ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов, Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ – 13/2014

О вычислении производящих функций обобщенных полиномов Чебышева нескольких переменных [1]

Е.В.Дамаскинский [*2], П.П.Кулиш [†3], М.А.Соколов [‡4]

[*] Военный институт (инженерно технический) в составе
Военной академии материально технического обеспечения

[†] Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

[‡] Санкт-Петербургский
государственный политехнический университет

15 декабря 2014

Аннотация

В работе предложен новый метод вычисления производящих функций полиномов Чебышева нескольких переменных, ассоциированных с корневыми системами простых алгебр Ли. В качестве примера получены производящие функции для полиномов двух переменных соответствующих алгебрам A_2, C_2 и G_2.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №12-01-00207-а и частично (ППК) грант №14-01-00341.

[2]evd@pdmi.ras.ru
[3]kulish@pdmi.ras.ru
[4]masokolov@gmail.com

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов, А. И. Генералов,
И. А. Ибрагимов, Л.Ю. Колотилина, Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье,
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин,
В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

1 Введение

В настоящей работе предложен новый метод вычисления производящих функций обобщенных полиномов Чебышева, ассоциированных с корневыми системами простых алгебр Ли. Метод иллюстрируется вычислением полиномов Чебышева двух переменных для простых алгебр Ли A_2, C_2 и G_2. Полиномы Чебышева нескольких переменных являются естественным обобщением классических полиномов одной переменной [1] и находят применение в разных областях математики (например в дискретном анализе и теории приближений [2], в линейной алгебре [3], [4], в теории представлений [5] - [7]) и в физике [8]- [12].

Классические полиномы Чебышева первого рода $T_n(x)$ определяются формулой

$$T_n(x) = T_n(\cos\phi) = \cos n\phi, \quad n = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Они удовлетворяют трехчленному рекуррентному соотношению

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \tag{2}$$

для которого полиномы

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x \tag{3}$$

являются начальными.

Простейшее d-мерное обобщение полиномов Чебышева сводится к произведению одномерных полиномов $T_{n_i}(x_i)$

$$T_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{d} T_{n_i}(x_i), \quad \mathbf{n} = (n_1, ..., n_d), \quad \mathbf{x} = (x_1, ..., x_d).$$

Однако значительно интереснее многомерные аналоги полиномов (1), связаные с системами корней простых алгебр Ли [13] - [19]. Напомним их определение, следуя в основном работе [16].

Пусть d-мерное евклидово пространство E^d разбито на регулярно расположенные соты или ячейки, представляющие собой выпуклые многогранники - аналог разбиения оси на интервалы периодичности функции $\cos\phi$. Будем считать, что существует множество гиперплоскостей, которые делят любой из этих многогранников на конечное число малых конгруэнтных многогранников, подобных исходному (в одномерном случае гиперплоскости вырождаются в точки, делящие интервалы периодичности пополам). Такие многогранники называются складываемыми (foldable). Отражение каждого многогранника относительно любой гиперплоскости переводит его в другой многогранник разбиения. Таким образом, сотовая струтура из складываемых многогранников определяется соответствующей группой отражений.

Пусть L - простая алгебра Ли, а R - приведенная система корней, являющихся векторами в d-мерном евклидовом пространстве E^d со скалярным произведением $(.,.)$. Система R полностью определяется базисом простых корней α_i, $i = 1, .., d$ и конечной группой отражений $W(R)$ системы корней R — группой Вейля. Порождающие элементы группы Вейля w_i, $i = 1, .., d$ действуют на простые корни по формуле $w_i\,\alpha_i = -\alpha_i$. Система корней R замкнута относительно действия группы Вейля. На любой вектор $x \in E^d$ элементы w группы $W(R)$ действуют по формуле

$$w_i\,x = x - \frac{2(x, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)}\alpha_i. \tag{4}$$

Каждому корню α системы R ставится в соответствие кокорень

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha,\alpha)}.$$

Для базиса простых кокорней $\alpha_i^\vee$, $i = 1,..,d$ определяется дуальный базис фундаментальных весов λ_i, $i = 1,..,d$

$$(\lambda_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$$

(дуальное пространство E^{d*} отождествляется с E^d). Базисы корней и весов связаны линейным преобразованием

$$\alpha_i = \sum_j C_{ij}\lambda_j, \quad C_{ij} = \frac{2(\alpha_i,\alpha_j)}{(\alpha_j,\alpha_j)}, \tag{5}$$

где C - матрица Картана алгебры Ли L.

Множество весов λ, удовлетворяющих неравенствам $(\lambda,\alpha_i) > 0$, где α_i - простые корни, называется доминантной камерой Вейля C_0. Образы C_0, полученные при действии на нее всеми элементами группы Вейля, называются камерами Вейля или фундаментальными областями. Таким образом, группа Вейля действует на множестве камер Вейля транзитивно. Камеры Вейля играют роль выпуклых многогранников в описанном выше разбиении пространства E^d. Отражение камеры Вейля относительно любой гиперплоскости (см. выше), сводится к композиции действия на нее элементов группы Вейля и группы трансляции. Полупрямое произведение группы Вейля W и коммутативной группы трансляций T называется афинной группой Вейля $\widetilde{W}$ системы корней, соответствущей простой алгебре Ли L, и является группой симметрии сотовой структуры простраства E^d.

Функция, являющаяся кандидатом на d - мерное обобщение $\cos n\phi$, т.е. многомерный полином Чебышева, должна обладать свойством периодичности и быть инвариантной относительно действия группы Вейля. Следуя [13] - [19], определим удовлетворяющую этим условиям W - инвариантную функцию d переменных (orbit function в терминологии работы [18]), положив

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{w\in \mathrm{W}} e^{2\pi \mathrm{i}(w\,\mathbf{n},\boldsymbol{\phi})}, \quad \Phi_{\tilde{w}\,\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}), \quad \forall \tilde{w} \in W, \tag{6}$$

где $\mathbf{n}$ выражается в базисе фундаментальных весов $\{\lambda_i\}$, а $\boldsymbol{\phi}$ в дуальном ему базисе $\{\alpha_i^\vee\}$ кокорней

$$\mathbf{n} = \sum_{i=1}^d n_i\lambda_i \quad n_i \in Z, \quad \boldsymbol{\phi} = \sum_{i=1}^d \phi_i\alpha_i^\vee \quad \phi_i \in [0,1).$$

Функция $\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi})$, определенная формулой (6), при целых неотрицательных n_i из набора $\mathbf{n} = (n_1,...,n_d)$, с точностью до нормировки дает полиномы Чебышева первого рода d переменных.

Для функции $\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi})$ справедливо правило умножения

$$\Phi_{\mathbf{k}}\Phi_{\mathbf{s}} = \sum_{w\in W} \Phi_{w\,\mathbf{k}+\mathbf{s}}. \tag{7}$$

Эта формула позволяет получать рекуррентные соотношения для соответствующих полиномов нескольких переменных.

Функцию $\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi})$ из формулы (6) можно представить в виде

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{k=1}^{|W|} e^{2\pi \mathrm{i} \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{d}} \mathrm{f}(\phi)_{\mathrm{ki}}\, \mathrm{n_i}},$$

где $f(\phi)_{ki}$ - некоторые линейные функции от $(\phi_1, .., \phi_d)$, а $|W|$ - порядок (число элементов) группы Вейля. Введем диагональную матрицу M с элементами

$$M = \mathrm{diag}\left(e^{2\pi \mathrm{i} \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{d}} \mathrm{f}(\phi)_{1\mathrm{i}}\, \mathrm{n_i}}, ..., e^{2\pi \mathrm{i} \sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{d}} \mathrm{f}(\phi)_{|\mathrm{W}|\mathrm{i}}\, \mathrm{n_i}} \right). \tag{8}$$

Тогда имеем

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \mathrm{tr}\, M. \tag{9}$$

Запишем матрицу M (8) в виде произведения диагональных матриц M_k

$$M = \prod_{k=1}^{d} M_k^{n_k}, \tag{10}$$

где

$$M_k = \mathrm{diag}\left(e^{2\pi \mathrm{i} \mathrm{f}(\phi)_{1\mathrm{k}}}, ..., e^{2\pi \mathrm{i} \mathrm{f}(\phi)_{|\mathrm{W}|\mathrm{k}}}\right) = e^{2\pi \mathrm{i} \mathrm{A_k}}, \quad A_k = \mathrm{diag}\left(f(\phi)_{1k}, ..., f(\phi)_{|W|k}\right). \tag{11}$$

Каждой M_k сопоставим матрицу

$$R_k = (I_{|W|} - p_k M_k)^{-1}, \tag{12}$$

где $I_{|W|}$ - единичная $|W| \times |W|$ матрица, а p_k - вещественный параметр. Матрица R_k отличается от резольвенты матрицы M_k положением спектрального параметра. Так как матрицы R_k диагональны, то они коммутируют друг с другом. Очевидно, справедлива формула

$$M_k^{n_k} = \frac{1}{n_k!} \frac{\mathrm{d^{n_k}}}{\mathrm{d^{n_k} p_k}} \left(R_{p_k}\right)\Big|_{p_k=0}. \tag{13}$$

Из (9), (10) и (13) следует соотношение

$$\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \Phi_{n_1,..,n_d}(\boldsymbol{\phi}) = \mathrm{tr}(M_1^{n_1}..M_n^{n_d}) = \frac{1}{n_1!..n_d!} \frac{\mathrm{d^n}}{\mathrm{d^{n_1} p_1..d^{n_d} p_n}} \left(\mathrm{tr}(R_{p_1}..R_{p_d})\right)\Big|_{p_1=..=p_d=0}. \tag{14}$$

Функцию $F^I_{p_1,..,p_d}$ параметров $\{p_i\}$, стоящую в формуле (14) под знаком производной

$$F^I_{p_1,..,p_d} = \mathrm{tr}(R_{p_1}..R_{p_d}) = \sum_{n_1..n_d \geq 0} \Phi_{n_1,..,n_d}(\boldsymbol{\phi}) p_1^{n_1}..p_d^{n_d}, \tag{15}$$

можно считать (ненормированной) производящей функцией полиномов Чебышева d переменных, хотя $F_{p_1,..,p_d}$ все еще определена в терминах экспонент $e^{2\pi \mathrm{i} \mathrm{f}(\phi)_{\mathrm{jk}}}$. Выражение следа $\mathrm{tr}(R_{p_1}..R_{p_d})$ в терминах переменных x_i, определяемых как

$$x_i \;=\; \Phi_{\mathbf{e}_i}(\boldsymbol{\phi}), \quad \mathbf{e}_i = (\overbrace{0, .., 0}^{i-1}, 1, \overbrace{0, .., 0}^{d-i}), \tag{16}$$

не слишком громоздко. Это будет проиллюстрировано ниже на примерах алгебр Ли A_2, C_2 и G_2.

После выражения производящей функции $F_{p_1,..,p_d}$ через переменные x_i, все $\Phi_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi})$ становятся функциями аргумента $\mathbf{x}$ и, с точностью до нормировки, полиномами Чебышева нескольких переменных первого рода.

Для вычисления производящих функций полинов Чебышева нескольких переменных второго рода требуется небольшая модификация описанного выше метода.

Классические полиномы Чебышева второго рода $U_n(x)$ определяются соотношением

$$U_n(x) = \frac{\sin{(n+1)\phi}}{\sin\phi}, \quad n \geq 0. \tag{17}$$

Они удовлетворяют тем же рекуррентным соотношениям (2), что и полиномы первого рода, но другим начальным условиям

$$U_0(x) = 1, \quad U_1(x) = 2x, \tag{18}$$

в предположении $U_{-1}(x) = 0$. Обобщение многочленов (17) на случай нескольких переменных основано на формуле характеров Вейля [21], [22], из которой следует

$$U_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{\sum\limits_{w\in \mathrm{W}} \det w \; e^{2\pi \mathrm{i}(w(\mathbf{n}+\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{\phi})}}{\sum\limits_{w\in \mathrm{W}} \det w \; e^{2\pi \mathrm{i}(w\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\phi})}}. \tag{19}$$

Детерминанты, стоящие в правой части формулы (19), определяются равенством $\det w = (-1)^{\ell(w)}$ где $\ell(w)$ - наименьшее число порождающих элементов группы Вейля, произведение которых дает элемент w, а ρ - полусумма положительных корней или вектор Вейля. С помощью формулы (5) вектор Вейля может быть выражен в базисе фундаментальных весов.

Знакопеременная функция

$$\Phi^{as}_{\mathbf{n}} = \sum_{w\in \mathrm{W}} \det w \; e^{2\pi \mathrm{i}(w(\mathbf{n}+\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{\phi})}$$

стоящая в числителе (19) может быть представлена в виде разности выражений $\Phi^{as+}_{\mathbf{n}}$ и $\Phi^{as-}_{\mathbf{n}}$

$$\Phi^{as}_{\mathbf{n}} = \Phi^{as+}_{\mathbf{n}} - \Phi^{as-}_{\mathbf{n}} = \sum_{w\in \mathrm{W},\, \det w=1} e^{2\pi \mathrm{i}(w(\mathbf{n}+\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{\phi})} - \sum_{w\in \mathrm{W},\, \det w=-1} e^{2\pi \mathrm{i}(w(\mathbf{n}+\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{\phi})}.$$

Дальнейшие вычисления повторяют изложенную выше схему (8) - (15) для каждой из функций $\Phi^{as\pm}_{\mathbf{n}}$ в отдельности. При этих вычислениях вместо $\Phi_{\mathbf{n}}$ из формулы (14) следует использовать соотношения

$$\Phi^{as}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{n_1!..n_d!} \, \frac{\mathrm{d^n}}{\mathrm{d^{n_1}p_1..d^{n_d}p_n}} \left(\mathrm{tr}(R^+_{p_1}..R^+_{p_d} - R^-_{p_1}..R^-_{p_d})\right)\Big|_{p_1=..=p_d=0}, \tag{20}$$

где матрицы $R^{\pm}_{p_i}$ используются для представления функций $\Phi^{as\pm}_{\mathbf{n}}$. Подробнее это показано ниже на конкретных примерах.

Для получения полиномов Чебышева второго рода следует, в соответствии с формулой (19), разделить функцию $\Phi^{as}_{\mathbf{n}}$ на сингулярный элемент $\Phi^{as}_{\mathbf{0}}$, где $\mathbf{0} = (\overbrace{0,..,0}^{d})$. Таким образом, порождающая функция полиномов Чебышева второго рода имеет вид

$$F^{II}_{p_1,..,p_d} = \frac{\mathrm{tr}(R^+_{p_1}..R^+_{p_d} - R^-_{p_1}..R^-_{p_d})}{\Phi_{\mathbf{0}}}. \tag{21}$$

Как и для полиномов первого рода, $F^{II}_{p_1,..,p_d}$ определена в терминах экспонент $e^{2\pi \mathrm{i} f(\phi)_{\mathrm{jk}}}$, однако переход к переменным $x_i = U_{\mathbf{e}_i}(\boldsymbol{\phi})$ не требует громоздких вычислений.

В оставшейся части работы мы приведен в качестве примера вывод производящих функций для обобщенных полиномов Чебышева двух переменных, ассоциированных с системами корней простых алгебр Ли A_2, C_2 и G_2.

2 Случай алгебры Ли A_2

2.1 Производящая функция полиномов I рода

В этом разделе мы рассмотрим полиномы Чебышева двух переменных, ассоциированые с системой корней алгебры Ли A_2. Такие полиномы были введены Коорнвиндером в работах [13], а их производящие функции были найдены в работе [20] другим методом.

Корневая система R алгебры Ли A_2 включает два фундаментальных корня α_1, α_2, положительный корень $\alpha_1+\alpha_2$ и отражения этих корней. Действие порождающих элементов w_1, w_2 группы Вейля $W(A_2)$ на фундаментальные корни α_1, α_2 имеет вид

$$w_1\alpha_1 = -\alpha_1, \quad w_1\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad w_2\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad w_2\alpha_2 = -\alpha_2.$$

Учитывая формулу (5) и вид матрицы Картана

$$C_{A_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

перепишем эти соотношения для фундаментальных весов

$$w_1\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad w_1\lambda_2 = \lambda_2, \quad w_2\lambda_1 = \lambda_1, \quad w_2\lambda_2 = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Действие других элементов группы на фундаментальные веса определяется их выражением через порождающие элементы

$$w_3 = w_1w_2, \quad w_4 = w_2w_1, \quad w_5 = w_1w_2w_1, \quad w_0 = e.$$

Кроме этого

$$\det w_1 = \det w_2 = \det w_5 = -1,$$

а определители остальных элементов группы Вейля равны единице. Вектор Вейля имеет вид

$$\rho = \alpha_1 + \alpha_2 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Используя приведенные выше формулы, вычислим W-инвариантную функцию двух переменных $\Phi_{m,n}$ (6), обозначив $\mathbf{n} = m\lambda_1 + n\lambda_2$, $\boldsymbol{\phi} = \phi\alpha_1^\vee + \psi\alpha_2^\vee$

$$\Phi_{m,n} = e^{2\pi \mathrm{i} m\phi} e^{2\pi \mathrm{i} n\psi} + e^{2\pi \mathrm{i} m(\psi-\phi)} e^{2\pi \mathrm{i} n\psi} + e^{2\pi \mathrm{i} m\phi} e^{2\pi \mathrm{i} n(\phi-\psi)} + e^{2\pi \mathrm{i} m(\psi-\phi)} e^{-2\pi \mathrm{i} n\phi} + \\ + e^{-2\pi \mathrm{i} m\psi} e^{2\pi \mathrm{i} n(\phi-\psi)} + e^{-2\pi \mathrm{i} m\psi} e^{-2\pi \mathrm{i} n\phi}. \quad [ac-1] \tag{22}$$

В соответствии с формулами (6) - (11), введем диагональные матрицы

$$\begin{aligned} A_1 &= \mathrm{diag}(\phi, \psi-\phi, \phi, \psi-\phi, -\psi, -\psi), \\ A_2 &= \mathrm{diag}(\psi, \psi, \phi-\psi, -\phi, \phi-\psi, -\phi), \end{aligned} \tag{23}$$

и определим матрицы M_1 и M_2

$$M_k = e^{2\pi \mathrm{i}\, \mathrm{A_k}}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда функцию $\Phi_{m,n}$ можно записать как след произведения степеней матриц M_k, $i = 1, 2$

$$\Phi_{m,n} = \mathrm{tr}(M_1^m M_2^n).$$

Рассмотрим матрицы

$$R_1 = (I_6 - pM_1)^{-1},\ R_2 = (I_6 - qM_2)^{-1},$$

где I_6 - единичная 6×6 матрица. Так как

$$\frac{1}{m!}\frac{dR_1^m}{dp^m}\bigg|_{p=0} = M_1^m, \quad \frac{1}{n!}\frac{dR_2^n}{dq^n}\bigg|_{q=0} = M_2^n,$$

то функция $\Phi_{m,n}$ может быть выражена через произведение $R_1 R_2$

$$\Phi_{m,n} = \frac{1}{m!n!}\ \frac{d^{m+n}\mathrm{tr}(R_1 R_2)}{dp^m dq^n}\bigg|_{p,q=0}.$$

Матрица $R_1 R_2$ диагональна и ее след имеет вид

$$\mathrm{tr}(R_1\, R_2) = \frac{1}{(1-pe^{2\pi \mathrm{i}\phi})(1-qe^{2\pi \mathrm{i}\psi})} + \frac{1}{(1-pe^{2\pi \mathrm{i}(\psi-\phi)})(1-qe^{2\pi \mathrm{i}\psi})} + \\ \frac{1}{(1-pe^{2\pi \mathrm{i}\phi})(1-qe^{-2\pi \mathrm{i}(\phi-\psi)})} + + \frac{1}{(1-pe^{2\pi \mathrm{i}(\psi-\phi)})(1-qe^{-2\pi \mathrm{i}\phi})} + \\ \frac{1}{(1-pe^{-2\pi \mathrm{i}\psi})(1-qe^{2\pi \mathrm{i}(\phi-\psi)})} + \frac{1}{(1-pe^{-2\pi \mathrm{i}\psi})(1-qe^{2\pi \mathrm{i}\phi})}.$$

Приводя сумму в правой части этого выражения к общему знаменателю и выражая экспоненциальные коэффициенты перед p, q через комплексно-сопряженные переменные z, $\bar{z}$, определяемые формулами

$$z = \frac{1}{2}\Phi_{1,0} = e^{2\pi \mathrm{i}\phi} + e^{2\pi \mathrm{i}(\psi-\phi)} + e^{-2\pi \mathrm{i}\psi}, \quad \bar{z} = \frac{1}{2}\Phi_{0,1} = e^{2\pi \mathrm{i}\psi} + e^{2\pi \mathrm{i}(\phi-\psi)} + e^{-2\pi \mathrm{i}\phi}. \tag{24}$$

получаем производящую функцию полиномов Чебышева первого рода переменных z, $\bar{z}$, ассоциированных с алгеброй Ли A_2

$$F^I_{p,q} = \frac{\sum\limits_{i,j=0}^{2} K_{ij} p^i q^j}{(1 - zp + \bar{z}p^2 - p^3)(1 - \bar{z}q + zq^2 - q^3)}, \tag{25}$$

где коэффициенты K_{ij} даются формулами

$$\begin{aligned}
K_{00} &= 6, \\
K_{10} &= -4z, \\
K_{20} &= 2\bar{z}, \\
K_{01} &= -4\bar{z}, \\
K_{11} &= 3(z\bar{z} - 1), \\
K_{21} &= -2(\bar{z}^2 - z), \\
K_{02} &= 2z, \\
K_{12} &= -2(z^2 - \bar{z}), \\
K_{22} &= z\bar{z} - 3.
\end{aligned} \tag{26}$$

Полученная функция (25) с коэффициентами (26) совпадает с соответствующей производящей функцией для полиномов Чебышева первого рода, полученной в [20] (теорема 3.3). Вычисленные с помощью этой производящей функции полиномы отличаются нормировкой от полиномов, введенных Коорнвиндером в работах [13]. Если положить

$$T_{0,0} = \frac{1}{6}\,\Phi_{0,0}; \quad T_{m,0} = \frac{1}{2}\,\Phi_{m,0}; \quad T_{0,n} = \frac{1}{2}\,\Phi_{0,n}; \quad T_{m,n} = \Phi_{m,n}, \quad mn \neq 0;$$

получаем полиномы Чебышева первого рода $T_{m,n}$ в нормировке Коорнвиндера. Приведем несколько полиномов, учитывая свойство $T_{m,n} = \overline{T}_{n,m}$,

$$\begin{aligned}
T_{0,0} &= 1, \\
T_{1,0} &= z, \\
T_{2,0} &= z^2 - 2\bar{z}, \\
T_{1,1} &= z\bar{z} - 3, \\
T_{3,0} &= z^3 - 3z\bar{z} + 3, \\
T_{2,1} &= z^2\bar{z} - 2\bar{z}^2 - z), \\
T_{4,0} &= z^4 - 4z^2\bar{z} + 2\bar{z}^2 - 2 + 4z, \\
T_{3,1} &= z^3\bar{z} - 3z\bar{z}^2 - z^2 + 5\bar{z}, \\
T_{2,2} &= z^2\bar{z}^2 - 2z^3 - 2\bar{z}^3 + 4z\bar{z} - 3.
\end{aligned}$$

Полиномы $\Phi_{m,n}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям в форме (7)

$$\Phi_{k+1,m} = \Phi_{1,0}\,\Phi_{k,m} - \Phi_{k,m-1} - \Phi_{k-1,m+1} \tag{27}$$

$$\Phi_{k,m+1} = \Phi_{0,1}\,\Phi_{k,m} - \Phi_{k-1,m} - \Phi_{k+1,m-1}. \tag{28}$$

Рекуррентные соотношения (28) можно привести к "линейной" форме простым преобразованием

$$\Phi_{k+1,m} = \Phi_{1,0}\,\Phi_{k,m} - \Phi_{0,1}\,\Phi_{k-1,m} + \Phi_{k-2,m}, \tag{29}$$
$$\Phi_{k,m+1} = \Phi_{0,1}\,\Phi_{k,m} - \Phi_{1,0}\,\Phi_{k,m-1} + \Phi_{k,m-2}, \tag{30}$$

в которой изменяется либо только первый индекс, либо только второй. Используя "линейную" форму рекуррентных соотношений можно также получать производящие функции полиномов Чебышева нескольких переменных, что мы продемонстрируем в разделе, посвященном полиномам ассоциированным с системой корней алгебры C_2.

2.2 Производящая функция полиномов II рода

Перейдем к выводу производящей функции полиномов Чебышева второго рода.

Вид вектора Вейля в терминах фундаментальных корней $\rho = \lambda_1 + \lambda_2$ показывает, что общая формула (19) в рассматриваемом случае имеет вид

$$U_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{\sum\limits_{w\in \mathrm{W}} \det w\, e^{2\pi \mathrm{i}(w(\mathbf{n}+\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{\phi})}}{\sum\limits_{w\in \mathrm{W}} \det w\, e^{2\pi \mathrm{i}(w\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\phi})}} = \frac{\Phi^{as}_{\mathbf{n+1}}}{\Phi^{as}_{\mathbf{1}}}, \tag{31}$$

где, с учетом того, что $\mathbf{n} = (m, n)$, числитель и знаменатель (31) определяются выражениями

$$\begin{aligned}\Phi^{as}_{m+1,n+1} = {} & (e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{m}+1)\phi} e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{n}+1)\psi} + e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{m}+1)(\psi-\phi)} e^{-2\pi \mathrm{i}(\mathrm{n}+1)\phi} + e^{-2\pi \mathrm{i}(\mathrm{m}+1)\psi} e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{n}+1)(\phi-\psi)}) - \\ & - (e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{m}+1)(\psi-\phi)} e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{n}+1)\psi} + e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{m}+1)\phi} e^{2\pi \mathrm{i}(\mathrm{n}+1)(\phi-\psi)} + e^{-2\pi \mathrm{i}(\mathrm{m}+1)\psi} e^{-2\pi \mathrm{i}(\mathrm{n}+1)\phi}),\end{aligned} \tag{32}$$

$$\Phi^{as}_{1,1} = (e^{2\pi \mathrm{i}(\phi+\psi)} + e^{2\pi \mathrm{i}(\psi-2\phi)} + e^{2\pi \mathrm{i}(\phi-2\psi)}) - (e^{2\pi \mathrm{i}(2\psi-\phi)} + e^{2\pi \mathrm{i}(2\phi-\psi)} + e^{-2\pi \mathrm{i}(\phi+\psi)}), \tag{33}$$

Введем новые переменные

$$U_{10} = \frac{\Phi^{as}_{2,1}}{\Phi^{as}_{1,1}}, \quad U_{01} = \frac{\Phi^{as}_{1,2}}{\Phi^{as}_{1,1}}.$$

Используя формулы (32), (33), получаем

$$U_{10} = z, \qquad U_{01} = \bar{z},$$

где z и $\bar{z}$ определены в (24).

В соответсвии с методом, описанным во Введении, определим четыре диагональные матрицы

$$\begin{aligned} M_{1+} &= \mathrm{diag}(e^{2\pi \mathrm{i}\phi}, e^{2\pi \mathrm{i}(\psi-\phi)}, e^{-2\pi \mathrm{i}\psi}), \quad M_{2+} = \mathrm{diag}(e^{2\pi \mathrm{i}\psi}, e^{-2\pi \mathrm{i}\phi}, e^{2\pi \mathrm{i}(\phi-\psi)}), \\ M_{1-} &= \mathrm{diag}(e^{2\pi \mathrm{i}(\psi-\phi)}, e^{2\pi \mathrm{i}\phi}, e^{-2\pi \mathrm{i}\psi}), \quad M_{2-} = \mathrm{diag}(e^{2\pi \mathrm{i}\psi}, e^{2\pi \mathrm{i}(\phi-\psi)}, e^{-2\pi \mathrm{i}\phi}). \end{aligned}$$

В терминах этих матриц функция $\Phi^{as}_{m,n}$ может быть записана в виде

$$\Phi^{as}_{m,n} = \mathrm{tr}(M^m_{1+} M^n_{2+} - M^m_{1-} M^n_{2-}).$$

Рассмотрим матрицы $R_{1\pm} = (I_6 - pM_{1\pm})^{-1}$, $R_{2\pm} = (I_6 - qM_{2\pm})^{-1}$. Из соотношений

$$\frac{1}{m!}\,\frac{dR^m_{1\pm}}{dp^m}\bigg|_{p=0} = M^m_{1\pm}, \quad \frac{1}{n!}\,\frac{dR^n_{2\pm}}{dp^n}\bigg|_{q=0} = M^n_{2\pm},$$

следует, что функция

$$F^{II}_r(p,q) = \frac{\mathrm{tr}(R_{1+}R_{2+} - R_{1-}R_{2-})}{a\Phi_{1,1}},$$

является производящей функцией полиномов Чебышева двух переменных второго рода

$$U_{m,n} = \frac{1}{(m+1)!(n+1)!}\,\frac{d^{m+n+2}F^{II}_r(p,q)}{dp^{m+1}dq^{n+1}}\bigg|_{p=0,q=0}.$$

Вычисление следов матриц $R_{1+}\,R_{2+}$ и $R_{1-}\,R_{2-}$ дает

$$\mathrm{tr}(R_{1+}R_{2+}) = \frac{1}{(1-pe^{iA})(1-qe^{iB})} + \frac{1}{(1-pe^{i(B-A)})(1-qe^{iA})} + \frac{1}{(1-pe^{-iB})(1-qe^{i(A-B)})},$$

$$\mathrm{tr}(R_{1-}R_{2-}) = \frac{1}{(1-pe^{i(B-A)})(1-qe^{iB})} + \frac{1}{(1-pe^{iA})(1-qe^{i(A-B)})} + \frac{1}{(1-pe^{-iB})(1-qe^{-iA})},$$

Приводя дроби в $\mathrm{tr}(R_{1+}R_{2+} - R_{1-}R_{2-})$ к общему знаменателю и учетывая определение $z, \bar{z}$ (24), приходим к формуле

$$\mathrm{tr}(R_{1+}R_{2+} - R_{1-}R_{2-}) = \frac{pq\,\Phi_{11}(1-pq)}{(1-zp+\bar{z}p^2-p^3)(1-\bar{z}q+zq^2-q^3)}.$$

Сократив полученное выражение на сингулярный элемент Φ^{as}_{11} и на произведение pq (чтобы индексы полиномов соответствовали порядку дифференцирования) получем для производящей функции многочленов Чебышева второго рода стандартное выражение [20]

$$F^{II}(p,q) = \frac{1-pq}{(1-zp+\bar{z}p^2-p^3)(1-\bar{z}q+zq^2-q^3)}. \tag{34}$$

Многочлены полученные Коорнвиндером воспризводятся с помощью $F^{II}(p,q)$ без дополнительной нормировки

$$U_{m,n} = \frac{1}{m!n!}\,\frac{d^{m+n}F^{II}(p,q)}{dp^m dq^n}\bigg|_{p=0,q=0}. \tag{35}$$

Выпишем несколько первых многочленов

$$\begin{aligned}
U_{0,0} &= 1,\\
U_{1,0} &= z,\\
U_{2,0} &= z^2 - \bar{z},\\
U_{1,1} &= z\bar{z} - 1,\\
U_{3,0} &= z^3 - 2z\bar{z} + 1,\\
U_{2,1} &= z^2\bar{z} - \bar{z}^2 - z,\\
U_{4,0} &= z^4 - 3z^2\bar{z} + \bar{z}^2 + 2z,\\
U_{3,1} &= z^3\bar{z} - 2z\bar{z}^2 - z^2 + 2\bar{z},\\
U_{2,2} &= z^2\bar{z}^2 - z^3 - \bar{z}^3.
\end{aligned}$$

3 Случай алгебры Ли C_2

3.1 Производящая функция полиномов I рода

Корневая система алгебры Ли C_2 имеет два фундаментальных корня α_1, α_2 и включает положительные корни $\alpha_1+\alpha_2$, $2\alpha_1+\alpha_2$ и их отражения. Используя формулу (4) и матрицу Картана алгебры C_2

$$C_{C_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

получаем действие порождающих элементов w_1, w_2 группы Вейля $W(C_2)$ на фундаментальные корни

$$w_1\alpha_1 = -\alpha_1, \quad w_1\alpha_2 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \quad w_2\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad w_2\alpha_2 = -\alpha_2.$$

Учитывая формулу (5), переписываем эти соотношения для фундаментальных весов

$$w_1\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad w_1\lambda_2 = \lambda_2, \quad w_2\lambda_1 = \lambda_1, \quad w_2\lambda_2 = 2\lambda_1 - \lambda_2.$$

Действие остальных элементов группы определяется их представлением через порождающие элементы

$$w_3 = w_1w_2, \quad w_4 = w_2w_3, \quad w_5 = w_1w_2w_1, \quad w_6 = w_2w_1w_2, \quad w_7 = (w_1w_2)^2, \quad e = w_0. \tag{36}$$

Определители элементов группы Вейля

$$\det w_1 = \det w_2 = \det w_5 = \det w_6 = -1,$$

остальные равны единице. Вектор Вейля имеет вид

$$\rho = 2\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 = \lambda_1 + \lambda_2. \tag{37}$$

Действуя аналогично случаю A_2, вычислим W - инвариантную функцию двух переменных $\Phi_{m,n}$ (6), используя те же обозначения $\mathbf{n} = m\lambda_1 + n\lambda_2$, $\boldsymbol{\phi} = \phi\alpha_1^\vee + \psi\alpha_2^\vee$.

$$\begin{aligned}\Phi_{m,n} = {} & e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}\phi+\mathrm{n}\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}(\psi-\phi)+\mathrm{n}\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}\phi+\mathrm{n}(2\phi-\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}(\psi-\phi)+\mathrm{n}(-2\phi+\psi))} + \\ & + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}(\phi-\psi)+\mathrm{n}(2\phi-\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{m}\phi+\mathrm{n}(-2\phi+\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}(\phi-\psi)-\mathrm{n}\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{m}\phi-\mathrm{n}\psi)}.\end{aligned} \tag{38}$$

Отметим, что функция $\Phi_{m,n}$ (38) - вещественна.

Матрицы A_i (23) в рассматриваемом случае имеют вид

$$A_1 = \mathrm{diag}(\phi, \psi-\phi, \phi, \psi-\phi, \phi-\psi, -\phi, \phi-\psi, -\phi)$$

и

$$A_2 = \mathrm{diag}(\psi, \psi, 2\phi-\psi, -2\phi+\psi, 2\phi-\psi, -2\phi+\psi, -\psi, -\psi).$$

Тогда W - инвариантная функция $\Phi_{m,n}$ выражается через матрицы $M_k = e^{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{A_k}}, \quad k = 1, 2$ в виде следа

$$\Phi_{m,n} = \mathrm{tr}(M_1^m M_2^n).$$

Следуя работе [18], определим полиномы Чебышева первого рода для алгебры C_2 соотношениями

$$T_{0,0} = \frac{1}{8}\Phi_{0,0}, \quad T_{m,0} = \frac{1}{2}\Phi_{m,0}, \quad T_{0,n} = \frac{1}{2}\Phi_{0,n}, \quad T_{m,n} = \Phi_{m,n} \quad m \cdot n \neq 0. \tag{39}$$

При таком определении $T_{0,0} = 1$, новые вещественные переменные x, y даются формулами

$$x = T_{1,0} = e^{2\pi \mathrm{i}\phi} + e^{-2\pi \mathrm{i}\phi} + e^{2\pi \mathrm{i}(\phi-\psi)} + e^{-2\pi \mathrm{i}(\phi-\psi)}, \tag{40}$$

$$y = T_{0,1} = e^{2\pi \mathrm{i}\psi} + e^{-2\pi \mathrm{i}\psi} + e^{2\pi \mathrm{i}(2\phi-\psi)} + e^{-2\pi \mathrm{i}(2\phi-\psi)}, \tag{41}$$

а все полиномы $T_{m,n}$ (примеры которых приведены в (44)) имеют целечисленные коэффициенты.

Переходя к вычислению производящей функции, введем матрицы

$$R_p = (I_8 - pM_1)^{-1}, \quad R_q = (I_8 - qM_2)^{-1},$$

которые как и матрицы M_i диагональны с диагональными элементами вида

$$\left(1 - p\exp\left(2\pi \mathrm{i}(\mathrm{A}_1)_{\mathrm{kk}}\right)\right)^{-1}, \quad \left(1 - q\exp\left(2\pi \mathrm{i}(\mathrm{A}_2)_{\mathrm{kk}}\right)\right)^{-1},$$

где $(A_i)_{kk}$ - диагональные элементы матриц A_i, $i = 1, 2$, I_8 - единичная 8×8 матрица. Подставляя R_p, R_q в формулу (14) и выражая коэффициенты при p, q через x (40) и y (41), получаем из (15)

$$F^I_{p,q} = \frac{\sum\limits_{i,j=0}^{3} K_{ij} p^i q^j}{(1 - xp + (2+y)p^2 - xp^3 + p^4)(1 - yq + (x^2 - 2y - 2)q^2 - yq^3 + q^4)}, \tag{42}$$

где K_{ij} даются формулами

$$
\begin{aligned}
K_{00} &= 8,\\
K_{10} &= -6x,\\
K_{20} &= 4y+8,\\
K_{30} &= -2x,\\
K_{01} &= -6y,\\
K_{11} &= 5xy-2x,\\
K_{21} &= -4y^2+2x^2-10y,\\
K_{31} &= 2xy-2x,\\
K_{02} &= 4x^2-8y-8,\\
K_{12} &= -4x^3+9xy+10x,\\
K_{22} &= 3x^2y-6y^2+4x^2-20y-8,\\
K_{32} &= -2x^3+5xy+6x,\\
K_{03} &= -2y,\\
K_{13} &= 2xy-2x,\\
K_{23} &= -2y^2+2x^2-6y,\\
K_{33} &= xy-2x.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Вычисленные с помощью (42) с нормировкой (39), несколько первых полиномов имеют вид

$$
\begin{aligned}
T_{0,0} &= 1,\\
T_{1,0} &= x,\\
T_{2,0} &= x^2-2y-4,\\
T_{3,0} &= x^3-3xy-3x,\\
T_{0,1} &= y,\\
T_{1,1} &= xy-2x,\\
T_{2,1} &= x^2y-2y^2-6y,\\
T_{3,1} &= x^3y-3xy^2-4xy+2x,\\
T_{0,2} &= y^2-2x^2+4y+4,\\
T_{1,2} &= xy^2-2x^3+3xy+6x,\\
T_{2,2} &= x^2y^2-2x^4-2y^3-12y^2+8x^2y+10x^2-20y-8,\\
T_{3,2} &= x^3y^2-2x^5-3xy^3+10x^3y-15y^2x+10x^3-25xy-10x,\\
T_{0,3} &= y^3-3x^2y+6y^2+9y,\\
T_{1,3} &= xy^3-3x^3y+5y^2x+2x^3+6xy-6x,\\
T_{2,3} &= x^2y^3-2y^4-3x^4y-16y^3+12x^2y^2+20x^2y-40y^2-30y,\\
T_{3,3} &= x^3y^3-3x^5y-3xy^4+15x^3y^2-21xy^3+18x^3y-45y^2x-2x^3-21xy+6x.
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Рекуррентные соотношения в терминах полиномов $\Phi_{m,n}$ получаем с помощью правила умножения (7), действуя всеми элементами группы Вейля сначала на вектор $\mathbf{k}=(1,0)$,

а затем на вектор $\mathbf{k} = (0,1)$. Результат складываем с вектором $\mathbf{s} = m\lambda_1 + n\lambda_2$. В рассматриваемом случае рекуррентные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi_{1,0}\Phi_{m,n} &= \Phi_{m+1,n} + \Phi_{m-1,n} + \Phi_{m+1,n-1} + \Phi_{m-1,n+1}, & (45)\\ \Phi_{0,1}\Phi_{m,n} &= \Phi_{m,n+1} + \Phi_{m,n-1} + \Phi_{m+2,n-1} + \Phi_{m-2,n+1}. & (46) \end{aligned}$$

Иногда такие соотношения удобно представлять в форме, которая выше называлась "линейной" (см. рекуррентные соотношения (29), (30)). Не всегда однако переход к линейной форме очевиден, как в случае (29), (30)). Покажем, как эту линейную форму рекуррентных соотношений можно получить, используя приведенные выше выкладки.

Определитель матрицы $pI_8 - M_1$, дает нам характеристическое уравнение, которому удовлетворяет матрица M_1. Поскольку все собственные числа этой матрицы имеют кратность 2, то минимальный полином M_1 (после перехода к переменным x, y) будет иметь вид

$$P_1 = 1 - xp + (2+y)p^2 - xp^3 + p^4,$$

следовательно, матрица M_1 будет удовлетворять уравнению

$$M_1^4 - xM_1^3 + (2+y)M_1^2 - xM_1 + I_8 = 0.$$

Умножая это уравнение слева на $M_1^{m-4}M_2^n$ и взяв след, получаем

$$\Phi_{m,n} - x\Phi_{m-1,n} + (2+y)\Phi_{m-2,n} - x\Phi_{m-3,n} + \Phi_{m-4,n} = 0. \qquad (47)$$

Действуя аналогично с матрицей M_2, получаем характеристический полином

$$P_2 = 1 - yq + (x^2 - 2y - 2)q^2 - yq^3 + q^4$$

и второе рекуррентное соотношение

$$\Phi_{m,n} = y\Phi_{m,n-1} - (x^2 - 2y - 2)\Phi_{m,n-2} + y\Phi_{m,n-3} - \Phi_{m,n-4}. \qquad (48)$$

Полученные линейные рекуррентные соотношения (47) и (48) могут быть проверены независимо прямой подстановкой в них соотношений (45) и (46) с учетом определения переменных x, y.

Рекуррентные соотношения (47) и (48) позволяют найти производящую функцию (42) несколько иначе, чем это было сделано выше. Перепишем эти соотношения, соотвественно, в следующей форме

$$\Phi_{m,n} = \begin{pmatrix} \Phi_{m-1,n}\,; & -\Phi_{m-2,n}\,; & \Phi_{m-3,n}\,; & -\Phi_{m-4,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (49)$$

$$\Phi_{m,n} = \begin{pmatrix} \Phi_{m,n-1}\,; & -\Phi_{m,n-2}\,; & \Phi_{m,n-3}\,; & -\Phi_{m,n-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x^2 - 2y - 2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad (50)$$

Итерируя полученные формулы, заменяя полиномы в строках их выражениями через соотношения (47) и (48), преобразуем (49) и (50) к виду

$$\Phi_{m,n} = \left(\ \Phi_{m-1-k,n}\,; \quad -\Phi_{m-2-k,n}\,; \quad \Phi_{m-3-k,n}\,; \quad -\Phi_{m-4-k,n} \ \right) M_x^k \begin{pmatrix} x \\ y+2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

$$\Phi_{m,n} = \left(\ \Phi_{m,n-1-k}\,; \quad -\Phi_{m,n-2-k}\,; \quad \Phi_{m,n-3-k}\,; \quad -\Phi_{m,n-4-k} \ \right) M_y^k \begin{pmatrix} y \\ x^2-2y-2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

где

$$M_x = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ y+2 & 0 & -1 & 0 \\ y & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_y = \begin{pmatrix} y & -1 & 0 & 0 \\ x^2-2y-2 & 0 & -1 & 0 \\ y & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для $k = m-4$ в формуле (51) и $k = n-4$ в формуле (52) имеем соответственно

$$\Phi_{m,n} = \left(\ \Phi_{3,n}\,; \quad -\Phi_{2,n}\,; \quad \Phi_{1,n}\,; \quad -\Phi_{0,n} \ \right) M_x^{m-4} \begin{pmatrix} x \\ y+2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_{m,n} = \left(\ \Phi_{m,3}\,; \quad -\Phi_{m,2}\,; \quad \Phi_{m,1}\,; \quad -\Phi_{m,0} \ \right) M_y^{n-4} \begin{pmatrix} y \\ x^2-2y-2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\det(M_x) = \det(M_y) = 1$, то

$$M_x^{-4} \begin{pmatrix} x \\ y+2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} = M_y^{-4} \begin{pmatrix} y \\ x^2-2y-2 \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = V_0.$$

Следовательно, соотношения (51), (52) преобразуются к виду

$$\Phi_{m,n} = \left(\ \Phi_{3,n}\,; \quad -\Phi_{2,n}\,; \quad \Phi_{1,n}\,; \quad -\Phi_{0,n} \ \right) M_x^{m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{53}$$

$$\Phi_{m,n} = \left(\ \Phi_{m,3}\,; \quad -\Phi_{m,2}\,; \quad \Phi_{m,1}\,; \quad -\Phi_{m,0} \ \right) M_y^{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{54}$$

С помощью приведеных формул, можно, зная полиномы Чебышева с индексами $0 \leq m, n \leq 3$, получить полиномы с произвольными индексами. Действительно, воспользовавшись формулой (53), по полиномам $\Phi_{m,n},\ 0 \leq m, n \leq 3$ находим полиномы $\Phi_{m,0}, \Phi_{m,1}, \Phi_{m,2}$, $\Phi_{m,3}$ с произвольным индексом m. Затем, с помощью формулы (54), находим полином $\Phi_{m,n}$ с произвольным индексом n. Заметим однако, что вычисления этим вторым способом будут более громоздкими, чем первым, поскольку коэффициенты K_{mn} с индексами $0 \leq m, n \leq 3$ включают значительно меньше слагаемых, чем полиномы $\Phi_{m,n}$. В этом легко убедиться в случае алгебры C_2, сравнив формулы (43) и (44). С другой стороны, в производящую функцию входят начальные полиномы, которые могут быть заданы произвольно. Полученные с такой функцией полиномы будут удовлетворять линейным рекуррентным соотношениям, но, вообще говоря, не оригинальным (45) и (46), которые являются более специализированными. Таким образом, произвол в задании начальных полиномов оказывается ограниченным.

3.2 Производящая функция полиномов II рода

В вычислениях этого раздела будем в основном следовать Введению и п. 2.2. Поскольку вектор Вейля для алгебры C_2 (как и для A_2) равен $\rho = \lambda_1 + \lambda_2$ (37), то порождающая функция полиномов Чебышева второго рода имеет вид (31)

$$U_{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\phi}) = \frac{\sum\limits_{w \in \mathrm{W}} \det w\, e^{2\pi \mathrm{i}(w(\mathbf{n}+\boldsymbol{\rho}),\boldsymbol{\phi})}}{\sum\limits_{w \in \mathrm{W}} \det w\, e^{2\pi \mathrm{i}(w\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\phi})}} = \frac{\Phi^{as}_{\mathbf{n+1}}}{\Phi^{as}_{\mathbf{1}}}.$$

Используя $\mathbf{n} = (m, n)$, $\mathbf{1} = (1, 1)$, $\boldsymbol{\phi} = \phi\alpha_1^\vee + \psi\alpha_2^\vee$, для $\Phi^{as}_{m,n}$ и сингулярного элемента $\Phi^{as}_{1,1}$ получаем, соответственно

$$\begin{aligned}\Phi^{as}_{m,n} = &\left(e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}\phi+\mathrm{n}\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}(\psi-\phi)+\mathrm{n}(-2\phi+\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{m}\phi-\mathrm{n}\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}(\phi-\psi)+\mathrm{n}(2\phi-\psi))}\right) - \\ &- \left(e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}(\psi-\phi)+\mathrm{n}\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}\phi+\mathrm{n}(2\phi-\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(-\mathrm{m}\phi+\mathrm{n}(-2\phi+\psi))} + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}(\phi-\psi)-\mathrm{n}\psi)}\right),\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}\Phi^{as}_{1,1} = &\left(e^{2\pi\mathrm{i}(\phi+\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(2\psi-3\phi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(-\phi-\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(-2\psi+3\phi)}\right) - \\ &- \left(e^{2\pi\mathrm{i}(2\psi-\phi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(3\phi-\psi)} + e^{-2\pi\mathrm{i}(-3\phi+\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(\phi-2\psi)}\right),\end{aligned} \tag{56}$$

Мы не будем на данном этапе вводить новые переменные формулами

$$U_{10} = \frac{\Phi^{as}_{2,1}}{\Phi^{as}_{1,1}}, \quad U_{01} = \frac{\Phi^{as}_{1,2}}{\Phi^{as}_{1,1}},$$

поскольку это будет удобнее сделать позже. Исходя из формулы (55), определим четыре диагональные матрицы

$$M_{1+} = \mathrm{diag}(e^{2\pi\mathrm{i}\phi}, e^{2\pi\mathrm{i}(\psi-\phi)}, e^{-2\pi\mathrm{i}\phi}, e^{2\pi\mathrm{i}(\phi-\psi)}), \quad M_{2+} = \mathrm{diag}(e^{2\pi\mathrm{i}\psi}, e^{2\pi\mathrm{i}(-2\phi+\psi}, e^{-2\pi\mathrm{i}\psi}, e^{2\pi\mathrm{i}(2\phi-\psi)},$$

$$M_{1-} = \mathrm{diag}(e^{2\pi\mathrm{i}(\psi-\phi)}, e^{2\pi\mathrm{i}\phi}, e^{-2\pi\mathrm{i}\phi}, e^{2\pi\mathrm{i}(\phi-\psi)}), \quad M_{2-} = \mathrm{diag}(e^{2\pi\mathrm{i}\psi}, e^{2\pi\mathrm{i}(2\phi-\psi)}, e^{2\pi\mathrm{i}(-2\phi+\psi)}, e^{-2\pi\mathrm{i}\psi}).$$

В терминах этих матриц функция $\Phi^{as}_{m,n}$ записывается в виде

$$\Phi^{as}_{m,n} = \mathrm{tr}(M^m_{1+}M^n_{2+} - M^m_{1-}M^n_{2-}).$$

Как и выше, используя матрицы $R_{1\pm} = (I_4 - pM_{1\pm})^{-1}$, $R_{2\pm} = (I_4 - qM_{2\pm})^{-1}$, утверждаем, что функция

$$F_r^{II}(p,q) = \frac{\mathrm{tr}(R_{1+}R_{2+} - R_{1-}R_{2-})}{\Phi_{1,1}^{as}},$$

является производящей функцией полиномов Чебышева двух переменных второго рода

$$U_{m,n} = \frac{1}{(m+1)!(n+1)!} \left. \frac{d^{m+n+2}F_r^{II}(p,q)}{dp^{m+1}dq^{n+1}} \right|_{p=0,q=0}.$$

Несложные вычисления дают

$$\mathrm{tr}(R_{1+}R_{2+} - R_{1-}R_{2-}) = \frac{pq(1+q+p^2q+p^2q^2-\tilde{x}pq)\Phi_{1,1}^{as}}{(1-\tilde{x}p+(\tilde{y}+2)p^2-\tilde{x}p^3+p^4)(1-\tilde{y}q+(\tilde{x}^2-2\tilde{y}-2)q^2-\tilde{y}q^3+q^4)},$$

где были введены (промежуточные) обозначения

$$\tilde{x} = \mathrm{tr}(M_{1+}) = \mathrm{tr}(M_{1-}) = e^{2\pi \mathrm{i}\phi} + e^{2\pi \mathrm{i}(\psi-\phi)} + e^{-2\pi \mathrm{i}\phi} + e^{2\pi \mathrm{i}(\phi-\psi)},$$
$$\tilde{y} = \mathrm{tr}(M_{2+}) = \mathrm{tr}(M_{2-}) = e^{2\pi \mathrm{i}\psi} + e^{2\pi \mathrm{i}(-2\phi+\psi} + e^{-2\pi \mathrm{i}\psi} + e^{2\pi \mathrm{i}(2\phi-\psi}.$$

Сократим полученное выражение на сингулярный элемент Φ_{11}^{as} и на произведение pq (чтобы индексы полиномов соответствовали порядку дифференцирования). Вычислим

$$U_{10} = \left. \frac{dF_r^{II}(p,q)}{dp} \right|_{p=0,q=0} = \tilde{x}, \quad U_{01} = \left. \frac{dF_r^{II}(p,q)}{dq} \right|_{p=0,q=0} = \tilde{y}+1.$$

Введем новые переменные

$$x = \tilde{x}, \quad y = \tilde{y}+1.$$

В терминах этих переменных полученная производящая функция имеет вид

$$F^{II}(p,q) = \frac{1+q+p^2q+p^2q^2-xpq}{(1-xp+(y+1)p^2-xp^3+p^4)(1-(y-1)q+(x^2-2y)q^2-(y-1)q^3+q^4)}. \tag{57}$$

По формуле

$$U_{m,n} = \frac{1}{m!n!} \left. \frac{d^{m+n}F^{II}(p,q)}{dp^m dq^n} \right|_{p=0,q=0}$$

вычислим несколько первых полиномов.

$$\begin{aligned}
U_{0,0} &= 1, \\
U_{1,0} &= x, \\
U_{0,1} &= y, \\
U_{2,0} &= x^2 - y - 1, \\
U_{1,1} &= xy - x, \\
U_{0,2} &= -x^2 + y^2 + y,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U_{3,0} &= x^3 - 2xy - x, \\
U_{2,1} &= x^2y - x^2 - y^2 - y + 1, \\
U_{1,2} &= -x^3 + xy^2 + x, \\
U_{0,3} &= y^3 - 2x^2y + x^2 + 2y^2 - 1.
\end{aligned}
$$

Эти полиномы совпадают с найденными в [19] из рекуррентных соотношений, если поменять местами полиномиальные индексы и заменить $x \to X_2,\ y \to X_1$.

4 Случай алгебры Ли G_2

Повторим выкладки, проделанные в предыдущих разделах для исключительной алгебры G_2. Множество положительных корней, кроме двух фундаментальных α_1, α_2, включает $\alpha_1 + \alpha_2$, $2\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + \alpha_2$, $3\alpha_1 + 2\alpha_2$. Используя соотношение (4) и матрицу Картана

$$
C_{G_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},
$$

получаем действие порождающих элементов w_1, w_2 группы Вейля $W(G_2)$ на фундаментальные корни

$$
w_1\alpha_1 = -\alpha_1, \quad w_1\alpha_2 = 3\alpha_1 + \alpha_2, \quad w_2\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad w_2\alpha_2 = -\alpha_2.
$$

Учитывая формулу (5), получаем для фундаментальных весов

$$
w_1\lambda_1 = \lambda_2 - \lambda_1, \quad w_1\lambda_2 = \lambda_2, \quad w_2\lambda_1 = \lambda_1, \quad w_2\lambda_2 = 2\lambda_1 - \lambda_2.
$$

Дальнейшие выкладки мы опустим, а для краткости приведем только результат вычисления W-инвариантной функции, соотвествующей группе $W(G_2)$

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{m,n}(x) = e^{2\pi\mathrm{i}((2\mathrm{m}+\mathrm{n})\phi+(\mathrm{m}+2/3\mathrm{n})\psi)} + e^{-2\pi\mathrm{i}((2\mathrm{m}+\mathrm{n})\phi+(\mathrm{m}+2/3\mathrm{n})\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}((\mathrm{m}+\mathrm{n})\phi+(\mathrm{m}+2/3\mathrm{n})\psi)} + \\
&e^{-2\pi\mathrm{i}((\mathrm{m}+\mathrm{n})\phi+(\mathrm{m}+2/3\mathrm{n})\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}((2\mathrm{m}+\mathrm{n})\phi+(\mathrm{m}+1/3\mathrm{n})\psi)} + e^{-2\pi\mathrm{i}((2\mathrm{m}+\mathrm{n})\phi+(\mathrm{m}+1/3\mathrm{n})\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}((\mathrm{m}+\mathrm{n})\phi+1/3\mathrm{n}\psi)} + \\
&e^{-2\pi\mathrm{i}((\mathrm{m}+\mathrm{n})\phi+1/3\mathrm{n}\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}\phi+(\mathrm{m}+1/3\mathrm{n})\psi)} + e^{-2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}\phi+(\mathrm{m}+1/3\mathrm{n})\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}\phi-1/3\mathrm{n}\psi)} + e^{-2\pi\mathrm{i}(\mathrm{m}\phi-1/3\mathrm{n}\psi)}.
\end{aligned}
\tag{58}
$$

Этот результат согласуется с полученным в [18].

Введем диагональные матрицы

$$
A_1 = \mathrm{diag}(2\phi + \psi, -2\phi - \psi, \phi + \psi, -\phi - \psi, 2\phi + \psi, -2\phi - \psi, \phi, -\phi, \phi + \psi, -\phi - \psi, \phi, -\phi),
$$

$$
\begin{aligned}
A_2 = \mathrm{diag}(&\phi+2/3\psi, -\phi-2/3\psi, \phi+2/3\psi, -\phi-2/3\psi, \phi+1/3\psi, -\phi-1/3\psi, \phi+1/3\psi, -\phi-1/3\psi, \\
&+1/3\psi, -1/3\psi, 1/3\psi, -1/3\psi).
\end{aligned}
$$

Тогда, как и в случае с алгеброй C_2, определяем

$$
M_k = e^{2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{A_k}}, \quad k = 1, 2, \quad \Phi_{m,n} = \mathrm{tr}(M_1^m M_2^n),
$$

откуда следует

$$x = \mathrm{tr}(M_1)/2 = e^{2\pi\mathrm{i}(2\phi+\psi)} + e^{-2\pi\mathrm{i}(2\phi+\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(\phi+\psi)} + e^{-2\pi\mathrm{i}(\phi+\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}\phi} + e^{-2\pi\mathrm{i}\phi}, \tag{59}$$

и

$$y = \mathrm{tr}(M_2)/2 = e^{2\pi\mathrm{i}(\phi+2/3\psi)} + e^{-2\pi\mathrm{i}(\phi+2/3\psi)} + e^{2\pi\mathrm{i}(\phi+1/3\psi)} + e^{-2\pi\mathrm{i}(\phi+1/3\psi)} + e^{2/3\pi\mathrm{i}\psi} + e^{-2/3\pi\mathrm{i}\psi}.$$

Поскольку все собственные числа матриц M_i, $i = 1, 2$ и в рассматриваемом случае имеют кратность 2, то степень их минимальных полиномов равна 6

$$\begin{aligned} P_1 = 1 - xp + (y^3 - 3xy - 5x - 9y - 9)p^2 - (-2y^3 + x^2 + 6xy + 12x + 18y + 20)p^3 + \\ + (y^3 - 3xy - 5x - 9y - 9)p^4 - xp^5 + p^6, \end{aligned} \tag{60}$$

$$P_2 = 1 - yq + (y + x + 3)q^2 - (y^2 - 2x - 4)q^3 + (y + x + 3)q^4 - yq^5 + q^6. \tag{61}$$

Методом, описанным в разделе 3, получаем линейные рекуррентные соотношения

$$\begin{aligned} \Phi_{m,n} - x\Phi_{m-1,n} + (y^3 - 3xy - 5x - 9y - 9)\Phi_{m-2,n} - \\ (-2y^3 + x^2 + 6xy + 12x + 18y + 20)\Phi_{m-3,n} + \\ (y^3 - 3xy - 5x - 9y - 9)\Phi_{m-4,n} - x\Phi_{m-5,n} + \Phi_{m-6,n} = 0, \end{aligned}$$

$$\Phi_{m,n} - y\Phi_{m,n-1} + (y+x+3)\Phi_{m,n-2} - (y^2-2x-4)\Phi_{m,n-3} + (y+x+3)\Phi_{m,n-4} - y\Phi_{m,n-5} + \Phi_{m,n-6} = 0.$$

Далее, действуя по аналогии с выводом формулы (42), получаем

$$F_{p,q} = (P_1 P_2)^{-1} \left(\sum_{i,j=0}^{5} K_{ij} p^i q^j \right),$$

где полиномы P_1, P_2 выписаны в соотношениях (60), (61), а коэффициенты K_{ij} имеют вид

$$\begin{aligned}
K_{00} &= 12, \\
K_{10} &= -10x, \\
K_{20} &= = 8y^3 - 24xy - 40x - 72y - 72, \\
K_{30} &= -6x^2 + 12y^3 - 36xy - 72x - 108y - 120, \\
K_{40} &= 48y^3 - 128x8y - 208x - 368y - 36, \\
K_{50} &= -2x, \\
K_{01} &= -10y, \\
K_{11} &= 9xy + 2y - 2y^2 + 4x + 12, \\
K_{21} &= 40xy - 8y^4 + 25xy^2 - 2x^2 + 72y^2 - 6x + 74y, \\
K_{31} &= 6x^2y - 12y^4 + 35xy^2 + 2x^2 + 72xy + 108y^2 + 6x + 118y,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
K_{41} &= -4y^4+12xy^2+21xy+38y^2-4x+34y-12,\\
K_{51} &= 2xy-2y,\\
K_{02} &= 8x+8y+24,\\
K_{12} &= -13xy-8x^2-16y+2y^3-28x-12,\\
K_{22} &= 6y^4+7xy^3-21x^2y-18xy^2-40x^2-166xy+24y^3-56y^2-192x-268y-216,\\
K_{32} &= 13xy^3-44x^2y-6x^3+10y^4-92x^2-29xy^2+36y^3-285xy-90y^2-422y-338x-348,\\
K_{42} &= -12x^2y+4xy^3-13xy^2+4y^4-92x-20x^2-128y-86xy-36y^2+10y^3-96,\\
K_{52} &= -2xy-2x^2+2y^2-2y-6x,\\
K_{03} &= -6y^2+12x+24,\\
K_{13} &= 6xy^2-2xy-12x^2-6y-26x,\\
K_{23} &= -6y^5-35x^2y+30xy^3+31xy^2-62x^2-187xy+82y^3+54y^2-254x-246y-252,\\
K_{33} &= 5x^2y^2-10y^5-10x^3+60xy^2+50xy^3-62x^2y-330xy+138y^3-144x^2+\\
&+ 96y^2-432y-480x-456,\\
K_{43} &= -4y^5+20xy^3-23x^2y+21xy^2-127xy+56y^3-42x^2+36y^2-174y-178x-180,\\
K_{53} &= 2xy^2-2xy-4x^2-6y-10x,\\
K_{04} &= 4x+4y+12,\\
K_{14} &= -4xy-4x^2+2y^2-2y-12x,\\
K_{24} &= -12x^2y+4xy^3-13xy^2+4y^4-92x-20x^2-128y-86xy-36y^2+10y^3-96,\\
K_{34} &= -30x^2y-4x^3-226x+6y^4-17xy^2+9xy^3-189xy-62x^2+24y^3-54y^2-274y-228,\\
K_{44} &= 3xy^3-9x^2y+2y^4-6xy^2-74xy-20x^2+12y^3-20y^2-96x-124y-108,\\
K_{54} &= -2x^2+2y^3-7xy-10x-16y-12,\\
K_{05} &= -2y,\\
K_{15} &= 2xy-2y,\\
K_{25} &= -2y^4+6xy^2+11xy+20y^2-4x+16y-12,\\
K_{35} &= 2x^2y-4y^4+11xy^2+2x^2+24xy+36y^2+6x+38y,\\
K_{45} &= -2y^4+7xy^2-2x^2+10xy+18y^2-6x+20y,\\
K_{55} &= xy+2y-2y^2+4x+12.
\end{aligned}
$$

В заключении приведем несколько первых полиномов

$$
\begin{aligned}
T_{00} &= 1, \quad T_{10}=x, \quad T_{01}=y,\\
T_{20} &= x^2-2y^3+6xy+18y+10x+18,\\
T_{11} &= xy-2y^2+2y+4x+12,\\
T_{02} &= y^2-2x-2y-6\\
T_{30} &= x^3-3y^3x+9x^2y-6y^3+18x^2+45xy+5y+63x+60\\
T_{21} &= x^2y-2y^4+5xy^2+2x^2+12xy+18y^2+6x+20y\\
T_{12} &= xy^2-2x^2+2y^2-3xy-10x-4y-12\\
T_{03} &= y^3-3xy-6x-9y-12.
\end{aligned}
$$

Методом, описанным в предыдущих разделах, можно получить производящую функцию для полиномов Чебышева второго рода, ассоциированных с алгеброй G_2. Приведем

несколько полиномов, вычисленных в работе [19] из рекуррентных соотношений. Там же приведен более длинный список полиномов.

$$
\begin{aligned}
U_{00} &= 1, \quad U_{10} = x, \quad U_{01} = y, \\
U_{20} &= 2y + x + x^2 - y^3 + 2xy, \\
U_{11} &= 1 - y^2 + x + xy, \\
U_{02} &= -1 - x - y + y^2, \\
U_{30} &= -y^2 + 2x + 3x^2 - y^3 - 2xy^3 + y^4 + x^3 + 4xy - 2xy^2 + 4x^2y, \\
U_{21} &= -1 - y + 2y^2 + x^2 + y^3 - y^4 + xy^2 + x^2y, \\
U_{12} &= y + y^2 - x - x^2 - y^3 + xy^2, \\
U_{03} &= -y - y^2 - x + y^3 - 2xy.
\end{aligned}
$$

Благодарности

Работа была выполнена при поддержке РФФИ, грант №12-01-00207-а и частично (ППК) грант №14-01-00341.

References

[1] 1988 Суетин П К Ортогональные многочлены по двум переменным. Наука, ФМ, Москва

[2] Ryland B N and Munthe-Kaas H Z 2011 On multivariate Chebyshev polynomials and spectral approximations on triangles. Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations (Lecture Notes in Computer Science and Engineering vol **76**) (Berlin: Springer) pp 19 - 41

[3] Shapiro B and Shapiro M 2009 On Eigenvalues of Rectangular Matrices Сборник статей Тр. МИАН **267** 258–265

[4] Alexandersson P and Shapiro B 2014 Around a Multivariate Schmidt-Spitzer Theorem, Linear Alg. Appl. **446** 356–368

[5] Кулиш П П, Ляховский В Д и Постнова О В 2012 Функция кратностей для тензорных степеней модулей алгебры A_n ТМФ, **171** (2) 283–293

[6] Kulish P P, Lyakhovsky V D and Postnova O V 2012 Tensor power decomposition. B_n-case Journal of Physics: Conference Series **343** 012095

[7] Lyakhovsky V D 2013 Multivariate Chebyshev polynomials in terms of singular elements Theoretical and Mathematical Physics **175** 797–805

[8] Von Gehlen G and Roan S 2001 The superintegrable chiral Potts quantum chain and generalized Chebyshev polynomials: in Integrable Structures of Exactly Solvable Two-Dimensional Models of Quantum Field Theory Pakuliak S and Von Gehlen G (eds.) NATO Science Series Volume **35** 155-172 Springer Berlin

[9] Von Gehlen G 2002 Onsager's algebra and partially orthogonal polynomials Int. J. Mod. Phys. **B 16** 2129

[10] P.P. Kulish, Integrable spin chains and representation theory. pp.487-492 In "Symmetries and groups in contemporary physics" Nankai series in pure, applied mathematics and theoretical physics. vol.11, C. Bai, J.-P. Gazeau, Mo-Lin Ge (Eds) World Scientific 2013.

[11] Borzov V V and Damaskinsky E V 2013 Chebyshev - Koornwinder oscillator Theoretical and Mathematical Physics, **175** (3) 765-772

[12] Borzov V V and Damaskinsky E V 2014 The algebra of two dimensional generalized Chebyshev-Koornwinder oscillator Journal of Mathematical Physics **55** 103505

[13] Koornwinder T H 1974 Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators: I-IV Indagationes Mathematicae Proc. **77**, 48-66, 357-81

[14] Koornwinder T H 1975 Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials. Theory and Application of Special Functions R Askey (ed) Academic Press New York

[15] Heckman G J 1987 Root systems and hypergeometric functions: II Comp. Math. **64** 353-73

[16] Hoffman M E and Withers W D 1988 Generalized Chebyshev polynomials associated with affine Weyl groups Trans. Am. Math. Soc. **308** 91-104

[17] Beerends R J 1991 Chebyshev polynomials in several variables and the radial part Laplace–Beltrami operator Trans. Am. Math. Soc. **328** 770-814

[18] Klimyk A and Patera J 2006 Orbit functions SIGMA **2** 006

[19] Lyakhovsky V D and Uvarov Ph V 2013 Multivariate Chebyshev polynomials J. Phys. A: Math. Theor. **46** 125201

[20] Dunn Ken B and Lidl R 1982 Generalizations of the classical Chebyshev polynomials to polynomials in two variables Czech. Math. J. **32** 516-528

[21] Humphreys J E 1972 Introduction to Lie Algebras and Representation Theory New York Springer

[22] Fulton W and Harris J 1991 Representation Theory. A First Course (Berlin: Springer)