2 + 1)\varepsilon^2 \|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}^2 (C_\Omega^{(p)})^2 \|(S_\varepsilon - I)\mathbf{D}(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Применяя предложение 3.1 для оценки первого члена справа, получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \|\mathbf{D}[\tilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \varepsilon \left( 2\tilde{\beta}_1 r_1^2 + 8(\tilde{\beta}_2 + 1) (C_\Omega^{(p)})^2 \|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{D}(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

С учетом (6.45), (6.46) это приводит к (7.6) с постоянной

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_{\tilde{\Lambda}}^{(2)} &= \left( 2\tilde{\beta}_1 r_1^2 + 8(\tilde{\beta}_2 + 1) \left( C_{\Omega}^{(p)} \right)^2 \|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\times \left( c_*^{-1} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} + c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} \right). \end{aligned}$$

□

## 7.2. Устранение $S_\varepsilon$ в аппроксимации потоков.

**Теорема 7.9.** Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Пусть  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  – матрица-функция (1.25).

1°. Пусть выполнено условие 7.1. Положим

$$G_1(\varepsilon; \zeta) := \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \quad (7.9)$$

Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , справедлива оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_1(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C'_{10} c(\phi)^2 \varepsilon.$$

Постоянная  $C'_{10}$  контролируется через исходные данные (1.40) и  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

2°. Пусть справедливо условие 7.3. Положим

$$G_2(\varepsilon; \zeta) := \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda})^\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \quad (7.10)$$

Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , выполнено

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_2(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C''_{10} c(\phi)^2 \varepsilon.$$

Постоянная  $C''_{10}$  зависит лишь от исходных данных (1.40), от  $p$  и от  $\|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ .

3°. Пусть справедливы условия 7.1 и 7.3. Обозначим

$$G_3(\varepsilon; \zeta) := \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda})^\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \quad (7.11)$$

Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , справедлива оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_3(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{10} c(\phi)^2 \varepsilon. \quad (7.12)$$

Здесь постоянная  $C_{10}$  зависит от исходных данных (1.40), от  $p$  и от норм  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$  и  $\|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ .

*Доказательство.* Результат теоремы 7.9 выводится из теоремы 7.6. Доказательство во многом похоже на доказательство теоремы 4.4 (см. п. 6.3). Для примера докажем утверждение 3°. Аналогично (6.40) из (7.1) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \\ &- g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \left( I + \varepsilon \left( [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\tilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ &\leq \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} C_9 c(\phi)^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Далее, аналогично (6.41),

$$\begin{aligned} & \varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \left( [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\tilde{\Lambda}^\varepsilon] \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \\ &= g^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D}) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \tilde{\Lambda})^\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \\ &+ \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \left( [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) D_l + [\tilde{\Lambda}^\varepsilon] D_l \right) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Отличие от доказательства теоремы 4.4 возникает при оценке третьего слагаемого в правой части (7.14). Используя условие 7.1, а также (1.4) и (1.5), приходим к оценке

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{j=1}^d \|g^\varepsilon b_l [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) D_l (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \varepsilon \alpha_1 d^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}^2 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Используя условие 7.3, (1.5) и лемму 2.5, получаем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \sum_{j=1}^d \|g^\varepsilon b_l [\tilde{\Lambda}^\varepsilon] D_l (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \varepsilon \alpha_1^{1/2} d^{1/2} C_\Omega^{(p)} \|g\|_{L_\infty} \|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} \|\mathbf{D} (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Из (7.15), (7.16) и (6.45), (6.46) вытекает оценка  $(L_2 \rightarrow L_2)$ -нормы третьего слагаемого в правой части (7.14) через  $\hat{C}_{10} c(\phi) \varepsilon$ , где

$$\begin{aligned} \hat{C}_{10} &= \alpha_1 d^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} c_*^{-1} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \\ &+ \alpha_1^{1/2} d^{1/2} C_\Omega^{(p)} \|g\|_{L_\infty} \|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} \left( c_*^{-1} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} + c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} \right). \end{aligned}$$

Вместе с (7.13) и (7.14) это влечет (7.12) с постоянной  $C_{10} = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} C_9 + \hat{C}_{10}$ .

Утверждения 1° и 2° получаются аналогично; при проверке 2° нужно дополнительно учесть (6.48).  $\square$

**7.3. Случай, когда корректор обращается в нуль.** Предположим, что  $g^0 = \bar{g}$ , т. е. справедливы соотношения (1.29). Тогда Г-периодическое решение задачи (1.23) обращается в нуль:  $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$ . Пусть выполнено равенство

$$\sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0. \quad (7.17)$$

Тогда Г-периодическое решение задачи (1.31) равно нулю:  $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$ . В этом случае оператор (4.3) обращается в нуль, формула (4.5) упрощается и теорема 4.2 влечет следующий результат.

**Предложение 7.10.** Пусть справедливы соотношения (1.29) и (7.17). Тогда в условиях теоремы 4.1 при  $0 < \varepsilon \leq 1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , верна оценка

$$\|\mathbf{D}((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_6 c(\phi)^2 \varepsilon.$$

**7.4. Специальный случай.** Предположим, что  $g^0 = \underline{g}$ , т. е. справедливы представления (1.30). Тогда в силу предложения 7.2(3°) выполнено условие 7.1. При этом согласно [BSu2, замечание 3.5] матрица-функция (1.25) постоянна и совпадает с  $g^0$ , т. е.  $\tilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$ . Таким образом,  $\tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} = g^0 b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}$ .

Предположим дополнительно, что имеет место равенство (7.17). Тогда  $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$  и из теоремы 7.9(3°) вытекает следующий результат.

**Предложение 7.11.** Пусть справедливы соотношения (1.30) и (7.17). Тогда в условиях теоремы 4.1 при  $0 < \varepsilon \leq 1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , выполнена оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{10} c(\phi)^2 \varepsilon.$$

### § 8. ДРУГАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОВОБЩЕННОЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$

**8.1. Результат в общем случае.** В теоремах из §4 и §7 предполагалось, что  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ , причем  $|\zeta| \geq 1$ . В настоящем параграфе мы устанавливаем результаты, справедливые в более широкой области изменения параметра  $\zeta$ .

**Теорема 8.1.** Пусть выполнены условия теоремы 4.2. Пусть матрица-функция  $f(\mathbf{x})$  и матрица  $f_0$  определены в п. 5.4. Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$ , где  $c_b \geq 0$  — общая нижняя грань операторов  $\tilde{B}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* B_\varepsilon f^\varepsilon$  и  $\tilde{B}^0 = f_0 B^0 f_0$ . Положим  $\zeta - c_b = |\zeta - c_b| e^{i\psi}$ ,  $\psi \in (0, 2\pi)$ , и введем обозначение

$$\varrho(\zeta) = \begin{cases} c(\psi)^2 |\zeta - c_b|^{-2}, & |\zeta - c_b| < 1, \\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_b| \geq 1. \end{cases} \quad (8.1)$$

Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  верны оценки

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{11} \varrho(\zeta) \varepsilon, \quad (8.2)$$

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{12} \varrho(\zeta) \varepsilon, \quad (8.3)$$

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{D}((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta))\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (C_{13} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{14}) \varrho(\zeta) \varepsilon. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Пусть  $G(\varepsilon; \zeta)$  — оператор (4.6). При  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедливо неравенство

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C_{15} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{16}) \varrho(\zeta) \varepsilon. \quad (8.5)$$

Постоянные  $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}$  и  $C_{16}$  контролируются через исходные данные (1.40) и  $c_b$ .

**Следствие 8.2.** В условиях теоремы 8.1 выполнена оценка

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq (C_{12} + C_{13} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{14}) \varrho(\zeta) \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \end{aligned} \quad (8.6)$$

**Замечание 8.3.** 1) Мы не контролируем явно края спектров операторов  $\tilde{B}_\varepsilon \geq 0$  и  $\tilde{B}^0 \geq 0$ , и может оказаться, что  $c_b = 0$ . Тогда  $\psi = \phi$  и при  $|\zeta| = |\zeta - c_b| \geq 1$  оценки теоремы 8.1 — просто загрубление результатов теорем 4.1, 4.2 и 4.4. 2) При большом  $|\zeta|$  удобнее применять теоремы 4.1, 4.2 и 4.4, а при ограниченных значениях  $|\zeta|$  теорема 8.1 может оказаться предпочтительнее.

*Доказательство.* Для проверки (8.2) воспользуемся теоремой 4.1 при  $\zeta = -1$ . Согласно (4.2)

$$\| (B_\varepsilon + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 + \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Опираясь на аналог тождества (5.20) при  $\vartheta = 1$  (с заменой  $\widehat{\zeta}$  и  $\lambda_0$  на  $\zeta$  и 1 соответственно), и действуя по аналогии с (5.21)–(5.24), находим

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq C_4 \varepsilon \|f\|_{L_\infty}^2 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 \sup_{\nu \geq c_b} \frac{(\nu + 1)^2}{|\nu - \zeta|^2} \\ & + |\zeta + 1| \| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \|_{H^{-1} \rightarrow L_2} \| [Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}] \|_{H^1 \rightarrow H^{-1}} \| (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2 \rightarrow H^1}. \end{aligned} \quad (8.7)$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{\nu \geq c_b} \frac{(\nu + 1)^2}{|\nu - \zeta|^2} \leq (c_b + 2)^2 \varrho(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty). \quad (8.8)$$

Далее, по двойственности,

$$\| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \|_{H^{-1} \rightarrow L_2} = \| (B_\varepsilon - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1} \|_{L_2 \rightarrow H^1}. \quad (8.9)$$

В силу (5.14) имеем

$$\| (B_\varepsilon - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1} \|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \|f\|_{L_\infty}^2 \sup_{\nu \geq c_b} \frac{1}{|\nu - \zeta^*|} = \|f\|_{L_\infty}^2 c(\psi) |\zeta - c_b|^{-1}. \quad (8.10)$$

Заметим, что

$$|\zeta + 1|^{1/2} \leq (2 + c_b)^{1/2} \text{ при } |\zeta - c_b| < 1, \quad (8.11)$$

$$|\zeta + 1|^{1/2} |\zeta - c_b|^{-1} \leq (2 + c_b)^{1/2} \text{ при } |\zeta - c_b| \geq 1. \quad (8.12)$$

Поэтому

$$|\zeta + 1|^{1/2} \| (B_\varepsilon - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1} \|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \|f\|_{L_\infty}^2 (2 + c_b)^{1/2} \varrho(\zeta)^{1/2}. \quad (8.13)$$

Действуя по аналогии с (5.28), получаем

$$\|\mathbf{D}(B_\varepsilon - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} \sup_{\nu \geq c_b} \frac{\nu^{1/2}}{|\nu - \zeta^*|}. \quad (8.14)$$

Справедлива оценка

$$\sup_{\nu \geq c_b} \frac{\nu}{|\nu - \zeta^*|^2} \leq \begin{cases} (c_b + 1)c(\psi)^2 |\zeta - c_b|^{-2}, & |\zeta - c_b| < 1, \\ (c_b + 1)c(\psi)^2 |\zeta - c_b|^{-1}, & |\zeta - c_b| \geq 1. \end{cases} \quad (8.15)$$

С учетом (8.11) и оценки  $|\zeta + 1||\zeta - c_b|^{-1} \leq 2 + c_b$  при  $|\zeta - c_b| \geq 1$  отсюда следует неравенство

$$|\zeta + 1| \sup_{\nu \geq c_b} \frac{\nu}{|\nu - \zeta^*|^2} \leq (c_b + 2)(c_b + 1)\varrho(\zeta). \quad (8.16)$$

В силу (8.14) и (8.16)

$$\begin{aligned} & |\zeta + 1|^{1/2} \|\mathbf{D}(B_\varepsilon - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ & \leq c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} (c_b + 2)^{1/2} (c_b + 1)^{1/2} \varrho(\zeta)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Теперь из (8.9), (8.13), (8.17) вытекает, что

$$|\zeta + 1|^{1/2} \|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1} \rightarrow L_2} \leq \mathfrak{C}_9 \varrho(\zeta)^{1/2}, \quad (8.18)$$

где

$$\mathfrak{C}_9 = \|f\|_{L_\infty}^2 (2 + c_b)^{1/2} + c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} (c_b + 2)^{1/2} (c_b + 1)^{1/2}.$$

Аналогично (8.10) и (8.14) с учетом (1.42), (5.12) получаем

$$\|(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \|f\|_{L_\infty}^2 c(\psi) |\zeta - c_b|^{-1}, \quad (8.19)$$

$$\|\mathbf{D}(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq c_*^{-1/2} \|f\|_{L_\infty} \sup_{\nu \geq c_b} \frac{\nu^{1/2}}{|\nu - \zeta^*|}. \quad (8.20)$$

Вместе с (8.11), (8.12) и (8.16) это влечет

$$|\zeta + 1|^{1/2} \|(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow H^1} \leq \mathfrak{C}_9 \varrho(\zeta)^{1/2}. \quad (8.21)$$

Объединяя (2.14), (8.7), (8.8), (8.18) и (8.21), приходим к оценке (8.2) с постоянной  $C_{11} = C_4(c_b + 2)^2 \|f\|_{L_\infty}^2 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 + C_{Q_0} \mathfrak{C}_9^2$ .

Установим теперь неравенство (8.3), используя уже доказанную оценку (8.2):

$$\begin{aligned} & \|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ & \leq C_{11} \varrho(\zeta) \varepsilon + \varepsilon \|K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2}. \end{aligned} \quad (8.22)$$

В силу (1.4), (3.12) и (6.5) оператор (4.3) подчинен неравенству

$$\begin{aligned} \|K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} & \leq M_1 \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ & + \widetilde{M}_1 \|(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Учитывая (8.15) и (8.20), имеем

$$\|\mathbf{D}(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq c_*^{-1/2} (c_b + 1)^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \varrho(\zeta)^{1/2}. \quad (8.24)$$

В силу (8.19), (8.23) и (8.24)

$$\|K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \mathfrak{C}_{10} \varrho(\zeta)^{1/2}, \quad (8.25)$$

где  $\mathfrak{C}_{10} = M_1 \alpha_1^{1/2} c_*^{-1/2} (c_b + 1)^{1/2} \|f\|_{L_\infty} + \widetilde{M}_1 \|f\|_{L_\infty}^2$ . Объединяя (8.22) и (8.25), и учитывая, что  $\varrho(\zeta)^{1/2} \leq \varrho(\zeta)$ , приходим к оценке (8.3) с постоянной  $C_{12} = C_{11} + \mathfrak{C}_{10}$ .

Чтобы установить неравенство (8.4), запишем аналог тождества (6.17) при  $\vartheta = 1$  (в точках  $\zeta$  и 1) и подействуем на левую и правую части тождества оператором  $B_\varepsilon^{1/2}$ :

$$\begin{aligned} & B_\varepsilon^{1/2} ((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta)) \\ &= B_\varepsilon^{1/2} (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} (B_\varepsilon + Q_0^\varepsilon) ((B_\varepsilon + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; -1)) \\ &\times (B^0 + \overline{Q_0}) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} + \varepsilon (1 + \zeta) B_\varepsilon^{1/2} (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} Q_0^\varepsilon K(\varepsilon; \zeta) \\ &+ (1 + \zeta) B_\varepsilon^{1/2} (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} (Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Обозначим слагаемые в правой части через  $\mathcal{I}_j(\varepsilon; \zeta)$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Пользуясь аналогами соотношений (5.14), (6.21) и (6.22) при  $\vartheta = 1$ , приходим, что при всех  $\mathbf{w} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  выполнено

$$\begin{aligned} & \|B_\varepsilon^{1/2} (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} (B_\varepsilon + Q_0^\varepsilon) \mathbf{w}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|\tilde{B}_\varepsilon^{1/2} (\tilde{B}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} (\tilde{B}_\varepsilon + I) (f^\varepsilon)^{-1} \mathbf{w}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|(\tilde{B}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} (\tilde{B}_\varepsilon + I)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \|B_\varepsilon^{1/2} \mathbf{w}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Первое слагаемое в правой части (8.26) оценим с помощью (8.27) и верхней оценки (5.6) при  $\vartheta = 1$ :

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{I}_1(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq c_6^{1/2} \|(\tilde{B}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} (\tilde{B}_\varepsilon + I)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ & \times \|(\tilde{B}_\varepsilon + I)^{-1} - (B^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; -1)\|_{L_2 \rightarrow H^1} \\ & \times \|(B^0 + \overline{Q_0}) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \mathfrak{C}_{11} \varrho(\zeta) \varepsilon, \end{aligned} \quad (8.28)$$

где  $\mathfrak{C}_{11} = c_6^{1/2} (C_5 + C_6) (c_b + 2)^2 \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}$ . В последнем переходе мы использовали следствие 4.3 при  $\zeta = -1$ , аналог (6.44) и (8.8).

Оценим второе слагаемое в правой части (8.26):

$$\|\mathcal{I}_2(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \varepsilon |\zeta + 1| \|B_\varepsilon^{1/2} (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 \|K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2}. \quad (8.29)$$

Согласно (5.13) и (5.14) (при  $\vartheta = 1$ ) справедлива оценка

$$\|B_\varepsilon^{1/2} (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \|f\|_{L_\infty} \sup_{\nu \geq c_b} \frac{\nu^{1/2}}{|\nu - \zeta|}.$$

На основании (8.16) отсюда вытекает, что

$$|\zeta + 1|^{1/2} \|B_\varepsilon^{1/2} (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq (c_b + 2)^{1/2} (c_b + 1)^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \varrho(\zeta)^{1/2}. \quad (8.30)$$

В силу (8.21) и (8.23) выполнено

$$|\zeta + 1|^{1/2} \|K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq (\alpha_1^{1/2} M_1 + \widetilde{M}_1) \mathfrak{C}_9 \varrho(\zeta)^{1/2}. \quad (8.31)$$

Из (8.29)–(8.31) вытекает неравенство

$$\|\mathcal{I}_2(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \mathfrak{C}_{12} \varrho(\zeta) \varepsilon, \quad (8.32)$$

где  $\mathfrak{C}_{12} = (c_b + 2)^{1/2} (c_b + 1)^{1/2} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^2 (\alpha_1^{1/2} M_1 + \widetilde{M}_1) \mathfrak{C}_9$ .

Перейдем к оценке третьего слагаемого в правой части (8.26):

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_3(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} &\leq |\zeta + 1| \|B_\varepsilon^{1/2} (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1} \rightarrow L_2} \\ &\times \| [Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}] \|_{H^1 \rightarrow H^{-1}} \| (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2 \rightarrow H^1}. \end{aligned} \quad (8.33)$$

По двойственности (ср. (6.31)),

$$\|B_\varepsilon^{1/2} (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1} \rightarrow L_2} = \|f^\varepsilon \widetilde{B}_\varepsilon^{1/2} (\widetilde{B}_\varepsilon - \zeta^* I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow H^1}. \quad (8.34)$$

Аналогично (6.32) с учетом (8.8) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}[f^\varepsilon] \widetilde{B}_\varepsilon^{1/2} (\widetilde{B}_\varepsilon - \zeta^* I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ \leq c_*^{-1/2} \|\widetilde{B}_\varepsilon (\widetilde{B}_\varepsilon - \zeta^* I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq c_*^{-1/2} (c_b + 2) \varrho(\zeta)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

Далее, учитывая (8.15), имеем

$$\|[f^\varepsilon] \widetilde{B}_\varepsilon^{1/2} (\widetilde{B}_\varepsilon - \zeta^* I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \|f\|_{L_\infty} (c_b + 1)^{1/2} \varrho(\zeta)^{1/2}. \quad (8.36)$$

Теперь из (8.34)–(8.36) вытекает неравенство

$$\|B_\varepsilon^{1/2} (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1} \rightarrow L_2} \leq \mathfrak{C}_{13} \varrho(\zeta)^{1/2}, \quad (8.37)$$

где  $\mathfrak{C}_{13} = \|f\|_{L_\infty} (c_b + 1)^{1/2} + c_*^{-1/2} (c_b + 2)$ . Соотношения (2.14), (8.21), (8.33) и (8.37) влекут

$$\|\mathcal{I}_3(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq C_{Q_0} \mathfrak{C}_9 \mathfrak{C}_{13} |\zeta + 1|^{1/2} \varrho(\zeta) \varepsilon. \quad (8.38)$$

Объединяя (8.26), (8.28), (8.32) и (8.38) и используя нижнюю оценку (5.6) (при  $\vartheta = 1$ ), приходим к (8.4) с постоянными  $C_{13} = c_*^{-1/2} (\mathfrak{C}_{11} + \mathfrak{C}_{12})$ ,  $C_{14} = c_*^{-1/2} C_{Q_0} \mathfrak{C}_9 \mathfrak{C}_{13}$ .

Остается проверить (8.5). Из (8.4) с учетом (1.4) следует, что

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \\ &- g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I + \varepsilon [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ &\leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} (C_{13} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{14}) \varrho(\zeta) \varepsilon. \end{aligned} \quad (8.39)$$

Действуя по аналогии с (6.41), (6.42) и (6.48), находим

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I + \varepsilon [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - G(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ &\leq \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} ((\alpha_1 d)^{1/2} M_1 + r_1) \|\mathbf{D}^2 (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ &+ \varepsilon \|g\|_{L_\infty} (\alpha_1 d)^{1/2} \widetilde{M}_1 \|\mathbf{D}(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2}. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Аналогично (6.43) и (6.44) с учетом (8.8) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}^2(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} &\leq c_*^{-1} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \sup_{\nu \geq c_b} \frac{\nu}{|\nu - \zeta|} \\ &\leq c_*^{-1} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} (c_b + 2) \rho(\zeta)^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Вместе с (8.24) и (8.40) это влечет

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - G(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ \leq \mathfrak{C}_{14} \varepsilon \rho(\zeta)^{1/2}, \end{aligned} \quad (8.42)$$

где  $\mathfrak{C}_{14} = \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} (((\alpha_1 d)^{1/2} M_1 + r_1) c_*^{-1} \|f^{-1}\|_{L_\infty} (c_b + 2) + d^{1/2} \widetilde{M}_1 c_*^{-1/2} (c_b + 1)^{1/2})$ . Теперь из (8.39) и (8.42) вытекает оценка (8.5) с постоянными  $C_{15} = \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C_{13} + \mathfrak{C}_{14}$ ,  $C_{16} = \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C_{14}$ .  $\square$

Отметим, что если  $Q_0$  — постоянная матрица, то  $Q_0^\varepsilon = \overline{Q_0}$  и третье слагаемое в правой части (8.26) обращается в нуль:  $\mathcal{I}_3(\varepsilon; \zeta) = 0$ . Поэтому, проследив за доказательством теоремы 8.1, можно сделать следующее замечание.

**Замечание 8.4.** *Если в условиях теоремы 8.1  $Q_0$  — постоянная матрица, то справедливы оценки (8.4)–(8.6) при  $C_{14} = C_{16} = 0$ . То есть члены, содержащие  $|\zeta + 1|^{1/2}$ , в оценках (8.4)–(8.6) отсутствуют.*

**8.2. Устранение  $S_\varepsilon$ .** Выделим случаи, когда сглаживатель  $S_\varepsilon$  удается устраниить.

**Теорема 8.5.** *Пусть выполнены условия теоремы 8.1.*

*1°. Пусть выполнено условие 7.1. Пусть  $G_1(\varepsilon; \zeta)$  — оператор (7.9). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C'_{17} \varrho(\zeta) \varepsilon, \\ &\|\mathbf{D} \left( (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon)(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (C'_{18} + |\zeta + 1|^{1/2} C'_{19}) \varrho(\zeta) \varepsilon, \\ &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_1(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C'_{20} + |\zeta + 1|^{1/2} C'_{21}) \varrho(\zeta) \varepsilon. \end{aligned}$$

*Постоянные  $C'_{17}$ ,  $C'_{18}$ ,  $C'_{19}$ ,  $C'_{20}$ ,  $C'_{21}$  контролируются через данные задачи (1.40),  $c_b$  и  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .*

2°. Пусть выполнено условие 7.3. Пусть  $G_2(\varepsilon; \zeta)$  — оператор (7.10). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  выполнено

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})S_\varepsilon + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C''_{17}\varrho(\zeta)\varepsilon, \\ & \| \mathbf{D} \left( (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})S_\varepsilon + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq (C''_{18} + |\zeta + 1|^{1/2}C''_{19})\varrho(\zeta)\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_2(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C''_{20} + |\zeta + 1|^{1/2}C''_{21})\varrho(\zeta)\varepsilon.$$

Постоянныи  $C''_{17}$ ,  $C''_{18}$ ,  $C''_{19}$ ,  $C''_{20}$  и  $C''_{21}$  зависят от данных задачи (1.40),  $c_b$ ,  $p$  и  $\|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ .

3°. Пусть выполнены условия 7.1 и 7.3. Пусть  $G_3(\varepsilon; \zeta)$  — оператор (7.11). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  имеют место оценки

$$\begin{aligned} & \| (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_{17}\varrho(\zeta)\varepsilon, \\ & \| \mathbf{D} \left( (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + \varepsilon[\tilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq (C_{18} + |\zeta + 1|^{1/2}C_{19})\varrho(\zeta)\varepsilon, \end{aligned}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_3(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (C_{20} + |\zeta + 1|^{1/2}C_{21})\varrho(\zeta)\varepsilon.$$

Постоянныи  $C_{17}$ ,  $C_{18}$ ,  $C_{19}$ ,  $C_{20}$ ,  $C_{21}$  контролируются через данные задачи (1.40),  $c_b$ ,  $p$ , а также  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$  и  $\|\tilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ .

**Замечание 8.6.** Если в условиях теоремы 8.5  $Q_0$  — постоянная матрица, то выполнены оценки из теоремы 8.5 при  $C'_{19} = C'_{21} = C''_{19} = C''_{21} = C_{19} = C_{21} = 0$ .

*Доказательство.* Аппроксимации при учете корректора выводятся из теоремы 8.1 аналогично доказательству теоремы 7.6. Отличие состоит в том, что вместо (6.45), (6.46) и (7.8) нужно использовать (8.41), (8.24) и (8.19) соответственно.

Утверждения относительно потоков выводятся из аппроксимаций при учете корректора по аналогии с доказательством теоремы 7.9. Отличие состоит лишь в том, что вместо (6.45), (6.46) надо использовать (8.41) и (8.24) соответственно.  $\square$

**8.3. Специальные случаи.** Аналогично предложению 7.10 с помощью теоремы 8.1 выделяем случай, когда корректор обращается в нуль.

**Предложение 8.7.** Пусть справедливы равенства (1.29) и (7.17). Тогда в условиях теоремы 8.1 при  $0 < \varepsilon \leq 1$  выполнено

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{D} \left( (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \right) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq (C_{13} + |\zeta + 1|^{1/2}C_{14})\varrho(\zeta)\varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогично предложению 7.11 из теоремы 8.5(3°) выводится следующее утверждение.

**Предложение 8.8.** *Пусть справедливы соотношения (1.30) и (7.17). Тогда в условиях теоремы 8.1 при  $0 < \varepsilon \leq 1$  верна оценка*

$$\begin{aligned} & \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq (C_{20} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{21}) \varrho(\zeta) \varepsilon. \end{aligned}$$

## § 9. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ОБЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Рассматриваемые в этом параграфе примеры ранее изучались в [Su2] и [Su6].

**9.1. Скалярный эллиптический оператор.** Рассмотрим случай, когда  $n = 1$ ,  $m = d$ ,  $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$ , а  $g(\mathbf{x})$  — Г-периодическая симметричная  $(d \times d)$ -матрица-функция с вещественными элементами,  $g(\mathbf{x}) > 0$ ,  $g, g^{-1} \in L_\infty$ . Тогда очевидно  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$  (см. (1.4)), а оператор  $\mathcal{A}_\varepsilon$  имеет вид  $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla$ .

Далее, пусть  $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \operatorname{col} \{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}$ , где  $A_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, \dots, d$ , — Г-периодические вещественные функции, причем

$$A_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geq 2; \quad j = 1, \dots, d. \quad (9.1)$$

Пусть  $v(\mathbf{x})$  и  $\mathcal{V}(\mathbf{x})$  — вещественные Г-периодические функции такие, что

$$v, \mathcal{V} \in L_s(\Omega), \quad \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geq 2. \quad (9.2)$$

В  $L_2(\mathbb{R}^d)$  рассмотрим оператор  $\mathcal{B}_\varepsilon$ , формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{B}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (9.3)$$

Точное определение оператора  $\mathcal{B}_\varepsilon$  дается через квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_\varepsilon[u, u] &= \int_{\mathbb{R}^d} (\langle g^\varepsilon(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)u \rangle + (\varepsilon^{-1} v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon)|u|^2) d\mathbf{x}, \\ & \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \end{aligned}$$

Оператор (9.3) можно трактовать как периодический оператор Шрёдингера с метрикой  $g^\varepsilon$ , магнитным потенциалом  $\mathbf{A}^\varepsilon$  и электрическим потенциалом  $\varepsilon^{-1} v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon$ , содержащим сингулярное слагаемое  $\varepsilon^{-1} v^\varepsilon$ .

Нетрудно понять (см. [Su2, п. 13.1]), что оператор (9.3) можно переписать в требуемом виде (1.22):

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} + \sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^*) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Здесь вещественная функция  $Q(\mathbf{x})$  определена равенством

$$Q(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \langle g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle. \quad (9.4)$$

Комплексные функции  $a_j(\mathbf{x})$  заданы выражениями

$$a_j(\mathbf{x}) = -\eta_j(\mathbf{x}) + i\gamma_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, d, \quad (9.5)$$

где  $\eta_j(\mathbf{x})$  — компоненты вектор-функции  $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})$ , а функции  $\gamma_j(\mathbf{x})$  определены через  $\Gamma$ -периодическое решение  $\Phi(\mathbf{x})$  задачи  $\Delta\Phi(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$ ,  $\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ , соотношением  $\gamma_j(\mathbf{x}) = -\partial_j \Phi(\mathbf{x})$ . При этом выполнено

$$v(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^d \partial_j \gamma_j(\mathbf{x}). \quad (9.6)$$

Можно проверить, что функции (9.5) удовлетворяют условию (1.8) с подходящим показателем  $\rho'$ , зависящим от  $\rho$  и  $s$ ; при этом нормы  $\|a_j\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$  контролируются через  $\|g\|_{L_{\infty}}$ ,  $\|\mathbf{A}\|_{L_{\rho}(\Omega)}$ ,  $\|v\|_{L_s(\Omega)}$  и параметры решетки  $\Gamma$ . (Подробнее см. [Su2, п. 13.1]). Функция (9.4) удовлетворяет условию (1.14) с подходящим показателем  $s' = \min\{s; \rho/2\}$ . Таким образом, сейчас реализуется пример 1.4.

Пусть  $Q_0(\mathbf{x})$  — положительно определенная и ограниченная  $\Gamma$ -периодическая функция. Согласно (1.38) введем неотрицательный оператор  $B_{\varepsilon} := \mathcal{B}_{\varepsilon} + c_5 Q_0^{\varepsilon}$ . Здесь  $c_5 = (c_0 + c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_{\infty}}$ , а постоянные  $c_0$  и  $c_4$  отвечают оператору (9.3). Нас интересует поведение оператора  $(B_{\varepsilon} - \zeta Q_0^{\varepsilon})^{-1}$ ,  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . Исходные данные (см. (1.40)) в рассматриваемом случае сводятся к следующему набору:

$$\begin{aligned} & d, \rho, s; \|g\|_{L_{\infty}}, \|g^{-1}\|_{L_{\infty}}, \|\mathbf{A}\|_{L_{\rho}(\Omega)}, \|v\|_{L_s(\Omega)}, \|\mathcal{V}\|_{L_s(\Omega)}, \\ & \|Q_0\|_{L_{\infty}}, \|Q_0^{-1}\|_{L_{\infty}}; \text{ параметры решетки } \Gamma. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Вычислим эффективный оператор. В рассматриваемом случае  $\Gamma$ -периодическое решение задачи (1.23) является матрицей-строкой

$$\Lambda(\mathbf{x}) = i\Psi(\mathbf{x}), \quad \Psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_d(\mathbf{x})),$$

где  $\psi_j \in \tilde{H}^1(\Omega)$  — решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla \psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_{\Omega} \psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{e}_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ , — стандартные орты в  $\mathbb{R}^d$ . Ясно, что функции  $\psi_j(\mathbf{x})$  вещественозначные, а элементы матрицы-строки  $\Lambda(\mathbf{x})$  чисто мнимые. Согласно (1.25)  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  — это  $(d \times d)$ -матрица-функция со столбцами  $g(\mathbf{x})(\nabla \psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$ ,  $j = 1, \dots, d$ . В соответствии с (1.24) эффективная матрица определена равенством  $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ . Ясно, что  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  и  $g^0$  имеют вещественные элементы.

С учетом (9.5) и (9.6) периодическое решение задачи (1.31) представляется в виде  $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + i\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$ , где вещественные  $\Gamma$ -периодические

функции  $\tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})$  и  $\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$  являются решениями задач

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_{\Omega} \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \\ -\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) + \operatorname{div} g(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_{\Omega} \tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Матрица-столбец  $V$  (см. (1.32)) запишется в виде  $V = V_1 + iV_2$ , где  $V_1$ ,  $V_2$  — столбцы с вещественными элементами, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} V_1 &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\nabla \Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ V_2 &= -|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\nabla \Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Согласно (1.33) постоянная  $W$  принимает вид

$$W = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \left( \langle g(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}), \nabla \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) \rangle + \langle g(\mathbf{x}) \nabla \tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}), \nabla \tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) \rangle \right) d\mathbf{x}. \tag{9.9}$$

Эффективный оператор для  $B_\varepsilon$  действует по правилу

$$B^0 u = -\operatorname{div} g^0 \nabla u + 2i \langle \nabla u, V_1 + \bar{\eta} \rangle + (-W + \bar{Q} + c_5 \bar{Q}_0) u, \quad u \in H^2(\mathbb{R}^d).$$

Иначе говоря,

$$B^0 = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) + \mathcal{V}^0 + c_5 \bar{Q}_0, \tag{9.10}$$

где

$$\mathbf{A}^0 = (g^0)^{-1} (V_1 + \bar{g}\mathbf{A}), \quad \mathcal{V}^0 = \bar{\mathcal{V}} + \overline{\langle g\mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle} - \langle g^0 \mathbf{A}^0, \mathbf{A}^0 \rangle - W. \tag{9.11}$$

В соответствии с замечанием 7.5 в рассматриваемом случае выполнены условия 7.1 и 7.3, причем нормы  $\|\Lambda\|_{L^\infty}$  и  $\|\tilde{\Lambda}\|_{L^\infty}$  контролируются через данные задачи (9.7). Поэтому можно использовать корректор, не содержащий слаживателя:

$$K^0(\varepsilon; \zeta) := ([\Lambda^\varepsilon] \mathbf{D} + [\tilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \bar{Q}_0)^{-1} = ([\Psi^\varepsilon] \nabla + [\tilde{\Lambda}^\varepsilon])(B^0 - \zeta \bar{Q}_0)^{-1}. \tag{9.12}$$

Оператор (7.11) принимает вид

$$G_3(\varepsilon; \zeta) = \tilde{g}^\varepsilon \mathbf{D} (B^0 - \zeta \bar{Q}_0)^{-1} + g^\varepsilon (\mathbf{D} \tilde{\Lambda})^\varepsilon (B^0 - \zeta \bar{Q}_0)^{-1}.$$

Применяя теоремы 4.1, 7.6( $3^\circ$ ) и 7.9( $3^\circ$ ), приходим к следующему результату.

**Предложение 9.1.** *Пусть  $\mathcal{B}_\varepsilon$  — оператор (9.3), коэффициенты которого удовлетворяют условиям, сформулированным выше в п. 9.1. Пусть  $Q_0(\mathbf{x})$  — Г-периодическая положительно определенная и ограниченная функция, и пусть  $c_5 = (c_0 + c_4) \|Q_0^{-1}\|_{L^\infty}$ , где постоянные  $c_0$  и  $c_4$  отвечают оператору (9.3). Пусть  $B_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon + c_5 Q_0^\varepsilon$ , и пусть  $B^0$  — эффективный оператор (9.10), коэффициенты которого определены в соответствии с (9.8), (9.9), (9.11). Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $\zeta = |\zeta| e^{i\phi}$ ,  $0 < \phi < 2\pi$ ,  $|\zeta| \geqslant 1$ .*

Пусть  $K^0(\varepsilon; \zeta)$  — корректор (9.12). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедливы оценки

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 \varepsilon c(\phi)^2 |\zeta|^{-1/2}, \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} &\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (C_8 + C_9) c(\phi)^2 \varepsilon, \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon \nabla (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\tilde{g}^\varepsilon \nabla + g^\varepsilon (\nabla \tilde{\Lambda})^\varepsilon) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_{10} c(\phi)^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Здесь  $c(\phi)$  — величина (4.1). Постоянные  $C_4, C_8, C_9$  и  $C_{10}$  зависят только от исходных данных (9.7).

Чтобы получить „другую“ аппроксимацию оператора  $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ , воспользуемся теоремой 8.1 (старший член аппроксимации) и теоремой 8.5(3°).

**Предложение 9.2.** Пусть выполнены условия предложения 9.1. Обозначим  $f(\mathbf{x}) = Q_0(\mathbf{x})^{-1/2}$ ,  $f_0 = (\overline{Q_0})^{-1/2}$ . Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$ , где  $c_b \geq 0$  — общая нижняя грань операторов  $\tilde{B}_\varepsilon := f^\varepsilon B_\varepsilon f^\varepsilon$  и  $\tilde{B}^0 := f_0 B^0 f_0$ . Пусть величина  $\varrho(\zeta)$  определена в (8.1). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{11} \varrho(\zeta) \varepsilon, \\ &\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (C_{17} + C_{18} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{19}) \varrho(\zeta) \varepsilon, \end{aligned} \quad (9.16)$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon \nabla (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\tilde{g}^\varepsilon \nabla + g^\varepsilon (\nabla \tilde{\Lambda})^\varepsilon) (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (C_{20} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{21}) \varrho(\zeta) \varepsilon. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Постоянны  $C_{11}, C_{17}, C_{18}, C_{19}, C_{20}$  и  $C_{21}$  зависят лишь от исходных данных (9.7) и  $c_b$ . В случае, когда функция  $Q_0$  постоянна, оценки (9.16), (9.17) выполнены при  $C_{19} = C_{21} = 0$ .

**9.2. Периодический оператор Шрёдингера.** В  $L_2(\mathbb{R}^d)$  рассмотрим оператор  $\check{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} + \check{v}(\mathbf{x})$ , где  $\check{g}(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодическая симметричная  $(d \times d)$ -матрица-функция с вещественными элементами:  $\check{g}(\mathbf{x}) > 0$ ,  $\check{g}, \check{g}^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ ; а  $\check{v}(\mathbf{x})$  — вещественная  $\Gamma$ -периодическая функция такая, что

$$\check{v} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geq 2.$$

Как обычно, строгое определение оператора  $\check{\mathcal{A}}$  дается через квадратичную форму

$$\check{\mathfrak{a}}[u, u] = \int_{\mathbb{R}^d} (\langle \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D}u, \mathbf{D}u \rangle + \check{v}(\mathbf{x}) |u|^2) d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \quad (9.18)$$

За счет добавления к  $\check{v}(\mathbf{x})$  постоянной будем считать, что краем спектра оператора  $\check{\mathcal{A}}$  является точка нуль. При этом условии оператор  $\check{\mathcal{A}}$  допускает удобную факторизацию (см., например, [BSu1, гл. 6, п. 1.1]). Для описания этой факторизации рассмотрим уравнение

$$\mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D}\omega(\mathbf{x}) + \check{v}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0. \quad (9.19)$$

Это уравнение имеет  $\Gamma$ -периодическое решение  $\omega \in \tilde{H}^1(\Omega)$ , определенное с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, чтобы  $\omega(\mathbf{x}) > 0$  и

$$\int_{\Omega} \omega^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = |\Omega|. \quad (9.20)$$

Более того, решение положительно определено и ограничено:  $0 < \omega_0 \leq \omega(\mathbf{x}) \leq \omega_1 < \infty$ , а нормы  $\|\omega\|_{L_\infty}$ ,  $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$  контролируются через  $\|\check{g}\|_{L_\infty}$ ,  $\|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}$  и  $\|\check{v}\|_{L_s(\Omega)}$ . Функция  $\omega$  является мультипликатором в  $H^1(\mathbb{R}^d)$ , а также в  $\tilde{H}^1(\Omega)$ . Подстановка  $u = \omega z$  преобразует форму (9.18) к виду

$$\check{\mathfrak{a}}[u, u] = \int_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\mathbf{x}) \langle \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D}z, \mathbf{D}z \rangle d\mathbf{x}, \quad u = \omega z, \quad z \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Таким образом, оператор  $\check{\mathcal{A}}$  допускает факторизацию

$$\check{\mathcal{A}} = \omega^{-1} \mathbf{D}^* g \mathbf{D} \omega^{-1}, \quad g = \omega^2 \check{g}. \quad (9.21)$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\check{\mathcal{A}}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1} \mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1}. \quad (9.22)$$

В исходных терминах выражение (9.22) запишется в виде

$$\check{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* \check{g}^\varepsilon \mathbf{D} + \varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon. \quad (9.23)$$

Подчеркнем, что в (9.23) стоит большой множитель  $\varepsilon^{-2}$  при быстро осциллирующем потенциале  $\check{v}^\varepsilon$ . Оператор  $\check{\mathcal{A}}_\varepsilon$  можно трактовать как оператор Шредингера с быстро осциллирующей метрикой  $\check{g}^\varepsilon$  и сильно сингулярным потенциалом  $\varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon$ .

Далее, пусть, как и выше,  $\mathbf{A} = \text{col} \{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}$ , где  $A_j(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодические вещественные функции, удовлетворяющие условию (9.1). Пусть  $\hat{v}(\mathbf{x})$  и  $\check{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодические вещественные функции, причем

$$\begin{aligned} \hat{v}, \check{\mathcal{V}} &\in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geq 2, \\ \int_{\Omega} \hat{v}(\mathbf{x}) \omega^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned} \quad (9.24)$$

Рассмотрим оператор  $\check{\mathcal{B}}_\varepsilon$ , формально заданный выражением

$$\check{\mathcal{B}}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)^* \check{g}^\varepsilon (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1} \hat{v}^\varepsilon + \check{\mathcal{V}}^\varepsilon. \quad (9.25)$$

(Строгое определение дается через квадратичную форму.) Оператор  $\check{\mathcal{B}}_\varepsilon$  можно трактовать как оператор Шредингера с метрикой  $\check{g}^\varepsilon$ , магнитным потенциалом  $\mathbf{A}^\varepsilon$  и электрическим потенциалом  $\varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1} \hat{v}^\varepsilon + \check{\mathcal{V}}^\varepsilon$ , содержащим сингулярные слагаемые  $\varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon$  и  $\varepsilon^{-1} \hat{v}^\varepsilon$ .

Положим

$$v(\mathbf{x}) := \widehat{v}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) := \check{\mathcal{V}}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}). \quad (9.26)$$

Учитывая (9.22), (9.23), убеждаемся, что справедливо тождество  $\check{\mathcal{B}}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathcal{B}_\varepsilon(\omega^\varepsilon)^{-1}$ , где оператор  $\mathcal{B}_\varepsilon$  задан выражением (9.3), в котором  $g$  определено в (9.21), а  $v$  и  $\mathcal{V}$  — в (9.26). В силу (9.24) и свойств функции  $\omega$  коэффициенты  $v$  и  $\mathcal{V}$  удовлетворяют условиям (9.2).

Пусть  $\check{Q}_0(\mathbf{x})$  — Г-периодическая вещественная функция, положительно определенная и ограниченная. Положим  $Q_0(\mathbf{x}) := \check{Q}_0(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})$ . Обозначим  $c_5 = (c_0 + c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$ , где постоянные  $c_0$  и  $c_4$  отвечают оператору  $\mathcal{B}_\varepsilon$ , описанному выше. Тогда оператор  $\check{B}_\varepsilon := \check{\mathcal{B}}_\varepsilon + c_5\check{Q}_0^\varepsilon$  связан с оператором  $B_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon + c_5Q_0^\varepsilon$  соотношением  $\check{B}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1}B_\varepsilon(\omega^\varepsilon)^{-1}$ . Очевидно,

$$(\check{B}_\varepsilon - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} = \omega^\varepsilon(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\omega^\varepsilon. \quad (9.27)$$

Под исходными данными сейчас понимаем следующий набор величин

$$\begin{aligned} d, \rho, s; & \|g\|_{L_\infty}, \|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|\check{v}\|_{L_s(\Omega)}, \|\widehat{v}\|_{L_s(\Omega)}, \|\check{\mathcal{V}}\|_{L_s(\Omega)}, \\ & \|\check{Q}_0\|_{L_\infty}, \|\check{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty}; \text{ параметры решетки } \Gamma. \end{aligned} \quad (9.28)$$

На основании (9.27) и предложения 9.1 получим следующий результат.

**Предложение 9.3.** Пусть  $\check{\mathcal{B}}_\varepsilon$  — оператор (9.25), коэффициенты  $\check{g}^\varepsilon$ ,  $\mathbf{A}^\varepsilon$ ,  $\widehat{v}^\varepsilon$ ,  $\check{\mathcal{V}}^\varepsilon$  которого удовлетворяют условиям, сформулированным выше в п. 9.2. Пусть  $\omega(\mathbf{x})$  — Г-периодическое положительное решение уравнения (9.19), удовлетворяющее условию (9.20). Пусть  $\mathcal{B}_\varepsilon$  — оператор (9.3) с коэффициентами  $g^\varepsilon = \check{g}^\varepsilon(\omega^\varepsilon)^2$ ,  $\mathbf{A}^\varepsilon$ ,  $v^\varepsilon = \widehat{v}^\varepsilon(\omega^\varepsilon)^2$  и  $\mathcal{V}^\varepsilon = \check{\mathcal{V}}^\varepsilon(\omega^\varepsilon)^2$ . Пусть  $\check{Q}_0$  — Г-периодическая вещественная функция, положительно определенная и ограниченная, а  $Q_0 := \check{Q}_0\omega^2$ . Положим  $c_5 = (c_0 + c_4)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$ , где постоянные  $c_0$  и  $c_4$  отвечают оператору  $\mathcal{B}_\varepsilon$ . Пусть  $B_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon + c_5Q_0^\varepsilon$ ,  $\check{B}_\varepsilon = \check{\mathcal{B}}_\varepsilon + c_5\check{Q}_0^\varepsilon$ . Пусть  $B^0$  — эффективный оператор для  $B_\varepsilon$ , определенный в (9.10). Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$ ,  $\phi \in (0, 2\pi)$ ,  $|\zeta| \geq 1$ . Пусть  $K^0(\varepsilon; \zeta)$  — корректор (9.12) для оператора  $B_\varepsilon$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедливы оценки

$$\|(\check{B}_\varepsilon - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \omega^\varepsilon(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4\|\omega\|_{L_\infty}^2 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \quad (9.29)$$

$$\begin{aligned} & \|(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{B}_\varepsilon - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon - \varepsilon K^0(\varepsilon; \zeta)\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq (C_8 + C_9)\|\omega\|_{L_\infty} c(\phi)^2 \varepsilon, \end{aligned} \quad (9.30)$$

$$\begin{aligned} & \|g^\varepsilon \nabla(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{B}_\varepsilon - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \left(\widetilde{g}^\varepsilon \nabla + g^\varepsilon(\nabla \widetilde{\Lambda})^\varepsilon\right)(B^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_{10}\|\omega\|_{L_\infty} c(\phi)^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Здесь  $c(\phi)$  — величина (4.1). Постоянные  $C_4\|\omega\|_{L_\infty}^2$ ,  $(C_8 + C_9)\|\omega\|_{L_\infty}$  и  $C_{10}\|\omega\|_{L_\infty}$  зависят только от исходных данных (9.28).

*Доказательство.* Домножая операторы под знаком нормы в (9.13) с двух сторон на  $\omega^\varepsilon$  и используя (9.27), приходим к оценке (9.29).

В силу (9.27) имеем  $(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{B}_\varepsilon - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} = (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\omega^\varepsilon$ . Домножая операторы под знаком нормы в (9.14) справа на  $\omega^\varepsilon$ , получаем (9.30). Аналогичным образом из (9.15) выводится (9.31).  $\square$

Чтобы получить аппроксимацию оператора  $(\check{B}_\varepsilon - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1}$  в более широкой области изменения параметра  $\zeta$ , используем предложение 9.2. По аналогии с доказательством предложения 9.3 нетрудно проверить следующий результат.

**Предложение 9.4.** *Пусть выполнены условия предложения 9.3. Обозначим  $f(\mathbf{x}) = Q_0(\mathbf{x})^{-1/2}$ ,  $f_0 = (\overline{Q}_0)^{-1/2}$ . Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$ , где  $c_b \geq 0$  — общая нижняя грань операторов  $\check{B}_\varepsilon := f^\varepsilon B_\varepsilon f^\varepsilon$  и  $\check{B}^0 := f_0 B^0 f_0$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq 1$  справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|(\check{B}_\varepsilon - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \omega^\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q}_0)^{-1} \omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{11} \|\omega\|_{L_\infty}^2 \varrho(\zeta) \varepsilon, \\ \|(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{B}_\varepsilon - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q}_0)^{-1} \omega^\varepsilon - \varepsilon K^0(\varepsilon; \zeta) \omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (C_{17} + C_{18} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{19}) \|\omega\|_{L_\infty} \varrho(\zeta) \varepsilon, \end{aligned} \quad (9.32)$$

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon \nabla (\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{B}_\varepsilon - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - (\tilde{g}^\varepsilon \nabla + g^\varepsilon (\nabla \tilde{\Lambda})^\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (C_{20} + |\zeta + 1|^{1/2} C_{21}) \|\omega\|_{L_\infty} \varrho(\zeta) \varepsilon. \end{aligned} \quad (9.33)$$

Здесь  $\varrho(\zeta)$  — величина (8.1). Постоянные  $C_{11} \|\omega\|_{L_\infty}^2$ ,  $(C_{17} + C_{18}) \|\omega\|_{L_\infty}$ ,  $C_{19} \|\omega\|_{L_\infty}$ ,  $C_{20} \|\omega\|_{L_\infty}$  и  $C_{21} \|\omega\|_{L_\infty}$  контролируются через исходные данные (9.28) и  $c_b$ . В случае, если функция  $Q_0$  постоянна, оценки (9.32), (9.33) выполнены при  $C_{19} = C_{21} = 0$ .

**Замечание 9.5.** Предложения 9.3 и 9.4 демонстрируют, что для оператора (9.25) характер усреднения меняется (по сравнению с результатами для оператора (9.3)). Наличие сильно сингулярного потенциала  $\varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon$  приводит к тому, что обобщенная резольвента  $(\check{B}_\varepsilon - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1}$  не имеет предела по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ ; она аппроксимируется через обобщенную резольвенту  $(B^0 - \zeta \overline{Q}_0)^{-1}$ , окаймленную быстро осциллирующими множителями  $\omega^\varepsilon$ .

**9.3. Двумерный оператор Паули.** Отметим, что возможно применение общих результатов работы также к двумерному периодическому оператору Паули с сингулярным магнитным потенциалом, возмущенному сингулярным электрическим потенциалом. Этот оператор подробно рассматривался в [Su2, §14] с помощью использования удобной факторизации для оператора Паули. Характер результатов для него аналогичен предложениям 9.3 и 9.4. Мы не будем останавливаться на этом подробнее.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [BaPan] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [BeLPap] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 1–108.
- [BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ, **17**:6 (2005), 1–104.
- [BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ, **18**:6 (2006), 1–130.
- [Bo] Борисов Д. И., *Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, Алгебра и анализ, **20**:2 (2008), 19–42.
- [Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.
- [Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.
- [ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.
- [Zh1] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.
- [Zh2] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), вып. 5, 597–601.
- [ZhPas] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12**:4 (2005), 515–524.
- [KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in  $L^2$  for elliptic homogenization problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **203**:3 (2012), 1009–1036.
- [LaU] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.
- [Ma] Marcinkiewicz J., *Sur les multiplicateurs des séries de Fourier*, Studia Math., **8** (1939), 78–91.
- [MSu1] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение решений начально-краевых задач для параболических систем*, Фунд. анализ и его прил. **49** (2015), вып. 1, 88–93.
- [MSu2] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, Applicable Analysis, to appear. Published on-line, <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/00036811.2015.1068300#abstract>. DOI:10.1080/00036811.2015.1068300.
- [MSu3] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение решений краевых задач для эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, готовится к печати.
- [PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ, **24**:6 (2012), 139–177.
- [Su1] Suslina T. A., *Homogenization of periodic second order differential operators including first order terms*, Spectral theory of differential operators, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 225, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008, 227–252.

- [Su2] Суслина Т. А., Усреднение в классе Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d)$  для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка, Алгебра и анализ **22**:1 (2010), 108–222.
- [Su3] Suslina T. A., Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems:  $L_2$ -operator error estimates, Mathematika **59**:2 (2013), 463–476.
- [Su4] Suslina T. A., Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients, SIAM J. Math. Anal. **45**:6 (2013), 3453–3493.
- [Su5] Суслина Т. А., Усреднение эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра, Функци. анализ и его прил., **48**:4 (2014), 88–94.
- [Su6] Суслина Т. А., Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в  $L_2(\mathbb{R}^d)$  с учетом корректора, Алгебра и анализ **26**:4 (2014), 195–263.
- [Su7] Суслина Т. А., Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра, Алгебра и анализ **27**:4 (2015), 87–166.