ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 3/2015

УСРЕДНЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ю. М. Мешкова[1,2], **Т. А. Суслина**[2]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
14 линия ВО, д. 29Б
Санкт-Петербург, 199178, Россия

[2]Санкт-Петербургский государственный университет,
Физический факультет,
Ульяновская ул., д. 3, Петродворец,
Санкт-Петербург, 198504, Россия

e-mail: juliavmeshke@yandex.ru
e-mail: suslina@list.ru

АННОТАЦИЯ

В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, где $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$, рассматриваются матричные эллиптические дифференциальные операторы $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ второго порядка при условии Дирихле либо Неймана на $\partial\mathcal{O}$ соответственно. Здесь $\varepsilon>0$ — малый параметр, коэффициенты операторов периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Изучается поведение при малом ε оператора $e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t}$, $\dagger = D,N$. Показано, что при фиксированном $t>0$ и $\varepsilon\to 0$ оператор $e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t}$ сходится по операторной норме в L_2 к $e^{-\mathcal{A}^0_\dagger t}$, где $\mathcal{A}^0_\dagger$ — эффективный оператор с постоянными коэффициентами. Для нормы разности операторов $e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t}$ и $e^{-\mathcal{A}^0_\dagger t}$ получена оценка точного порядка $O(\varepsilon)$. Также установлена аппроксимация экспоненты $e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t}$ при учете корректора по $(L_2\to H^1)$-норме с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^{1/2})$. Результаты применяются к усреднению решений начально-краевых задач для параболических систем.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, параболические системы, усреднение, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 14-01-00760). Первый автор поддержан Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ, дог. 11.G34.31.0026, и ОАО „Газпром-нефть“.

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Теории усреднения посвящена обширная литература. В первую очередь укажем монографии [BaPa, BeLPap, ZhKO] и [Sa].

0.1. Класс операторов. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Мы изучаем самосопряженные сильно эллиптические операторы второго порядка $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$, действующие в пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и зависящие от малого параметра $\varepsilon > 0$. Формально операторы $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ заданы дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$ при условии Дирихле либо Неймана на $\partial\mathcal{O}$, соответственно. Предполагается, что $g(\mathbf{x})$ — эрмитова $(m \times m)$-матрица-функция, ограниченная, положительно определенная и периодическая относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Оператор $b(\mathbf{D})$ — $(m \times n)$-матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что $m \geqslant n$. На символ $b(\boldsymbol{\xi})$ накладывается условие, обеспечивающее сильную эллиптичность рассматриваемых операторов. Простейший пример — скалярный эллиптический оператор дивергентного вида $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ (оператор акустики).

Наша цель — получить аппроксимации операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon} t}$, $\dagger = D, N$, при малом ε и положительном t в различных операторных нормах и применить полученные результаты к усреднению решений начально-краевых задач для параболических систем.

0.2. Операторные оценки погрешности. Обзор. В серии работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1–3] был предложен теоретико-операторный подход к задачам теории усреднения. Изучались операторы $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})$, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В [BSu1] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте $(A^0 + I)^{-1}$ эффективного оператора $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная положительная эффективная матрица. Была установлена оценка погрешности

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.1}$$

В [BSu3] была получена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

Здесь $K(\varepsilon)$ — так называемый корректор; он содержит быстро осциллирующие множители, а потому зависит от ε. При этом $\|\varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2 \to H^1} = O(1)$.

Оценки (0.1), (0.2) точны по порядку; постоянные контролируются явно в терминах исходных данных задачи. Подобные результаты получили название *операторных оценок погрешности.* Метод работ [BSu1–3] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

К усреднению параболических задач в $\mathbb{R}^d$ этот метод применялся в работах [Su1–3], [V], [VSu], [M]. В [Su1,2] было показано, что при фиксированном $t > 0$ и $\varepsilon \to 0$ операторная экспонента $e^{-A_\varepsilon t}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к $e^{-A^0 t}$, и была получена оценка

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A^0 t}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}. \tag{0.3}$$

В [Su3] была найдена аппроксимация экспоненты $e^{-A_\varepsilon t}$ по $(L_2 \to H^1)$-норме при учете корректора:

$$\|e^{-A_\varepsilon t} - e^{-A^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(t^{-1}+t^{-1/2}), \quad t \geqslant \varepsilon^2. \tag{0.4}$$

Другой подход к получению операторных оценок погрешности был предложен В. В. Жиковым. В работах [Zh1,2], [ZhPas1] были получены оценки вида (0.1), (0.2) для операторов акустики и упругости. В [ZhPas2] доказаны оценки вида (0.3), (0.4) для скалярного оператора $A_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$.

Операторные оценки изучались и для краевых задач в ограниченной области; см. [ZhPas1], [Gr1,2], [KeLiS]. (Более подробный обзор можно найти в [Su6,8].)

Для рассматриваемого нами класса матричных эллиптических операторов $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ задачи усреднения изучались в недавних работах [PSu1,2], [Su4–8]. В [PSu1,2] и [Su4,5] получены аппроксимации оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1}$. В [Su6] найдена аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$. Метод упомянутых работ основан на применении результатов для задачи в $\mathbb{R}^d$, введении поправки типа пограничного слоя и тщательном анализе этой поправки. Некоторые технические приемы, в частности, использование сглаживания по Стеклову, заимствованы из [ZhPas1].

Для нас опорными являются результаты работ [Su7,8], в которых получены аппроксимации резольвент $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ и $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ с двупараметрическими (относительно ε и ζ) оценками погрешности. Остановимся подробнее на главных результатах из [Su7,8]. При $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ (где ε_0 достаточно мало) справедливы оценки

$$\|(\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_\dagger^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C(\phi)\left(\varepsilon|\zeta|^{-1/2} + \varepsilon^2\right), \tag{0.5}$$

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_\dagger^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_\dagger(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant C(\phi)\left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \varepsilon\right). \end{aligned} \tag{0.6}$$

Здесь $\dagger = D, N$, $\phi = \arg\zeta$; $\mathcal{A}_\dagger^0$ — эффективный оператор, заданный выражением $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ при условии Дирихле либо Неймана; $K_\dagger(\varepsilon;\zeta)$ — соответствующий корректор. Эти оценки равномерны по углу ϕ в области вида $\{\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+,\ |\zeta| \geqslant 1,\ \phi_0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi - \phi_0\}$ при сколь угодно малом $\phi_0 > 0$. Отметим, что при фиксированном ζ оценка (0.5) имеет порядок

$O(\varepsilon)$ — такой же, как в оценке (0.1) в $\mathbb{R}^d$. В то же время оценка (0.6) имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$ — хуже, чем в оценке (0.2) в $\mathbb{R}^d$. Это объясняется влиянием границы области.

0.3. Основные результаты. Основные результаты работы — это аппроксимации операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t}$, $\dagger = D, N$, по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, с двупараметрическими (относительно ε и t) оценками погрешности:

$$\|e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_\dagger^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\dagger t}, \quad t \geqslant 0, \tag{0.7}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_\dagger^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}_\dagger(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\dagger t}, \quad t \geqslant \varepsilon^2, \tag{0.8}$$

$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $\dagger = D, N$. Здесь $\mathcal{K}_\dagger(t;\varepsilon)$ — соответствующий корректор. Помимо оценки (0.8) мы получаем аппроксимацию операторов $g(\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t}$ (отвечающих „потокам") по $(L_2 \to L_2)$-норме.

При ограниченных значениях t порядок оценки (0.7) точный и такой же, как в оценке (0.3) для задачи в $\mathbb{R}^d$. Порядок оценки (0.8) ухудшается по сравнению с (0.4), что объясняется влиянием границы области.

Поясним происхождение множителя $e^{-c_\dagger t}$ в (0.7), (0.8). В оценках (0.3), (0.4) для задачи в $\mathbb{R}^d$ такой множитель отсутствует, поскольку (непрерывный) спектр операторов A_ε и A^0 начинается с точки $\lambda = 0$. У операторов $\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_\dagger^0$ спектр дискретный. При $\dagger = D$ эти операторы положительно определены, и в качестве c_D можно взять положительное число, лежащее левее нижней грани их спектров. При $\dagger = N$ число $\lambda = 0$ является собственным значением, но при рассмотрении разности $e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t}$ части операторов в ядре $Z = \operatorname{Ker}\mathcal{A}_{N,\varepsilon} = \operatorname{Ker}\mathcal{A}_N^0$ сокращаются; в качестве c_N можно взять положительное число, лежащее левее первых ненулевых собственных значений операторов $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_N^0$.

Корректор $\mathcal{K}_\dagger(t;\varepsilon)$ в общем случае содержит вспомогательный сглаживающий оператор. Мы выделяем условия, при которых можно использовать стандартный корректор (без сглаживателя).

Кроме того, для строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ области $\mathcal{O}$ найдена аппроксимация экспоненты $e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t}$ по $(L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}'))$-операторной норме с оценкой погрешности

$$\begin{aligned} &\|e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_\dagger^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}_\dagger(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \\ &\quad\leqslant C(\delta)\varepsilon t^{-1}e^{-c_\dagger t}, \quad t \geqslant \varepsilon^2, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{0.9}$$

Здесь постоянная зависит от $\delta = \operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$. При ограниченных значениях t порядок оценки (0.9) тот же, что и в оценке (0.4) для задачи в $\mathbb{R}^d$. Это лишний раз свидетельствует о том, что причина ухудшения порядка оценки (0.8) кроется в эффекте пограничного слоя.

0.4. Метод исследования. Поясним метод исследования на примере оценки (0.7) в случае краевого условия Дирихле. Пусть γ — контур в комплексной плоскости, обходящий спектр операторов $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_D^0$ в положительном направлении. Справедливо тождество

$$e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\,d\zeta, \quad t > 0.$$

Для экспоненты от эффективного оператора выполнено аналогичное равенство. Следовательно,

$$e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left((\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\right)\,d\zeta. \quad (0.10)$$

Опираясь на результаты работы [Su8], мы получаем аппроксимацию резольвенты при $\zeta \in \gamma$, а затем используем представление (0.10). Это приводит к (0.7). Подчеркнем, что для нас важен характер зависимости правой части (0.5) от ζ при больших значениях $|\zeta|$. Аппроксимация при учете корректора получается на том же пути.

0.5. Применение результатов к усреднению решений начально-краевых задач. Результаты об аппроксимации операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon}t}$ применяются к вопросу о поведении решений $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ начально-краевых задач для параболического уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O},\ 0 < t < T, \tag{0.11}$$

при начальном условии $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ и краевом условии Дирихле либо Неймана. Предполагается, что $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_p((0, T); L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n))$ при некотором p. Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t)$ — решение соответствующей эффективной задачи.

Мы получаем аппроксимацию решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в различных нормах. В старшем порядке найдены оценки разности $\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0$ по норме в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ при фиксированном t и по норме в $L_p((0, T); L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n))$. При учете корректора установлены аппроксимации решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в классе $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ при фиксированном t и в $L_p((0, T); H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n))$. Кроме того, для строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ получены более точные оценки погрешности при приближении решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в классе $H^1(\mathcal{O}'; \mathbb{C}^n)$ (при фиксированном t) и в $L_p((0, T); H^1(\mathcal{O}'; \mathbb{C}^n))$.

0.6. Структура работы. Работа состоит из двух глав и приложения. В первой главе (§§1–4) рассматриваются операторы с краевым условием Дирихле, во второй (§§5–8) — с условием Неймана. В §1 описан класс операторов $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$, определен эффективный оператор, введен сглаживающий оператор по Стеклову. В §2 сформулированы нужные для дальнейшего результаты об усреднении резольвенты оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$. В §3 получены основные результаты работы в случае краевых условий Дирихле, а именно, найдены аппроксимации оператора $e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}$ по $(L_2 \to L_2)$-

и $(L_2 \to H^1)$-операторным нормам. Также получена аппроксимация „потока" $g(\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}$. В §4 результаты §3 об аппроксимации операторной экспоненты применяются к усреднению решений первой начально-краевой задачи для параболического уравнения (0.11).

В главе 2 порядок изложения аналогичен. В §5 описан класс операторов $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ и введен эффективный оператор. В §6 приведены необходимые результаты об усреднении резольвенты оператора $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$. На основании этих результатов в §7 получена аппроксимация операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}$ и соответствующих потоков. Это основные результаты работы в случае краевых условий Неймана. В §8 эти результаты применяются к усреднению решений второй начально-краевой задачи для уравнения (0.11).

В приложение (§9) вынесены доказательства утверждений, связанных с устранением сглаживающего оператора в корректоре в случае дополнительной гладкости границы и в случае оценок в строго внутренней подобласти.

0.7. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Через $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ обозначаются соответственно скалярное произведение и норма в $\mathfrak{H}$, символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора, действующего из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Скалярное произведение и норма в $\mathbb{C}^n$ обозначены через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ соответственно, $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — матрица размера $m\times n$, то $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Используются обозначения $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$.

Класс L_2 вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}$ обозначены через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначаем замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n=1$ пишем просто $L_2(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$, но, если это не ведет к смешениям, мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций и матричнозначных функций. Символ $L_p((0,T);\mathfrak{H})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, означает L_p-пространство $\mathfrak{H}$-значных функций на интервале $(0,T)$.

Используем обозначение $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Через C, $\mathcal{C}$, C, $\mathfrak{C}$, $\mathscr{C}$, c, $\mathfrak{c}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаем различные оценочные постоянные.

Результаты настоящей работы кратко анонсированы в [MSu].

Глава 1. Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем

§1. Класс операторов $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$. Эффективный оператор

1.1. Класс операторов. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$:

$$\Gamma = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{d} \nu_j \mathbf{a}_j, \ \nu_j \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ, т. е.

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} \tau_j \mathbf{a}_j, \ -\frac{1}{2} < \tau_j < \frac{1}{2}\}.$$

Будем пользоваться обозначением $|\Omega| = \operatorname{mes} \Omega$. Базис $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ в $\mathbb{R}^d$, двойственный к базису $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется соотношениями $\langle \mathbf{b}_j, \mathbf{a}_k \rangle = \delta_{jk}$. Этот базис порождает решетку $\widetilde{\Gamma}$, двойственную к решетке Γ. Ниже используются обозначения

$$r_0 = \frac{1}{2} \min_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}|, \quad r_1 = \frac{1}{2} \operatorname{diam} \Omega. \tag{1.1}$$

Ниже через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Для любой Γ-периодической функции $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, обозначим

$$f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_{D,\varepsilon} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$$

при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Здесь измеримая эрмитова матрица-функция $g(\mathbf{x})$ размера $m \times m$ (вообще говоря, с комплексными элементами) предполагается периодической относительно решетки Γ, равномерно положительно определенной и ограниченной. Далее, $b(\mathbf{D})$ — $(m \times n)$-матричный ДО первого порядка вида

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^{d} b_l D_l, \tag{1.2}$$

где b_l — постоянные матрицы (вообще говоря, с комплексными элементами). Оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^{d} b_l \xi_l$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Предполагается, что $m \geqslant n$ и

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

Это условие равносильно существованию постоянных α_0, α_1 таких, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{1.4}$$

Из (1.2) и (1.4) вытекает оценка

$$|b_l| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad l = 1, \dots, d. \tag{1.5}$$

Строгое определение оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^{\varepsilon}(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).$$

При сделанных предположениях справедливы оценки

$$c_0 \int_{\mathcal{O}} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant c_1 \int_{\mathcal{O}} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n), \tag{1.6}$$

где $c_0 = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}$, $c_1 = \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}$. Эти оценки несложно установить, продолжая $\mathbf{u}$ нулем на $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$, используя преобразование Фурье и учитывая (1.4). Таким образом, форма $a_{D,\varepsilon}$ замкнута в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. С помощью неравенства Фридрихса заключаем из нижней оценки (1.6), что форма $a_{D,\varepsilon}$ положительно определена:

$$a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geqslant c_* \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n), \quad c_* = c_0 (\operatorname{diam} \mathcal{O})^{-2}. \tag{1.7}$$

1.2. Эффективная матрица и ее свойства. Для описания эффективного оператора нам нужно ввести эффективную матрицу g^0. Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — матрица-функция размера $n \times m$, являющаяся слабым Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.8}$$

Обозначим

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \tag{1.9}$$

Эффективная матрица g^0 размера $m \times m$ определяется равенством

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \widetilde{g}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \tag{1.10}$$

Оказывается, что матрица g^0 положительно определена.

Нам понадобятся следующие свойства эффективной матрицы, установленные в [BSu1, гл. 3, теорема 1.5].

Предложение 1.1. *Для эффективной матрицы справедливы оценки*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{1.11}$$

Здесь

$$\overline{g} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad \underline{g} = \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x})^{-1} \, d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

При $m = n$ *эффективная матрица* g^0 *совпадает с* $\underline{g}$.

Для конкретных ДО оценки (1.11) известны в теории усреднения как вилка Фойгта–Рейсса. Выделим случаи, когда в (1.11) реализуется верхняя или нижняя грань (см. [BSu1, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7]).

Предложение 1.2. *Равенство* $g^0 = \overline{g}$ *равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.12}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$*,* $k = 1, \dots, m$*, — столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})$*.*

Предложение 1.3. *Равенство* $g^0 = \underline{g}$ *равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.13}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$*,* $k = 1, \dots, m$*, — столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})^{-1}$*.*

Отметим оценки норм матриц g^0 и $(g^0)^{-1}$, вытекающие из (1.11):

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.14}$$

1.3. Эффективный оператор. *Эффективным оператором* $\mathcal{A}_D^0$ для оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ назовем самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, порожденный квадратичной формой

$$a_D^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \left\langle g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \right\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).$$

Из (1.14) следует, что для формы a_D^0 выполнены оценки, аналогичные (1.6), (1.7):

$$c_0 \int_{\mathcal{O}} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a_D^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant c_1 \int_{\mathcal{O}} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n), \tag{1.15}$$

$$a_D^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geqslant c_* \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{1.16}$$

В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ оператор $\mathcal{A}_D^0$ задается дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ на области определения $H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \cap H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Для обратного оператора справедлива оценка

$$\| \left(\mathcal{A}_D^0\right)^{-1} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}. \tag{1.17}$$

Здесь постоянная $\widehat{c}$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Для оправдания этого факта достаточно заметить, что оператор $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ является сильно эллиптическим матричным оператором (с постоянными коэффициентами), и сослаться на теоремы о регулярности решений сильно эллиптических уравнений (см., например, [McL, гл. 4]).

Замечание 1.4. Вместо условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ можно было бы наложить неявное требование на область: ограниченная область $\mathcal{O}$ с липшицевой границей такова, что выполнена оценка (1.17). Для такой области остаются справедливыми результаты главы 1 (за исключением результатов п. 3.6, теоремы 4.3 и предложений 4.13, 4.20, в которых требуется дополнительная гладкость границы). В случае скалярных эллиптических операторов широкие достаточные условия на $\partial\mathcal{O}$, обеспечивающие справедливость оценки (1.17), можно найти в [KoE] и [MaSh, гл. 7] (в частности, достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O} \in C^\alpha$, $\alpha > 3/2$).

1.4. Свойства матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$. Матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ принадлежит $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Отметим следующую оценку, проверенную в [BSu2, (6.28) и п. 7.3]:

$$\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)} \leqslant M := \big(|\Omega|(1 + (2r_0)^{-2}) m\alpha_0^{-1}\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\big)^{1/2}, \qquad (1.18)$$

где r_0 определено в (1.1).

Нам понадобится следующее утверждение, установленное в [PSu2, лемма 2.3].

Лемма 1.5. *Пусть матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи* (1.8). *Тогда для любой функции $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} + \beta_2\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}.$$

Постоянные β_1 и β_2 зависят только от m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Из леммы 1.5 непосредственно вытекает

Следствие 1.6. *Пусть в условиях леммы* 1.5 *дополнительно известно, что $\Lambda \in L_\infty$. Тогда для любой функции $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ выполнено включение $\Lambda^\varepsilon\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и неравенство*

$$\|\Lambda^\varepsilon\mathbf{v}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\beta_1\varepsilon^{-2}\|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2(1+\beta_2)\|\Lambda\|^2_{L_\infty}\|\mathbf{v}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

1.5. Сглаживание по Стеклову. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ рассмотрим оператор S_ε, действующий по правилу

$$(S_\varepsilon\mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})\,d\mathbf{z} \qquad (1.19)$$

и называемый *сглаживающим оператором по Стеклову.* Отметим, что $\|S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$. Пусть $s \geqslant 0$. Очевидно, $\mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon\mathbf{u} = S_\varepsilon\mathbf{D}^\alpha\mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leqslant s$. Оператор S_ε непрерывно отображает $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем $\|S_\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$.

Нам понадобятся следующие свойства оператора (1.19) (см. [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] или [PSu2, предложения 3.1 и 3.2]).

Лемма 1.7. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$ такая, что $f \in L_2(\Omega)$. Через $[f^\varepsilon]$ обозначим оператор умножения на функцию $f^\varepsilon(\mathbf{x})$. Тогда оператор $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, причем*

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

Лемма 1.8. *Пусть* r_1 *определено в* (1.1). *Для любого* $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *справедлива оценка*

$$\|(S_\varepsilon - I)\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\mathbf{D}\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

§2. Предварительные сведения. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$

Выберем числа ε_0, $\varepsilon_1 \in (0,1]$ согласно следующему условию.

Условие 2.1. *Пусть число* $\varepsilon_0 \in (0,1]$ *таково, что полоску*

$$(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x};\partial\mathcal{O}\} < \varepsilon_0\}$$

можно покрыть конечным числом окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса $C^{0,1}$*, распрямляющие границу* $\partial\mathcal{O}$*. Положим* $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$*, где* $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Очевидно, величина ε_1 зависит только от области $\mathcal{O}$ и от решетки Γ.

Отметим, что условие 2.1 было бы обеспечено только липшицевостью $\partial\mathcal{O}$; более сильное ограничение $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ мы наложили, чтобы гарантировать оценку (1.17).

2.1. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Нам понадобятся результаты о поведении резольвенты $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$, полученные в [Su7,8]. В [Su8, теорема 4.1] был найден старший член аппроксимации резольвенты при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ таком, что $|\zeta| \geqslant 1$. Кроме того в [Su8, теорема 8.1] установлена $(L_2 \to L_2)$-оценка разности резольвент $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ и $(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}$, справедливая при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\circ,\infty)$, где $c_\circ$ — общая нижняя грань операторов $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_D^0$. Мы возьмем в качестве $c_\circ$ число $c_* = c_0(\operatorname{diam}\mathcal{O})^{-2}$, опираясь на оценки (1.7) и (1.16). Ниже систематически используется следующее обозначение, где $\varphi \in (0,2\pi)$:

$$c(\varphi) = \begin{cases} |\sin\varphi|^{-1}, & \varphi \in (0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi), \\ 1, & \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases} \tag{2.1}$$

Для удобства дальнейших ссылок назовем *исходными данными* следующий набор параметров:

$$m,\ d,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty};\ \text{параметры решетки } \Gamma;\ \text{область } \mathcal{O}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2 ([Su8])**.** *Предположим, что* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область с границей класса* $C^{1,1}$*, а матрица-функция* $g(\mathbf{x})$ *и ДО* $b(\mathbf{D})$ *удовлетворяют предположениям п.* 1.1. *Пусть операторы* $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ *и* $\mathcal{A}_D^0$ *определены в п.* 1.1, 1.3. *Число* ε_1 *выберем из условия* 2.1.
1°. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$, $\phi \in (0,2\pi)$, *причем* $|\zeta| \geqslant 1$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_1 c(\phi)^5 (|\zeta|^{-1/2}\varepsilon + \varepsilon^2).$$

2°. *Пусть теперь* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$, *где* $c_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} (\operatorname{diam} \mathcal{O})^{-2}$. *Положим* $\zeta - c_* = |\zeta - c_*| e^{i\psi}$, $\psi \in (0, 2\pi)$. *Введем обозначение*

$$\rho_*(\zeta) = \begin{cases} c(\psi)^2 |\zeta - c_*|^{-2}, & |\zeta - c_*| < 1, \\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_*| \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_2 \rho_*(\zeta) \varepsilon. \tag{2.3}$$

Постоянные C_1, C_2 *зависят лишь от исходных данных* (2.2).

2.2. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ по операторной норме из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ по $(L_2 \to H^1)$-норме была получена в теоремах 4.2 и 8.1 из [Su8]. Чтобы сформулировать результат, введем корректор $K_D(\varepsilon; \zeta)$. Для этого фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O} : H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \to H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad s \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Такой „универсальный" оператор продолжения существует для любой ограниченной области с липшицевой границей (см. [St] или [R]). При этом

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^s(\mathcal{O}) \to H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_\mathcal{O}^{(s)}, \tag{2.5}$$

где постоянная $C_\mathcal{O}^{(s)}$ зависит лишь от s и от области $\mathcal{O}$. Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Положим

$$K_D(\varepsilon; \zeta) = R_\mathcal{O} [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}. \tag{2.6}$$

Корректор $K_D(\varepsilon; \zeta)$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Действительно, оператор $b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$. С помощью леммы 1.7 и включения $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ легко убедиться, что оператор $[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon$ непрерывен из $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$.

Теорема 2.3 ([Su8]). *Пусть выполнены предположения теоремы* 2.2. *Пусть* $K_D(\varepsilon; \zeta)$ — *оператор* (2.6). *Пусть* $\widetilde{g}$ — *матрица-функция* (1.9). 1°. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta| e^{i\phi}$, $\phi \in (0, 2\pi)$, *причем* $|\zeta| \geqslant 1$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant C_3 c(\phi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + C_4 c(\phi)^4 \varepsilon, \\ &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \widetilde{C}_3 c(\phi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \widetilde{C}_4 c(\phi)^4 \varepsilon. \end{aligned}$$

2°. *Пусть теперь* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеем*

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_5 \rho_*(\zeta) \varepsilon^{1/2}, \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \widetilde{C}_5 \rho_*(\zeta) \varepsilon^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Постоянные C_3, C_4, $\widetilde{C}_3$, $\widetilde{C}_4$, C_5 *и* $\widetilde{C}_5$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2).

Замечание 2.4. Вместо $c_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} (\operatorname{diam} \mathcal{O})^{-2}$ в теоремах 2.2 и 2.3 можно брать любую общую нижнюю грань $c_\circ$ операторов $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_D^0$. Пусть $\kappa > 0$ — произвольное достаточно малое число. В силу резольвентной сходимости при достаточно малых ε можно принять $c_\circ = \lambda_1^0 - \kappa$, где λ_1^0 — первое собственное значение оператора $\mathcal{A}_D^0$. При таком выборе $c_\circ$ постоянные в оценках (2.3), (2.7), (2.8) станут зависеть от κ.

2.3. Случай $\Lambda \in L_\infty$. Оказывается, что сглаживатель S_ε в выражении для корректора может быть устранен, если наложить на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ дополнительное условие.

Условие 2.5. *Предположим, что* Γ-*периодическое решение* $\Lambda(\mathbf{x})$ *задачи* (1.8) *ограничено:* $\Lambda \in L_\infty$.

Введем оператор

$$K_D^0(\varepsilon;\zeta) = [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}. \tag{2.9}$$

В силу (1.17) оператор $b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$. Применяя оператор продолжения $P_{\mathcal{O}}$ и следствие 1.6, убеждаемся, что при условии 2.5 оператор $[\Lambda^\varepsilon]$ умножения на матрицу-функцию $\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})$ непрерывен из $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор (2.9) непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В [Su8, теоремы 6.1 и 8.3] получен следующий результат.

Теорема 2.6 ([Su8]). *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Пусть* $K_D^0(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (2.9). *Пусть* $\widetilde{g}$ —*матрица-функция* (1.9).
1°. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta| e^{i\phi}$, $\phi \in (0, 2\pi)$, *причем* $|\zeta| \geqslant 1$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant C_3 c(\phi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + C_6 c(\phi)^4 \varepsilon, \\ &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \widetilde{C}_3 c(\phi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \widetilde{C}_6 c(\phi)^4 \varepsilon. \end{aligned}$$

2°. *Пусть теперь* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_7 \rho_*(\zeta) \varepsilon^{1/2},$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_7 \rho_*(\zeta) \varepsilon^{1/2}.$$

Постоянные C_3 *и* $\widetilde{C}_3$ *— те же, что и в теореме* 2.3. *Постоянные* C_6, $\widetilde{C}_6$, C_7 *и* $\widetilde{C}_7$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

В некоторых случаях условие 2.5 выполнено автоматически. Следующее утверждение проверено в [BSu3, лемма 8.7]; см. также замечание 8.8 в [BSu3].

Предложение 2.7. *Условие* 2.5 *заведомо выполнено, если имеет место хотя бы одно из следующих предположений:*
1° *размерность не превосходит двух, т. е.* $d \leqslant 2$;
2° *размерность* d *произвольна, а оператор имеет вид* $\mathcal{A}_{D,\varepsilon} = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ *— вещественная матрица*;
3° *размерность* d *произвольна и для эффективной матрицы* g^0 *справедливо равенство* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнено* (1.13).

Замечание 2.8. В условиях пункта 2° норма $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ контролируется через d, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и Γ. В условиях пункта 3° норма $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ контролируется через d, m, n, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ.

2.4. Оценки в строго внутренней подобласти. В строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ области $\mathcal{O}$ можно улучшить H^1-оценки погрешности. В теоремах 7.1 и 8.6 из [Su8] установлен следующий результат.

Теорема 2.9 ([Su8]). *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3. *Пусть* $\mathcal{O}'$ *— строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$. *Обозначим* $\delta := \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$.
1°. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, *причем* $|\zeta| \geqslant 1$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеем*

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\
&\quad\leqslant (C_8 \delta^{-1} + C_9) c(\phi)^6 \varepsilon, \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \\
&\quad\leqslant (\widetilde{C}_8 \delta^{-1} + \widetilde{C}_9) c(\phi)^6 \varepsilon.
\end{aligned}$$

2°. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$. *Обозначим* $\widehat{\rho}(\zeta) := c(\psi)\rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2}\rho_*(\zeta)^{3/4}$. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\
&\quad\leqslant \left(C_{10} \delta^{-1} \widehat{\rho}(\zeta) + C_{11} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon, \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \\
&\quad\leqslant \left(\widetilde{C}_{10} \delta^{-1} \widehat{\rho}(\zeta) + \widetilde{C}_{11} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянные C_8, C_9, $\widetilde{C}_8$, $\widetilde{C}_9$, C_{10}, C_{11}, $\widetilde{C}_{10}$ *и* $\widetilde{C}_{11}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2).

В случае $\Lambda \in L_\infty$ аналогичный результат верен при использовании более простого корректора $K_D^0(\varepsilon;\zeta)$. Это показано в теоремах 7.2 и 8.7 из [Su8].

Теорема 2.10 ([Su8]). *Пусть выполнены условия теоремы* 2.9. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Пусть* $K_D^0(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (2.9).
1°. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, *причем* $|\zeta| \geqslant 1$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant (C_8\delta^{-1} + \check{C}_9)c(\phi)^6\varepsilon, \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant (\widetilde{C}_8\delta^{-1} + \widehat{C}_9)c(\phi)^6\varepsilon.
\end{aligned}$$

2°. *При* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*,\infty)$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant \left(C_{10}\delta^{-1}\widehat{\rho}(\zeta) + \check{C}_{11}c(\psi)^{1/2}\rho_*(\zeta)^{5/4}\right)\varepsilon, \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant \left(\widetilde{C}_{10}\delta^{-1}\widehat{\rho}(\zeta) + \widehat{C}_{11}c(\psi)^{1/2}\rho_*(\zeta)^{5/4}\right)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянные C_8, $\widetilde{C}_8$, C_{10} *и* $\widetilde{C}_{10}$ — *те же, что в теореме* 2.9. *Постоянные* $\check{C}_9$, $\widehat{C}_9$, $\check{C}_{11}$ *и* $\widehat{C}_{11}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

§3. Аппроксимация экспоненты $e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}$

3.1. Свойства операторной экспоненты. Начнем со следующего простого утверждения об оценках операторных экспонент $e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}$ и $e^{-\mathcal{A}_D^0 t}$ в различных операторных нормах.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда при* $t > 0$, $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant e^{-c_* t}, \tag{3.1}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant (c_0^{-1} + c_*^{-1})^{1/2} t^{-1/2} e^{-c_* t/2}, \tag{3.2}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant e^{-c_* t}, \tag{3.3}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant (c_0^{-1} + c_*^{-1})^{1/2} t^{-1/2} e^{-c_* t/2}, \tag{3.4}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}\, t^{-1} e^{-c_* t/2}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Оценки (3.1) и (3.3) прямо следуют из (1.7), (1.16).

Комбинируя (1.6) и (1.7), заключаем, что

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant (c_0^{-1} + c_*^{-1}) \|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).$$

Следовательно,

$$\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant (c_0^{-1} + c_*^{-1})^{1/2} \|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{1/2} e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \tag{3.6}$$

Далее, с учетом (1.7) выполнено

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{1/2} e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \sup_{\mu\geqslant c_*} \mu^{1/2} e^{-\mu t} \\ &\leqslant e^{-c_* t/2} \sup_{\mu \geqslant 0} \mu^{1/2} e^{-\mu t/2} \leqslant t^{-1/2} e^{-c_* t/2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Из (3.6) и (3.7) получаем оценку (3.2). Точно так же из неравенства

$$\|(\mathcal{A}_D^0)^{1/2} e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant t^{-1/2} e^{-c_* t/2} \tag{3.8}$$

и (1.15), (1.16) выводится оценка (3.4).

В силу (1.17) имеем

$$\begin{aligned} \|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c} \|\mathcal{A}_D^0 e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \widehat{c} \sup_{\mu\geqslant c_*} \mu e^{-\mu t} \\ &\leqslant \widehat{c} e^{-c_* t/2} \sup_{\mu\geqslant 0} \mu e^{-\mu t/2} \leqslant \widehat{c}\, t^{-1} e^{-c_* t/2}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Отсюда вытекает (3.5). □

3.2. Аппроксимация операторной экспоненты по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Наша цель в этом пункте — доказать следующую теорему.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{12}\varepsilon (t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_* t/2}, \quad t \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Постоянная C_{12} *зависит лишь от исходных данных* (2.2).

Доказательство. Доказательство опирается на результат теоремы 2.2 и представление экспонент от операторов $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$, $\mathcal{A}_D^0$ через интегралы по контуру от соответствующих резольвент.

Справедливо тождество (см., например, [Ка, гл. IX, §1.6])

$$e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} = -\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{-\zeta t} (\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\, d\zeta, \quad t > 0. \tag{3.11}$$

Здесь γ — контур в комплексной плоскости, обходящий спектр оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ в положительном направлении. В силу (1.7) и (1.16) спектры операторов $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_D^0$ лежат на луче $[c_*, \infty)$, поэтому выберем

$$\begin{aligned} \gamma = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta \geqslant 0,\, \operatorname{Re}\zeta = \operatorname{Im}\zeta + c_*/2\} \\ \cup \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta \leqslant 0,\, \operatorname{Re}\zeta = -\operatorname{Im}\zeta + c_*/2\}. \end{aligned}$$

Для экспоненты от эффективного оператора $\mathcal{A}_D^0$ имеет место аналог представления (3.11) с тем же контуром γ. Следовательно,

$$e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}-e^{-\mathcal{A}_D^0 t}=-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left((\mathcal{A}_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_D^0-\zeta I)^{-1}\right)d\zeta. \quad (3.12)$$

На основании теоремы 2.2 оценим разность резольвент при $\zeta\in\gamma$ равномерно по $\arg\zeta$. Напомним обозначение $\psi=\arg(\zeta-c_*)$. Заметим, что при $\zeta\in\gamma$ и $\psi=\pi/2$ либо $\psi=3\pi/2$ выполнено $|\zeta|=\sqrt{5}c_*/2$. Мы воспользуемся пунктом 2° теоремы 2.2 при тех $\zeta\in\gamma$, для которых $|\zeta|\leqslant\check{c}:=\max\{1;\sqrt{5}c_*/2\}$. На контуре γ очевидно выполнено $\psi\in(\pi/4,7\pi/4)$ и $\rho_*(\zeta)\leqslant 2\max\{1;8c_*^{-2}\}$. Поэтому при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ из (2.3) получаем

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2\to L_2}&\leqslant 2C_2\max\{1;8c_*^{-2}\}\varepsilon\\ &\leqslant C'_{12}\left(|\zeta|^{-1/2}\varepsilon+\varepsilon^2\right),\quad \zeta\in\gamma,\ |\zeta|\leqslant\check{c},\end{aligned} \quad (3.13)$$

где $C'_{12}=2C_2\max\{1;8c_*^{-2}\}\check{c}^{1/2}$. (Последний шаг — просто загрубление оценки.)

При прочих $\zeta\in\gamma$ имеем $|\sin\phi|\geqslant 5^{-1/2}$, и по пункту 1° теоремы 2.2

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant C''_{12}(|\zeta|^{-1/2}\varepsilon+\varepsilon^2),&\\ \zeta\in\gamma,\ |\zeta|>\check{c},\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,&\end{aligned} \quad (3.14)$$

где $C''_{12}=5^{5/2}C_1$. В итоге, объединяя (3.13) и (3.14), при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ имеем

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leqslant \widehat{C}_{12}(|\zeta|^{-1/2}\varepsilon+\varepsilon^2),\quad \zeta\in\gamma, \quad (3.15)$$

где $\widehat{C}_{12}=\max\{C'_{12};C''_{12}\}$.

Из (3.12) и (3.15) вытекает оценка

$$\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}-e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant 2\pi^{-1}\widehat{C}_{12}\left(\varepsilon t^{-1/2}\Gamma(1/2)+\varepsilon^2 t^{-1}\right)e^{-c_*t/2}.$$

Заметим, что при $t\geqslant\varepsilon^2$ выполнено $\varepsilon^2t^{-1}\leqslant\varepsilon t^{-1/2}$. Таким образом, с учетом равенства $\Gamma(1/2)=\pi^{1/2}$ находим

$$\begin{aligned}\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}-e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}&\leqslant 4\pi^{-1/2}\widehat{C}_{12}\varepsilon t^{-1/2}e^{-c_*t/2}\\ &\leqslant \check{C}_{12}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_*t/2},\quad t\geqslant\varepsilon^2,\end{aligned} \quad (3.16)$$

где $\check{C}_{12}=4\sqrt{2}\pi^{-1/2}\widehat{C}_{12}$. При $t\leqslant\varepsilon^2$ воспользуемся (3.1) и (3.3):

$$\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}-e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant 2e^{-c_*t}\leqslant 2\sqrt{2}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_*t/2},\quad t\leqslant\varepsilon^2. \quad (3.17)$$

Из (3.16) и (3.17) вытекает искомое неравенство (3.10) с постоянной $C_{12}=\max\{\check{C}_{12};2\sqrt{2}\}$. $\square$

3.3. Аппроксимация оператора $e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}$ по $(L_2 \to H^1)$-норме. Введем *корректор*

$$\mathcal{K}_D(t;\varepsilon) = R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}e^{-\mathcal{A}_D^0 t}. \tag{3.18}$$

Согласно (3.5) при $t > 0$ оператор $e^{-\mathcal{A}_D^0 t}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор $b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}e^{-\mathcal{A}_D^0 t}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. Как уже отмечалось, оператор $[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен из $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Таким образом, оператор $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Пусть* $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)$ *— оператор* (3.18). *Пусть* $\widetilde{g}$ *— матрица-функция* (1.9). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *выполнено*

$$\begin{aligned}&\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant C_{13}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_* t/2},\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \widetilde{C}_{13}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_* t/2}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

Постоянные C_{13} *и* $\widetilde{C}_{13}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2).

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3.2, будем пользоваться представлением операторов $e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}$ и $e^{-\mathcal{A}_D^0 t}$ через интегралы по контуру γ от соответствующих резольвент. Имеем

$$\begin{aligned}&e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left((\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\right)d\zeta,\end{aligned} \tag{3.21}$$

где $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — оператор (2.6).

Рассуждая аналогично (3.13)–(3.15), на основании теоремы 2.3 получаем оценку

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2\to H^1}\\ &\quad\leqslant \widehat{C}_{13}\left(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \varepsilon\right), \quad \zeta\in\gamma, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\end{aligned} \tag{3.22}$$

с постоянной $\widehat{C}_{13} = \max\{C'_{13}; C''_{13}\}$, $C'_{13} = 2C_5\max\{1; 8c_*^{-2}\}\check{c}^{1/4}$, $C''_{13} = \max\{5C_3; 25C_4\}$. Из (3.21) и (3.22) вытекает искомая оценка (3.19) с постоянной $C_{13} = 2\pi^{-1}\Gamma(3/4)\widehat{C}_{13}$.

Неравенство (3.20) выводится аналогичным образом из тождества

$$\begin{aligned}&g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\right)d\zeta\end{aligned} \tag{3.23}$$

и теоремы 2.3. $\square$

Замечание 3.4. Пусть λ_1^0 — первое собственное значение оператора $\mathcal{A}_D^0$. Из-за резольвентной сходимости для достаточно малых $\kappa > 0$ найдется ε_*, зависящее от κ и данных задачи, такое, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_*$ первое собственное число $\lambda_{1,\varepsilon}$ оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ удовлетворяет оценке $\lambda_{1,\varepsilon} > \lambda_1^0 - \kappa/2$. Поэтому можно сдвинуть контур интегрирования так, чтобы он пересекал вещественную ось в точке $\lambda_1^0 - \kappa$ (вместо $c_*/2$). На этом пути получаются оценки вида (3.10), (3.19), (3.20) с заменой $e^{-c_* t/2}$ на $e^{-(\lambda_1^0-\kappa)t}$ в правых частях. При этом постоянные в оценках станут зависеть от κ.

3.4. Оценки при малом t. Отметим, что при $0 < t < \varepsilon^2$ нет смысла применять оценки (3.19) и (3.20), поскольку выгоднее использовать следующее простое утверждение (впрочем, справедливое при всех $t > 0$).

Предложение 3.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда при* $t > 0$, $\varepsilon > 0$ *справедливы оценки*

$$\| e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{14} t^{-1/2} e^{-c_* t/2}, \tag{3.24}$$

$$\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{14} t^{-1/2} e^{-c_* t/2}, \tag{3.25}$$

$$\| g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_D^0 t} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{14} t^{-1/2} e^{-c_* t/2}, \tag{3.26}$$

где $C_{14} = 2\alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \left(1 + (\operatorname{diam} \mathcal{O})^2\right)^{1/2}$, $\widetilde{C}_{14} = \|g\|_{L_\infty}^{1/2}$.

Доказательство. Оценка (3.24) следует из (3.2), (3.4) и выражений для постоянных c_0 и c_*.

Далее, имеем

$$\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \| \mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{1/2} e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда и из (3.7) вытекает (3.25). С учетом (1.14) и (3.8) оценка (3.26) проверяется аналогично. $\square$

3.5. Случай $\Lambda \in L_\infty$. Предположим дополнительно, что матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию 2.5. В этом случае можно устранить сглаживатель S_ε в корректоре и использовать корректор вида

$$\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_D^0 t}. \tag{3.27}$$

При $t > 0$ оператор $b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_D^0 t}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$. Как уже отмечалось в п. 2.3, при условии 2.5 оператор $[\Lambda^\varepsilon]$ непрерывен из $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Теорема 3.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Пусть* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (3.27). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\| e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon) \|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{15} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_* t/2}, \tag{3.28}$$

$$\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_D^0 t} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{15} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_* t/2}, \tag{3.29}$$

где $\widetilde{g}$ — *матрица-функция* (1.9). *Постоянные* C_{15}, $\widetilde{C}_{15}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Доказательство теоремы 3.6 аналогично доказательству теоремы 3.3. Отличие состоит в том, что вместо теоремы 2.3 следует использовать теорему 2.6.

3.6. Случай гладкой границы. Устранить сглаживатель S_ε в корректоре возможно также за счет усиления предположения о гладкости границы. В этом пункте мы рассмотрим случай $d \geqslant 3$, поскольку при $d \leqslant 2$ применима теорема 3.6 (см. предложение 2.7(1°)).

Лемма 3.7. *Пусть* $k \geqslant 2$ — *целое число. Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — *ограниченная область с границей* $\partial\mathcal{O}$ *класса* $C^{k-1,1}$. *Тогда при* $t > 0$ *оператор* $e^{-\mathcal{A}_D^0 t}$ *непрерывно переводит* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *в* $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $0 \leqslant s \leqslant k$, *и выполнена оценка*

$$\|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^s(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_s t^{-s/2} e^{-c_* t/2}, \quad t > 0. \tag{3.30}$$

Постоянная $\widehat{\mathrm{C}}_s$ *зависит только от* s, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Достаточно проверить оценку (3.30) при целых $s \in [0,k]$; тогда результат при нецелых s получится по интерполяции. При $s = 0,1,2$ оценка (3.30) уже доказана (см. лемму 3.1).

Итак, пусть s — целое, $2 \leqslant s \leqslant k$. Воспользуемся теоремами о регулярности решений сильно эллиптических уравнений (см., например, [McL, гл. 4]), в силу которых оператор $(\mathcal{A}_D^0)^{-1}$ непрерывно переводит $H^\sigma(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^{\sigma+2}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ при условии $\partial\mathcal{O} \in C^{\sigma+1,1}$. Здесь $\sigma \geqslant 0$ — целое число. Учтем также, что оператор $(\mathcal{A}_D^0)^{-1/2}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Из сказанного следует, что в условиях леммы при целом $s \in [2,k]$ оператор $(\mathcal{A}_D^0)^{-s/2}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При этом

$$\|(\mathcal{A}_D^0)^{-s/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^s(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_s, \tag{3.31}$$

где постоянная $\widetilde{\mathrm{C}}_s$ зависит лишь от $s, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Из (3.31) следует оценка

$$\begin{aligned}\|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^s(\mathcal{O})} &\leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_s \|(\mathcal{A}_D^0)^{s/2} e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_s \sup_{x\geqslant c_*} x^{s/2} e^{-xt} \\ &\leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_s t^{-s/2} e^{-c_* t/2} \sup_{\alpha\geqslant 0} \alpha^{s/2} e^{-\alpha/2} \leqslant \widehat{\mathrm{C}}_s t^{-s/2} e^{-c_* t/2},\end{aligned} \tag{3.32}$$

где $\widehat{\mathrm{C}}_s = \widetilde{\mathrm{C}}_s (s/e)^{s/2}$. □

Используя свойства матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и оператора S_ε, из леммы 3.7 можно вывести оценку разности корректоров (3.18) и (3.27) при условии дополнительной гладкости границы.

Лемма 3.8. *Пусть $d \geqslant 3$. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей $\partial\mathcal{O}$ класса $C^{d/2,1}$, если d — четное, и класса $C^{(d+1)/2,1}$, если d — нечетное. Пусть $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)$ — оператор* (3.18) *и $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ — оператор* (3.27). *Тогда выполнена оценка*

$$\|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon) - \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathrm{C}}_d(t^{-1} + t^{-d/4-1/2})e^{-c_* t/2}, \quad t > 0. \tag{3.33}$$

Постоянная $\check{\mathrm{C}}_d$ зависит только от d, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$.

Из леммы 3.8 и теоремы 3.3 выводится следующий результат.

Теорема 3.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2, *причем $d \geqslant 3$. Пусть область $\mathcal{O}$ удовлетворяет условиям леммы* 3.8. *Пусть $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ — оператор* (3.27). *Пусть $\widetilde{g}$ — матрица-функция* (1.9). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $t > 0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathrm{C}_d^*(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})e^{-c_* t/2}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_d^*(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})e^{-c_* t/2}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Постоянные C_d^*, $\widetilde{\mathrm{C}}_d^*$ зависят лишь от исходных данных (2.2).

Доказательства леммы 3.8 и теоремы 3.9 вынесены в приложение (см. §9), чтобы не загромождать основное изложение. Ясно, что теорему 3.9 удобно применять, если t отделено от нуля. При малых значениях t порядок множителя $(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})$ растет с ростом размерности. Это „плата" за устранение сглаживателя.

Замечание 3.10. Вместо условия гладкости $\partial\mathcal{O}$ из леммы 3.8 можно было бы наложить неявное требование на область: ограниченная область $\mathcal{O}$ с липшицевой границей такова, что выполнена оценка (3.31) при $s = d/2 + 1$. В такой области остаются справедливыми утверждения леммы 3.8 и теоремы 3.9.

3.7. Специальные случаи. Случай, когда корректор обращается в ноль, выделяется условием $g^0 = \overline{g}$. В силу предложения 1.2 в этом случае выполнены соотношения (1.12), а тогда периодическое решение Λ задачи (1.8) равно нулю. Применяя теорему 3.3, получаем следующее утверждение.

Предложение 3.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.3. *Пусть $g^0 = \overline{g}$, т. е. выполнены соотношения* (1.12). *Тогда $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon) = 0$, и при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{13}(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_* t/2}, \quad t > 0.$$

В случае, когда $g^0 = \underline{g}$, в силу предложения 1.3 справедливы представления (1.13). Тогда матрица (1.9) оказывается постоянной: $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Кроме того, в силу предложения 2.7(3°) в этом случае выполнено условие 2.5. Применяя теорему 3.6, приходим к следующему утверждению.

Предложение 3.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Пусть* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.13). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{15} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_* t/2}.$$

3.8. Оценки в строго внутренней подобласти. Пользуясь теоремой 2.9, улучшим оценки погрешности в строго внутренней подобласти.

Теорема 3.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.3. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$, *и* $\delta = \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *выполнены оценки*

$$\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant (C_{16}\delta^{-1} + C_{17}) \varepsilon t^{-1} e^{-c_* t/2}, \tag{3.36}$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \\ &\quad \leqslant (\widetilde{C}_{16}\delta^{-1} + \widetilde{C}_{17}) \varepsilon t^{-1} e^{-c_* t/2}. \end{aligned}$$

Постоянные C_{16}, C_{17}, $\widetilde{C}_{16}$ *и* $\widetilde{C}_{17}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2).

Доказательство. Доказательство основано на применении теоремы 2.9 и тождеств (3.21), (3.23). Кроме этого требуются оценки $c(\psi) \leqslant 2^{1/2}$ и $\rho_*(\zeta) \leqslant 2\max\{1; 8c_*^{-2}\}$ при $\zeta \in \gamma$, а также $c(\phi) \leqslant 5^{1/2}$ при $\zeta \in \gamma$, $|\zeta| > \check{c}$, полученные при доказательстве теоремы 3.2. Опустим детали. □

Следующий результат проверяется аналогично на основании теоремы 2.10.

Теорема 3.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.13. *Предположим, что матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Пусть* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (3.27). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant (C_{16}\delta^{-1} + \check{C}_{17}) \varepsilon t^{-1} e^{-c_* t/2},$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant (\widetilde{C}_{16}\delta^{-1} + \widehat{C}_{17}) \varepsilon t^{-1} e^{-c_* t/2}.$$

Постоянные C_{16} *и* $\widetilde{C}_{16}$ — *те же, что в теореме* 3.13. *Постоянные* $\check{C}_{17}$ *и* $\widehat{C}_{17}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Отметим, что устранить сглаживатель S_ε в корректоре в оценках из теоремы 3.13 возможно и без условия 2.5. Рассмотрим случай $d \geqslant 3$ (иначе с учетом предложения 2.7(1°) применима теорема 3.14). Мы знаем, что при $t > 0$ оператор $e^{-\mathcal{A}_D^0 t}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ и выполнена оценка (3.5). Кроме того, справедливо свойство „повышения гладкости" внутри области: при $t > 0$ оператор $e^{-\mathcal{A}_D^0 t}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^s(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)$ при любом целом $s \geqslant 3$. При этом справедливы оценки

$$\|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^s(\mathcal{O}')} \leqslant \mathrm{C}_s' t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{(s-1)/2} e^{-c_* t/2}, \quad t>0. \qquad (3.37)$$

Постоянная C_s' зависит от s, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Для скалярных параболических уравнений свойство „повышения гладкости" внутри области установлено в [LaSoUr] (см. главу 3, §12). Аналогичным образом его можно проверить и для оператора $\mathcal{A}_D^0$; квалифицированные оценки (3.37) несложно вывести, используя тот факт, что производные $\mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}_0$ (где $\mathbf{u}_0 = e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\boldsymbol{\varphi}$ при $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$) являются решениями параболического уравнения $\partial \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}_0/\partial t = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}_0$. Это уравнение следует домножить на $\chi^2 \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u}_0$ и проинтегрировать по цилиндру $\mathcal{O}\times(0,t)$. Здесь χ — гладкая срезка, равная нулю вблизи боковой поверхности и дна цилиндра. Стандартный анализ соответствующего интегрального тождества вместе с уже известными оценками из леммы 3.1 и приводит к оценкам (3.37).

Используя свойства матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и оператора S_ε, из (3.37) можно вывести следующее утверждение.

Лемма 3.15. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.13, *причем* $d \geqslant 3$. *Пусть* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (3.27). *Пусть число* r_1 *определено в* (1.1). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant (4r_1)^{-1}\delta$ *и* $t>0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)-\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \mathrm{C}_d''(t^{-1}+t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4})e^{-c_* t/2}. \qquad (3.38)$$

Постоянная C_d'' *зависит только от* d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от области* $\mathcal{O}$.

Из леммы 3.15 и теоремы 3.13 выводится следующий результат.

Теорема 3.16. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.13, *причем* $d\geqslant 3$. *Пусть* $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (3.27). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\min\{\varepsilon_1;(4r_1)^{-1}\delta\}$ *и* $t>0$ *справедливы оценки*

$$\|e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}-e^{-\mathcal{A}_D^0 t}-\varepsilon\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \mathrm{C}_d\varepsilon h_d(\delta;t)e^{-c_* t/2}, \qquad (3.39)$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_d\varepsilon h_d(\delta;t)e^{-c_* t/2}. \qquad (3.40)$$

Величина $h_d(\delta;t)$ *задается равенством*

$$h_d(\delta;t)=t^{-1}(\delta^{-1}+1)+t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4}. \qquad (3.41)$$

Постоянные C_d *и* $\widetilde{\mathrm{C}}_d$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2).

Доказательства леммы 3.15 и теоремы 3.16 вынесены в приложение (см. §9), чтобы не загромождать основное изложение.

Ясно, что теорему 3.16 удобно применять, если t отделено от нуля. При малых значениях t порядок множителя $h_d(\delta;t)$ растет с ростом размерности. Это „плата" за устранение сглаживателя.

§4. Усреднение решений первой начально-краевой задачи для параболических систем

Применим результаты §3 к усреднению решений первой начально-краевой задачи для параболических систем.

4.1. Задача для однородного параболического уравнения. Начнем со случая однородного уравнения. Нас интересует поведение при малом ε обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t > 0, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad t > 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon} t}\boldsymbol{\varphi}$.

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)$ — решение так называемой „усредненной“ задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t > 0, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ \mathbf{u}_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad t > 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Тогда $\mathbf{u}_0(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\boldsymbol{\varphi}$, и из теорем 3.2 и 3.3 непосредственно вытекает следующий результат.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (4.1), *и пусть* $\mathbf{u}_0$ — *решение задачи* (4.2), *где* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{12}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2} e^{-c_* t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Пусть матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическое решение задачи* (1.8). *Пусть* $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) = P_\mathcal{O}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$, *где* $P_\mathcal{O}$ — *оператор продолжения* (2.4), *пусть* S_ε — *сглаживающий оператор* (1.19). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *выполнена оценка*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant C_{13}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_* t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Пусть $\widetilde{g}$ — *матрица-функция* (1.9). *Для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{13}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_* t/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В случае $\Lambda \in L_\infty$ теорема 3.6 приводит к следующему результату.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$

справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{15}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{15}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В случае достаточно гладкой границы теорема 3.9 влечет следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *причем* $d \geqslant 3$. *Пусть* $\partial\mathcal{O} \in C^{d/2,1}$, *если* d — *четное, и* $\partial\mathcal{O} \in C^{(d+1)/2,1}$, *если* d — *нечетное. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathrm{C}_d^*(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_d^*(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Специальные случаи выделяются с помощью предложений 3.11 и 3.12.

Предложение 4.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1.
1°. *Если* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.12), *то при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{13}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2°. *Если* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. справедливы представления* (1.13), *то при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *имеет место оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{p}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}_{15}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\mathbf{p}_0 = g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$.

Аппроксимация решений в строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ области $\mathcal{O}$ получается на основании теоремы 3.13.

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$. *Обозначим* $\delta := \operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant (C_{16}\delta^{-1} + C_{17})\varepsilon t^{-1}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant (\widetilde{C}_{16}\delta^{-1} + \widetilde{C}_{17})\varepsilon t^{-1}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

На основании теоремы 3.14 в случае $\Lambda \in L_\infty$ получаем следующий результат.

Теорема 4.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.5, *и пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')}$$
$$\leqslant (C_{16}\delta^{-1} + \check{C}_{17})\varepsilon t^{-1}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant (\widetilde{C}_{16}\delta^{-1} + \widehat{C}_{17})\varepsilon t^{-1}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Наконец, при $d \geqslant 3$ из теоремы 3.16 вытекает следующее утверждение.

Теорема 4.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.5, *причем* $d \geqslant 3$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \min\{\varepsilon_1; (4r_1)^{-1}\delta\}$ *и* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \mathrm{C}_d\varepsilon h_d(\delta;t)e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \widetilde{\mathrm{C}}_d\varepsilon h_d(\delta;t)e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Здесь $h_d(\delta;t)$ — *величина* (3.41).

4.2. Задача для неоднородного параболического уравнения. Аппроксимация решений в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad 0<t<T, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad 0<t<T, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_p(T) := L_p((0,T); L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n))$, $0 < T \leqslant \infty$, при некотором $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}\boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}. \tag{4.4}$$

Соответствующая эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \quad 0<t<T, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \\ \mathbf{u}_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad 0<t<T. \end{cases} \tag{4.5}$$

Аналогично (4.4) имеем

$$\mathbf{u}_0(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_D^0(t-\widetilde{t})}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}. \tag{4.6}$$

Вычитая (4.6) из (4.4) и применяя теорему 3.2, заключаем, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $t > 0$ выполнено

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{12}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{12}\varepsilon\mathcal{L}(\varepsilon;t;\mathbf{F}), \tag{4.7}$$

$$\mathcal{L}(\varepsilon;t;\mathbf{F}) := \int_0^t e^{-c_*(t-\widetilde{t})/2}(\varepsilon^2 + t - \widetilde{t})^{-1/2}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2(\mathcal{O})}\,d\widetilde{t}. \tag{4.8}$$

В случае $1 < p \leqslant \infty$ справедлив следующий результат.

Теорема 4.8. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи (4.3), и пусть* $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи (4.5) при* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_p(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $0 < t < T$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{12}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_*t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+c_p\theta(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}. \tag{4.9}$$

Величина $\theta(\varepsilon,p)$ *имеет вид*

$$\theta(\varepsilon,p) = \begin{cases} \varepsilon^{2-2/p}, & 1<p<2, \\ \varepsilon(|\ln\varepsilon|+1)^{1/2}, & p=2, \\ \varepsilon, & 2<p\leqslant\infty. \end{cases} \tag{4.10}$$

Постоянная c_p *зависит лишь от исходных данных (2.2) и от* p.

Доказательство. С помощью неравенства Гельдера из (4.8) получаем

$$\mathcal{L}(\varepsilon;t;\mathbf{F}) \leqslant \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}\mathcal{I}_{p'}(\varepsilon;t)^{1/p'}, \tag{4.11}$$

$$\mathcal{I}_{p'}(\varepsilon;t) := \int_0^t (\varepsilon^2+\tau)^{-p'/2}e^{-c_*p'\tau/2}\,d\tau. \tag{4.12}$$

Здесь $p^{-1}+(p')^{-1}=1$ (при $p=\infty$ считаем $p'=1$). При $1<p<2$, оценивая единицей экспоненту под знаком интеграла в (4.12), имеем

$$\mathcal{I}_{p'}(\varepsilon;t) \leqslant (p'/2-1)^{-1}\varepsilon^{2-p'}, \quad 1<p<2. \tag{4.13}$$

В случае $p=2$ интеграл в (4.12) оценивается через сумму интегралов $\int_0^1(\tau+\varepsilon^2)^{-1}\,d\tau$ и $\int_1^\infty e^{-c_*\tau}\,d\tau$. Следовательно,

$$\mathcal{I}_2(\varepsilon;t) \leqslant 2|\ln\varepsilon| + \ln 2 + c_*^{-1} \leqslant \max\{2; \ln 2 + c_*^{-1}\}(|\ln\varepsilon|+1). \tag{4.14}$$

В случае $2<p\leqslant\infty$ ($1\leqslant p'<2$) получаем

$$\mathcal{I}_{p'}(\varepsilon;t) \leqslant \int_0^\infty \tau^{-p'/2}e^{-c_*p'\tau/2}\,d\tau = (c_*p'/2)^{p'/2-1}\Gamma(1-p'/2), \quad 2<p\leqslant\infty. \tag{4.15}$$

Комбинируя (4.7), (4.11) и (4.13)–(4.15), приходим к (4.9). При этом

$$c_p = \begin{cases} C_{12}(p'/2-1)^{-1/p'}, & 1<p<2, \\ C_{12}\max\{\sqrt{2}; (\ln 2 + c_*^{-1})^{1/2}\}, & p=2, \\ C_{12}(c_*p'/2)^{1/2-1/p'}(\Gamma(1-p'/2))^{1/p'}, & 2<p<\infty, \\ C_{12}(2\pi)^{1/2}c_*^{-1/2}, & p=\infty. \end{cases} \tag{4.16}$$

$\square$

4.3. Сходимость в $L_p((0,T);L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n))$ решений неоднородного уравнения. Пусть теперь $1\leqslant p<\infty$. Пользуясь равенствами (4.4), (4.6), положительной определенностью операторов $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_D^0$ и неравенством Гельдера, можно убедиться, что при $\mathbf{F}\in\mathfrak{H}_p(T)$ решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ и $\mathbf{u}_0$ также попадают в $\mathfrak{H}_p(T)$. Установим следующий результат.

Теорема 4.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (4.3), *и пусть* $\mathbf{u}_0$ — *решение задачи* (4.5) *при* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_p(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда при* $\varepsilon \to 0$ *решения* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *сходятся к* $\mathbf{u}_0$ *по норме в* $\mathfrak{H}_p(T)$. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{H}_p(T)} \leqslant c_{p'}\Theta(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{18}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Здесь $C_{18} = C_{12}(2\pi)^{1/2}c_*^{-1/2}$; $c_{p'}$ *получается из* c_p (*см.* (4.16)) *заменой* p *на* p', *где* $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. *Величина* $\Theta(\varepsilon,p) = \theta(\varepsilon,p')$ *имеет вид*

$$\Theta(\varepsilon,p) = \begin{cases} \varepsilon, & 1 \leqslant p < 2, \\ \varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)^{1/2}, & p = 2, \\ \varepsilon^{2/p}, & 2 < p < \infty. \end{cases} \tag{4.17}$$

Доказательство. В силу (4.7)

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{H}_p(T)} \leqslant C_{12}\varepsilon\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\mathcal{I}_p(\varepsilon;T)^{1/p} + C_{12}\varepsilon\left(\int_0^T \mathcal{L}(\varepsilon;t;\mathbf{F})^p\,dt\right)^{1/p}, \tag{4.18}$$

где $\mathcal{I}_p(\varepsilon;T) = \int_0^T(\varepsilon^2+t)^{-p/2}e^{-pc_*t/2}\,dt$ (обозначение согласовано с (4.12)). Используя оценки (4.13)–(4.15) (с заменой p' на p), убеждаемся, что первое слагаемое в правой части (4.18) оценивается через $c_{p'}\Theta(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}$.

Перейдем к анализу второго слагаемого в (4.18). При $p = 1$, подставляя (4.8) и меняя порядок интегрирования, получаем

$$\begin{aligned}\int_0^T \mathcal{L}(\varepsilon;t;\mathbf{F})\,dt &= \int_0^T d\widetilde{t}\,\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2(\mathcal{O})}\int_{\widetilde{t}}^T dt\,e^{-c_*(t-\widetilde{t})/2}(\varepsilon^2 + t - \widetilde{t})^{-1/2} \\ &\leqslant (2/c_*)^{1/2}\Gamma(1/2)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_1(T)} = (2\pi/c_*)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_1(T)}.\end{aligned}$$

В случае $1 < p < \infty$ воспользуемся предварительно неравенством Гельдера в (4.8):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\varepsilon;t;\mathbf{F}) &\leqslant \left(\int_0^t e^{-c_*(t-\widetilde{t})/2}(\varepsilon^2 + t - \widetilde{t})^{-1/2}\,d\widetilde{t}\right)^{1/p'} \\ &\times\left(\int_0^t e^{-c_*(t-\widetilde{t})/2}(\varepsilon^2 + t - \widetilde{t})^{-1/2}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|^p_{L_2(\mathcal{O})}\,d\widetilde{t}\right)^{1/p}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Интеграл в первой скобке справа оценивается через $(2\pi/c_*)^{1/2}$. Используя (4.19) и меняя порядок интегрирования, имеем

$$\begin{aligned}&\int_0^T \mathcal{L}(\varepsilon;t;\mathbf{F})^p\,dt \\ &\leqslant (2\pi/c_*)^{p/2p'}\int_0^T d\widetilde{t}\,\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|^p_{L_2(\mathcal{O})}\int_{\widetilde{t}}^T dt\,e^{-c_*(t-\widetilde{t})/2}(\varepsilon^2 + t - \widetilde{t})^{-1/2} \\ &\leqslant (2\pi/c_*)^{p/2}\|\mathbf{F}\|^p_{\mathfrak{H}_p(T)}, \quad 1 < p < \infty.\end{aligned}$$

В итоге второе слагаемое в правой части (4.18) оценивается через $C_{18}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}$. $\square$

Замечание 4.10. При $\boldsymbol{\varphi} = 0$ и $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_\infty(T)$ можно также доказать сходимость решений в $\mathfrak{H}_\infty(T)$. Из теоремы 4.8 в этом случае следует оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{H}_\infty(T)} \leqslant c_\infty \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_\infty(T)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

4.4. Задача для неоднородного параболического уравнения. Аппроксимация решений в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Получим теперь аппроксимацию решения задачи (4.3) в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ с помощью теоремы 3.3. При этом придется считать, что $2 < p \leqslant \infty$. Осложнение возникает при аппроксимации интегрального члена в (4.4), поскольку оценка (3.19) портится при малых значениях времени. *Считая* $t \geqslant \varepsilon^2$, мы разбиваем интеграл в (4.4) в сумму двух интегралов — по промежуткам $(0, t-\varepsilon^2)$ и $(t-\varepsilon^2, t)$; при рассмотрении первого применяем оценку (3.19), а при обработке второго — оценку (3.24).

Введем обозначение

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot, t) = e^{-\mathcal{A}_D^0 \varepsilon^2} \mathbf{u}_0(\cdot, t - \varepsilon^2), \tag{4.20}$$

где $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (4.5). В силу (4.6) имеем

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot, t) = e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^{t-\varepsilon^2} e^{-\mathcal{A}_D^0 (t-\widetilde{t})}\mathbf{F}(\cdot, \widetilde{t})\, d\widetilde{t}. \tag{4.21}$$

Отметим, что функция $\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot, t)$ есть значение в точке t решения первой начально-краевой задачи вида (4.5) на промежутке $(0, t)$ с новой правой частью $\mathbf{F}_\varepsilon$, где $\mathbf{F}_\varepsilon(\cdot, \tau) = \mathbf{F}(\cdot, \tau)$ при $0 < \tau < t - \varepsilon^2$, и $\mathbf{F}_\varepsilon(\cdot, \tau) = 0$ при $t - \varepsilon^2 < \tau < t$.

Теорема 4.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (4.3), *и пусть* $\mathbf{u}_0$ — *решение задачи* (4.5) *при* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_p(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $2 < p \leqslant \infty$. *Пусть функция* $\mathbf{w}_\varepsilon$ *определена в* (4.20). *Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ-*периодическое решение задачи* (1.8). *Пусть* $P_\mathcal{O}$ — *оператор продолжения* (2.4), *и* S_ε — *оператор* (1.19). *Положим* $\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon = P_\mathcal{O}\mathbf{w}_\varepsilon$. *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$, *и* $\widetilde{g}$ — *матрица-функция* (1.9). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *выполнены оценки*

$$\begin{split}&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \mathbf{u}_0(\cdot, t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot, t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant 2C_{13}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \check{c}_p \rho(\varepsilon, p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)},\end{split} \tag{4.22}$$

$$\begin{split}&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant 2\widetilde{C}_{13}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{c}_p \rho(\varepsilon, p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.\end{split} \tag{4.23}$$

Здесь

$$\rho(\varepsilon, p) = \begin{cases} \varepsilon^{1-2/p}, & 2 < p < 4, \\ \varepsilon^{1/2}(|\ln \varepsilon| + 1)^{3/4}, & p = 4, \\ \varepsilon^{1/2}, & 4 < p \leqslant \infty. \end{cases} \tag{4.24}$$

Постоянные $\check{c}_p$ *и* $\widetilde{c}_p$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2) *и от* p.

Доказательство. В силу (4.4), (4.6) и (4.21) справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{u}_0(\cdot,t)-\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})}\\
&\leqslant\left\|\left(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}-e^{-\mathcal{A}_D^0 t}-\varepsilon\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\right)\boldsymbol{\varphi}\right\|_{H^1(\mathcal{O})}\\
&+\int_0^{t-\varepsilon^2}\left\|\left(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})}-e^{-\mathcal{A}_D^0(t-\widetilde{t})}-\varepsilon\mathcal{K}_D(t-\widetilde{t};\varepsilon)\right)\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\right\|_{H^1(\mathcal{O})}d\widetilde{t}\\
&+\int_{t-\varepsilon^2}^{t}\left\|\left(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})}-e^{-\mathcal{A}_D^0(t-\widetilde{t})}\right)\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\right\|_{H^1(\mathcal{O})}d\widetilde{t}.
\end{aligned}\tag{4.25}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (4.25) через $\mathcal{J}_1(t;\varepsilon;\boldsymbol{\varphi})$, $\mathcal{J}_2(t;\varepsilon;\mathbf{F})$, $\mathcal{J}_3(t;\varepsilon;\mathbf{F})$. Из (3.19) и оценки $\varepsilon t^{-1}\leqslant\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}$, справедливой при $t\geqslant\varepsilon^2$, следует, что

$$\mathcal{J}_1(t;\varepsilon;\boldsymbol{\varphi})\leqslant 2C_{13}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_*t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\tag{4.26}$$

Оценим $\mathcal{J}_2(t;\varepsilon;\mathbf{F})$. При $\widetilde{t}\in(0,t-\varepsilon^2)$ выполнено $t-\widetilde{t}\geqslant\varepsilon^2$, а потому $\varepsilon(t-\widetilde{t})^{-1}\leqslant\varepsilon^{1/2}(t-\widetilde{t})^{-3/4}$, и в силу (3.19) при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\mathcal{J}_2(t;\varepsilon;\mathbf{F})\leqslant 2C_{13}\varepsilon^{1/2}\int_0^{t-\varepsilon^2}(t-\widetilde{t})^{-3/4}e^{-c_*(t-\widetilde{t})/2}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2(\mathcal{O})}\,d\widetilde{t}.\tag{4.27}$$

В силу неравенства Гельдера из (4.27) получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_2(t;\varepsilon;\mathbf{F})&\leqslant 2C_{13}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}I_{p'}(t;\varepsilon)^{1/p'},\\
I_{p'}(t;\varepsilon)&:=\int_{\varepsilon^2}^{t}\tau^{-3p'/4}e^{-c_*p'\tau/2}\,d\tau.
\end{aligned}\tag{4.28}$$

(При $p=\infty$ и $p'=1$ неравенство остается в силе.)

Оценим $I_{p'}(t;\varepsilon)$. Если $2<p<4$, то $3p'/4>1$, а тогда

$$I_{p'}(t;\varepsilon)\leqslant\int_{\varepsilon^2}^{\infty}\tau^{-3p'/4}\,d\tau=\nu_p\varepsilon^{2-3p'/2},\quad 2<p<4.\tag{4.29}$$

При $p=4$ имеем $p'=4/3$ и

$$I_{4/3}(t;\varepsilon)\leqslant\int_{\varepsilon^2}^{1}\tau^{-1}\,d\tau+\int_1^\infty e^{-2c_*\tau/3}\,d\tau\leqslant 2|\ln\varepsilon|+\frac{3}{2c_*}\leqslant\nu_4(|\ln\varepsilon|+1).\tag{4.30}$$

Наконец, при $4<p\leqslant\infty$ выполнено $3p'/4<1$, а потому

$$I_{p'}(t;\varepsilon)\leqslant\int_0^\infty\tau^{-3p'/4}e^{-c_*p'\tau/2}\,d\tau=\nu_p,\quad 4<p\leqslant\infty.\tag{4.31}$$

Здесь

$$\nu_p=\begin{cases}(3p'/4-1)^{-1}, & 2<p<4,\\ \max\{2;3(2c_*)^{-1}\}, & p=4,\\ (c_*p'/2)^{3p'/4-1}\Gamma(1-3p'/4), & 4<p\leqslant\infty.\end{cases}\tag{4.32}$$

В итоге из (4.28)–(4.31) следует оценка

$$\mathcal{J}_2(t;\varepsilon;\mathbf{F}) \leqslant 2C_{13}\nu_p^{1/p'}\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}, \quad 2<p\leqslant\infty, \tag{4.33}$$

где $\rho(\varepsilon,p)$ определено в (4.24).

Перейдем к оценке члена $\mathcal{J}_3(t;\varepsilon;\mathbf{F})$. С учетом (3.24) имеем

$$\mathcal{J}_3(t;\varepsilon;\mathbf{F}) \leqslant C_{14}\int_{t-\varepsilon^2}^{t}(t-\widetilde{t})^{-1/2}\|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2(\mathcal{O})}\,d\widetilde{t}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{4.34}$$

Применяя неравенство Гельдера, приходим к оценке

$$\mathcal{J}_3(t;\varepsilon;\mathbf{F}) \leqslant C_{14}(1-p'/2)^{-1/p'}\varepsilon^{1-2/p}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \tag{4.35}$$

которая справедлива при всех $2<p\leqslant\infty$. Заметим, что при $p\geqslant 4$ выполнено $\varepsilon^{1-2/p}\leqslant\varepsilon^{1/2}$.

Объединяя (4.25), (4.26), (4.33) и (4.35), приходим к (4.22) с постоянной $\check{c}_p = 2C_{13}\nu_p^{1/p'} + C_{14}(1-p'/2)^{-1/p'}$.

Остается проверить (4.23). В соответствии с (4.4) и (4.21) имеем

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \left\|\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\right)\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ \int_0^{t-\varepsilon^2}\left\|\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}e^{-\mathcal{A}_D^0(t-\widetilde{t})}\right)\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\right\|_{L_2(\mathcal{O})}d\widetilde{t} \\
&+ \int_{t-\varepsilon^2}^{t}\left\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\right\|_{L_2(\mathcal{O})}d\widetilde{t}.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Первые два слагаемых в (4.36) оцениваются на основании (3.20), а третье — с помощью (3.25). (Ср. (4.26)–(4.35).) Это приводит к (4.23) с постоянной $\widetilde{c}_p = 2\widetilde{C}_{13}\nu_p^{1/p'} + \widetilde{C}_{14}(1-p'/2)^{-1/p'}$. $\square$

По аналогии с выводом теоремы 4.11 при условии $\Lambda\in L_\infty$ с помощью теоремы 3.6 и предложения 3.5 получаем следующий результат.

Теорема 4.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.11. *Предположим, что матрица* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2\leqslant t<T$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant 2C_{15}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_p'\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}, \\
&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant 2\widetilde{C}_{15}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + c_p''\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.
\end{aligned}$$

Постоянные c_p' *и* c_p'' *зависят лишь от исходных данных* (2.2), *от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и от* p.

В случае дополнительной гладкости границы можно применить теорему 3.9. Однако, из-за сильного роста правой части в оценках (3.34), (3.35) при малом t содержательный результат получается только в трехмерном случае и только при $p=\infty$. Его вывод аналогичен доказательству теоремы 4.11.

Предложение 4.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.11, *причем* $d=3$, $p=\infty$. *Предположим, что* $\partial\mathcal{O}\in C^{2,1}$. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2\leqslant t<T$ *выполнены оценки*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{u}_0(\cdot,t)-\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})}\\&\quad\leqslant 2\mathrm{C}_3^*\left(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-5/4}\right)e^{-c_*t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+c'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_\infty(t)},\\&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})}\\&\quad\leqslant 2\widetilde{\mathrm{C}}_3^*\left(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-5/4}\right)e^{-c_*t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\widetilde{c}'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_\infty(t)}.\end{aligned}$$

Постоянные c' *и* $\widetilde{c}'$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2).

Выделим специальные случаи.

Предложение 4.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.11.
1°. *Если* $g^0=\overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.12), *то при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2\leqslant t<T$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant 2C_{13}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_*t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\check{c}_p\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.$$

2°. *Если* $g^0=\underline{g}$, *т. е. справедливы представления* (1.13), *то при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2\leqslant t<T$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{p}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant 2\widetilde{C}_{15}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_*t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+c_p'''\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)},\tag{4.37}$$

где $\mathbf{p}_0=g^0b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$. *Постоянная* c_p''' *зависит от исходных данных* (2.2), *а также от* n *и* p.

Доказательство. Утверждение 1° прямо вытекает из теоремы 4.11, поскольку $\Lambda=0$ при условии $g^0=\overline{g}$.

Докажем утверждение 2°. В силу (4.4) и (4.6) имеем

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{p}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})}\\&\quad\leqslant\left\|\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t}-g^0b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_D^0t}\right)\boldsymbol{\varphi}\right\|_{L_2(\mathcal{O})}\\&\quad+\int_0^t\left\|\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})}-g^0b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_D^0(t-\widetilde{t})}\right)\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\right\|_{L_2(\mathcal{O})}d\widetilde{t}.\end{aligned}\tag{4.38}$$

Первый член справа оценивается с помощью предложения 3.12. Интеграл в правой части (4.38) разобьем в сумму двух — по промежуткам $(0,t-\varepsilon^2)$ и $(t-\varepsilon^2,t)$. Первый интеграл оценивается с помощью предложения 3.12 (ср. (4.27)–(4.33)). Для оценки второго применяем (3.25) и (3.26) (ср. (4.34), (4.35)). Это приводит к оценке (4.37) с постоянной $c_p'''=2\widetilde{C}_{15}\nu_p^{1/p'}+2\widetilde{C}_{14}(1-p'/2)^{-1/p'}$. $\square$

4.6. Аппроксимация решений неоднородного уравнения в строго внутренней подобласти. Действуя по аналогии с доказательством теоремы 4.11 и применяя теорему 3.13 и предложение 3.5, нетрудно получить следующий результат.

Теорема 4.15. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.11. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$. *Обозначим* $\delta = \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')} \\
&\leqslant (C_{16}\delta^{-1} + C_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (k_p\delta^{-1} + k_p')\sigma(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}, \\
&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')} \\
&\leqslant (\widetilde{C}_{16}\delta^{-1} + \widetilde{C}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\widetilde{k}_p\delta^{-1} + \widetilde{k}_p')\sigma(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.
\end{aligned}$$

Здесь величина $\sigma(\varepsilon,p)$ *определена равенством*

$$\sigma(\varepsilon,p) = \begin{cases} \varepsilon^{1-2/p}, & 2 < p < \infty, \\ \varepsilon\,(|\ln\varepsilon| + 1)\,, & p = \infty. \end{cases} \tag{4.39}$$

Постоянные k_p, k_p', $\widetilde{k}_p$, $\widetilde{k}_p'$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2) *и от* p.

Наконец, в случае $\Lambda \in L_\infty$ на основании теоремы 3.14 получаем следующий результат.

Теорема 4.16. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *В условиях теоремы* 4.15 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *имеем*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')} \\
&\leqslant (C_{16}\delta^{-1} + \check{C}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (k_p\delta^{-1} + \check{k}_p')\sigma(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}, \\
&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')} \\
&\leqslant (\widetilde{C}_{16}\delta^{-1} + \widehat{C}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\widetilde{k}_p\delta^{-1} + \widehat{k}_p')\sigma(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.
\end{aligned}$$

Постоянные k_p *и* $\widetilde{k}_p$ — *те же, что в теореме* 4.15. *Постоянные* $\check{k}_p'$ *и* $\widehat{k}_p'$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2), *от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и от* p.

Замечание 4.17. 1) При $p \geqslant 4$ множитель при $\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}$ в оценках из теорем 4.15, 4.16 имеет более точный порядок (по ε), нежели аналогичный множитель в оценках из теорем 4.11, 4.12. Если же $2 < p < 4$, то упомянутые множители имеют одинаковый порядок $\varepsilon^{1-2/p}$, т. е. переход к строго внутренней подобласти не дает выгоды. 2) Применение теоремы 3.16 к аппроксимации решений неоднородного уравнения в классе $H^1(\mathcal{O}'; \mathbb{C}^n)$ не дает интересных результатов из-за сильного роста множителя $h_d(\delta;t)$ в оценках (3.39), (3.40) при малом t.

4.7. Аппроксимация решений неоднородного уравнения в $L_p((0,T);H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n))$. Обозначим $\mathfrak{G}_p(T) := L_p((0,T);H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n))$.

Теорема 4.18. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (4.3), (4.5) *соответственно при* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_p(T)$, $0 < T \leqslant \infty$. *Пусть функция* $\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)$ *при* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *определена в* (4.20). *При* $0 \leqslant t < \varepsilon^2$ *будем считать* $\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t) = 0$. *Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодическое решение задачи* (1.8), $P_{\mathcal{O}}$ *— оператор продолжения* (2.4), *и пусть* S_ε *— оператор* (1.19). *Положим* $\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon = P_{\mathcal{O}}\mathbf{w}_\varepsilon$. *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$, $\widetilde{g}$ *— матрица-функция* (1.9).
1°. *Пусть* $1 \leqslant p < 2$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant \kappa_p \alpha(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{19}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}, \tag{4.40}$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{\kappa}_p \alpha(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{C}_{19}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Величина $\alpha(\varepsilon,p) = \rho(\varepsilon,p')$ *определена равенством*

$$\alpha(\varepsilon,p) = \begin{cases} \varepsilon^{1/2}, & 1 \leqslant p < 4/3, \\ \varepsilon^{1/2}(|\ln\varepsilon| + 1)^{3/4}, & p = 4/3, \\ \varepsilon^{2/p-1}, & 4/3 < p < 2. \end{cases} \tag{4.41}$$

Постоянные C_{19} *и* $\widetilde{C}_{19}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2). *Постоянные* κ_p *и* $\widetilde{\kappa}_p$ *зависят от исходных данных* (2.2) *и от* p.
2°. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant C_{19}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}, \tag{4.42}$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{C}_{19}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Доказательство. Сначала рассмотрим случай $T \geqslant \varepsilon^2$. Имеем

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant \mathcal{T}_1(\varepsilon;p;\boldsymbol{\varphi}) + \mathcal{T}_2(\varepsilon;p;\boldsymbol{\varphi}) \\ &+ \mathcal{T}_3(\varepsilon;p;\mathbf{F}) + \mathcal{T}_4(\varepsilon;p;\mathbf{F}) + \mathcal{T}_5(\varepsilon;p;\mathbf{F}), \end{aligned} \tag{4.43}$$

где

$$\mathcal{T}_1(\varepsilon;p;\boldsymbol{\varphi})^p := \int_0^{\varepsilon^2} dt \left\| \left(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} \right) \boldsymbol{\varphi} \right\|_{H^1}^p, \tag{4.44}$$

$$\mathcal{T}_2(\varepsilon;p;\boldsymbol{\varphi})^p := \int_{\varepsilon^2}^T dt \left\| \left(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_D(t;\varepsilon) \right) \boldsymbol{\varphi} \right\|_{H^1}^p,$$

$$\mathcal{T}_3(\varepsilon;p;\mathbf{F})^p := \int_0^{\varepsilon^2} dt \left\| \int_0^t d\widetilde{t} \left(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})} - e^{-\mathcal{A}_D^0 (t-\widetilde{t})} \right) \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t}) \right\|_{H^1}^p,$$

$$\mathcal{T}_4(\varepsilon;p;\mathbf{F})^p :=$$

$$\int_{\varepsilon^2}^T dt \left\| \int_0^{t-\varepsilon^2} d\widetilde{t} \left(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})} - e^{-\mathcal{A}_D^0 (t-\widetilde{t})} - \varepsilon \mathcal{K}_D(t-\widetilde{t};\varepsilon) \right) \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t}) \right\|_{H^1}^p,$$

$$\mathcal{T}_5(\varepsilon;p;\mathbf{F})^p := \int_{\varepsilon^2}^T dt \left\| \int_{t-\varepsilon^2}^t d\widetilde{t} \left(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})} - e^{-\mathcal{A}_D^0 (t-\widetilde{t})} \right) \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t}) \right\|_{H^1}^p.$$

Интеграл в (4.44) сходится при $1 \leqslant p < 2$. Применяя (3.24), находим

$$\mathcal{T}_1(\varepsilon;p;\boldsymbol{\varphi})^p \leqslant C_{14}^p \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}^p \int_0^{\varepsilon^2} t^{-p/2}\, dt = C_{14}^p (1-p/2)^{-1} \varepsilon^{2-p} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}^p. \tag{4.45}$$

Далее, в силу (3.19)

$$\mathcal{T}_2(\varepsilon;p;\boldsymbol{\varphi})^p \leqslant (2C_{13})^p \varepsilon^{p/2} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}^p \int_{\varepsilon^2}^T t^{-3p/4} e^{-pc_* t/2}\, dt. \tag{4.46}$$

Интеграл в правой части (4.46) уже рассматривался — это $I_p(T;\varepsilon)$ (см. (4.28)). В силу (4.29)–(4.31) справедливы оценки $I_p(T;\varepsilon) \leqslant \nu_{p'}$ при $1 \leqslant p < 4/3$; $I_{4/3}(T;\varepsilon) \leqslant \nu_4(|\ln\varepsilon|+1)$; $I_p(T;\varepsilon) \leqslant \nu_{p'} \varepsilon^{2-3p/2}$ при $4/3 < p < 2$. Отсюда и из (4.45), (4.46) получаем

$$\mathcal{T}_1(\varepsilon;p;\boldsymbol{\varphi}) + \mathcal{T}_2(\varepsilon;p;\boldsymbol{\varphi}) \leqslant \kappa_p \alpha(\varepsilon,p) \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2}, \quad 1 \leqslant p < 2, \tag{4.47}$$

где $\kappa_p = C_{14}(1-p/2)^{-1/p} + 2C_{13}\nu_{p'}^{1/p}$.

В силу (3.24), применяя неравенство Гельдера, имеем

$$\mathcal{T}_3(\varepsilon;p;\mathbf{F})^p \leqslant C_{14}^p \int_0^{\varepsilon^2} dt \left(\int_0^t d\widetilde{t} (t-\widetilde{t})^{-1/2} \|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2} \right)^p$$

$$\leqslant C_{14}^p \int_0^{\varepsilon^2} dt \left(\int_0^t (t-\widetilde{t})^{-1/2} \|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2}^p\, d\widetilde{t} \right) \left(\int_0^t (t-\widetilde{t})^{-1/2}\, d\widetilde{t} \right)^{p/p'}.$$

При $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon^2$ выполнено $\int_0^t (t-\widetilde{t})^{-1/2}\, d\widetilde{t} \leqslant 2\varepsilon$. Учитывая это и меняя порядок интегрирования в получившемся интеграле, находим

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_3(\varepsilon;p;\mathbf{F})^p &\leqslant C_{14}^p (2\varepsilon)^{p/p'} \int_0^{\varepsilon^2} d\widetilde{t}\, \|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2}^p \int_{\widetilde{t}}^{\varepsilon^2} dt\, (t-\widetilde{t})^{-1/2} \\ &\leqslant C_{14}^p (2\varepsilon)^{1+p/p'} \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}^p. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Член $\mathcal{T}_5(\varepsilon;p;\mathbf{F})$ оценивается аналогично:

$$\mathcal{T}_5(\varepsilon;p;\mathbf{F})^p \leqslant C_{14}^p (2\varepsilon)^{1+p/p'} \|\mathbf{F}\|^p_{\mathfrak{H}_p(T)}. \tag{4.49}$$

Остается оценить $\mathcal{T}_4(\varepsilon;p;\mathbf{F})$. В силу (3.19) и неравенства Гельдера

$$\begin{aligned} &\mathcal{T}_4(\varepsilon;p;\mathbf{F})^p \\ &\leqslant (2C_{13})^p \varepsilon^{p/2} \int_{\varepsilon^2}^T dt \biggl(\int_0^{t-\varepsilon^2} d\widetilde{t}\,(t-\widetilde{t})^{-3/4} e^{-c_*(t-\widetilde{t})/2} \|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2} \biggr)^p \\ &\leqslant (2C_{13})^p \varepsilon^{p/2} \int_{\varepsilon^2}^T dt \biggl(\int_0^{t-\varepsilon^2} d\widetilde{t}\,(t-\widetilde{t})^{-3/4} e^{-c_*(t-\widetilde{t})/2} \|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|^p_{L_2} \biggr) \\ &\times \biggl(\int_0^{t-\varepsilon^2} d\widetilde{t}\,(t-\widetilde{t})^{-3/4} e^{-c_*(t-\widetilde{t})/2} \biggr)^{p/p'}. \end{aligned}$$

Последний интеграл в скобках оценивается через $(c_*/2)^{-1/4}\Gamma(1/4)$. Меняя порядок интегрирования в получившемся интеграле, находим

$$\mathcal{T}_4(\varepsilon;p;\mathbf{F})^p \leqslant (2C_{13})^p \varepsilon^{p/2} \Bigl((c_*/2)^{-1/4}\Gamma(1/4) \Bigr)^{1+p/p'} \|\mathbf{F}\|^p_{\mathfrak{H}_p(T)}. \tag{4.50}$$

Объединяя (4.43) и (4.47)–(4.50), получаем оценку (4.40) (в условиях пункта 1° теоремы) при $T \geqslant \varepsilon^2$. При этом $C_{19} = 4C_{14} + 2C_{13}(c_*/2)^{-1/4}\Gamma(1/4)$. В случае $0 < T < \varepsilon^2$ оценки очевидно упрощаются и опираются только на предложение 3.5.

Теперь предположим, что $\boldsymbol{\varphi} = 0$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$. При $1 \leqslant p < \infty$ справедлив аналог оценки (4.43) с $\mathcal{T}_1(\varepsilon;p;\boldsymbol{\varphi}) = \mathcal{T}_2(\varepsilon;p;\boldsymbol{\varphi}) = 0$. Заметим, что оценки (4.48)–(4.50) сохраняют силу при всех $1 \leqslant p < \infty$, что влечет (4.42) в этом случае.

При $p = \infty$ имеем

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_\infty(T)} = \max\{ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\varepsilon^2)} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})}; \\ &\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(\varepsilon^2,T)} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

В силу результата теоремы 4.11 с $p = \infty$

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(\varepsilon^2,T)} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \check{c}_\infty \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_\infty(T)}, \tag{4.52}$$

где $\check{c}_\infty = 2C_{13}(c_*/2)^{-1/4}\Gamma(1/4) + 2C_{14}$. С учетом (3.24) имеем

$$\begin{aligned} &\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\varepsilon^2)} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\varepsilon^2)} \biggl\| \int_0^t \bigl(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}(t-\widetilde{t})} - e^{-\mathcal{A}_D^0(t-\widetilde{t})} \bigr) \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t}) d\widetilde{t} \biggr\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant C_{14} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,\varepsilon^2)} \int_0^t (t-\widetilde{t})^{-1/2} \|\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\|_{L_2}\, d\widetilde{t} \leqslant 2\varepsilon C_{14} \|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_\infty(T)}. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Из (4.51)–(4.53) вытекает (4.42) при $p = \infty$.

Утверждения теоремы относительно потоков $\mathbf{p}_\varepsilon$ получаются на аналогичном пути с помощью оценок (3.20) и (3.25). $\square$

При дополнительном условии 2.5 на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ справедлива следующая теорема. Ее доказательство полностью аналогично доказательству теоремы 4.18; отличие лишь в том, что вместо (3.19) и (3.20) следует использовать (3.28) и (3.29).

Теорема 4.19. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.18 *и условие* 2.5.
1°. *Пусть* $1 \leqslant p < 2$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant \varkappa_p \alpha(\varepsilon, p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{20}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{\varkappa}_p \alpha(\varepsilon, p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{C}_{20}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Постоянные C_{20} *и* $\widetilde{C}_{20}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$. *Постоянные* $\varkappa_p$ *и* $\widetilde{\varkappa}_p$ *зависят от тех же параметров и от* p.
2°. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant C_{20}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{C}_{20}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

В случае дополнительной гладкости границы можно использовать теорему 3.9. Как и в предложении 4.13, содержательный результат получается только в трехмерном случае. Его проверка аналогична доказательству теоремы 4.18.

Предложение 4.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.18, *причем* $d = 3$. *Предположим, что* $\partial\mathcal{O} \in C^{2,1}$.
1°. *Пусть* $1 \leqslant p < 4/3$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant \varkappa'_p \varepsilon^{2/p-3/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{21}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{\varkappa}'_p \varepsilon^{2/p-3/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{C}_{21}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Постоянные C_{21} *и* $\widetilde{C}_{21}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2). *Постоянные* $\varkappa'_p$ *и* $\widetilde{\varkappa}'_p$ *зависят от тех же параметров и от* p.
2°. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant C_{21}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{C}_{21}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

4.8. Аппроксимация решений в $L_p((0,T); H^1(\mathcal{O}'; \mathbb{C}^n))$. Следующий результат проверяется по аналогии с теоремой 4.18 на основании теоремы 3.13 и предложения 3.5.

Теорема 4.21. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.18. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$, *и* $\delta = \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$.

1°. *Пусть* $1 \leqslant p < 2$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);H^1(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (k_{p'}\delta^{-1} + k'_{p'})\tau(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (C'_{22}\delta^{-1} + C''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (\widetilde{k}_{p'}\delta^{-1} + \widetilde{k}'_{p'})\tau(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\widetilde{C}'_{22}\delta^{-1} + \widetilde{C}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Величина $\tau(\varepsilon,p) = \sigma(\varepsilon,p')$ *определена равенством*

$$\tau(\varepsilon,p) = \begin{cases} \varepsilon^{2/p-1}, & 1 < p < 2, \\ \varepsilon\left(|\ln\varepsilon| + 1\right), & p = 1. \end{cases} \tag{4.54}$$

2°. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);H^1(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (C'_{22}\delta^{-1} + C''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}'))} \leqslant (\widetilde{C}'_{22}\delta^{-1} + \widetilde{C}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Постоянные C'_{22}, C''_{22}, $\widetilde{C}'_{22}$ *и* $\widetilde{C}''_{22}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2). *Постоянные* $k_{p'}$, $k'_{p'}$, $\widetilde{k}_{p'}$, $\widetilde{k}'_{p'}$ *— те же, что в теореме* 4.15 (*с заменой* p *на* p').

Наконец, в случае $\Lambda \in L_\infty$ на основании теоремы 3.14 и предложения 3.5 получаем следующий результат.

Теорема 4.22. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.21, *и пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 2.5.
1°. *Пусть* $1 \leqslant p < 2$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);H^1(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (k_{p'}\delta^{-1} + \check{k}'_{p'})\tau(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (C'_{22}\delta^{-1} + \check{C}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (\widetilde{k}_{p'}\delta^{-1} + \widehat{k}'_{p'})\tau(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\widetilde{C}'_{22}\delta^{-1} + \widehat{C}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

2°. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);H^1(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (C'_{22}\delta^{-1} + \check{C}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}'))} \leqslant (\widetilde{C}'_{22}\delta^{-1} + \widehat{C}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Постоянные C'_{22}, $\widetilde{C}'_{22}$ *— те же, что и в теореме* 4.21. *Постоянные* $\check{C}''_{22}$ *и* $\widehat{C}''_{22}$ *зависят лишь от исходных данных* (2.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$. *Постоянные* $k_{p'}$, $\check{k}'_{p'}$, $\widetilde{k}_{p'}$, $\widehat{k}'_{p'}$ *— те же, что и в теореме* 4.16 (*с заменой* p *на* p').

Отметим, что применение теоремы 3.16 к аппроксимации решений неоднородного уравнения в классе $L_p((0,T);H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n))$ не дает интересных результатов из-за сильного роста множителя $h_d(\delta;t)$ в оценках (3.39), (3.40) при малом t.

Глава 2. Усреднение второй начально-краевой задачи для параболических систем

§5. Класс операторов $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$. Эффективный оператор

5.1. Коэрцитивность. Наложим дополнительное условие на символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^{d} b_l \xi_l$ при $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$.

Условие 5.1. *Матричнозначная функция* $b(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$, *такова, что*

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d. \tag{5.1}$$

Отметим, что условие (5.1) более ограничительное, чем (1.3). В соответствии с [Ne] (см. теорему 7.8 в разделе 3.7), условие 5.1 *равносильно коэрцитивности формы* $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}$ *в* $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$; при этом следующее утверждение справедливо лишь при условии липшицевости $\partial\mathcal{O}$.

Предложение 5.2 ([Ne]). *Условие* 5.1 *необходимо и достаточно для существования постоянных* $\mathfrak{C}_1 > 0$ *и* $\mathfrak{C}_2 \geqslant 0$ *таких, что выполнено неравенство типа Гординга*

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \mathfrak{C}_2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \geqslant \mathfrak{C}_1\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.2}$$

Замечание 5.3. Постоянные $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$ зависят от символа $b(\boldsymbol{\xi})$ и от области $\mathcal{O}$, но в общем случае их трудно контролировать явно. Однако часто для конкретных операторов их можно найти. Поэтому в дальнейшем мы будем ссылаться на зависимость других постоянных от $\mathfrak{C}_1$ и $\mathfrak{C}_2$.

5.2. Класс операторов. В $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ при условии Неймана на $\partial\mathcal{O}$. Точное определение оператора $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.3}$$

В силу (1.2) и (1.5) выполнено

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.4}$$

Из (5.2) следует, что

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \left(\mathfrak{C}_1\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} - \mathfrak{C}_2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}\right), \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.5}$$

Из (5.3)–(5.5) видно, что форма (5.3) замкнута и неотрицательна.

5.3. Эффективный оператор. В $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_N^0$, порожденный квадратичной формой

$$a_N^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.6}$$

Здесь g^0 — постоянная эффективная матрица, определенная равенством (1.10). В силу (1.14) форма (5.6) удовлетворяет оценкам вида (5.4), (5.5) с теми же постоянными.

Пусть $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\mathcal{O}$ в точке $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}$. Пусть $\partial^0_{\boldsymbol{\nu}}$ — конормальная производная, т. е. $\partial^0_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = b(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))^* g^0 b(\nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x})$. В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ и того, что $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — сильно эллиптический оператор (с постоянными коэффициентами), оператор $\mathcal{A}^0_N$ можно задать дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ на области определения $\{\mathbf{u} \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) :\ \partial^0_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{u}|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}$. При этом

$$\|(\mathcal{A}^0_N + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant c^\circ. \tag{5.7}$$

Постоянная c° зависит только от постоянных $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ из (5.2), от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Чтобы оправдать этот факт, сошлемся на результаты о регулярности решений сильно эллиптических систем (см., например, [McL, гл. 4]).

Следующее замечание аналогично замечанию 1.4.

Замечание 5.4. Вместо условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ можно было бы наложить неявное требование на область: ограниченная область $\mathcal{O}$ с липшицевой границей такова, что выполнена оценка (5.7). Для такой области остаются справедливыми результаты главы 2 (за исключением результатов п. 7.6, теоремы 8.3 и предложений 8.12, 8.18, в которых требуется дополнительная гладкость границы). В случае скалярных эллиптических операторов широкие достаточные условия на $\partial\mathcal{O}$, гарантирующие выполнение оценки (5.7), можно найти в [KoE] и [MaSh, гл. 7] (в частности, достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O} \in C^\alpha$, $\alpha > 3/2$).

5.4. Обозначим

$$Z := \operatorname{Ker} b(\mathbf{D}) = \{\mathbf{z} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) : b(\mathbf{D})\mathbf{z} = 0\}.$$

Из (5.2) и из компактности вложения $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ следует, что Z конечномерно. Заведомо Z содержит n-мерное подпространство постоянных вектор-функций. Обозначим $q = \dim Z$. Положим

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) := L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \ominus Z. \tag{5.8}$$

Через $\mathcal{P}$ обозначим ортогональный проектор пространства $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ на $\mathcal{H}(\mathcal{O})$. Далее, пусть $H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) := H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap \mathcal{H}(\mathcal{O})$. Иными словами,

$$H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) = \{\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) : (\mathbf{u},\mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})} = 0,\ \forall\, \mathbf{z} \in Z\}.$$

Как проверено в [Su6, предложение 9.1], форма $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}$ задает в пространстве $H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ норму, эквивалентную стандартной, т. е. существует постоянная $\widetilde{\mathfrak{C}}_1 > 0$ такая, что

$$\widetilde{\mathfrak{C}}_1\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.9}$$

Очевидно,

$$\operatorname{Ker} \mathcal{A}_{N,\varepsilon} = \operatorname{Ker} \mathcal{A}^0_N = Z. \tag{5.10}$$

Поэтому ортогональное разложение $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) = Z \oplus \mathcal{H}(\mathcal{O})$ приводит операторы $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_N^0$. В силу (5.9) справедливы оценки

$$\begin{aligned} a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] &\geqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}\widetilde{\mathfrak{C}}_1\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n),\\ a_N^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] &\geqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}\widetilde{\mathfrak{C}}_1\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \end{aligned} \tag{5.11}$$

§6. Предварительные сведения. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$

6.1. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В [Su7,8] получена аппроксимация оператора $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ при $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq 0$. Здесь $0<c_\flat\leqslant\min\{\mu_{2,\varepsilon};\mu_2^0\}$, где $\mu_{2,\varepsilon}$ и μ_2^0 — первые ненулевые собственные значения операторов $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ и $\mathcal{A}_N^0$ соответственно. (С учетом кратности это $(q+1)$-е собственные значения.) В силу (5.11) можно принять $c_\flat = \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}\widetilde{\mathfrak{C}}_1$.

Для удобства дальнейших ссылок перечислим *исходные данные*:

$$\begin{gathered} m,\ d,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty};\ \text{постоянные } \mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2 \text{ из (5.2)};\\ \text{параметры решетки } \Gamma;\ \text{область } \mathcal{O}, \end{gathered} \tag{6.1}$$

а также *расширенный набор данных*:

$$\begin{gathered} m,\ n,\ d,\ q,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty};\ \text{постоянные } \mathfrak{C}_1,\mathfrak{C}_2 \text{ из (5.2)};\\ \text{постоянная } \widetilde{\mathfrak{C}}_1 \text{ из (5.9)};\ \text{параметры решетки } \Gamma;\ \text{область } \mathcal{O}. \end{gathered} \tag{6.2}$$

В теоремах 10.1 и 14.8 из [Su8] получен следующий результат.

Теорема 6.1 ([Su8]). *Пусть $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Предположим, что матрица-функция $g(\mathbf{x})$ и ДО $b(\mathbf{D})$ удовлетворяют условиям п.* 1.1. *Пусть выполнено условие* 5.1. *Пусть число $\varepsilon_1\in(0,1]$ подчинено условию* 2.1.
1°. *Пусть $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\zeta=|\zeta|e^{i\phi}$, и $|\zeta|\geqslant 1$. Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi)^5\left(|\zeta|^{-1/2}\varepsilon+\varepsilon^2\right). \tag{6.3}$$

Здесь $c(\phi)$ определено согласно (2.1). *Постоянная $\mathcal{C}_1$ зависит лишь от исходных данных* (6.1).
2°. *Пусть теперь $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq 0$, где $c_\flat=\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}\widetilde{\mathfrak{C}}_1$. Положим $\zeta-c_\flat=|\zeta-c_\flat|e^{i\vartheta}$, $\vartheta\in(0,2\pi)$, и введем обозначение*

$$\rho_\flat(\zeta)=\begin{cases} c(\vartheta)^2|\zeta-c_\flat|^{-2}, & |\zeta-c_\flat|<1,\\ c(\vartheta)^2, & |\zeta-c_\flat|\geqslant 1.\end{cases}$$

Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ имеем

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_2\rho_\flat(\zeta)\varepsilon. \tag{6.4}$$

Постоянная $\mathcal{C}_2$ зависит лишь от данных (6.2).

6.2. Аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ по операторной норме из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Аппроксимация оператора $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$ при учете корректора получена в [Su8, теоремы 10.2 и 14.8]. Корректор вводится аналогично (2.6):

$$K_N(\varepsilon;\zeta)=R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}. \tag{6.5}$$

Оператор $K_N(\varepsilon;\zeta)$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Теорема 6.2 ([Su8])**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Пусть* $K_N(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (6.5), *где* $P_{\mathcal{O}}$ — *оператор продолжения* (2.4), S_ε — *оператор сглаживания по Стеклову* (1.19). *Пусть* $\widetilde{g}$ — *матрица-функция* (1.9).
1°. *При* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$ *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&\quad\leqslant \mathcal{C}_3 c(\phi)^2|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2}+\mathcal{C}_4 c(\phi)^4\varepsilon,\end{aligned}\tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\&\quad\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_3 c(\phi)^2|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2}+\widetilde{\mathcal{C}}_4 c(\phi)^4\varepsilon.\end{aligned}\tag{6.7}$$

Постоянные $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\widetilde{\mathcal{C}}_3$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_4$ *зависят лишь от исходных данных* (6.1).
2°. *Пусть теперь* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq 0$. *Через* $\mathcal{P}$ *обозначим ортогональный проектор пространства* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *на подпространство* $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, *определенное в* (5.8). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *выполнены оценки*

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_5\rho_\flat(\zeta)\varepsilon^{1/2}, \tag{6.8}$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\&\quad\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_5\rho_\flat(\zeta)\varepsilon^{1/2}.\end{aligned}\tag{6.9}$$

Постоянные $\mathcal{C}_5$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_5$ *зависят лишь от данных* (6.2).

Замечание 6.3. Вместо $\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\mathfrak{C}_1$ в качестве $c_\flat$ в теоремах 6.1 и 6.2 можно взять любое число, не превосходящее $\min\{\mu_{2,\varepsilon};\mu_2^0\}$. Пусть $\kappa>0$ — сколь угодно малое число. Если считать ε достаточно малым, то можно принять $c_\flat=\mu_2^0-\kappa$. При этом постоянные в оценках станут зависеть от κ.

6.3. Случай $\Lambda\in L_\infty$. Предположим, что выполнено условие 2.5. Тогда сглаживатель в корректоре может быть устранен. Положим

$$K_N^0(\varepsilon;\zeta)=[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}. \tag{6.10}$$

Непрерывность оператора $K_N^0(\varepsilon;\zeta)$ из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ устанавливается по аналогии с непрерывностью оператора (2.9).

В теоремах 12.1 и 14.9 из [Su8] получен следующий результат.

Теорема 6.4 ([Su8]). *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Пусть* $K_N^0(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (6.10). *Пусть* $\widetilde{g}$ — *матрица-функция* (1.9).
1°. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon K_N^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant \mathcal{C}_3 c(\phi)^2|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2}+\mathcal{C}_6 c(\phi)^4\varepsilon,\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_3 c(\phi)^2|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2}+\widetilde{\mathcal{C}}_6 c(\phi)^4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_3$, $\widetilde{\mathcal{C}}_3$ — *те же, что и в теореме* 6.2. *Постоянные* $\mathcal{C}_6$, $\widetilde{\mathcal{C}}_6$ *зависят лишь от исходных данных* (6.1) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.
2°. *Пусть теперь* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq 0$. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *имеем*

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon K_N^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_7\rho_\flat(\zeta)\varepsilon^{1/2},\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_7\rho_\flat(\zeta)\varepsilon^{1/2}.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_7$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_7$ *зависят лишь от данных* (6.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

6.4. Оценки в строго внутренней подобласти. В строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ области $\mathcal{O}$ можно получить H^1-оценки погрешности точного порядка относительно ε. В теоремах 12.4 и 14.10 из [Su8] установлен следующий результат.

Теорема 6.5 ([Su8]). *Пусть выполнены условия теоремы* 6.2. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$, *и* $\delta=\operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$.
1°. *Пусть* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ *и* $|\zeta|\geqslant 1$. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')}\\
&\quad\leqslant(\mathcal{C}_8\delta^{-1}+\mathcal{C}_9)c(\phi)^6\varepsilon,\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')}\\
&\quad\leqslant(\widetilde{\mathcal{C}}_8\delta^{-1}+\widetilde{\mathcal{C}}_9)c(\phi)^6\varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_8$, $\mathcal{C}_9$, $\widetilde{\mathcal{C}}_8$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_9$ *зависят лишь от исходных данных* (6.1).
2°. *Пусть теперь* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq0$. *Обозначим* $\widehat{\rho}_\flat(\zeta):=c(\vartheta)\rho_\flat(\zeta)+c(\vartheta)^{5/2}\rho_\flat(\zeta)^{3/4}$. *При* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta)\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')}\\
&\quad\leqslant\left(\mathcal{C}_{10}\delta^{-1}\widehat{\rho}_\flat(\zeta)+\mathcal{C}_{11}c(\vartheta)^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{5/4}\right)\varepsilon,\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')}\\
&\quad\leqslant\left(\widetilde{\mathcal{C}}_{10}\delta^{-1}\widehat{\rho}_\flat(\zeta)+\widetilde{\mathcal{C}}_{11}c(\vartheta)^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{5/4}\right)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_{10}$, $\mathcal{C}_{11}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{10}$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_{11}$ *зависят лишь от данных* (6.2).

В случае $\Lambda \in L_\infty$ в теоремах 12.5 и 14.11 из [Su8] получено следующее утверждение.

Теорема 6.6 ([Su8]). *Пусть выполнены условия теоремы* 6.5, *и пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Пусть* $K_N^0(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (6.10).
1°. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. *При* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon K_N^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')}\\
&\quad\leqslant(\mathcal{C}_8\delta^{-1}+\check{\mathcal{C}}_9)c(\phi)^6\varepsilon,\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')}\\
&\quad\leqslant(\widetilde{\mathcal{C}}_8\delta^{-1}+\widehat{\mathcal{C}}_9)c(\phi)^6\varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_8$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_8$ — *те же, что в теореме* 6.5. *Постоянные* $\check{\mathcal{C}}_9$, $\widehat{\mathcal{C}}_9$ *зависят лишь от исходных данных* (6.1) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.
2°. *Пусть* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, $\zeta\neq 0$. *При* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}-\varepsilon K_N^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')}\\
&\quad\leqslant\left(\mathcal{C}_{10}\delta^{-1}\widehat{\rho}_\flat(\zeta)+\check{\mathcal{C}}_{11}c(\vartheta)^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{5/4}\right)\varepsilon,\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')}\\
&\quad\leqslant\left(\widetilde{\mathcal{C}}_{10}\delta^{-1}\widehat{\rho}_\flat(\zeta)+\widehat{\mathcal{C}}_{11}c(\vartheta)^{1/2}\rho_\flat(\zeta)^{5/4}\right)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathcal{C}_{10}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{10}$ — *те же, что в теореме* 6.5. *Постоянные* $\check{\mathcal{C}}_{11}$, $\widehat{\mathcal{C}}_{11}$ *зависят лишь от данных* (6.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

§7. Усреднение операторной экспоненты $e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}$

7.1. Свойства операторной экспоненты. Начнем со следующего простого утверждения об оценках операторов $e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\mathcal{P}$ и $e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}$ в различных операторных нормах.

Лемма 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Пусть* $\mathcal{P}$ — *ортопроектор пространства* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *на подпространство* (5.8). *Тогда при* $t>0$, $\varepsilon>0$ *справедливы оценки*

$$\|e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant e^{-c_\flat t},\tag{7.1}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant c_\flat^{-1/2}t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2},\tag{7.2}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant e^{-c_\flat t},\tag{7.3}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant c_\flat^{-1/2}t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2},\tag{7.4}$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\leqslant \check{c}^\circ\, t^{-1}e^{-c_\flat t/2},\tag{7.5}$$

где $\check{c}^\circ=c^\circ(1+c_\flat^{-1})$.

Доказательство. Оценки (7.1) и (7.3) прямо следуют из (5.11).

В силу (5.11) имеем

$$\|e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_\flat^{-1/2}\|\mathcal{A}_{N,\varepsilon}^{1/2}e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.6}$$

Аналогично (3.7)

$$\|\mathcal{A}_{N,\varepsilon}^{1/2}e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \sup_{\mu\geqslant c_\flat}\mu^{1/2}e^{-\mu t} \leqslant t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}. \tag{7.7}$$

Из (7.6) и (7.7) вытекает оценка (7.2). Точно так же из неравенства

$$\|(\mathcal{A}_N^0)^{1/2}e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2} \tag{7.8}$$

и из (5.11) выводится оценка (7.4).

Далее, в силу (5.7)

$$\|(\mathcal{A}_N^0)^{-1}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant c^\circ \sup_{\mu\geqslant c_\flat}(\mu+1)\mu^{-1} \leqslant c^\circ(1+c_\flat^{-1}) = \check{c}^\circ.$$

Отсюда аналогично (3.9) получаем

$$\|e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \check{c}^\circ\|\mathcal{A}_N^0 e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \check{c}^\circ\, t^{-1}e^{-c_\flat t/2},$$

что доказывает (7.5). □

7.2. Аппроксимация оператора $e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}$ по норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Установим следующий результат.

Теорема 7.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1*. Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{12}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}, \quad t\geqslant 0. \tag{7.9}$$

Постоянная $\mathcal{C}_{12}$ *зависит только от данных* (6.2)*.*

Доказательство. Так как $I-\mathcal{P}$ — ортопроектор пространства $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ на Z, в силу (5.10) имеем

$$e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}(I-\mathcal{P}) = e^{-\mathcal{A}_N^0 t}(I-\mathcal{P}) = I-\mathcal{P}.$$

Следовательно,

$$e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t} = \left(e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\right)\mathcal{P}. \tag{7.10}$$

Поэтому с учетом (5.11) справедливо тождество

$$e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{\gamma}} e^{-\zeta t}\left((\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\right)d\zeta. \tag{7.11}$$

Здесь $\widetilde{\gamma}\subset\mathbb{C}$ — пробегаемый в положительном направлении контур, состоящий из двух лучей:

$$\widetilde{\gamma} = \{\zeta\in\mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta\geqslant 0,\ \operatorname{Re}\zeta = \operatorname{Im}\zeta + c_\flat/2\}$$
$$\cup\,\{\zeta\in\mathbb{C} : \operatorname{Im}\zeta<0,\ \operatorname{Re}\zeta = -\operatorname{Im}\zeta + c_\flat/2\}.$$

Обозначим $\check{c}_\flat := \max\{1; \sqrt{5}c_\flat/2\}$. При $\zeta \in \widetilde{\gamma}$ и $|\zeta| \leqslant \check{c}_\flat$ применяем оценку (6.4). При $\zeta \in \widetilde{\gamma}$ и $|\zeta| > \check{c}_\flat$ используем (6.3). Аналогично доказательству теоремы 3.2 это влечет (7.9). $\square$

7.3. Аппроксимация оператора $e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t}$ по $(L_2 \to H^1)$-норме. Введем оператор

$$\mathcal{K}_N(t;\varepsilon) = R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} e^{-\mathcal{A}_N^0 t} \mathcal{P}. \tag{7.12}$$

Непрерывность оператора $\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)$ из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ при $t > 0$ проверяется аналогично непрерывности оператора (3.18).

Опираясь на теорему 6.2, установим следующий результат.

Теорема 7.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.2. *Пусть* $\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)$ *— оператор* (7.12). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\| e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_N(t;\varepsilon) \|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \mathcal{C}_{13} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}, \end{aligned} \tag{7.13}$$

$$\begin{aligned} &\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} e^{-\mathcal{A}_N^0 t} \mathcal{P} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{13} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Постоянные $\mathcal{C}_{13}$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_{13}$ *зависят только от данных* (6.2).

Доказательство. Аналогично (7.11) имеем

$$\begin{aligned} &e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_N(t;\varepsilon) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\widetilde{\gamma}} e^{-\zeta t} \left((\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta) \mathcal{P} \right) d\zeta. \end{aligned} \tag{7.15}$$

Здесь $K_N(\varepsilon;\zeta)$ — оператор (6.5). Отметим, что в силу (5.10) выполнено

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta) \mathcal{P} \\ &= \left((\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon;\zeta) \right) \mathcal{P}. \end{aligned} \tag{7.16}$$

При $\zeta \in \widetilde{\gamma}$ и $|\zeta| \leqslant \check{c}_\flat$ применяем оценку (6.8). При $\zeta \in \widetilde{\gamma}$ и $|\zeta| > \check{c}_\flat$ используем (6.6) и (7.16). Аналогично доказательству теоремы 3.3 это влечет (7.13).

Обсудим доказательство оценки (7.14). Так как $I - \mathcal{P}$ — ортопроектор пространства $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ на $Z = \operatorname{Ker} b(\mathbf{D}) = \operatorname{Ker} \mathcal{A}_{N,\varepsilon}$, то

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} \mathcal{P}. \tag{7.17}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} e^{-\mathcal{A}_N^0 t} \mathcal{P} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\widetilde{\gamma}} e^{-\zeta t} \left(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} \right) \mathcal{P}\, d\zeta. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Кроме того, справедливо тождество

$$
\begin{aligned}
&g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\mathcal{P}\\
&=\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0-\zeta I)^{-1}\right)\mathcal{P}.
\end{aligned}
\tag{7.19}
$$

При $\zeta\in\widetilde{\gamma}$ и $|\zeta|\leqslant\check{c}_\flat$ применяем оценку (6.9) и (7.19). При $\zeta\in\widetilde{\gamma}$ и $|\zeta|>\check{c}_\flat$ опираемся на (6.7). Это приводит к (7.14). $\square$

Замечание 7.4. С учетом сказанного в замечании 6.3 можно получить оценки вида (7.9), (7.13), (7.14) с заменой $e^{-c_\flat t/2}$ на $e^{-(\mu_2^0-\varkappa)t}$, где $\varkappa>0$ — сколь угодно малое число. Действительно, при достаточно малых ε можно сдвинуть контур интегрирования так, чтобы он пересекал вещественную ось в точке $\mu_2^0-\varkappa$. При этом все постоянные в оценках вида (7.9), (7.13) и (7.14) станут зависеть от $\varkappa$.

7.4. Оценки при малом t. Отметим, что при $0<t<\varepsilon^2$ вместо теоремы 7.3 выгоднее использовать следующее простое утверждение (справедливое, впрочем, при всех $t>0$).

Предложение 7.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Тогда при $t>0$ и $\varepsilon>0$ справедливы оценки*

$$
\|e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}-e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_{14}t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2},\tag{7.20}
$$

$$
\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{14}t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2},\tag{7.21}
$$

$$
\|g^0 b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{14}t^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}.\tag{7.22}
$$

Здесь $\mathcal{C}_{14}=2\widetilde{\mathfrak{C}}_1^{-1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{14}=\|g\|_{L_\infty}^{1/2}$.

Доказательство. Оценка (7.20) следует из (7.2), (7.4), (7.10) и выражения для постоянной $c_\flat$.

В силу (7.17)

$$
\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mathcal{A}_{N,\varepsilon}^{1/2}e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
$$

Вместе с (7.7) это влечет (7.21). Оценка (7.22) проверяется аналогично с учетом (1.14) и (7.8). $\square$

7.5. Случай $\Lambda\in L_\infty$. Предположим, что матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию 2.5. Тогда оператор

$$
\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)=[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\tag{7.23}
$$

непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ при $t>0$.

Теорема 7.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Предположим, что выполнено условие* 2.5. *Пусть* $\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (7.23). *Пусть* $\widetilde{g}$ — *матрица-функция* (1.9). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $t>0$ *справедливы оценки*

$$
\|e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}-e^{-\mathcal{A}_N^0 t}-\varepsilon\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant\mathcal{C}_{15}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2},
$$

$$
\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant\widetilde{\mathcal{C}}_{15}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}+\varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}.
$$

Постоянные $\mathcal{C}_{15}$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_{15}$ *зависят только от данных* (6.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Доказательство. Доказательство основано на применении теоремы 6.4 и с некоторыми упрощениями повторяет доказательство теоремы 7.3. $\square$

7.6. Случай гладкой границы. Устранить сглаживатель S_ε в корректоре можно также за счет усиления предположения о гладкости границы. В этом пункте мы рассмотрим случай $d \geqslant 3$, поскольку при $d \leqslant 2$ применима теорема 7.6 (см. предложение 2.7(1°)).

Лемма 7.7. *Пусть* $k \geqslant 2$ — *целое число. Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — *ограниченная область с границей* $\partial\mathcal{O}$ *класса* $C^{k-1,1}$. *Тогда при* $t > 0$ *оператор* $e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}$ *непрерывно переводит* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *в* $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $0 \leqslant s \leqslant k$, *и выполнена оценка*

$$\|e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^s(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{\mathscr{C}}_s t^{-s/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0. \tag{7.24}$$

Постоянная $\widehat{\mathscr{C}}_s$ *зависит только от* s, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от постоянных* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ *из неравенства* (5.2), *от постоянной* $\widetilde{\mathfrak{C}}_1$ *из* (5.9) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству леммы 3.7. Достаточно проверить оценку (7.24) при целых $s \in [0,k]$. При $s = 0,1,2$ оценка (7.24) уже доказана (см. лемму 7.1).

Итак, пусть s — целое, $2 \leqslant s \leqslant k$. Ссылаясь на [McL, гл. 4], заключаем, что оператор $(\mathcal{A}_N^0)^{-s/2}\mathcal{P}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При этом

$$\|(\mathcal{A}_N^0)^{-s/2}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^s(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathscr{C}}_s, \tag{7.25}$$

где постоянная $\widetilde{\mathscr{C}}_s$ зависит лишь от s, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от постоянных $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ из неравенства (5.2), от постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_1$ из (5.9) и от области $\mathcal{O}$. Аналогично (3.32) отсюда выводится оценка (7.24) с постоянной $\widehat{\mathscr{C}}_s = \widetilde{\mathscr{C}}_s (s/e)^{s/2}$. $\square$

Используя свойства матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и оператора S_ε, из леммы 7.7 можно вывести оценку разности корректоров (7.12) и (7.23) при условии дополнительной гладкости границы.

Лемма 7.8. *Пусть* $d \geqslant 3$. *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — *ограниченная область с границей* $\partial\mathcal{O}$ *класса* $C^{d/2,1}$, *если* d — *четное, и класса* $C^{(d+1)/2,1}$, *если* d — *нечетное. Пусть* $\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)$ — *оператор* (7.12) *и* $\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (7.23). *Тогда выполнена оценка*

$$\|\mathcal{K}_N(t;\varepsilon) - \mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \check{\mathscr{C}}_d (t^{-1} + t^{-d/4-1/2}) e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0. \tag{7.26}$$

Постоянная $\check{\mathscr{C}}_d$ *зависит только от* d, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от постоянных* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ *из неравенства* (5.2), *от постоянной* $\widetilde{\mathfrak{C}}_1$ *из* (5.9) *и от области* $\mathcal{O}$.

Из леммы 7.8 и теоремы 7.3 выводится следующий результат.

Теорема 7.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1, *причем* $d \geqslant 3$. *Пусть область* $\mathcal{O}$ *удовлетворяет условиям леммы* 7.8. *Пусть* $\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (7.23). *Пусть* $\widetilde{g}$ — *матрица-функция* (1.9). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\| e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \mathscr{C}_d^* (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1} + \varepsilon t^{-d/4-1/2}) e^{-c_\flat t/2},\end{aligned} \tag{7.27}$$

$$\begin{aligned}&\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \widetilde{\mathscr{C}}_d^* (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1} + \varepsilon t^{-d/4-1/2}) e^{-c_\flat t/2}.\end{aligned} \tag{7.28}$$

Постоянные $\mathscr{C}_d^*$, $\widetilde{\mathscr{C}}_d^*$ *зависят только от данных* (6.2).

Доказательства леммы 7.8 и теоремы 7.9 вынесены в приложение (см. §9). Как и в случае условия Дирихле, теорему 7.9 удобно применять, если t отделено от нуля.

Замечание 7.10. Вместо условия гладкости $\partial\mathcal{O}$ из леммы 7.8 можно было бы наложить неявное требование на область: ограниченная область $\mathcal{O}$ с липшицевой границей такова, что выполнена оценка (7.25) при $s = d/2+1$. В такой области остаются справедливыми утверждения леммы 7.8 и теоремы 7.9.

7.7. Специальные случаи. Специальные случаи выделяются с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям п. 3.7. На основании теорем 7.3 и 7.6 и предложений 1.2, 1.3, 2.7(3°) получаем следующие результаты.

Предложение 7.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.3.
1°. *Пусть* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.12). *Тогда* $\mathcal{K}_N(t;\varepsilon) = 0$, *и при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\| e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{13} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0.$$

2°. *Пусть* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.13). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - g^0 b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{15} (\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-c_\flat t/2}.$$

7.8. Оценки в строго внутренней подобласти. В строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ области $\mathcal{O}$ можно получить оценки точного порядка ε (при фиксированном $t > 0$), опираясь на теорему 6.5.

Теорема 7.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.3. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$, *и* $\delta = \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$. *Тогда* *при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $t > 0$ справедливы оценки*

$$
\begin{aligned}
&\| e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_N(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant (\mathcal{C}_{16}\delta^{-1} + \mathcal{C}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}, \\
&\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \\
&\quad \leqslant (\widetilde{\mathcal{C}}_{16}\delta^{-1} + \widetilde{\mathcal{C}}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}.
\end{aligned}
\tag{7.29}
$$

Постоянные $\mathcal{C}_{16}$, $\mathcal{C}_{17}$, $\widetilde{\mathcal{C}}_{16}$ и $\widetilde{\mathcal{C}}_{17}$ зависят лишь от данных (6.2).

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство теоремы 7.3 и опирается на теорему 6.5 и соотношения (7.15), (7.16), (7.18) и (7.19). $\square$

В случае $\Lambda \in L_\infty$ на основании теоремы 6.6 получаем следующий результат.

Теорема 7.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.12, *и пусть матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию* 2.5. *Пусть $\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)$ — оператор* (7.23). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $t > 0$ выполнено*

$$
\begin{aligned}
&\| e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t} - \varepsilon \mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant (\mathcal{C}_{16}\delta^{-1} + \check{\mathcal{C}}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}, \\
&\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon} t} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant (\widetilde{\mathcal{C}}_{16}\delta^{-1} + \widehat{\mathcal{C}}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}.
\end{aligned}
$$

Постоянные $\mathcal{C}_{16}$ и $\widetilde{\mathcal{C}}_{16}$ — те же, что в теореме 7.12. *Постоянные $\check{\mathcal{C}}_{17}$ и $\widehat{\mathcal{C}}_{17}$ зависят только от данных* (6.2) *и от $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.*

Устранить сглаживатель S_ε в корректоре в оценках из теоремы 7.12 можно и без условия 2.5. Рассмотрим случай $d \geqslant 3$ (иначе с учетом предложения 2.7(1°) применима теорема 7.13). При $t > 0$ оператор $e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и выполнена оценка (7.5). Кроме того, справедливо свойство „повышения гладкости" внутри области: при $t > 0$ оператор $e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}$ непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^s(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)$ при любом целом $s \geqslant 3$. При этом справедливы оценки

$$
\| e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^s(\mathcal{O}')} \leqslant \mathscr{C}'_s t^{-1/2}(\delta^{-2} + t^{-1})^{(s-1)/2} e^{-c_\flat t/2}, \quad t > 0. \tag{7.30}
$$

Постоянная $\mathscr{C}'_s$ зависит от s, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от констант $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ из неравенства (5.2), от постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_1$ из (5.9) и от области $\mathcal{O}$.

Способ вывода оценок (7.30) — такой же, как в случае оператора $\mathcal{A}_D^0$; см. комментарии в п. 3.8. Отличие в том, что вместо леммы 3.1 следует использовать лемму 7.1.

Используя свойства матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и оператора S_ε, из (7.30) можно вывести следующее утверждение.

Лемма 7.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.12, *причем $d \geqslant 3$. Пусть $\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)$ — оператор* (7.23). *Пусть число r_1 определено в* (1.1).

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant (4r_1)^{-1}\delta$ *и* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathcal{K}_N(t;\varepsilon) - \mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \mathscr{C}_d''(t^{-1} + t^{-1/2}(\delta^{-2} + t^{-1})^{d/4})e^{-c_\flat t/2}. \tag{7.31}$$

Постоянная $\mathscr{C}_d''$ *зависит только от* d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от констант* $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ *из неравенства* (5.2), *от постоянной* $\widetilde{\mathfrak{C}}_1$ *из* (5.9) *и от области* $\mathcal{O}$.

Из леммы 7.14 и теоремы 7.12 выводится следующий результат.

Теорема 7.15. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.12, *причем* $d \geqslant 3$. *Пусть* $\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)$ — *оператор* (7.23). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \min\{\varepsilon_1; (4r_1)^{-1}\delta\}$ *и* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\|e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_N^0 t} - \varepsilon\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \mathscr{C}_d \varepsilon h_d(\delta;t)e^{-c_\flat t/2}, \tag{7.32}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \widetilde{\mathscr{C}}_d \varepsilon h_d(\delta;t)e^{-c_\flat t/2}. \tag{7.33}$$

Величина $h_d(\delta;t)$ *определена в* (3.41). *Постоянные* $\mathscr{C}_d$ *и* $\widetilde{\mathscr{C}}_d$ *зависят только от данных* (6.2).

Доказательства леммы 7.14 и теоремы 7.15 вынесены в приложение (см. §9). Теорему 7.15 удобно применять, если t отделено от нуля.

§8. Усреднение решений второй начально-краевой задачи

В этом параграфе результаты §7 применяются к усреднению решений второй начально-краевой задачи для параболических систем с быстро осциллирующими коэффициентами.

8.1. Задача для однородного параболического уравнения. Начнем со случая однородного уравнения и неоднородного начального условия. Нас интересует поведение при малом ε обобщенного решения задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O},\ t>0, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}}^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad t>0. \end{cases} \tag{8.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $\partial_{\boldsymbol{\nu}}^\varepsilon$ обозначена конормальная производная, отвечающая оператору $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Формальное дифференциальное выражение для $\partial_{\boldsymbol{\nu}}^\varepsilon$ имеет вид $\partial_{\boldsymbol{\nu}}^\varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{x}) := b(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Решение задачи (8.1) дается формулой $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\boldsymbol{\varphi}$. Тем самым вопрос об усреднении решений сводится к вопросу об аппроксимации оператора $e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}$, изученному в §7.

Соответствующая эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O},\ t>0, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}\in\mathcal{O}, \\ \partial_{\boldsymbol{\nu}}^0 \mathbf{u}_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad t>0. \end{cases} \tag{8.2}$$

Имеем $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\boldsymbol{\varphi}$, $\mathbf{u}_0(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\boldsymbol{\varphi}$. Поэтому из теорем 7.2 и 7.3 с учетом равенства $e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}\boldsymbol{\varphi} = \mathcal{P}e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\boldsymbol{\varphi} = \mathcal{P}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$ вытекает следующий результат.

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (8.1), (8.2) *соответственно, где* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $t \geqslant 0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{12}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Обозначим $\widehat{\mathbf{u}}_0 := P_{\mathcal{O}}\mathcal{P}\mathbf{u}_0$, $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \mathcal{C}_{13}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{13}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В случае $\Lambda \in L_\infty$ на основании теоремы 7.6 получаем следующий результат.

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть выполнено условие* 2.5. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \mathcal{C}_{15}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{15}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В случае достаточно гладкой границы из теоремы 7.9 вытекает следующий результат.

Теорема 8.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1, *причем* $d \geqslant 3$. *Пусть* $\partial\mathcal{O} \in C^{d/2,1}$, *если* d *— четное, и* $\partial\mathcal{O} \in C^{(d+1)/2,1}$, *если* d *— нечетное. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \mathscr{C}_d^*(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \widetilde{\mathscr{C}}_d^*(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Специальные случаи выделяются с помощью предложения 7.11.

Предложение 8.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1.
1°. *Если* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.12), *то при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{13}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

2°. *Если* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. справедливы представления* (1.13), *то при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{p}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{15}(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\mathbf{p}_0 = g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$.

Применяя теорему 7.12, получаем аппроксимацию решений в строго внутренней подобласти.

Теорема 8.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$, *и* $\delta = \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')}$$
$$\leqslant (\mathcal{C}_{16}\delta^{-1} + \mathcal{C}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant (\widetilde{\mathcal{C}}_{16}\delta^{-1} + \widetilde{\mathcal{C}}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В случае $\Lambda \in L_\infty$ на основании теоремы 7.13 получаем следующий результат.

Теорема 8.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.5, *и пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t > 0$ *имеем*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')}$$
$$\leqslant (\mathcal{C}_{16}\delta^{-1} + \check{\mathcal{C}}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant (\widetilde{\mathcal{C}}_{16}\delta^{-1} + \widehat{\mathcal{C}}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Наконец, при $d \geqslant 3$ теорема 7.15 влечет следующий результат.

Теорема 8.7. *Пусть* $d \geqslant 3$. *В условиях теоремы* 8.5 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \min\{\varepsilon_1; (4r_1)^{-1}\delta\}$ *и* $t > 0$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \mathscr{C}_d \varepsilon h_d(\delta;t) e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \widetilde{\mathscr{C}}_d \varepsilon h_d(\delta;t) e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Величина $h_d(\delta;t)$ *определена в* (3.41).

8.2. Задача для неоднородного параболического уравнения. Аппроксимация решений в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ **и в** $\mathfrak{H}_p(T)$**.** Рассмотрим теперь задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad 0 < t < T, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ \partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.3}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_p(T) = L_p((0,T); L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n))$, $0 < T \leqslant \infty$, при некотором $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Соответствующая эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad 0 < t < T, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \\ \partial^0_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{u}_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad 0 < t < T. \end{cases} \tag{8.4}$$

Имеем $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}t}\boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_{N,\varepsilon}(t-\widetilde{t})}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}$. Аналогично, $\mathbf{u}_0(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^t e^{-\mathcal{A}_N^0(t-\widetilde{t})}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}$. Действуя по аналогии с доказательством теоремы 4.8, с помощью теоремы 7.2 получаем следующий результат.

Теорема 8.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (8.3), *где* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_p(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $1 < p \leqslant \infty$. *Пусть* $\mathbf{u}_0$ *— решение эффективной задачи* (8.4). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $0 < t < T$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)-\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{12}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\mathfrak{c}_p\theta(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.$$

Величина $\theta(\varepsilon,p)$ *определена в* (4.10). *Постоянная* $\mathfrak{c}_p$ *зависит лишь от данных* (6.2) *и от* p.

Доказательство следующего результата аналогично доказательству теоремы 4.9 и опирается на теорему 7.2.

Теорема 8.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (8.3), *и пусть* $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (8.4) *при* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_p(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $1 \leqslant p < \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{\mathfrak{H}_p(T)} \leqslant \mathfrak{c}_{p'}\Theta(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_{18}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Здесь $\mathcal{C}_{18} = \mathcal{C}_{12}(2\pi)^{1/2}c_\flat^{-1/2}$. *Величина* $\Theta(\varepsilon,p)$ *определена в* (4.17).

8.3. Аппроксимация решений в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$**.** Установим теперь аппроксимацию решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (8.3) в классе Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Основываясь на теореме 7.3 и предложении 7.5 и действуя по аналогии с доказательством теоремы 4.11, получаем следующий результат.

Теорема 8.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (8.3), *где* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_p(T)$, $0 < T \leqslant \infty$, *при некотором* $2 < p \leqslant \infty$. *Пусть* $\mathbf{u}_0$ *— решение эффективной задачи* (8.4). *Считая* $t \geqslant \varepsilon^2$, *обозначим*

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t) := e^{-\mathcal{A}_N^0\varepsilon^2}\mathbf{u}_0(\cdot,t-\varepsilon^2) = e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\boldsymbol{\varphi}(\cdot) + \int_0^{t-\varepsilon^2} e^{-\mathcal{A}_N^0(t-\widetilde{t})}\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}. \tag{8.5}$$

Положим $\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t) := P_\mathcal{O}\mathcal{P}\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)$, $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant 2\mathcal{C}_{13}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \check{\mathfrak{c}}_p\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}, \\
&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant 2\widetilde{\mathcal{C}}_{13}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{\mathfrak{c}}_p\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.
\end{aligned}$$

Величина $\rho(\varepsilon,p)$ *определена в* (4.24). *Постоянные* $\check{\mathfrak{c}}_p$ *и* $\widetilde{\mathfrak{c}}_p$ *зависят лишь от данных* (6.2) *и от* p.

В случае $\Lambda \in L_\infty$ на основании теоремы 7.6 и предложения 7.5 получается следующий результат, аналогичный теореме 4.12.

Теорема 8.11. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.10. *Предположим, что матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant 2\mathcal{C}_{15}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathfrak{c}'_p\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}, \\
&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant 2\widetilde{\mathcal{C}}_{15}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathfrak{c}''_p\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathfrak{c}'_p$ *и* $\mathfrak{c}''_p$ *зависят лишь от данных* (6.2), *от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и от* p.

В случае дополнительной гладкости границы на основании теоремы 7.9 получаем следующий результат (ср. предложение 4.13).

Предложение 8.12. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.10, *причем* $d = 3$, $p = \infty$. *Предположим, что* $\partial\mathcal{O} \in C^{2,1}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant 2\mathscr{C}_3^*(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-5/4})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathfrak{c}'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_\infty(t)}, \\
&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant 2\widetilde{\mathscr{C}}_3^*(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-5/4})e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{\mathfrak{c}}'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_\infty(t)}.
\end{aligned}$$

Постоянные $\mathfrak{c}'$ *и* $\widetilde{\mathfrak{c}}'$ *зависят лишь от данных* (6.2).

Выделим специальные случаи. Следующее утверждение устанавливается аналогично предложению 4.14 с помощью предложений 7.5, 7.11 и теоремы 8.10.

Предложение 8.13. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.10.
1°. *Если* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.12), *то при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant 2\mathcal{C}_{13}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + \check{\mathfrak{c}}_p\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}(\cdot,t)\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.
\end{aligned}$$

2°. *Если* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. справедливы представления* (1.13), *то при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{p}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\widetilde{\mathcal{C}}_{15}\varepsilon^{1/2}t^{-3/4}e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathfrak{c}'''_p\rho(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)},$$

где $\mathbf{p}_0 = g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$. *Постоянная* $\mathfrak{c}'''_p$ *зависит лишь от данных* (6.2) *и от* p.

8.4. Аппроксимация решений в строго внутренней подобласти. Аппроксимация решений в строго внутренней подобласти может быть получена на основании теоремы 7.12 (ср. теорему 4.15).

Теорема 8.14. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.10. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$, *и пусть* $\delta = \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')}$$
$$\leqslant (\mathcal{C}_{16}\delta^{-1} + \mathcal{C}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\mathrm{k}_p\delta^{-1} + \mathrm{k}'_p)\sigma(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')}$$
$$\leqslant (\widetilde{\mathcal{C}}_{16}\delta^{-1} + \widetilde{\mathcal{C}}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\widetilde{\mathrm{k}}_p\delta^{-1} + \widetilde{\mathrm{k}}'_p)\sigma(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.$$

Величина $\sigma(\varepsilon,p)$ *определена в* (4.39). *Постоянные* k_p, k'_p, $\widetilde{\mathrm{k}}_p$ *и* $\widetilde{\mathrm{k}}'_p$ *зависят лишь от данных* (6.2) *и от* p.

В случае $\Lambda \in L_\infty$ на основании теоремы 7.13 получаем следующий результат, аналогичный теореме 4.16.

Теорема 8.15. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.14, *и пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 2.5. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O}')}$$
$$\leqslant (\mathcal{C}_{16}\delta^{-1} + \check{\mathcal{C}}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\mathrm{k}_p\delta^{-1} + \check{\mathrm{k}}'_p)\sigma(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O}')}$$
$$\leqslant (\widetilde{\mathcal{C}}_{16}\delta^{-1} + \widehat{\mathcal{C}}_{17})\varepsilon t^{-1} e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\widetilde{\mathrm{k}}_p\delta^{-1} + \widehat{\mathrm{k}}'_p)\sigma(\varepsilon,p)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(t)}.$$

Постоянные k_p *и* $\widetilde{\mathrm{k}}_p$ — *те же, что в теореме* 8.14. *Постоянные* $\check{\mathrm{k}}'_p$ *и* $\widehat{\mathrm{k}}'_p$ *зависят лишь от данных* (6.2), *от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и от* p.

8.5. Аппроксимация решений в $\mathfrak{G}_p(T) = L_p((0,T); H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n))$. Действуя по аналогии с доказательством теоремы 4.18, нетрудно проверить следующий результат.

Теорема 8.16. *Пусть выполнены условия теоремы* 6.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{u}_0$ — *решения задач* (8.3) *и* (8.4) *соответственно, где* $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in \mathfrak{H}_p(T)$, $0 < T \leqslant \infty$. *Пусть при* $\varepsilon^2 \leqslant t < T$ *функция* $\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)$ *определена в* (8.5). *При* $0 \leqslant t < \varepsilon^2$ *положим* $\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t) = 0$. *Обозначим* $\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon := P_{\mathcal{O}}\mathcal{P}\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot,t)$. *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$.
1°. *Пусть* $1 \leqslant p < 2$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant \kappa'_p\alpha(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_{19}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \kappa''_p\alpha(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{\mathcal{C}}_{19}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Величина $\alpha(\varepsilon,p)$ *определена в* (4.41). *Постоянные* $\mathcal{C}_{19}$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_{19}$ *зависят лишь от данных* (6.2). *Постоянные* κ'_p *и* κ''_p *зависят от тех же параметров и от* p.

2°. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant \mathcal{C}_{19}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{19}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

При дополнительном условии $\Lambda \in L_\infty$ справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 4.19.

Теорема 8.17. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.16 *и условие* 2.5.
1°. *Пусть* $1 \leqslant p < 2$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant \mathfrak{k}_p \alpha(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_{20}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{\mathfrak{k}}_p \alpha(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{\mathcal{C}}_{20}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Постоянные $\mathcal{C}_{20}$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_{20}$ *зависят лишь от данных* (6.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$. *Постоянные* $\mathfrak{k}_p$ *и* $\widetilde{\mathfrak{k}}_p$ *зависят от тех же параметров и от* p.
2°. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant \mathcal{C}_{20}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{20}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Следующий результат аналогичен предложению 4.20 и выводится из теоремы 7.9.

Предложение 8.18. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.16, *причем* $d = 3$. *Предположим, что* $\partial\mathcal{O} \in C^{2,1}$.
1°. *Пусть* $1 \leqslant p < 4/3$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant \mathfrak{k}'_p \varepsilon^{2/p-3/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_{21}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{\mathfrak{k}}'_p \varepsilon^{2/p-3/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \widetilde{\mathcal{C}}_{21}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Постоянные $\mathcal{C}_{21}$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}_{21}$ *зависят лишь от данных* (6.2). *Постоянные* $\mathfrak{k}'_p$ *и* $\widetilde{\mathfrak{k}}'_p$ *зависят от тех же параметров и от* p.
2°. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{\mathfrak{G}_p(T)} \leqslant \mathcal{C}_{21}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}))} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_{21}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

8.6. Аппроксимация решений в $L_p((0,T);H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n))$. Следующий результат аналогичен теореме 4.21 и проверяется с помощью теоремы 7.12 и предложения 7.5.

Теорема 8.19. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.16. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$, *и* $\delta = \operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$.

1°. *Пусть* $1 \leqslant p < 2$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);H^1(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (\mathrm{k}_{p'}\delta^{-1} + \mathrm{k}'_{p'})\tau(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\mathcal{C}'_{22}\delta^{-1} + \mathcal{C}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (\widetilde{\mathrm{k}}_{p'}\delta^{-1} + \widetilde{\mathrm{k}}'_{p'})\tau(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\widetilde{\mathcal{C}}'_{22}\delta^{-1} + \widetilde{\mathcal{C}}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Величина $\tau(\varepsilon,p)$ *определена в* (4.54).

2°. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);H^1(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (\mathcal{C}'_{22}\delta^{-1} + \mathcal{C}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widehat{\mathbf{w}}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}'))} \leqslant (\widetilde{\mathcal{C}}'_{22}\delta^{-1} + \widetilde{\mathcal{C}}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Постоянные $\mathcal{C}'_{22}$, $\mathcal{C}''_{22}$, $\widetilde{\mathcal{C}}'_{22}$ *и* $\widetilde{\mathcal{C}}''_{22}$ *зависят лишь от исходных данных* (6.2). *Постоянные* $\mathrm{k}_{p'}$, $\mathrm{k}'_{p'}$, $\widetilde{\mathrm{k}}_{p'}$, $\widetilde{\mathrm{k}}'_{p'}$ — *те же, что и в теореме* 8.14 (*с заменой* p *на* p').

Наконец, в случае $\Lambda \in L_\infty$ с помощью теоремы 7.13 и предложения 7.5 получаем следующий результат, аналогичный теореме 4.22.

Теорема 8.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.19, *и пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 2.5.

1°. *Пусть* $1 \leqslant p < 2$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);H^1(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (\mathrm{k}_{p'}\delta^{-1} + \check{\mathrm{k}}'_{p'})\tau(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\mathcal{C}'_{22}\delta^{-1} + \check{\mathcal{C}}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (\widetilde{\mathrm{k}}_{p'}\delta^{-1} + \widehat{\mathrm{k}}'_{p'})\tau(\varepsilon,p)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + (\widetilde{\mathcal{C}}'_{22}\delta^{-1} + \widehat{\mathcal{C}}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

2°. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);H^1(\mathcal{O}'))}$$
$$\leqslant (\mathcal{C}'_{22}\delta^{-1} + \check{\mathcal{C}}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)},$$
$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_p((0,T);L_2(\mathcal{O}'))} \leqslant (\widetilde{\mathcal{C}}'_{22}\delta^{-1} + \widehat{\mathcal{C}}''_{22})\varepsilon(|\ln\varepsilon| + 1)\|\mathbf{F}\|_{\mathfrak{H}_p(T)}.$$

Постоянные $\mathcal{C}'_{22}$, $\widetilde{\mathcal{C}}'_{22}$ — *те же, что и в теореме* 8.19. *Постоянные* $\check{\mathcal{C}}''_{22}$ *и* $\widehat{\mathcal{C}}''_{22}$ *зависят лишь от исходных данных* (6.2) *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$. *Постоянные* $\mathrm{k}_{p'}$, $\check{\mathrm{k}}'_{p'}$, $\widetilde{\mathrm{k}}_{p'}$, $\widehat{\mathrm{k}}'_{p'}$ — *те же, что и в теореме* 8.15 (*с заменой* p *на* p').

Приложение

§9. Устранение сглаживающего оператора

В §9 мы рассматриваем случай $d \geqslant 3$ и доказываем утверждения об устранении сглаживающего оператора S_ε в корректоре в случае достаточно гладкой границы (лемма 3.8 и теорема 3.9 в случае условия Дирихле, лемма 7.8 и теорема 7.9 в случае условия Неймана) и в строго внутренней подобласти (лемма 3.15 и теорема 3.16 в случае условия Дирихле, лемма 7.14 и теорема 7.15 в случае условия Неймана).

9.1. Мультипликаторное свойство матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$.

Лемма 9.1. *Пусть матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи* (1.8). *Пусть $d \geqslant 3$ и $l = d/2$.*
1°. *При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ для $\mathbf{v} \in H^{l-1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ справедливы включение $\Lambda^\varepsilon \mathbf{v} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и оценка*

$$\|\Lambda^\varepsilon \mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(0)} \|\mathbf{v}\|^2_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{9.1}$$

2°. *При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ для $\mathbf{v} \in H^{l}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ справедливы включение $\Lambda^\varepsilon \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и оценка*

$$\|\Lambda^\varepsilon \mathbf{v}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(1)} \varepsilon^{-1} \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C^{(2)} \|\mathbf{v}\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}. \tag{9.2}$$

Постоянные $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ зависят от m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Доказательство. Достаточно проверить (9.1) и (9.2) при $\mathbf{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. Подставляя $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y}$, $\varepsilon^{d/2}\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{y})$, имеем

$$\begin{aligned}\|\Lambda^\varepsilon \mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})|^2 |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(\mathbf{y})|^2 |\mathbf{V}(\mathbf{y})|^2\, d\mathbf{y} \\ &= \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} \int_{\Omega+\mathbf{a}} |\Lambda(\mathbf{y})|^2 |\mathbf{V}(\mathbf{y})|^2\, d\mathbf{y} \leqslant \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} \|\Lambda\|^2_{L_{2r}(\Omega)} \|\mathbf{V}\|^2_{L_{2r'}(\Omega+\mathbf{a})},\end{aligned} \tag{9.3}$$

где $r^{-1} + (r')^{-1} = 1$. Число r выбираем таким, чтобы имело место непрерывное вложение $H^1(\Omega) \subset L_{2r}(\Omega)$, то есть $r = d(d-2)^{-1}$. Тогда

$$\|\Lambda\|^2_{L_{2r}(\Omega)} \leqslant c_\Omega \|\Lambda\|^2_{H^1(\Omega)}, \tag{9.4}$$

где постоянная c_Ω зависит только от размерности d и решетки Γ. При сделанном выборе r имеем $2r' = d$. В силу непрерывности вложения $H^{l-1}(\Omega) \subset L_d(\Omega)$ выполнено

$$\|\mathbf{V}\|^2_{L_d(\Omega+\mathbf{a})} \leqslant c'_\Omega \|\mathbf{V}\|^2_{H^{l-1}(\Omega+\mathbf{a})}, \tag{9.5}$$

где постоянная c'_Ω зависит только от размерности d и решетки Γ. Теперь из (9.3)–(9.5) вытекает оценка

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})|^2 |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant c_\Omega c'_\Omega \|\Lambda\|^2_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{V}\|^2_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}. \tag{9.6}$$

Очевидно, что при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполнено неравенство $\|\mathbf{V}\|_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\mathbf{v}\|_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}$. Отсюда и из (9.6) с учетом (1.18) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})|^2 |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant c_\Omega c'_\Omega M^2 \|\mathbf{v}\|^2_{H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m), \tag{9.7}$$

что доказывает (9.1) с постоянной $C^{(0)} = c_\Omega c'_\Omega M^2$.

Далее, в силу леммы 1.5 имеем

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{D}(\Lambda^\varepsilon \mathbf{v})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2\varepsilon^{-2}\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} + 2\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \\ &\leqslant 2\beta_1\varepsilon^{-2}\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} + 2(1+\beta_2)\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{9.8}$$

Из (9.7) (с заменой $\mathbf{v}$ на производные $\partial_j \mathbf{v}$) следует оценка

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |\mathbf{D}\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant c_\Omega c'_\Omega M^2 \|\mathbf{v}\|^2_{H^l(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{v} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m). \tag{9.9}$$

В итоге из (9.7)–(9.9) вытекает (9.2) с постоянными $C^{(1)} = (2\beta_1)^{1/2}$ и $C^{(2)} = M(3+2\beta_2)^{1/2}(c_\Omega c'_\Omega)^{1/2}$. $\square$

Используя оператор продолжения $P_\mathcal{O}$, удовлетворяющий оценкам (2.5), из леммы 9.1(1°) выводим следующее утверждение.

Следствие 9.2. *Пусть выполнены условия леммы* 9.1. *Тогда оператор* $[\Lambda^\varepsilon]$ *умножения на матрицу-функцию* $\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})$ *непрерывно переводит* $H^{l-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$ *в* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, *причем*

$$\|[\Lambda^\varepsilon]\|_{H^{l-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant (C^{(0)})^{1/2} C_\mathcal{O}^{(l-1)}.$$

9.2. Доказательство леммы 3.8. Пусть выполнены условия леммы 3.8. Пусть $\mathbf{u}_0(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$, где $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Положим $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) = P_\mathcal{O}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$. В соответствии с (3.18) и (3.27) имеем $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} = \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0$, $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} = \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$. Требуется оценить величину

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O})} &= \|\Lambda^\varepsilon\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \|\Lambda^\varepsilon\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{9.10}$$

Отсюда в силу леммы 9.1(2°) получаем

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant C^{(1)}\varepsilon^{-1}\|\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad+ C^{(2)}\|\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}, \quad l = d/2. \end{aligned} \tag{9.11}$$

Первый член в правой части (9.11) оценим с помощью леммы 1.8 и (1.4), (2.5), (3.5):

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{-1}\|\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant r_1\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant r_1\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant r_1\alpha_1^{1/2}C_\mathcal{O}^{(2)}\|\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant C^{(3)}t^{-1}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{9.12}$$

где $C^{(3)} = r_1\alpha_1^{1/2}C_\mathcal{O}^{(2)}\widehat{c}$.

Для оценки второго члена в правой части (9.11) применим неравенство $\|S_\varepsilon\|_{H^l(\mathbb{R}^d)\to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1$ и (1.4):

$$\begin{aligned} &\|\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant 2\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{9.13}$$

В силу (2.5) и леммы 3.7 имеем

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^{l+1}(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C_{\mathcal{O}}^{(l+1)}\|\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^{l+1}(\mathcal{O})} \\ &\leqslant C_{\mathcal{O}}^{(l+1)}\widehat{\mathrm{C}}_{l+1}t^{-(l+1)/2}e^{-c_*t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Из (9.13) и (9.14) следует оценка

$$\|\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(4)}t^{-(l+1)/2}e^{-c_*t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{9.15}$$

где $C^{(4)} = 2\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(l+1)}\widehat{\mathrm{C}}_{l+1}$.

В итоге соотношения (9.11), (9.12), (9.15) приводят к неравенству

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant \left(C^{(1)}C^{(3)}t^{-1} + C^{(2)}C^{(4)}t^{-(l+1)/2}\right)e^{-c_*t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned}$$

что доказывает (3.33) с постоянной $\check{\mathrm{C}}_d = \max\{C^{(1)}C^{(3)}; C^{(2)}C^{(4)}\}$. Это завершает доказательство леммы 3.8.

9.3. Доказательство теоремы 3.9. Неравенство (3.34) непосредственно следует из (3.19) и (3.33). При этом $\mathrm{C}_d^* = C_{13} + \check{\mathrm{C}}_d$.

Проверим (3.35). Из (3.34) с учетом (1.2), (1.5) следует оценка

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\left(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\right)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathrm{C}_d^*(\varepsilon^{1/2}t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1} + \varepsilon t^{-d/4-1/2})e^{-c_*t/2}. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Согласно (1.2) имеем

$$\begin{aligned} &g^\varepsilon b(\mathbf{D})\left(\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\right) \\ &= g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_D^0 t} + \varepsilon\sum_{i,j=1}^d g^\varepsilon b_i\Lambda^\varepsilon b_j D_i D_j e^{-\mathcal{A}_D^0 t}. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Норма второго слагаемого в правой части (9.17) оценивается с помощью (1.5), следствия 9.2 и леммы 3.7:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\left\|\sum_{i,j=1}^d g^\varepsilon b_i\Lambda^\varepsilon b_j D_i D_j e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}\alpha_1 d(C^{(0)})^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(l-1)}\|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{l+1}(\mathcal{O})} \\ &\leqslant C^{(5)}\varepsilon t^{-(l+1)/2}e^{-c_*t/2}, \end{aligned} \tag{9.18}$$

где $l = d/2$ и $C^{(5)} = \|g\|_{L_\infty}\alpha_1 d(C^{(0)})^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(l-1)}\widehat{\mathrm{C}}_{l+1}$.

Теперь из (9.16)–(9.18) с учетом (1.9) вытекает оценка (3.35) с постоянной $\widetilde{\mathrm{C}}_d^* = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathrm{C}_d^* + C^{(5)}$. Это завершает доказательство теоремы 3.9.

9.4. Доказательство леммы 7.8. Лемму 7.8 докажем по аналогии с леммой 3.8. Пусть $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $\check{\boldsymbol{\varphi}} = \mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}$. Положим $\mathbf{u}_0(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\check{\boldsymbol{\varphi}}(\cdot)$, $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) = P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$. В соответствии с (7.12) и (7.23) имеем $\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} = \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0$, $\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} = \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$. Мы учли соотношение $b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_N^0 t} = b(\mathbf{D})e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P}$.

Аналогично (9.10) получаем

$$\|\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|\Lambda^\varepsilon\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Дальнейшие рассмотрения проводятся по аналогии с (9.11)–(9.15); вместо (3.5) используем (7.5), вместо леммы 3.7 — лемму 7.7. Это приводит к оценке

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \left(C^{(1)}C_N^{(3)}t^{-1} + C^{(2)}C_N^{(4)}t^{-(l+1)/2}\right)e^{-c_\flat t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})},
\end{aligned}$$

где $C_N^{(3)} = r_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(2)}\check{c}^\circ$, $C_N^{(4)} = 2\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(l+1)}\widehat{\mathscr{C}}_{l+1}$. Отсюда вытекает (7.26) с постоянной $\check{\mathscr{C}}_d = \max\{C^{(1)}C_N^{(3)}; C^{(2)}C_N^{(4)}\}$. Лемма 7.8 доказана.

9.5. Доказательство теоремы 7.9. Рассуждения аналогичны доказательству теоремы 3.9. Неравенство (7.27) непосредственно следует из (7.13) и (7.26). При этом $\mathscr{C}_d^* = \mathcal{C}_{13} + \check{\mathscr{C}}_d$.

Неравенство (7.28) выводится из (7.27) по аналогии с (9.16)–(9.18). Нужно дополнительно учесть тождество

$$\varepsilon\sum_{i,j=1}^d g^\varepsilon b_i\Lambda^\varepsilon b_j D_i D_j e^{-\mathcal{A}_N^0 t} = \varepsilon\sum_{i,j=1}^d g^\varepsilon b_i\Lambda^\varepsilon b_j D_i D_j e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\mathcal{P} \tag{9.19}$$

и оценить этот член с помощью следствия 9.2 и леммы 7.7. В итоге получаем (7.28) с постоянной $\widetilde{\mathscr{C}}_d^* = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathscr{C}_d^* + \|g\|_{L_\infty}\alpha_1 d(C^{(0)})^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(l-1)}\widehat{\mathscr{C}}_{l+1}$. Это завершает доказательство теоремы 7.9.

9.6. Одно свойство оператора S_ε. Перейдем к рассмотрениям, связанным с оценками в строго внутренней подобласти. Начнем с одного простого свойства оператора S_ε.

Пусть $\mathcal{O}'$ — строго внутренняя подобласть области $\mathcal{O}$, и пусть $\delta = \operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$. Введем обозначения

$$\mathcal{O}'' = \{\mathbf{x}\in\mathcal{O}:\ \operatorname{dist}\{\mathbf{x};\partial\mathcal{O}\} > \delta/2\},\quad \mathcal{O}''' = \{\mathbf{x}\in\mathcal{O}:\ \operatorname{dist}\{\mathbf{x};\partial\mathcal{O}\} > \delta/4\}.$$

Лемма 9.3. *Пусть S_ε — оператор* (1.19). *Пусть число r_1 определено в* (1.1). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant (4r_1)^{-1}\delta$ для любой функции $\mathbf{v} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, $s \in \mathbb{Z}_+$, справедливо неравенство*

$$\|S_\varepsilon\mathbf{v}\|_{H^s(\mathcal{O}'')} \leqslant \|\mathbf{v}\|_{H^s(\mathcal{O}''')}.$$

Доказательство. В соответствии с (1.19) имеем

$$\begin{aligned}\|S_\varepsilon \mathbf{v}\|^2_{H^s(\mathcal{O}'')} &= |\Omega|^{-2} \sum_{|\alpha|\leqslant s} \int_{\mathcal{O}''} d\mathbf{x} \left| \int_\Omega \mathbf{D}^\alpha \mathbf{v}(\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{z})\, d\mathbf{z}\right|^2 \\ &\leqslant |\Omega|^{-1} \sum_{|\alpha|\leqslant s} \int_{\mathcal{O}''} d\mathbf{x} \int_\Omega |\mathbf{D}^\alpha \mathbf{v}(\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{z})|^2\, d\mathbf{z}.\end{aligned} \tag{9.20}$$

Поскольку $0 < \varepsilon r_1 \leqslant \delta/4$, при $\mathbf{x} \in \mathcal{O}''$ и $\mathbf{z} \in \Omega$ выполнено $\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z} \in \mathcal{O}'''$. Тогда, меняя порядок интегрирования в (9.20), получаем

$$\|S_\varepsilon \mathbf{v}\|^2_{H^s(\mathcal{O}'')} \leqslant \sum_{|\alpha|\leqslant s} \int_{\mathcal{O}'''} d\mathbf{x}\, |\mathbf{D}^\alpha \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\ d\mathbf{x} = \|\mathbf{v}\|^2_{H^s(\mathcal{O}''')}.$$

$\square$

9.7. Срезка $\chi(\mathbf{x})$. Фиксируем гладкую срезку $\chi(\mathbf{x})$ такую, что

$$\begin{aligned}&\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad 0 \leqslant \chi(\mathbf{x}) \leqslant 1; \quad \chi(\mathbf{x}) = 1,\ \mathbf{x} \in \mathcal{O}'; \\ &\operatorname{supp}\chi \subset \mathcal{O}''; \quad |\mathbf{D}^\alpha \chi(\mathbf{x})| \leqslant \kappa_s \delta^{-s},\ |\alpha| = s,\ \forall s \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{9.21}$$

Постоянные κ_s зависят только от d, s и от области $\mathcal{O}$.

Лемма 9.4. *Пусть функция $\chi(\mathbf{x})$ подчинена условиям* (9.21). *Пусть $k \in \mathbb{Z}_+$.*
1°. *Для любой функции $\mathbf{v} \in H^k(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ справедливо неравенство*

$$\|\chi \mathbf{v}\|_{H^k(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_k^{(6)} \sum_{s=0}^k \delta^{-(k-s)} \|\mathbf{v}\|_{H^s(\mathcal{O}'')}, \tag{9.22}$$

где постоянная $C_k^{(6)}$ зависит лишь от d, k и от области $\mathcal{O}$.
2°. *Для любой функции $\mathbf{v} \in H^{k+1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ справедливо неравенство*

$$\begin{aligned}\|\chi \mathbf{v}\|_{H^{k+1/2}(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C_{k+1/2}^{(6)} \left(\sum_{s=0}^{k+1} \delta^{-(k+1-s)} \|\mathbf{v}\|_{H^s(\mathcal{O}'')}\right)^{1/2} \\ &\times \left(\sum_{\sigma=0}^{k} \delta^{-(k-\sigma)} \|\mathbf{v}\|_{H^\sigma(\mathcal{O}'')}\right)^{1/2},\end{aligned} \tag{9.23}$$

где постоянная $C_{k+1/2}^{(6)}$ зависит лишь от d, k и от области $\mathcal{O}$.

Доказательство. Неравенство (9.22) вытекает из формулы Лейбница для производных произведения $\chi\mathbf{v}$ и из оценок производных срезки χ (см. (9.21)). Для проверки (9.23) нужно дополнительно учесть неравенство

$$\|\mathbf{w}\|^2_{H^{k+1/2}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\mathbf{w}\|_{H^{k+1}(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{w}\|_{H^k(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{w} \in H^{k+1}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m).$$

$\square$

9.8. Доказательство леммы 3.15. Пусть выполнены условия леммы 3.15. Пусть $\mathbf{u}_0(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\boldsymbol{\varphi}(\cdot)$, где $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. С учетом (1.15) и (3.8) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant c_0^{-1/2}\|(\mathcal{A}_D^0)^{1/2}e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant c_0^{-1/2}t^{-1/2}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{9.24}$$

В силу (3.5)

$$\|\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}t^{-1}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.25}$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0$. В соответствии с (3.18) и (3.27) имеем $\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} = \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0$, $\mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} = \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$.

Требуется оценить величину

$$\|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \|\Lambda^\varepsilon\chi\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{9.26}$$

В силу леммы 9.1(2°)

$$\begin{aligned} &\|\Lambda^\varepsilon\chi\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant C^{(1)}\varepsilon^{-1}\|\chi\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad+ C^{(2)}\|\chi\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}, \quad l = d/2. \end{aligned} \tag{9.27}$$

Первый член в правой части (9.27) оценим с помощью леммы 1.8 и (1.4), (2.5), (9.25). Аналогично (9.12) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1}\|\chi\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \varepsilon^{-1}\|\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C^{(3)}t^{-1}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{9.28}$$

Перейдем к рассмотрению второго члена в правой части (9.27). Очевидно,

$$\begin{aligned} \|\chi\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|\chi\left(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \|\chi b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{9.29}$$

Для оценки второго члена справа в (9.29) применим лемму 9.4 и (1.2), (1.5). В случае целого $l = d/2$ (т. е. четной размерности d) имеем

$$\|\chi b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_l^{(6)}(d\alpha_1)^{1/2}\sum_{s=0}^{l}\delta^{-(l-s)}\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^s(\mathcal{O}'')}. \tag{9.30}$$

В случае полуцелого $l = d/2 = k + 1/2$ (т. е. нечетной размерности d) имеем

$$\|\chi b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_l^{(6)}(d\alpha_1)^{1/2}\left(\sum_{s=0}^{k+1}\delta^{-(k+1-s)}\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^s(\mathcal{O}'')}\right)^{1/2} \times\left(\sum_{\sigma=0}^{k}\delta^{-(k-\sigma)}\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^\sigma(\mathcal{O}'')}\right)^{1/2}. \tag{9.31}$$

Нормы $\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$ в $L_2(\mathcal{O})$ и $H^1(\mathcal{O})$ оценены в (9.24) и (9.25). В силу (3.37) (с заменой $\mathcal{O}'$ на $\mathcal{O}''$)

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^s(\mathcal{O}'')} \leqslant \mathrm{C}'_{s+1}2^s t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{s/2}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad s \geqslant 2. \tag{9.32}$$

Используя (9.24), (9.25), (9.30)–(9.32), приходим к оценке

$$\|\chi b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(7)}t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.33}$$

Постоянная $C^{(7)}$ зависит от d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$.

Для оценки первого члена справа в (9.29) применим леммы 9.4 и 9.3. Считаем, что $0 < \varepsilon \leqslant (4r_1)^{-1}\delta$. Учитывая также (1.2) и (1.5), в случае целого l имеем

$$\begin{aligned}\|\chi\left(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C_l^{(6)}\sum_{s=0}^{l}\delta^{-(l-s)}\|(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)(\cdot,t)\|_{H^s(\mathcal{O}'')}\\ &\leqslant C_l^{(6)}\sum_{s=0}^{l}\delta^{-(l-s)}\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^s(\mathcal{O}''')}\\ &\leqslant C_l^{(6)}(d\alpha_1)^{1/2}\sum_{s=0}^{l}\delta^{-(l-s)}\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^s(\mathcal{O}''')}.\end{aligned} \tag{9.34}$$

Нормы $\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$ в $L_2(\mathcal{O})$ и $H^1(\mathcal{O})$ оценены в (9.24) и (9.25). В силу (3.37) (с заменой $\mathcal{O}'$ на $\mathcal{O}'''$)

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^s(\mathcal{O}''')} \leqslant \mathrm{C}'_{s+1}4^s t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{s/2}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad s \geqslant 2. \tag{9.35}$$

Из (9.24), (9.25), (9.34) и (9.35) вытекает оценка

$$\|\chi\left(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(8)}t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.36}$$

Постоянная $C^{(8)}$ зависит от d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. Случай полуцелого l рассматривается аналогично.

В итоге соотношения (9.26)–(9.29), (9.33) и (9.36) приводят к оценке

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}_D(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_D^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O}')} &\leqslant C^{(1)}C^{(3)}t^{-1}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ C^{(2)}(C^{(7)}+C^{(8)})t^{-1/2}(\delta^{-2}+t^{-1})^{d/4}e^{-c_* t/2}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{9.37}$$

Это влечет (3.38) с постоянной $\mathrm{C}_d'' = \max\{C^{(1)}C^{(3)}; C^{(2)}(C^{(7)} + C^{(8)})\}$ и завершает доказательство леммы 3.15.

9.9. Доказательство теоремы 3.16. Неравенство (3.39) непосредственно следует из (3.36) и (3.38); при этом $\mathrm{C}_d = \max\{C_{16}; C_{17}\} + \mathrm{C}_d''$.

Проверим (3.40). Из (3.39) с учетом (1.2), (1.5) следует оценка

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \left(e^{-\mathcal{A}_{D,\varepsilon}t} - e^{-\mathcal{A}_D^0 t} - \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\right) \|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathrm{C}_d\varepsilon h_d(\delta;t)e^{-c_* t/2}. \end{aligned} \tag{9.38}$$

Воспользуемся тождеством (9.17). Норма второго слагаемого в правой части (9.17) оценивается с помощью (1.5) и леммы 9.1(1°):

$$\begin{aligned} &\varepsilon\Bigl\|\sum_{i,j=1}^d g^\varepsilon b_i \Lambda^\varepsilon b_j D_i D_j e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\Bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \\ &\leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\sum_{i,j=1}^d \|\Lambda^\varepsilon b_j \chi D_i D_j e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}\alpha_1 (C^{(0)})^{1/2}\sum_{i,j=1}^d \|\chi D_i D_j e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{l-1}(\mathbb{R}^d)}, \quad l = d/2. \end{aligned} \tag{9.39}$$

Далее применим лемму 9.4. В случае целого l получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^d \|\chi D_i D_j e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{l-1}(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant dC_{l-1}^{(6)}\sum_{s=0}^{l-1}\delta^{-(l-1-s)}\|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{s+2}(\mathcal{O}'')}. \end{aligned} \tag{9.40}$$

Норма $\|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}$ оценена в (3.5). При $s \geqslant 1$ в силу (3.37) (с заменой $\mathcal{O}'$ на $\mathcal{O}''$) имеем

$$\|e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{s+2}(\mathcal{O}'')} \leqslant \mathrm{C}_{s+2}' 2^{s+1} t^{-1/2}(\delta^{-2} + t^{-1})^{(s+1)/2}e^{-c_* t/2}. \tag{9.41}$$

Из (9.39)–(9.41) и (3.5) вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\varepsilon\Bigl\|\sum_{i,j=1}^d g^\varepsilon b_i \Lambda^\varepsilon b_j D_i D_j e^{-\mathcal{A}_D^0 t}\Bigr\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')} \\ &\leqslant C^{(9)}\varepsilon t^{-1/2}(\delta^{-2} + t^{-1})^{d/4}e^{-c_* t/2}, \end{aligned} \tag{9.42}$$

где постоянная $C^{(9)}$ зависит лишь от d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от области $\mathcal{O}$. В случае полуцелого l неравенство (9.42) проверяется аналогично с использованием леммы 9.4(2°).

В итоге соотношения (9.17), (9.38) и (9.42) с учетом (1.9) влекут (3.40) с постоянной $\widetilde{\mathrm{C}}_d = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathrm{C}_d + C^{(9)}$. Это завершает доказательство теоремы 3.16.

9.10. Доказательство леммы 7.14. Рассуждения аналогичны доказательству леммы 3.15. Как и в п. 9.4, пусть $\boldsymbol{\varphi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $\check{\boldsymbol{\varphi}} = \mathcal{P}\boldsymbol{\varphi}$. Положим $\mathbf{u}_0(\cdot,t) = e^{-\mathcal{A}_N^0 t}\check{\boldsymbol{\varphi}}(\cdot)$, $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t) = P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0(\cdot,t)$. В соответствии с (7.12) и (7.23) имеем $\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} = \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0$, $\mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} = \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0$.

Аналогично (9.26) получаем

$$\|\mathcal{K}_N(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi} - \mathcal{K}_N^0(t;\varepsilon)\boldsymbol{\varphi}\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \|\Lambda^\varepsilon \chi\left((S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)(\cdot,t)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны (9.27)–(9.37); следует использовать оценки (7.4), (7.5) и (7.30). Это приводит к (7.31).

9.11. Доказательство теоремы 7.15. Рассуждения аналогичны доказательству теоремы 3.16. Неравенство (7.32) непосредственно следует из (7.29) и (7.31). При этом $\mathscr{C}_d = \max\{\mathcal{C}_{16};\mathcal{C}_{17}\} + \mathscr{C}''_d$.

Неравенство (7.33) выводится из (7.32) по аналогии с (9.38)–(9.42). Дополнительно нужно учесть тождество (9.19) и воспользоваться оценками (7.5) и (7.30).

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLPap] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[V] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), вып. 1, 3–60.

[VSu] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 2, 1–103.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3-4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[Zh1] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[Zh2] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), вып. 5, 597–601.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.

[ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[Ka] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **203** (2012), 1009–1036.

[KoE] Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д., *Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач*, Докл. АН СССР **246** (1979), № 4, 812–815.

[LaSoUr] Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967.

[MaSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1986.

[McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.

[M] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), вып. 6, 125–177.

[MSu] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение решений начально-краевых задач для параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **49** (2015), вып. 1, 88–93.

[Ne] Nečas J., *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer Monographs in Mathematics, 2012.

[PSu1] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптической задачи Дирихле: оценки погрешности в $(L_2 \to H^1)$-норме*, Функц. анализ и его прил. **46** (2012), вып. 2, 92–96.

[PSu2] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.

[R] Rychkov V. S., *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. **60** (1999), 237–257.

[Sa] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

[St] Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), вып. 4, 86–90.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, 201–233.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.

[Su4] Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности в L_2 при усреднении эллиптической задачи Дирихле*, Функц. анализ и его прил. **46** (2012), вып. 3, 91–96.

[Su5] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463–476.

[Su6] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453–3493.

[Su7] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра*, Функц. анализ и его прил. **48** (2014), вып. 4, 88–94.

[Su8] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), вып. 4, в печати. ПОМИ препринт 11/2014.