

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

Векторные $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$ -расслоения с простыми подскоками

А. Л. Смирнов

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
smirnov@pdmi.ras.ru

Февраль, 2015

Аннотация

Рассматриваются векторные расслоения ранга 2 на арифметической поверхности, представленной проективной прямой над \mathbb{Z} . Предположим, что такое расслоение E тривиально в слое над \mathbb{Q} , а для каждой замкнутой точки $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ ограничение E на проективную прямую над соответствующим полем вычетов изоморфно \mathcal{O}^2 или $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$. В этих предположениях доказано, что существует точная последовательность вида $0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}(2) \rightarrow 0$.

Ключевые слова: векторное расслоение, арифметическая поверхность, проективная прямая, фильтрация, линейное расслоение, приведение, подскок.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, Г. В. Кузьмина,
П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев,
С. И. Репин, Г. А. Серегин, В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

Введение

Данная работа относится к программе по синтезу теории векторных расслоений на алгебраических многообразиях и геометрии чисел (см. [1]). Здесь мы будем изучать векторные расслоения над арифметической поверхностью $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1$.

Теорема Гротендика утверждает, что каждое векторное расслоение на проективной прямой над полем изоморфно сумме линейных расслоений (см., например, [2]). Для проективной прямой над \mathbb{Z} это не так. Однако из теоремы Ханны (см. [3]) вытекает, что всякое расслоение на $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1$ допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения. Особенно трудно находить такую фильтрацию для расслоений ранга 2. Именно такие расслоения и рассматриваются ниже. В этом случае задача сводится к построению точной последовательности вида:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(d) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}(e) \rightarrow 0.$$

Для каждого конкретного E желательно уметь строить такую последовательность с максимально возможным d .

В данной работе мы ограничимся случаем расслоений, тривиальных в общем слое $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^1$ и с простыми подскоками. Это означает (см. 1.1), что для каждого простого p ограничение E на проективную прямую над \mathbf{F}_p изоморфно $\mathcal{O}(-d_p) \oplus \mathcal{O}(d_p)$ с $d_p \leq 1$. Основной результат данной работы (Теорема 1.1.2) утверждает, что в рассматриваемом случае всегда можно взять $d \geq -2$. Это неравенство точное, так как в [1] построены примеры с $d = -2$.

1 Предварительные сведения

Как обычно (см., например, [4]),

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1 &= \text{Proj } \mathbb{Z}[t_0, t_1], \quad \deg t_0 = \deg t_1 = 1, \\ U_i &- \text{дополнение к нулям } t_i, \quad U_{01} = U_0 \cap U_1, \\ x &= t_1/t_0, \quad y = t_0/t_1, \quad xy = 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathcal{O}(U_0) = \mathbb{Z}[x], \quad \mathcal{O}(U_1) = \mathbb{Z}[y], \quad \mathcal{O}(U_{01}) = \mathbb{Z}[x, y].$$

1.1 Расслоения с простыми подскоками

Пусть E – векторное расслоение ранга 2 на $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1$.

1.1.1 Определение. Будем говорить, что E – расслоение с тривиальным общим слоем и простыми подскоками, если

⁰Работа поддержана РФФИ (грант 13-01-00429 А).

1. расслоение $E \otimes \mathbb{Q}$ на $\mathbf{P}_{\mathbb{Q}}^1$ изоморфно $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$;
2. $E_P \simeq \mathcal{O}^2$ или $E_P \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ для всякой замкнутой точки $P \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, где E_P – ограничение E на прообраз P при проекции $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1 \rightarrow \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$;
3. найдется хотя бы один подскок, то есть найдется хотя бы одна точка $P \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, для которой $E_P \simeq \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$.

Только для целей данной работы будем использовать сокращенную терминологию. А именно, вместо термина "расслоение с тривиальным общим слоем и простыми подскоками" будем использовать термин "расслоение с простыми подскоками".

Сформулируем основной результат данной статьи.

1.1.2 Теорема. Пусть E – векторное расслоение на $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1$, $\operatorname{rk} E = 2$. Если E – расслоение с простыми подскоками, то E можно включить в точную последовательность вида

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}(2) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Доказательство теоремы 1.1.2 состоит из нескольких шагов и распределено по всей статье. Заключительный этап доказательства приведен в 4.3.

1.2 План доказательства основной теоремы

Доказательство теоремы 1.1.2 опирается на классификацию векторных расслоений с простыми подскоками, полученную в [1] (см. также 1.3). Однако прямой подход, основанный на классификации, приведет нас (см. 3.4) к вопросу о разрешимости в целых числах уравнения 4-той степени от 6-ти переменных. Надежных средств для ответа на такие вопросы мне не известно.

Поэтому ниже используется метод, который может быть назван методом обратной задачи. А именно, для каждого расслоения, которое включено в последовательность вида (1), мы находим его место в классификации. После этого остается заполнить все места в классификации с помощью расслоений, которые заведомо можно включить в последовательность вида (1). Возникающие при этом уравнения оказываются проще.

1.3 Классификация расслоений с простыми подскоками

Начнем с конструкции некоторого запаса расслоений с простыми подскоками. Пусть

$$V(m, \alpha) = \operatorname{Coker}[\mathcal{O}(-2)^2 \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(-1)^4], \quad (2)$$

где стрелка задана матрицей

$$\phi = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ \alpha t_0 & t_1 \\ m t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

а $m, \alpha \in \mathbb{Z}$. Следующий результат получен в [1].

1.3.1 Теорема. Если $m \neq 0$ и $\text{GCD}(m, \alpha) = 1$, то $V(m, \alpha)$ – расслоение. Если, кроме того, $m \neq \pm 1$, то $V(m, \alpha)$ – расслоение с простыми подскоками. Подскоки находятся в точности в делителях m . Если E – векторное расслоение на $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1$ с простыми подскоками, то E изоморфно расслоению вида $V(m, \alpha)$.

Нам потребуется сравнивать расслоения вида $V(m, \alpha)$ друг с другом. Следующий результат получен в [1].

1.3.2 Теорема. Пусть $E_1 = V(m_1, \alpha_1)$, $E_2 = V(m_2, \alpha_2)$, где $\text{GCD}(m_1, \alpha_1) = 1$, $\text{GCD}(m_2, \alpha_2) = 1$, $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$. Расслоения E_1 и E_2 изоморфны тогда и только тогда, когда идеал (m_1) равен идеалу (m_2) и существует $z \in \mathbb{Z}$, так что

$$\alpha_2/\alpha_1 \equiv \pm z^2 \pmod{m_1}.$$

2 Вычисления в $V(m, \alpha)$

Пусть $V(m, \alpha)$ – расслоение с простыми подскоками, то есть $m, \alpha \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0, \pm 1$, $\text{GCD}(m, \alpha) = 1$. Для упрощения обозначений положим

$$V(m, \alpha) = F. \quad (4)$$

2.1 Матрица склейки для F

Для проведения вычислений удобно представить F с помощью матрицы склейки. Это означает, что нужно тривиализовать ограничения F на U_0 и U_1 , то есть выбрать соответствующие базисы $[e_1, e_2]$ и $[f_1, f_2]$. После этого матрица склейки $\sigma \in \text{GL}_2(\mathbb{Z}[x, y])$ определена условием:

$$[e_1, e_2]\sigma = [f_1, f_2] \text{ или } [e_1, e_2] = [f_1, f_2]\sigma^{-1} \text{ на } U_{01}.$$

Пусть ϕ_x и ϕ_y – ограничения стрелки ϕ на U_0 и U_1 , соответственно.

2.1.1 Теорема. Пусть $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, где $\beta = m$.

Сужение F на U_0 может быть тривиализовано базисом

$$e_1 = [0, \gamma, \delta, 0]^t t_0^{-1} \pmod{\text{Im } \phi_x}, e_2 = [1, 0, 0, 0]^t t_0^{-1} \pmod{\text{Im } \phi_x}.$$

Сужение F на U_0 может быть тривиализовано базисом

$$f_1 = [0, 0, 1, 0]^t t_1^{-1} \pmod{\text{Im } \phi_y}, f_2 = [0, 0, 0, 1]^t t_1^{-1} \pmod{\text{Im } \phi_y}.$$

При выборе этих тривиализаций F задано матрицей склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha x^{-1} & \beta \\ \gamma & \delta x \end{bmatrix}.$$

Эта теорема доказывается непосредственным вычислением.

2.2 Идентификация слоев F

Мы уже знаем, что F имеет тривиальный общий слой и простые подскоки в делителях m (см. 1.3.1). Однако нам потребуются явные отождествления с \mathcal{O}^2 и $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$ в соответствующих случаях. Пусть $[g_1, g_2]$ – стандартный глобальный базис \mathcal{O}^2 , $[e_1, e_2]$ и $[f_1, f_2]$ – U_0 - и U_1 -базисы F из 2.1.1.

2.2.1. Общий слой. Зададим изоморфизм $F \otimes \mathbb{Z}[1/m] \simeq \mathcal{O}^2$ формулами

$$[g_1, g_2] \begin{bmatrix} \delta x & -m \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [e_1, e_2], \quad [f_1, f_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha m^{-1} x^{-1} & m^{-1} \end{bmatrix} = [g_1, g_2].$$

2.2.2. Специальные слои. Зададим изоморфизм $F \otimes \mathbb{Z}/m \simeq \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$ формулами

$$[t_0^{-1}g_1, t_0g_2] \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ -\gamma x & \alpha \end{bmatrix} = [e_1, e_2], \quad [f_1, f_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [t_1^{-1}g_1, t_1g_2],$$

где в качестве базисов $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$ на U_0 и U_1 выбраны $[t_0^{-1}g_1, t_0g_2]$ и $[t_1^{-1}g_1, t_1g_2]$.

3 $\mathcal{O}(-2)$ -фильтруемость F

Пусть F то же самое, что и в §2 (см. (4)). Мы собираемся изучить вопрос о $\mathcal{O}(-2)$ -фильтруемости F , то есть вопрос о возможности включить F в точную последовательность вида

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}(2) \rightarrow 0.$$

Такая фильтруемость F равносильна существованию такого глобального сечения расслоения

$$E = F(2),$$

которое нигде не обращается в ноль. Попробуем вычислить пространство таких сечений.

В качестве базиса E на U_0 возьмем $t_0^2[e_1, e_2]$, где $[e_1, e_2]$ – базис F на U_0 , а в качестве базиса E на U_1 возьмем $t_1^2[f_1, f_2]$, где $[f_1, f_2]$ – базис F на U_1 . Тогда

$$t_0^2[e_1, e_2] \begin{bmatrix} \alpha x & mx^2 \\ \gamma x^2 & \delta x^3 \end{bmatrix} = t_1^2[f_1, f_2] \text{ или } t_0^2[e_1, e_2] = t_1^2[f_1, f_2] \begin{bmatrix} \delta x^{-1} & -mx^{-2} \\ -\gamma x^{-2} & \alpha x^{-3} \end{bmatrix} \text{ на } U_{01}.$$

3.1 Вычисление $H^0(\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1, E)$

Ниже вместо $H^0(\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1, E)$ и т. п. используем обозначение $H^0(E)$ и т. п.

Общее U_0 -сечение $s = (s_1 e_1 + s_2 e_2) t_0^2$, где $s_i \in \mathbb{Z}[x]$, в U_1 -базисе выглядит так: $s = (\delta x^{-1} s_1 - m x^{-2} s_2) t_1^2 f_1 + (-\gamma x^{-2} s_1 + \alpha x^{-3} s_2) t_1^2 f_2$. Поэтому условия глобальности s таковы:

$$\begin{cases} c_1 : & \delta x^{-1} s_1 - m x^{-2} s_2 \in \mathbb{Z}[x^{-1}]; \\ c_2 : & -\gamma x^{-2} s_1 + \alpha x^{-3} s_2 \in \mathbb{Z}[x^{-1}]. \end{cases}$$

Отсюда легко видеть, что $x^{-2} s_1, x^{-3} s_2 \in \mathbb{Z}[x^{-1}]$. Для этого достаточно рассмотреть линейную комбинацию $\gamma x^{-1} c_1 + \delta c_2$, где c_1 и c_2 – условия глобальности s . Поэтому $s_1 = u_0 + u_1 x + u_2 x^2$, $s_2 = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3$. На u_i и v_j получили уравнение: $\delta u_2 = m v_3$. Поскольку m и δ взаимно просты, то общее глобальное сечение E имеет вид

$$s = (u_0 + u_1 x + m w x^2) t_0^2 e_1 + (v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \delta w x^3) t_0^2 e_2, \quad (5)$$

где $u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w \in \mathbb{Z}$.

3.2 Невырожденность сечения над $\mathbb{Z}[1/m]$

Поймем, когда сечение s вида (5) не имеет нулей на $\mathbf{P}^1 \otimes \mathbb{Z}[1/m]$. Для этого идентифицируем s как сечение $\mathcal{O}(2)^2$, пользуясь изоморфизмом из 2.2.1. В качестве базиса $\mathcal{O}^2(2)$ на U_0 возьмем $t_0^2[g_1, g_2]$, где $[g_1, g_2]$ – стандартный глобальный базис \mathcal{O}^2 . Изоморфизм $E \otimes \mathbb{Z}[1/m] \simeq \mathcal{O}^2(2)$ (см. 2.2.1) на U_0 устроен так:

$$t_0^2[g_1, g_2] \begin{bmatrix} \delta x & -m \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = t_0^2[e_1, e_2].$$

Общее сечение $\mathcal{O}(2)^2$ имеет вид: $(a_{20} t_0^2 + a_{11} t_0 t_1 + a_{02} t_1^2) g_1 + (b_{20} t_0^2 + b_{11} t_0 t_1 + b_{02} t_1^2) g_2$. Выразим общее сечение E в этих терминах: $s = (u_0 + u_1 x + m w x^2) t_0^2 e_1 + (v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \delta w x^3) t_0^2 e_2 = (u_0 + u_1 x + m w x^2)(\delta x t_0^2 g_1 + t_0^2 g_2) + (v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \delta w x^3)(-m t_0^2 g_1) = (-m v_0 + [\delta u_0 - m v_1] x + [\delta u_1 - m v_2] x^2) t_0^2 g_1 + (u_0 + u_1 x + m w x^2) t_0^2 g_2$. Иначе говоря,

$$a_{20} = -m v_0, a_{11} = \delta u_0 - m v_1, a_{02} = \delta u_1 - m v_2, b_{20} = u_0, b_{11} = u_1, b_{02} = m w.$$

Итак, по сечению $s \in H^0(E)$ построили сечение $\mathcal{O}(2)^2$ над $\mathbb{Z}[m^{-1}]$, то есть пару полиномов 2-й степени. Наличие у них общих нулей детектируется результатом

$$\begin{aligned} R_{22}(a_{20}, a_{11}, a_{02}; b_{20}, b_{11}, b_{02}) &= \det \begin{bmatrix} a_{20} & a_{11} & a_{02} & 0 \\ 0 & a_{20} & a_{11} & a_{02} \\ b_{20} & b_{11} & b_{02} & 0 \\ 0 & b_{20} & b_{11} & b_{02} \end{bmatrix} = \\ &= a_{20}^2 b_{02}^2 + a_{02}^2 b_{20}^2 + a_{11}^2 b_{20} b_{02} + a_{20} a_{02} b_{11}^2 - 2 a_{20} a_{02} b_{20} b_{02} - a_{20} a_{11} b_{11} b_{02} - a_{11} a_{02} b_{20} b_{11}. \end{aligned}$$

В нашем случае речь идет о форме четвертой степени $q(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) =$

$$= \det \left(\begin{bmatrix} 0 & \delta u_0 & \delta u_1 & 0 \\ 0 & 0 & \delta u_0 & \delta u_1 \\ u_0 & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_0 & u_1 & 0 \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} -v_0 & -v_1 & -v_2 & 0 \\ 0 & -v_0 & -v_1 & -v_2 \\ 0 & 0 & w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w \end{bmatrix} \right). \quad (6)$$

Вычисление q выглядит довольно трудоемкой задачей. Один способ – подставить выражения для a_{ij} и b_{ij} через координаты общего целочисленного сечения в результат $R_{22}(a_{20}, a_{11}, a_{02}; b_{20}, b_{11}, b_{02})$. Другой способ состоит в вычислении m -разложения

$$q = q_0 + q_1 m + q_2 m^2 + q_3 m^3 + q_4 m^4, \quad (7)$$

где $q_0 = 0$, $q_4 = v_0^2 w^2$, а

$$q_1 = \delta^2 u_0^3 w - \delta v_0 u_1^3 + \delta v_1 u_0 u_1^2 - \delta v_2 u_0^2 u_1. \quad (8)$$

Наборы $(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) \in \mathbb{Z}^6$, удовлетворяющие условию

$$q(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) \in \mathbb{Z}[m^{-1}]^*, \quad (9)$$

соответствуют сечениям $s \in H^0(\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1, E)$, не имеющим нулей вне делителей m . В (9) символ $*$ обозначает переход к обратимым элементам кольца.

3.3 Невырожденность сечения над делителями m

Поймем, когда сечение s вида (5) не имеет нулей на $\mathbf{P}^1 \otimes \mathbb{Z}/\pi$, где π – простой делитель m . Для этого идентифицируем s как сечение $\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(3)$, пользуясь изоморфизмом из 2.2.2. В качестве базиса $\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(3)$ на U_0 возьмем $[t_0 g_1, t_0^3 g_2]$, где $[g_1, g_2]$ – стандартный глобальный базис \mathcal{O}^2 . Изоморфизм $E \otimes \mathbb{Z}/\pi \simeq \mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(3)$ (см. 2.2.2) на U_0 устроен так:

$$[t_0 g_1, t_0^3 g_2] \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ -\gamma x & \alpha \end{bmatrix} = t_0^2 [e_1, e_2].$$

Общее сечение $\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(3)$ имеет вид: $(a_{10} t_0 + a_{01} t_1) g_1 + (b_{30} t_0^3 + b_{21} t_0^2 t_1 + \dots + b_{03} t_1^3) g_2$. Выразим общее сечение E (см. (5)) в этих терминах: $s \pmod{\pi} = (u_0 + u_1 x + m w x^2) t_0^2 e_1 + (v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \delta w x^3) t_0^2 e_2 = (u_0 + u_1 x + m w x^2) (\delta t_0 g_1 - \gamma x t_0^3 g_2) + (v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + \delta w x^3) (\alpha t_0^3 g_2) = (\delta u_0 + \delta u_1 x + m \delta w x^2) t_0 g_1 + (\alpha v_0 + [\alpha v_1 - \gamma u_0] x + [\alpha v_2 - \gamma u_1] x^2 + w x^3) t_0^3 g_2$. Иначе говоря (приведем все по модулю π),

$$a_{10} = \delta u_0, a_{01} = \delta u_1, b_{30} = \alpha v_0, b_{21} = \alpha v_1 - \gamma u_0, b_{12} = \alpha v_2 - \gamma u_1, b_{03} = w.$$

Итак, по $s \in H^0(E)$ построили сечение $\mathcal{O}(1) + \mathcal{O}(3)$ над \mathbb{Z}/π , то есть пару полиномов: 1-й и 3-й степени. Наличие у них общих нулей детектируется результатом

$$R_{13}(a_{10}, a_{01}; b_{30}, b_{21}, b_{12}, b_{03}) = -b_{30} a_{01}^3 + b_{21} a_{10} a_{01}^2 - b_{12} a_{10}^2 a_{01} + b_{03} a_{10}^3.$$

Подставляем выражения для a_{ij} и b_{ij} через координаты общего сечения и получаем $-\alpha v_0 (\delta u_1)^3 + [\alpha v_1 - \gamma u_0] (\delta u_0) (\delta u_1)^2 - [\alpha v_2 - \gamma u_1] (\delta u_0)^2 (\delta u_1) + w (\delta u_0)^3 = \delta^3 [w u_0^3 - \alpha u_0^2 u_1 v_2 + \alpha u_0 u_1^2 v_1 - \alpha u_1^3 v_0]$. Получаем условие

$$w u_0^3 - \alpha u_0^2 u_1 v_2 + \alpha u_0 u_1^2 v_1 - \alpha u_1^3 v_0 \not\equiv 0 \pmod{\pi}. \quad (10)$$

Наборы $(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) \in \mathbb{Z}^6$, удовлетворяющие этому условию, соответствуют сечениям $s \in H^0(\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1, E)$, не имеющим нулей над \mathbb{Z}/π , где π – делитель m .

3.3.1. Замечание. Ниже в 3.4 нам потребуется некоторое наблюдение. А именно, сравним условие (10) с $q_1 = \delta^2 u_0^3 w - \delta v_0 u_1^3 + \delta v_1 u_0 u_1^2 - \delta v_2 u_0^2 u_1$ из m -разложения (см. (8)). Видим, что $\alpha^2 q_1$ сравнимо с левой частью (10) по модулю π (надо учесть, что $\alpha\delta = 1 \pmod{m}$).

3.4 Вывод

Фильтруемость F вида $0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}(2) \rightarrow 0$ равносильна существованию набора $(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) \in \mathbb{Z}^6$, удовлетворяющего условиям:

$$\begin{cases} q(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) \in \mathbb{Z}[m^{-1}]^*, \\ wu_0^3 - \alpha u_0^2 u_1 v_2 + \alpha u_0 u_1^2 v_1 - \alpha u_1^3 v_0 \pmod{m} \in (\mathbb{Z}/m)^*. \end{cases} \quad (11)$$

Отметим, что никаких локальных препятствий для разрешимости (11) нет. Чтобы увидеть это, достаточно заметить, что все вышеприведенные вычисления работают не только над базовым кольцом \mathbb{Z} , но и над $\mathbb{Z}_{(p)}$. А в этом случае для расслоений с простыми подскоками имеется не только $\mathcal{O}(-2)$ -, но и $\mathcal{O}(-1)$ -фильтруемость.

Хотя локальных препятствий для разрешимости (11) нет, но, используя некоторую глобальную информацию, а именно знание единиц $\mathbb{Z}[m^{-1}]$, можно слегка модифицировать систему (11), после чего локальные препятствия могут появиться.

А именно, пусть π_1, \dots, π_r – все простые делители m . Разрешимость (11), очевидно, равносильна существованию неотрицательных целых n_1, \dots, n_r и $\theta \in \mathbb{Z}^*$, для которых разрешима система

$$\begin{cases} q_1 m + q_2 m^2 + q_3 m^3 + q_4 m^4 = \theta \pi_1^{n_1} \dots \pi_r^{n_r}. \\ wu_0^3 - \alpha u_0^2 u_1 v_2 + \alpha u_0 u_1^2 v_1 - \alpha u_1^3 v_0 \pmod{m} \in (\mathbb{Z}/m)^*. \end{cases} \quad (12)$$

В этой системе q_1, q_2, q_3, q_4 – формы 4-й степени с коэффициентами в \mathbb{Z} от переменных $u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w$ (см. 3.3).

Более того, из совпадения (см. замечание 3.3.1) q_1 с формой второго условия (12) очевидно, что $n_i = \text{ord}_{\pi_i}(m)$ для всякого π_i , делящего m . Поэтому из второго условия следует, что система (12) равносильна существованию глобальной единицы $\theta \in \mathbb{Z}^*$, для которой разрешимо уравнение

$$(q/m)(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) = \theta.$$

Итак: пусть расслоение F задано матрицей склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha x^{-1} & \gamma \\ \gamma & \delta x \end{bmatrix}, \text{ где } \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \text{SL}_2 A, \gamma = m.$$

Тогда $\mathcal{O}(-2)$ -фильтруемость F равносильна разрешимости в \mathbb{Z} одного из уравнений:

$$(q/m)(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) = 1, \quad (q/m)(u_0, u_1, v_0, v_1, v_2, w) = -1. \quad (13)$$

4 Метод обратной задачи

Так как известна (см. 1.1) полная классификация интересующих нас расслоений (тривиальных в общем слое и с простыми подскоками), то мы можем пойти в обратную сторону. А именно, рассмотрим расслоение W , включенное в точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{\iota} W \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}(2) \rightarrow 0, \quad (14)$$

и выясним, когда общий слой тривиален, а все подскоки простые. После этого придется вычислить классификацию для таких W и посмотреть, все ли расслоения получаются таким образом.

Предположим, что W задано матрицей склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} y^2 & ay + b + cx \\ 0 & x^2 \end{bmatrix}, \text{ где } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

При этом подразумеваемые базисы W на U_0 и U_1 обозначаются $[e_1, e_2]$ и $[f_1, f_2]$.

4.1 Слои W

Для понимания слоев достаточно считать, что мы работаем над полем, и в этой ситуации вычислить $H^0(W(-1))$. Для этого можно, например, вычислить граничный гомоморфизм $\partial : H^0(\mathcal{O}(1)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}(-3)) = H^0(\mathcal{O}(1))^\vee$ в точной последовательности когомологий последовательности (14), подкрученной на $\mathcal{O}(-1)$, или вычислить $H^0(W(-1))$ с помощью матрицы склейки.

4.1.1 Предложение. *Имеются изоморфизмы*

$$W \simeq \begin{cases} \mathcal{O} + \mathcal{O}, & \text{если } b^2 - ac \neq 0; \\ \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1), & \text{если } b^2 - ac = 0, (a, b, c) \neq (0, 0, 0); \\ \mathcal{O}(-2) + \mathcal{O}(2), & \text{если } (a, b, c) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

Поэтому W имеет (тривиальный общий слой и) простые подскоки тогда и только тогда, когда

$$b^2 \neq ac \text{ и } \text{GCD}(a, b, c) = 1. \quad (15)$$

Доказательство. Предложение тотчас вытекает из следующего факта, который проверяется прямым вычислением. Для произвольного поля имеется соотношение

$$h^0(W(-1)) = 2 - \text{rk}_k \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

Здесь $h^0(W(-1)) = \text{rk}_k H^0(\mathbf{P}_k^1, W(-1) \otimes k)$. □

Далее предполагаем, что условие (15) выполнено.

4.2 Место W в классификации

Мы собираемся вычислить место W в классификации из 1.3.1. Эта классификация получена в [1] с помощью спектральной последовательности Бейлинсона [2]. Поэтому нужно вычислить эту последовательность для W . В рассматриваемом нами случае относительной размерности один спектральная последовательность вырождается в точную последовательность. Только ее мы и опишем.

Рассмотрим стандартную резольвенту для \mathcal{O}_Δ на $\mathbf{P}_\mathbb{Z}^1 \times \mathbf{P}_\mathbb{Z}^1$, а именно:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-1) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{i} \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0, \quad i = t_1 \boxtimes t_0 - t_0 \boxtimes t_1. \quad (16)$$

где $M \boxtimes N = p^*M \otimes q^*N$, а $p, q : \mathbf{P}_\mathbb{Z}^1 \times \mathbf{P}_\mathbb{Z}^1 \rightarrow \mathbf{P}_\mathbb{Z}^1$ – структурные проекции. Эта последовательность с помощью подкрутки на $W(1) \boxtimes \mathcal{O}(-1)$ индуцирует короткую точную последовательность

$$0 \rightarrow W \boxtimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{j^W} W(1) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow p^*W \otimes \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0, \quad (17)$$

где $j^W = j_0^W \boxtimes t_0 + j_1^W \boxtimes t_1$, $j_0^W = \text{id}_W \otimes t_1$, $j_1^W = -\text{id}_W \otimes t_0$.

Рассмотрим длинную точную последовательность высших прямых образов $R^i q_*$, связанную с (17):

$$0 \rightarrow H^0(W) \otimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{\phi} H^0(W(1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow W \rightarrow 0. \quad (18)$$

Для явного описания ϕ надо вычислить $H^0(W)$, $H^0(W(1))$ и выбрать базисы этих групп. Пусть

$$L = \mathcal{O}(2).$$

4.2.1 Лемма. *Группа $H^0(W)$ имеет следующее описание. Стрелка π (см. (14)) индуцирует вложение $H^0\pi : H^0(W) \hookrightarrow H^0(L)$. Кроме того,*

$$\text{Im } H^0\pi = \{u_0 t_0^2 + u_1 t_0 t_1 + u_2 t_1^2 \mid u_0, u_1, u_2 \in \mathbb{Z}, au_2 + bu_1 + cu_0 = 0\}.$$

4.2.2 Лемма. *Группа $H^0(W(1))$ имеет следующее описание. Стрелка $\pi(1)$ (см. (14)) индуцирует изоморфизм*

$$H^0(W(1)) \rightarrow H^0(L(1)) = \{v_0 t_0^3 + v_1 t_0^2 t_1 + v_2 t_0 t_1^2 + v_3 t_1^3 \mid v_0, v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{Z}\}.$$

Лемма 4.2.1 и лемма 4.2.2 проверяются прямым вычислением с использованием матрицы склейки.

4.2.3. Выбор базисов в когомологиях. В $H^0(W)$ все определено набором $(u_0, u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^3$, но не произвольным – см. (4.2.1). Для целей данной работы мы не будем рассматривать общую ситуацию, а ограничимся случаем, когда

$$(a, b) = 1.$$

Выберем и зафиксируем разложение

$$ua + vb = 1. \quad (19)$$

В качестве базиса $H^0(W)$ возьмем вектора, переходящие в

$$t_0^2 - vct_0t_1 - uct_1^2 \text{ и } bt_1^2 - at_0t_1 \quad (20)$$

при вложении $H^0(W) \hookrightarrow H^0(\mathcal{O}(3))$ (см. 4.2.1).

В $H^0(W(1))$ выберем базис, индуцированный стандартным базисом

$$t_0^3, t_0^2t_1, t_0t_1^2, t_1^3 \in H^0(\mathcal{O}(3)), \quad (21)$$

при изоморфизме $H^0(W(1)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}(3))$ (см. 4.2.2).

4.2.4 Лемма. В базисах $H^0(W)$ и $H^0(W(1))$ из (20) и (21) операция ϕ из точной последовательности (18) задана формулой

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -vc & -a \\ -uc & b \end{bmatrix} t_0 + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ vc & a \\ uc & -b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t_1. \quad (22)$$

Доказательство. Резольвента (16) с помощью подкрутки на $L(1) \boxtimes \mathcal{O}(-1)$ индуцирует точную последовательность

$$0 \rightarrow L \boxtimes \mathcal{O}(-2) \xrightarrow{j^L} L(1) \boxtimes \mathcal{O}(-1) \rightarrow p^*L \otimes \mathcal{O}_\Delta \rightarrow 0. \quad (23)$$

Стрелка $\pi(1)$ (см. (14)) индуцирует стрелку из (17) в (23). В частности, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^0(W) \otimes \mathcal{O}(-2) & \xrightarrow{\phi=H^0(j^W)} & H^0(W(1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \\ \downarrow H^0(\pi) \otimes \mathcal{O}(-2) & & \downarrow H^0(\pi(1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \\ H^0(L) \otimes \mathcal{O}(-2) & \xrightarrow{\phi^L=H^0(j^L)} & H^0(L(1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \end{array} \quad (24)$$

В стандартных базисах $H^0(L)$ и $H^0(L(1))$, то есть в базисах t_0^2, t_0t_1, t_1^2 и $t_0^3, t_0^2t_1, t_0t_1^2, t_1^3$, операция ϕ^L задана матрицей

$$\phi^L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} t_0 - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t_1. \quad (25)$$

Отсюда легко вытекает лемма, если учесть выбор базисов в $H^0(W)$ и $H^0(W(1))$ (см. 4.2.3). Для доказательства ввиду коммутативности (24) и инъективности ее левой стрелки достаточно проверить, что

$$\psi = \psi^L \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -vc & -a \\ -uc & b \end{bmatrix},$$

где матрица ψ задана правой частью формулы (22), матрица ψ^L задана правой частью формулы (25), а (2×3) -матрица выражает базис $H^0(W)$ через базис $H^0(\mathcal{O}(2))$ (см. (20)). Это равенство проверяется прямым вычислением. \square

4.2.5 Предложение. $W \simeq V(b^2 - ac, u + v^2c + abu^2v + acuv^2)$, где расслоение из правой части указано в (2).

Доказательство. По существу доказательство представляет собой проход по доказательству теоремы (1.3.1) в [1]. Приведем лишь результат этого процесса. А именно, предложение вытекает из равенства

$$D \left(C \left(B(A\phi) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ bu^2 + cuv & 1 \end{bmatrix} \right) \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u + v^2c + abu^2v + acuv^2 & 0 \\ b^2 - ac & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} t_0 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t_1, \quad (26)$$

где ϕ – матрица из (22), а A, B, C и D , соответственно, следующие матрицы:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & -v & 0 \\ c & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a^2 \\ 0 & 0 & -u^2 & bv^2 + 2auv \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -bu^2 - cuv & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -av \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Равенство (26) позволяет сделать подходящие замены базисов в $H^0(W)$ и $H^0(W(1))$. \square

4.3 Доказательство основной теоремы

Здесь приведено доказательство Теоремы 1.1.2. Пусть E – расслоение из условия Теоремы 1.1.2, то есть расслоение с простыми подскоками. Будем считать, что $E \simeq F$, где, как и в (4),

$$F = V(m, \alpha), \quad \text{GCD}(m, \alpha) = 1.$$

По теореме 1.3.1 такое предположение не ограничивает общности. Более того, не ограничивая общности, можем (и будем) считать, что

$$m > 1.$$

Действительно, если $|m| \leq 1$, то у F нет подскоков (см. 1.3.1). Кроме того, из Теоремы 1.3.2 вытекает, что мы можем заменить m на $(-m)$, не меняя расслоения.

4.3.1. Редукция. Из предложения 4.2.5 и теоремы 1.3.2 сразу же вытекает, что для включения F в точную последовательность вида $0 \rightarrow \mathcal{O}(-2) \rightarrow F \rightarrow \mathcal{O}(2) \rightarrow 0$ достаточно найти такие $a, b, c, u, v \in \mathbb{Z}$, что

$$b^2 - ac = \pm m; \quad (27)$$

$$ua + vb = 1; \quad (28)$$

$$u + v^2c + abvu^2 + acv^2u = \pm *^2 \cdot \alpha \pmod{m}, \quad (29)$$

где $*$ – произвольный элемент $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$.

4.3.2. Завершение доказательства. Завершим доказательство основной теоремы, показав разрешимость уравнений из 4.3.1. Пусть

$$m = 2^t p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n} = 2^t m_0 \quad (p_i - \text{нечетно}).$$

Начнем с выбора знака при α в (29), а точнее с выбора $\alpha^* = \pm\alpha$. Положим

$$\alpha^* = \begin{cases} \alpha, & \text{если } t = 0; \\ -\alpha, & \text{если } t > 0 \text{ и } \alpha \pmod{2^t} - \text{квадрат}; \\ \alpha, & \text{если } t > 0 \text{ и } \alpha \pmod{2^t} - \text{неквадрат}. \end{cases} \quad (30)$$

Теперь выберем такое $a \in \mathbb{N}$, что

$$a - \text{простое число}, \quad (31)$$

$$a \equiv -1 \pmod{8}, \quad (32)$$

и

$$\left(\frac{a}{p_i}\right) = \left(\frac{\alpha^*}{p_i}\right) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (33)$$

Такой выбор осуществим ввиду теоремы Дирихле о простых числах в арифметической прогрессии.

Из (30) и (32) вытекает, что

$$\alpha^* \equiv a \cdot *^2 \pmod{2^t}. \quad (34)$$

Действительно, при $t = 0$ и $t = 1$ проверять нечего, так как $(\mathbb{Z}/2^t\mathbb{Z})^* = 1$. При $t \geq 2$ надо проверить, что $\alpha^* \equiv -1 \pmod{2^t}$. Это сразу видно из (30).

Из (32) и нечетности p_i вытекает, что

$$\left(\frac{p_i}{a}\right) = \zeta_i \left(\frac{a}{p_i}\right) = \zeta_i \xi_i, \quad \text{где } \zeta_i = \left(\frac{-1}{p_i}\right), \quad \xi_i = \left(\frac{\alpha^*}{p_i}\right),$$

Поэтому (еще раз пользуемся (32)):

$$\left(\frac{\zeta_i \xi_i p_i}{a}\right) = 1. \quad (35)$$

Отметим, что кроме теоремы Дирихле использовали и закон взаимности Гаусса.

Положим

$$\zeta = \zeta_1^{s_1} \cdots \zeta_n^{s_n}, \quad \xi = \xi_1^{s_1} \cdots \xi_n^{s_n}. \quad (36)$$

Из (35) и (36) вытекает, что

$$\left(\frac{\zeta \xi m_0}{a}\right) = 1. \quad (37)$$

Из (32) вытекает, что

$$\left(\frac{2}{a}\right) = 1. \quad (38)$$

Из (37) и (38) вытекает, что

$$\left(\frac{\zeta \xi m}{a}\right) = 1. \quad (39)$$

Выберем произвольное $b \in \mathbb{Z}$, для которого

$$\zeta \xi m = b^2 \pmod{a}. \quad (40)$$

Возможность такого выбора обеспечена условием (39). Выберем $v \in \mathbb{Z}$ так, что

$$v = 1/b \pmod{a} \text{ и } v = 0 \pmod{m}. \quad (41)$$

Положим

$$u = \frac{1 - bv}{a}, \quad c = \frac{b^2 - \zeta \xi m}{a}.$$

Из (40) и (41) вытекает, что $u, c \in \mathbb{Z}$.

При произведенном выборе a, b, c, u и v по построению выполнены условия (27) и (28). Покажем, что (29) тоже выполнено. Действительно, из (33) вытекает, что $\alpha^* = a \cdot *^2 \pmod{m_0}$. Отсюда, с учетом (34), получаем, что

$$\alpha^* = a \cdot *^2 \pmod{m}. \quad (42)$$

Так как $v = 0 \pmod{m}$ (см. ((41))), то

$$u + v^2 c + abvu^2 + acv^2 u = 1/a \pmod{m}.$$

А это, ввиду (42), как раз и дает (29).

Таким образом, теорема 1.1.2 доказана.

Литература

- [1] *A. Smirnov*. On filtrations of vector bundles over $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1$, to appear.
- [2] *К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпидлер*. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. Москва, Мир, 1984.
- [3] *Ch. C. Hanna*. Subbundles of vector bundles on the projective line. J. Algebra, 52, no. 2, 322-327, 1978
- [4] *Р. Хартсхорн*. Алгебраическая геометрия. Москва, Мир, 1981.