ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ – 02/2015

Построение линейной фильтрации для расслоений на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$

А. Л. Смирнов, С.С. Яковенко

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
smirnov@pdmi.ras.ru

Санкт-Петербургский Государственный Университет,
математико-механический факультет
sergey.s.yakovenko@gmail.com

Март, 2015

Аннотация

Получен алгоритм построения фильтрации с линейными факторами для векторных расслоений ранга 2 над поверхностью $\mathbf{P}^1_A$, где A – евклидова область. Иными словами, предъявленный алгоритм для обратимой 2-матрицы σ над кольцом $A[x, x^{-1}]$ строит матрицы λ над $A[x]$ и ρ над $A[x^{-1}]$, для которых $\lambda\sigma\rho$ является верхней треугольной матрицей.

Ключевые слова: векторное расслоение, арифметическая поверхность, проективная прямая, фильтрация, линейное расслоение, евклидово кольцо, алгоритм, полиномы Лорана, редукция, приведение, верхняя треугольная матрица.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

Введение

В данной статье мы изучаем векторные расслоения над поверхностью $\mathbf{P}^1_A$, где A – дедекиндово кольцо. В частности, для евклидова A (особенно интересен случай $A = \mathbb{Z}$) мы приведем алгоритм построения линейной фильтрации на векторном расслоении ранга 2. Отметим, что наш алгоритм получен на основе анализа работы Ч. Ханны [1], где показано существование такой фильтрации. Отметим также, что представленная ниже версия алгоритма разработана на основе его первоначальной версии, принадлежащей второму автору.

Данная работа является частью реализации программы [2] по синтезу теории векторных расслоений на алгебраических многообразиях и теории векторных расслоений на компактифицированных арифметических кривых, представленной геометрией чисел.

1 Предварительные сведения

Пусть A – дедекиндова область.

Как обычно (см., например, [3]),

$\mathbf{P}^1_A = \operatorname{Proj} A[t_0, t_1], \quad \deg t_0 = \deg t_1 = 1,$
U_i – дополнение к нулям t_i, $U_{01} = U_0 \cap U_1$,
$x = t_1/t_0$, $y = t_0/t_1$, $xy = 1$.

Тогда

$$\mathcal{O}(U_0) = A[x], \quad \mathcal{O}(U_1) = A[y], \quad \mathcal{O}(U_{01}) = A[x, y].$$

1.1 Некоторые известные результаты

Приведем некоторые известные результаты, связанные с векторными расслоениями на $\mathbf{P}^1_A$.

1.1.1 Теорема (Гротендик, [4]). *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_F$, где F – поле, может быть представлено суммой линейных расслоений, причем слагаемые определены однозначно.*

Линейные расслоения на $\mathbf{P}^1_F$ также хорошо известны.

1.1.2 Теорема (Серр, [5]). *Всякое линейное расслоение на $\mathbf{P}^n_A$ изоморфно расслоению вида $p^*L \otimes \mathcal{O}(d)$, где L – линейное расслоение на $\operatorname{Spec} A$, а p – структурная проекция $\mathbf{P}^n_A \to \operatorname{Spec} A$.*

[0]При выполнении работы первый автор был поддержан РФФИ (грант 13-01-00429 А).

В частности, любое расслоение на $\mathbf{P}^1_F$ изоморфно расслоению $\mathcal{O}(d)$ для некоторого однозначно определенного $d \in \mathbb{Z}$.

В отличие от случая проективной прямой над полем на $\mathbf{P}^1_A$ для дедекиндова кольца A не всякое расслоение представимо суммой линейных (см. [6] или, например, [2]). Возникает естественный вопрос: верно ли, что всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$ для дедекиндова кольца A допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения? По-видимому, ответ на этот вопрос не известен.

Для произвольного дедекиндова A имеет место следующий результат.

1.1.3 Теорема (Hanna, [1])**.** *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, где A – дедекиндово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой либо линейные расслоения, либо расслоения ранга два.*

Полностью вопрос решен для евклидовых колец (см. [7]) или 1.4).

1.1.4 Теорема (Hanna, [1])**.** *Всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$, где A – евклидово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения.*

В частности, всякое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$ допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения. Такая фильтрация называется линейной.

1.2 Оснащения и матрицы склейки

Пусть E – векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$,

$$r = \operatorname{rk} E.$$

Оснащением E назовем тривиализацию расслоений

$$E|U_0 = \mathcal{O}e_1 + \cdots + \mathcal{O}e_r,$$

$$E|U_1 = \mathcal{O}f_1 + \cdots + \mathcal{O}f_r.$$

Так как все проективные A-модули свободны, то, по теореме Квиллена и Суслина ([8], [9]), каждое векторное расслоение на $\mathbf{P}^1_A$ допускает оснащение.

С оснащением связана матрица

$$\sigma \in \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}]), \tag{1}$$

называемая ниже матрицей склейки, такая, что

$$[e_1, \dots, e_r]\sigma = [f_1, \dots, f_r] \tag{2}$$

на U_{01}. Иными словами, j-тый столбец σ представляет собой запись f_j в e-базисе.

Наоборот, с произвольной матрицей $\sigma \in \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}])$ связано оснащенное r-расслоение $E(\sigma)$ на $\mathbf{P}^1_A$. По определению, $E(\sigma)|U_0 = \mathcal{O}e_1 + \cdots + \mathcal{O}e_r$, $E(\sigma)|U_1 = \mathcal{O}f_1 + \cdots + \mathcal{O}f_r$, а на U_{01} расслоения склеиваются с помощью соотношения (2).

Таким образом, множество классов изоморфизма оснащенных векторных r-расслоений на $\mathbf{P}^1_A$ представлено как $\mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}])$, а множество классов изоморфизма (неоснащенных) векторных r-расслоений представлено как двойной фактор

$$\mathrm{Vect}_r(\mathbf{P}^1) = \mathrm{GL}_r(A[x]) \diagdown \mathrm{GL}_r(A[x, x^{-1}]) \diagup \mathrm{GL}_r(A[x^{-1}]). \tag{3}$$

1.3 Обозначения

1.3.1. Для функтора F на категории A-алгебр введем следующие обозначения:

$$F_{xy} = F(A[x, y]), \quad F_x = F(A[x]), \quad F_y = F(A[y]).$$

В частности, в качестве F будем использовать следующие функторы:

$G = \mathrm{GL}_r$,
$M = M_{r,r}$ – матрицы размера $r \times r$,
T – стандартный тор (диагональные матрицы) в G,
B – стандартная борелевская подгруппа (верхние треугольные матрицы) в G.

Также будем использовать следующую терминологию: xy-строка – строка элементов из $A[x, y]$, x-столбец– столбец элементов из $A[x]$, и т. п. Будем говорить, что строка xy-унимодулярна (x-унимодулярна, ...), если она определена и унимодулярна над $A[x, y]$ (определена и унимодулярна над $A[x]$, ...).

1.3.2. Для квадратной матрицы ω символом ω^* обозначаем присоединенную матрицу. Она состоит из алгебраических дополнений элементов матрицы ω^t, полученной транспонированием ω. При этом $\omega\omega^* = \det(\omega)\varepsilon$, где ε – единичная матрица.

1.3.3. Операции нормализации. Для ненулевой xy-строки α нам потребуются операции нормализации

$$\alpha \mapsto \alpha/x^*, \quad \alpha \mapsto \alpha/y^*, \tag{4}$$

где строка α/x^* получается делением α на x^n, а $n \in \mathbb{Z}$ – максимальное число, для которого α/x^n является x-строкой. Аналогично, строка α/y^* получается делением α на y^n, где $n \in \mathbb{Z}$ – максимальное число, для которого α/y^n является y-строкой.

Пусть $\omega \in M_{xy}$ и каждая строка ω отлична от нулевой. Нам потребуются операции нормализации

$$\omega \mapsto \alpha/x^*, \quad \omega \mapsto \alpha/y^*. \tag{5}$$

Они заключаются в применении соответствующей (см. (4)) операции к каждой строке матрицы ω.

Например, пусть $A = \mathbb{Z}$ и

$$\omega = \begin{bmatrix} 2y^3 & 3x + 4y^2 \\ 5y^4 & 6x^5 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\omega/x^* = \begin{bmatrix} 2 & 3x^4 + 4x \\ 5 & 6x^9 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \omega/y^* = \begin{bmatrix} 2y^4 & 3 + 4y^3 \\ 5y^9 & 6 \end{bmatrix}.$$

1.3.4. Символом $\omega_{i,*}$ будем обозначать ее i-тую строку матрицы ω.

1.3.5. Пусть K – поле частных A. Символами

$$v_x, v_y : K(\mathbf{P}^1_K)^* \to \mathbb{Z}$$

обозначаем нормирования, связанные с точками $x = 0 \in \mathbf{P}^1_K$ и $y = 0 \in \mathbf{P}^1_K$. Например, $v_x(x^2 + x^3) = 2$, а $v_y(x^2 + x^3) = -3$.

1.4 Евклидовы кольца

Напомним некоторые сведения о евклидовых кольцах (см. [7]).

1.4.1. Определения и соглашения. Пусть A – евклидова область. Иными словами, A не имеет делителей нуля, и существует функция (высота)

$$\mathrm{ht} : A \to \{0, 1, 2, \dots\},$$

для которой выполнены следующие условия.

1. $\mathrm{ht}(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.
2. Для всяких $a, b \in A - \{0\}$ существуют $q, r \in A$ с $a = bq + r$ и $\mathrm{ht}(r) < \mathrm{ht}(b)$.
3. Если a делится на b и $a \neq 0$, то $\mathrm{ht}(a) \geq \mathrm{ht}(b)$.
4. $\mathrm{ht}(1) = 1$.

Например, кольца $A = \mathbb{Z}$ и $A = F[t]$, где F – поле, евклидовы. Для $\mathbb{Z}$ подходит $\mathrm{ht}(a) = |a|$, а для $F[t]$ подходит $\mathrm{ht}(f) = 2^{\deg f}$, где $\deg 0 = -\infty$. Далее будем считать, что ht фиксирована.

1.4.2. Операция $[a/b]$. В евклидовом A для всяких $a, b \in A - \{0\}$ найдется такое $q \in A$, что $\mathrm{ht}(a - bq) < \mathrm{ht}(a)$. Запись

$$q := [a/b]$$

означает, что q присвоено одно (любое) из таких значений. Таким образом, символ $[a/b]$ будет означать указанную неоднозначную операцию.

1.4.3. Высота идеала и строки. Пусть I – идеал в A. Положим

$$\mathrm{ht}(I) = \mathrm{ht}(a),$$

где a – произвольная образующая I. Высота не зависит от выбора образующей.

Пусть $(a_1, \dots, a_n)$ строка элементов A. Положим

$$\mathrm{ht}(a_1, \dots, a_n) = \mathrm{ht}(I),$$

где I – идеал, порожденный элементами $a_1, \dots, a_n$.

1.4.4. Приведение строк. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$ – строки в A. Предположим, что эти строки линейно зависимы, то есть $a_i b_j = a_j b_i$, $(i, j = 1, \dots, n)$. Положим

$$[a/b] = [u/v],$$

где u – образующая $(a_1, \dots, a_n)$ и v – образующая $(b_1, \dots, b_n)$, причем u и v согласованы в том смысле, что $a_i v = u b_i$, $(i = 1, \dots, n)$. Возможность выбора согласованных образующих вытекает из линейной зависимости строк.

При выборе числа $[u/v]$ имеется некоторый произвол, связанный с произволом при проведении аналогичной операции для элементов (см. 1.4.2), но не с произволом при выборе согласованной пары u и v. Тем не менее (несколько некорректно) будем считать, что определена (неоднозначная) операция $[a/b]$ (ее результат определяется в момент вычисления). Положим

$$(r_1, \dots, r_n) = (a_1, \dots, a_n) - [a/b](b_1, \dots, b_n).$$

Тогда

$$\mathrm{ht}(r_1, \dots, r_n) < \mathrm{ht}(b_1, \dots, b_n).$$

2 Алгоритм приведения

Далее по умолчанию A – евклидова область (см. 1.4), а

$$r = 2.$$

(как и выше, здесь $r = \mathrm{rk}\, E$).

Мы собираемся описать алгоритм приведения к треугольному виду, который позволяет представить E как расширение

$$0 \to L_1 \to E \to L_2 \to 0, \tag{6}$$

где L_i – линейные расслоения на $\mathbf{P}^1_A$.

Отметим, что нахождение расширения вида (6) равносильно нахождению линейного расслоения L_1 и отображения L_1 в E, не зануляющегося ни в одной точке базы $\mathbf{P}^1_A$. Иными словами, геометрически речь идет о нахождении сечения $\mathbf{P}^1_A \to \mathbf{P}(E)$ проекции $\mathbf{P}(E) \to \mathbf{P}^1_A$.

Алгоритм приведения к треугольному виду по произвольной $\sigma \in G_{xy}$ находит такие матрицы $\lambda \in G_x$ и $\rho \in G_y$, что

$$\lambda\sigma\rho = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix},$$

где $*$-ки символизируют произвольные элементы $A[x, y]$. Иными словами,

$$\lambda\sigma\rho \in B_{xy}. \tag{7}$$

2.1 Структура алгоритма

Приведение к треугольному виду состоит из последовательного применения двух независимых процедур: x-приведения и y-приведения.

На вход процедуры x-приведения подается произвольная $\sigma \in G_{xy}$, а на выходе получаем матрицу $\lambda \in G_x$ специального вида. А именно, λ такова, что

$$\lambda\sigma \text{ – } y\text{-специальная матрица (см. 2.2.1).} \tag{8}$$

На вход процедуры y-приведения подаются произвольные матрицы $\sigma \in G_{xy}$ и $\lambda \in G_x$, удовлетворяющие свойству (8). На выходе процедуры y-приведения мы получим матрицу $\rho \in G_y$, для которой выполнено свойство (7).

Таким образом, на выходе процедуры x-приведения мы получим данные для входа процедуры y-приведения. Применения процедуры y-приведения приведет к нахождению искомых матриц λ и ρ.

В представленном ниже алгоритме работа ведется со строками. Возможно, в контексте векторных расслоений более естественно работать со столбцами. Это можно сделать, но для этого надо начинать с построения ρ, а не λ.

2.2 y-специальные матрицы

Для $\sigma \in G_{xy}$ мы собираемся найти такие матрицы $\lambda \in G_x$ и $\rho \in G_y$, что

$$\lambda\sigma\rho \in B_{xy}.$$

Так как мы хотим разделить алгоритм на две части (x-приведение и y-приведение), то на выходе x-приведения обеспечить выполнение условия

$$\lambda\sigma \in B_{xy}G_y.$$

Важно уметь распознавать достаточно большой класс таких матриц. В качестве таковых будем рассматривать y-специальные матрицы.

2.2.1 Определение. *xy-строку α назовем y-специальной, если она xy-унимодулярна и α/y^* является y-унимодулярной (обозначения в см. (4)). Матрицу $\omega \in G_{xy}$ назовем y-специальной, если ее вторая строка $\omega_{2,*}$ является y-специальной.*

2.2.2. Проверка специальности. Проверить xy-унимодулярность строки α, возможно, не очень просто. Но нас будут интересовать строки матриц из G_{xy}. Они автоматически xy-унимодулярны, так как дополняются до обратимых xy-матриц. Таким образом, осталась только проблема проверки y-специальности строки, xy-невырожденность которой известна. Это простая проблема, так как проверка y-специальности α равносильна проверке унимодулярности строки $(\alpha/y^*) \pmod y$ над A. Это вытекает из того, что открытое множество U_1 вместе с множеством нулей сечения $t_1 \in \Gamma(\mathbf{P}^1_A, \mathcal{O}(1))$ покрывают $\mathbf{P}^1_A$ (см. начало §1).

Например, первая из матриц

$$\begin{bmatrix} 2y & 5 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 2x & 5 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}$$

не является y-специальной, а вторая y-специальна (ее вторая строка унимодулярна над $\mathbb{Z}[y]$). Матрица

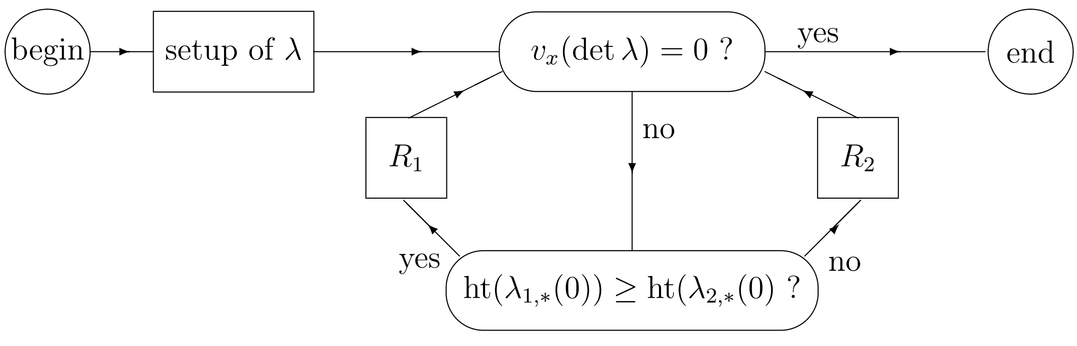
$$\begin{bmatrix} -2x^3+1 & 4x^2 \\ -x^4 & 2x^3+1 \end{bmatrix}.$$

y-специальна. В этом случае $\omega_{2,*}/y^* = \begin{bmatrix} -1, & 2y+y^4 \end{bmatrix}$ унимодулярна над $\mathbb{Z}[y]$.

2.3 Процедура x-приведения

Для $\sigma \in G_{xy}$ мы хотим найти $\lambda \in G_x$, так что произведение $\lambda\sigma$ будет y-специальной матрицей.

2.3.1. Структура x-приведения. Процедура x-приведения состоит из этапа формирования начального λ и последующего многократного применения процедур редукции первой строки R_1 и редукции второй строки R_2. Отметим, что при модификации λ не нужны предыдущие значения. Поэтому новые значения будем записывать на место старых. Это позволит сделать описание алгоритма рекурсивным. Структуру x-приведения поясним блок-схемой:



От начального значения λ требуется выполнения следующих условий:

$$\lambda \in G_{xy}; \tag{9}$$

$$\lambda \in M_x; \tag{10}$$

$$\lambda_{1,*}(0) \neq [0,0]; \quad \lambda_{2,*}(0) \neq [0,0]; \tag{11}$$

$$\lambda\sigma \text{ -- } y\text{-специальная матрица.} \tag{12}$$

Здесь $\lambda_{i,*}(0)$ – значения строк при $x = 0$.

Цель цепочки модификаций λ с помощью R_1 и R_2 – приближение λ к G_x внутри $G_{xy} \cap M_x$ с заботой о сохранности в ходе этого процесса y-специальности $\lambda\sigma$.

Процедура x-приведения завершится за конечное число шагов. Чтобы увидеть это, будем следить за параметрами $v_x(\det\lambda)$, $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0))$ и $\mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0))$. Как увидим ниже, выполнены следующие свойства:

$$R_2 \text{ строго уменьшает } \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0)); \tag{13}$$

$$R_1 \text{ не меняет } \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0)); \tag{14}$$

$$R_1 \text{ не увеличивает } v_x(\det\lambda); \tag{15}$$

$$R_1 \text{ уменьшает либо } \mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0)), \text{ либо } v_x(\det\lambda). \tag{16}$$

Отметим также, что R_1 может увеличивать $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0))$ и не меняет вторую строку λ. Кроме того, R_2 не меняет первую строку λ и увеличивает $v_x(\det\lambda)$.

Из свойств (13) и (14) вытекает, что R_2 может выполниться не более, чем h_2 раз, где $h_2 = \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0))$ для начального λ. Кроме того, из свойств (15) и (16) вытекает, что R_1 может выполниться только конечное число раз подряд. Таким образом, процедура x-приведения рано или поздно завершит свою работу.

Достигает ли процедура x-приведения своей цели (см. начало 2.3)? Да, достигает. Неформально говоря, если матрица λ стала x-обратимой, то мы пришли к цели. Если не обратима, то строки матрицы $\lambda(0)$ линейно зависимы и к ним можно применять алгоритм Евклида. Если быть более точным, то позже мы увидим, что

$$R_1 \text{ не нарушает условий (9), (10) и (12);} \tag{17}$$

$$R_2 \text{ не нарушает условий (9), (10) и (12).} \tag{18}$$

Как видно из блок-схемы, выход из процедуры x-приведения возможен только при $v_x(\det\lambda) = 0$. С учетом (9) и (10) из этого вытекает, что $\lambda \in G_x$. Так как (12) также верно на выходе, то процедура x-приведения достигает своей цели.

2.3.2. Выбор начального λ. В качестве начального λ возьмем матрицу

$$\sigma^*/x^*,$$

где σ^* – матрица, присоединенная к σ (см. 1.3.2), а операция $\omega \rightsquigarrow \omega/x^*$ определена в (1.3.3). Так как $\lambda\sigma \in T_{xy}$, то условия (9), (10), (11) и (12) выполнены.

2.3.3. R_1**: модификации первой строки** λ. Процедура R_1 использует в своей работе только матрицу λ (в частности, σ не используется) и изменяет ее. При этом изменяется только первая строка λ, а вторая строка λ не меняется.

Для работы R_1 необходимо, чтобы входная матрица λ удовлетворяла условиям (9), (10) и

$$v_x(\det \lambda) \neq 0. \tag{19}$$

Вместо первой строки λ, то есть вместо $\lambda_{1,*}$, процедура R_1 размещает остаток от ее деления на вторую строку матрицы $\lambda(0)$, то есть на $\lambda_{2,*}(0)$. Это можно сделать только в том случае, когда $\lambda_{*,1}(0)$ и $\lambda_{*,2}(0)$ линейно зависимы. Линейная зависимость обеспечена необходимыми условиями работы R_1. Из (10) вытекает, что матрица $\lambda(0)$ определена, а из (19) вытекает, что $\lambda(0) = 0$. После этого R_1 проводит x-нормализацию получившейся матрицы и завершает работу. Иными словами, после замены первой строки на остаток от деления может оказаться, что $\lambda_{1,*}(0) = [0, 0]$. В этом случае новую первую строку следует поделить на x столько раз, сколько возможно, оставаясь среди x-матриц. При этом $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*})$ может вырасти, но заведомо уменьшится $v_x(\det \theta)$.

Более конкретно, работа R_1 описана следующими формулами:

$$\lambda_{1,*} := \lambda_{1,*} - [\lambda_{1,*}(0)/\lambda_{2,*}(0)]\lambda_{2,*}; \tag{20}$$

$$\lambda_{1,*} := \lambda_{1,*}/x^*. \tag{21}$$

В (20) использовано деление строк с остатком из 1.4.4 и операция x-нормализации строки $\alpha \mapsto \alpha/x^*$ из (1.3.3).

Заявленные выше свойства R_1, то есть (14), (15), (16) и (17), видны непосредственно из описания R_1. Например, вторая строка матрицы $\lambda\sigma$ не изменится, так как не изменится вторая строка λ.

2.3.4. R_2**: модификации второй строки** λ. Эта процедура применяется в том случае, когда процедура модификации первой строки себя изжила, то есть при условии

$$\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}) < \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}). \tag{22}$$

Цель R_2 состоит в том, чтобы приблизиться к унимодулярности $\lambda_{2,*}(0)$, уменьшая $\mathrm{ht}(\lambda_{2,*})$ (если добьемся унимодулярности, то дело практически сделано). Проблема, с которой при этом надо справиться, состоит в том, что изменение второй строки λ ведет к изменению второй строки $\lambda\sigma$, а надо как-то обеспечить y-специальность $\lambda\sigma$ при новом λ. Это достигается тем (основной трюк алгоритма), что мы изменим асимптотику $\lambda_{2,*}$ при $x \rightsquigarrow 0$, не меняя ее при $y \rightsquigarrow 0$ (именно эта асимптотика влияет на y-специальность).

Работа R_2 описывается двумя операциями:

$$n := \max\{1, v_y(\lambda_{2,*}\sigma) - v_y(\lambda_{1,*}\sigma) + 1\}; \tag{23}$$
$$\lambda_{2,*} := x^n\lambda_{2,*} + \lambda_{1,*}. \tag{24}$$

По существу в (24) можно взять любое достаточно большое положительное n.

Процедура R_2 использует в своей работе только матрицу λ и целые числа $v_y(\lambda_{2,*}\sigma)$, $v_y(\lambda_{1,*}\sigma)$. Проще считать, что R_2 использует λ и σ, но при этом изменяется только вторая строка λ, а первая строка λ и матрица σ при этом не меняются.

Заявленные выше свойства R_2, то есть (13) и (18), видны непосредственно из описания R_2. Например, (13) вытекает из (22) того, что $n > 0$. Выполнение (12) на выходе из R_2 (это часть (18)) обеспечено тем, что $n > v_y(\lambda_{2,*}\sigma) - v_y(\lambda_{1,*}\sigma)$.

2.4 Процедура y-приведения

В этой процедуре достаточно того, что A – кольцо главных идеалов. Евклидовость A не является необходимой (но может быть полезна).

Как уже упоминалось, на вход процедуры y-приведения подаются такие матрицы $\sigma \in G_{xy}$ и $\lambda \in G_x$, что матрица $\lambda\sigma$ является y-специальной (см. 2.2.1). На выходе процедуры y-приведения надо получить матрицу $\rho \in G_y$, для которой $\lambda\sigma\rho \in B_{xy}$, то есть

$$\lambda\sigma\rho = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix},$$

где $*$-ки символизируют произвольные xy-элементы.

2.4.1. Структура y-приведения. Рассмотрим y-нормализацию $\lambda\sigma$, то есть положим

$$\eta = (\lambda\sigma)/y^* \in M_y,$$

где операция нормализации описана в 1.3.3. Таким образом,

$$\lambda\sigma = \delta\eta, \qquad \text{где } \delta \in T_{xy} \text{ – диагональная матрица.}$$

По условию $\lambda\sigma$ является y-специальной. Это означает, что вторая строка η является y-унимодулярной. Предположим, что удалось дополнить строку $\eta_{2,*}$ до y-обратимой матрицы θ. Тогда

$$\rho = \theta^{-1}$$

подходит в качестве ответа. Действительно,

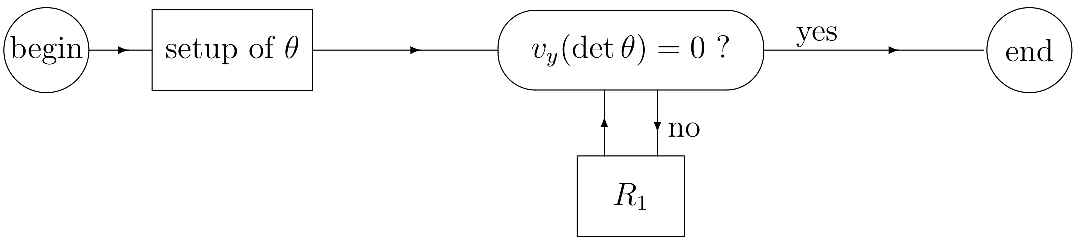
$$\lambda\sigma\rho = \delta\eta\theta^{-1} = \delta \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}.$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что вторая строка $\eta\theta^{-1}$ зависит только от второй строки η и, таким образом, совпадает со второй строкой $\theta\theta^{-1} = 1$.

Итак, если мы найдем θ, то задача приведения y-специальной матрицы к треугольной форме будет решена. Именно так и действует процедура y-редукции. Осталось описать процедуру дополнения y-унимодулярной строки до y-обратимой матрицы. Удобнее, однако, дополнять вторую строку η до обратимой y-матрицы, пользуясь всей η, а не только ее второй строкой. Осталось описать процедуру, решающую эту задачу.

Мы опишем две такие процедуры. Первая из них (обозначим ее E) по существу сводится к многократному использованию описанной выше процедуры R_1 (см. 2.3.3). Тем самым, она использует евклидовость A. Вторая процедура (обозначим ее S) будет опираться лишь на то, что мы умеем дополнять A-унимодулярные строки до обратимых A-матриц.

2.4.2. E**: дополнение** y**-строки** $\eta_{2,*}$ **до** $\theta \in G_y$. Здесь A – евклидово. На вход E подается матрица $\eta \in M_x \cap G_{xy}$, причем $\eta_{1,*}(0) \neq [0,0]$, а строка $\eta_{2,*}$ является y-унимодулярной. Здесь выражения вида $\eta(0)$ и т. п. означают значения при $y = 0$. Структуру E поясним блок-схемой:



Здесь в качестве начального значения θ можно взять

$$\theta = \eta.$$

Кроме того, в описании R_1 (см. 2.3.3) надо везде заменить λ на η, а x на y. В частности, $\eta(0)$ – значение η при $y = 0$. Аргументы из 2.3.3 показывают, что E закончит работу за конечное время, а на выходе мы получим матрицу θ с требуемыми свойствами.

2.4.3. S**: дополнение** y**-строки до обратимой матрицы**. Здесь A – просто область главных идеалов, в которой мы умеем дополнять унимодуляпные строки до обратимых матриц. На вход S подается матрица $\eta \in M_x \cap G_{xy}$, причем $\eta_{1,*}(0) \neq [0,0]$, а строка $\eta_{2,*}$ является y-унимодулярной. Здесь выражения вида $\eta(0)$ и т. п. означают значения при $y = 0$.

Матрица θ будет построена в виде

$$\theta = \alpha\gamma, \text{ где } \gamma \in G(A). \tag{25}$$

Начнем с построения γ. Для этого строку $\eta_{2,*}(0)$ дополним до обратимой A-матрицы. Это и есть γ.

В качестве начального значения α возьмем

$$\alpha = \eta\gamma^{-1}. \tag{26}$$

Заметим, что
$$\alpha(0) = \begin{bmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
где $*$-ки символизируют элементы A. Именно для того, чтобы $\alpha(0)$ имела такой сверхспециальный вид, и введена матрица γ. Далее мы будем модернизировать матрицу α. При этом не надо помнить предыдущие значения α. А именно, будем многократно применять следующую процедуру модернизации матрицы α:
$$\alpha = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightsquigarrow \alpha_1/y^*, \text{где } \alpha_1 := \begin{bmatrix} a - b(0)c & b - b(0)d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Точнее говоря, перед началом очередной модернизации α надо проверить, не получили ли мы обратимую матрицу. Иными словами, надо ответить на вопрос
$$v_y(\det \alpha) = 0?$$

Если ответ отрицательный, то надо начинать очередную модернизацию, если положительный, то надо считать α сформированной. После этого можно вычислить η по (25). Примерно такие аргументы, как и в 2.3.3, показывают, что процесс конечен. При этом мы получим именно то, что требовалось. Действительно, вторая строка α при модернизации не изменилась. Поэтому вторая строка θ, а $\theta = \alpha\gamma$ при финальном α, такая же, как и у $\alpha\gamma$ при начальном α, то есть такая же, как у η (см. (26)).

2.5 Примеры работы алгоритма

Пусть $A = \mathbb{Z}$ с высотой $\mathrm{ht}(n) = |n|$ (см. 1.4). Ниже рассмотрено три примера. Пример 2.5.1 рассмотрен подробно, чтобы проиллюстрировать абстрактное описание алгорима приведения. Пример 2.5.2 имеет дело с тем же расслоением, что и 2.5.1. Однако мы сделали небольшое и, в принципе, допустимое отклонение от основной схемы работы. Показательно, что результат оказался иным, причем худшим с точки зрения выбора максимально плотной фильтрации (см. §3). Наконец, в примере 2.5.3 бегло представлен более сложный случай.

2.5.1. Пусть E – расслоение, заданное матрицей склейки
$$\sigma = \begin{bmatrix} 2x^{-1} & 5 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}.$$

Применим к σ алгоритм приведения (см. 2.1). Начнем с процедуры x-редукции, то есть с построения λ. Сформируем начальное λ (см. блок-схему в 2.3.1 и 2.3.2):
$$\lambda = \sigma^*/x^* = \begin{bmatrix} 2x & -5 \\ -1 & 2x^{-1} \end{bmatrix} /x^* = \begin{bmatrix} 2x & -5 \\ -x & 2 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Здесь $\det\lambda = -x$ и $v_x(\det\lambda) = 1$. Условие $v_x(\det\lambda) = 0$ не выполнено. Поэтому (см. блок-схему в 2.3.1) переходим к проверке условия $\mathrm{ht}(\lambda_{1,*}(0)) \geq \mathrm{ht}(\lambda_{2,*}(0))$. В нашем случае это условие выполнено ($5 \geq 2$). Поэтому входим в процедуру модификации первой строки R_1 (см. 2.3.3).

Прежде всего вычислим $[\lambda_{1,*}(0)/\lambda_{2,*}(0)] = [[0,-5]/[0,2]]$. Для этого надо выбрать согласованные образующие u и v идеалов $(0,-5)$ и $(0,2)$. Пусть $u = -5, v = 2$. Для $[u/v]$ есть две возможности: (-2) и (-3). Пусть $[u/v] = -2$. Таким образом, $[[0,-5]/[0,2]] = -2$. Применяя формулы (20) и (21) к λ из (27), получаем новое значение λ:

$$R_1 : \begin{bmatrix} 2x & -5 \\ -x & 2 \end{bmatrix} \overset{md}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -x & 2 \end{bmatrix} /x^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -x & 2 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Здесь модификация md состоит в том, что к первой строке λ прибавляется удвоенная вторая строка (так как выбрано значение $[\lambda_{1,*}(0)/\lambda_{2,*}(0)] = -2$). Проверка условий (см. блок-схему в 2.3.1) показывает, что модификацию λ следует продолжить, причем с помощью процедуры модификации второй строки R_2 (см. 2.3.4). Заходим в R_2. Находим, что

$$\lambda\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -x & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x^{-1} & 5 \\ 1 & 2x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2x \\ 0 & -x \end{bmatrix}.$$

Находим, что

$$\max\{1, v_y(\lambda_{2,*}\sigma) - v_y(\lambda_{1,*}\sigma) + 1\} = \max\{1, (-1) - (0) + 1\} = 1$$

и берем

$$n = 1. \tag{29}$$

Применяя формулу (24) к λ из (28), получаем новое значение λ:

$$R_2 : \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -x & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -x^2 & -1+2x \end{bmatrix}.$$

Здесь модификация состоит в том, что вторая строка умножается на $x^n = x$ и к ней добавляется первая строка.

Дальнейший ход x-редукции кратко представим следующей цепочкой преобразований λ:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -x^2 & -1+2x \end{bmatrix} \overset{R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} x & -2 \\ -x^2 & -1+2x \end{bmatrix} \overset{R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1+2x & -4 \\ -x^2 & -1+2x \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Для текущего значения λ, то есть для самой правой матрицы в (30), получаем $\det\lambda = -1$ и $v_x(\det\lambda) = 0$. Поэтому это окончательное значение λ.

Начинаем искать ρ (см. начало 2.1). Запускаем y-редукцию (см. 2.4), а именно находим

$$\eta = (\lambda\sigma)/y^* = \begin{bmatrix} 2y^2 & 5y+2 \\ -y^2 & -2y-1 \end{bmatrix}.$$

Нам надо дополнить вторую строку $\eta_{2,*} = [-y^2, -2y-1]$ до обратимой y-матрицы θ. Для этого в (см. 2.4) предложены две процедуры: E и S. Воспользуемся, например, S-процедурой (см. 2.4.3). Находим $\eta(0)_{2,*}(0) = [0, -1]$ и можем взять, например,

$$\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Сформируем начальное α:

$$\alpha = \eta\gamma^{-1} = \begin{bmatrix} -2y^2 & -5y-2 \\ y^2 & 2y+1 \end{bmatrix}.$$

Проведем цепочку модернизаций α.

$$\begin{bmatrix} -2y^2 & -5y-2 \\ y^2 & 2y+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ y^2 & 2y+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} y & 2 \\ y^2 & 2y+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1-2y & -4 \\ y^2 & 2y+1 \end{bmatrix}.$$

Самая правая матрица в этой цепочке дает окончательное значение α, так как $\det\alpha = 1$. Далее находим, что

$$\theta = \alpha\gamma = \begin{bmatrix} -1+2y & 4 \\ -y^2 & -2y-1 \end{bmatrix} \text{ и } \rho = \theta^{-1} = \begin{bmatrix} -1-2y & -4 \\ y^2 & -1+2y \end{bmatrix}.$$

Посмотрим, что за фильтрацию E мы получили (заодно проконтролируем правильность вычислений). Новая матрица склейки для E выглядит так:

$$\sigma' = \lambda\sigma\rho = \begin{bmatrix} 2x^{-1} & 5+2x \\ -1 & -2x-x^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1-2y & -4 \\ y^2 & -1+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{-2} & -1+2x^{-1} \\ 0 & x^2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, E включено в короткую точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(-2) \to E \to \mathcal{O}(2) \to 0.$$

2.5.2. Рассмотрим расслоение с той же матрицей склейки, что и (2.5.1). До определенного момента будем действовать так же, как и в 2.5.1, а именно, до выбора n в (29). В этом месте отклонимся от примера 2.5.1 (и от алгоритма R_2) и возьмем

$$n = 2. \tag{31}$$

Дальнейший процесс x-редукции представим цепочкой преобразований λ:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -x & 2 \end{bmatrix} \overset{R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -x^3 & -1+2x^2 \end{bmatrix} \overset{R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} x & -2 \\ -x^3 & -1+2x^2 \end{bmatrix} \overset{R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1+2x^2 & -4x \\ -x^3 & -1+2x^2 \end{bmatrix}.$$

Получили окончательное значение λ.

Начинаем искать ρ. Находим

$$\eta = (\lambda\sigma)/y^* = \begin{bmatrix} 2y^3 & 5y^2+2 \\ -y^3 & -2y^2-1 \end{bmatrix}.$$

Можем взять, например, $\gamma = -1$ и сформировать начальное $\alpha = \eta\gamma^{-1}$.

Проведем цепочку модернизаций α.

$$\begin{bmatrix} -2y^3 & -5y^2-2 \\ y^3 & 2y^2+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ y^3 & 2y^2+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} y & 2 \\ y^3 & 2y^2+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1-2y^2 & -4y \\ y^3 & 2y^2+1 \end{bmatrix}.$$

Получили окончательное значение α. Далее находим, что

$$\theta = \alpha\gamma = \begin{bmatrix} -1+2y^2 & 4y \\ -y^3 & -2y^2-1 \end{bmatrix} \text{ и } \rho = \theta^{-1} = \begin{bmatrix} -1-2y^2 & -4y \\ y^3 & -1+2y^2 \end{bmatrix}.$$

Новая матрица склейки для E выглядит так:

$$\sigma' = \lambda\sigma\rho = \begin{bmatrix} x^{-3} & 2x^{-2}+1-2x^2 \\ 0 & x^3 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, E включено в короткую точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(-3) \to E \to \mathcal{O}(3) \to 0.$$

2.5.3. Пусть E – расслоение, заданное матрицей склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 2x & 7x \end{bmatrix}.$$

Сформируем начальное $\lambda = \sigma^*/x^*$ и проведем цепочку его модификаций:

$$\begin{bmatrix} 7x & -17 \\ -2x & 5 \end{bmatrix} \overset{R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} x & -2 \\ -2x & 5 \end{bmatrix} \overset{R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} x & -2 \\ x-2x^2 & -2+5x \end{bmatrix} \overset{R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2x & -5 \\ x-2x^2 & -2+5x \end{bmatrix} \overset{R_1}{\rightsquigarrow}$$

$$\overset{R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 4x^2 & -1-10x \\ x-2x^2 & -2+5x \end{bmatrix} \overset{R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 4x^2 & -1-10x \\ 4x^2+x^3-2x^4 & -1-10x-2x^2+5x^3 \end{bmatrix} \overset{R_1}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{bmatrix} -x+2x^2 & 2-5x \\ 4x^2+x^3-2x^4 & -1-10x-2x^2+5x^3 \end{bmatrix} \overset{R_1}{\rightsquigarrow}$$

$$\overset{R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} -1+10x+2x^2-4x^3 & -25-4x+10x^2 \\ 4x^2+x^3-2x^4 & -1-10x-2x^2+5x^3 \end{bmatrix}.$$

Получили окончательное значение λ, так как $\det(\lambda) = 1$. Находим, что

$$\lambda\sigma = \begin{bmatrix} -5+2x^2 & -17-5x+6x^2+2x^3 \\ -2x+x^3 & -7x-2x^2+3x^3+x^4 \end{bmatrix},$$

и начинаем y-редукцию:

$$\eta = (\lambda\sigma)/y^* = \begin{bmatrix} -5y^3+2y & -17y^3-5y^2+6y+2 \\ -2y^3+y & -7y^3-2y^2+3y+1 \end{bmatrix}.$$

Запускаем E-редукцию: полагаем $\theta = \eta$ и начинаем его модификации:

$$\begin{bmatrix} -5y^3+2y & -17y^3-5y^2+6y+2 \\ -2y^3+y & -7y^3-2y^2+3y+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -y & -3y-1 \\ -2y^3+y & -7y^3-2y^2+3y+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2y & -7y-2 \\ -2y^3+y & -7y^3-2y^2+3y+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -4y^2 & -14y^2-4y-1 \\ -2y^3+y & -7y^3-2y^2+3y+1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$\begin{bmatrix} -2y^2-4y+1 & -7y^2-16y-1 \\ -2y^3+y & -7y^3-2y^2+3y+1 \end{bmatrix}.$$

Получили окончательное значение θ, так как $\det\theta = 1$. Находим

$$\rho = \theta^{-1} = \begin{bmatrix} -7y^3-2y^2+3y+1 & 7y^2+16y+1 \\ 2y^3-y & -2y^2-4y+1 \end{bmatrix}.$$

Посмотрим, что за фильтрацию E мы получили в итоге. Находим, что

$$\lambda\sigma\rho = \begin{bmatrix} y^3 & -y^2-2y-x+2x^3 \\ 0 & x^4 \end{bmatrix},$$

и, таким образом, E включено в короткую точную последовательность

$$0 \to \mathcal{O}(-3) \to E \to \mathcal{O}(4) \to 0.$$

3 Заключение

Для расслоения E хотелось бы уметь находить линейную фильтрацию $\mathcal{O}(d) \subset E$ с максимально возможным d (назовем такую фильтрацию максимально плотной). Всегда ли можно добиться этого с помощью предложенного алгоритма?

Например, для расслоения из примера 2.5.1 алгоритм выдает $d = -2$, а в [2] показано, что это максимально возможное значение. С другой стороны, в [10] показано, что в случае $A = \mathbb{Z}$ для всякого расслоения с тривиальным общим слоем и простыми подскоками можно взять $d = -2$. Что в этих случаях скажет алгоритм?

Литература

[1] *Ch. C. Hanna.* Subbundles of vector bundles on the projective line. J. Algebra, 52, no. 2, 322-327, 1978

[2] *A. Smirnov.* On filtrations of vector bundles over $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$, to appear.

[3] *Р. Хартсхорн.* Алгебраическая геометрия. Москва, Мир, 1981.

[4] *К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпиндлер.* Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. Москва, Мир, 1984.

[5] *Ж.-П. Серр.* Когерентные алгебраические пучки. Расслоенные пространства и их приложения. Москва, изд-во Иностранной литературы, 1958.

[6] *G. Horrocks.* Projective modules over an extension of a local ring, Proc. London Math. Soc. (3) 14 (1964), 714-718.

[7] *Б.Л. Ван-дер-Варден.* Алгебра. Москва, Мир, 1976.

[8] *D. Quillen.* Projective modules over polynomial rings, Invent. Math., 1976, vol. 36, p. 167–171.

[9] *А. А. Суслин.* Проективные модули над кольцами многочленов свободны. Докл. АН СССР, 1976, т. 229, № 5, с. 1063-1066.

[10] *А. Л. Смирнов.* Векторные $\mathbf{P}^1_{\mathbb{Z}}$-расслоения с простыми подскоками, Препринт ПОМИ, 01/2015