

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

УСРЕДНЕНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ  
С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ  
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,  
Физический факультет,  
Ульяновская ул., д. 3, Петродворец,  
Санкт-Петербург, 198504, Россия  
e-mail: suslina@list.ru

АННОТАЦИЯ

Рассматривается сильно эллиптическое дифференциальное выражение вида  $b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D})$ ,  $\varepsilon > 0$ , где  $g(\mathbf{x})$  — ограниченная и положительно определенная матрица-функция в  $\mathbb{R}^d$ , периодическая относительно некоторой решетки;  $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$  — дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами. На символ  $b(\xi)$  накладываются условие, обеспечивающее сильную эллиптичность. В пространстве  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  выражение  $b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D})$  порождает оператор  $\mathcal{A}_\varepsilon$ . В пространстве  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ , где  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченная область с границей класса  $C^{1,1}$ , рассматриваются операторы  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  и  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ , порожденные этим выражением при условиях Дирихле или Неймана на границе. Для резольвенты операторов  $\mathcal{A}_\varepsilon$ ,  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ ,  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  в регулярной точке  $\zeta$  получены аппроксимации в различных операторных нормах с оценками погрешности в зависимости от  $\varepsilon$  и спектрального параметра  $\zeta$ .

**Ключевые слова:** периодические дифференциальные операторы, задача Дирихле, задача Неймана, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке гранта СПбГУ № 11.38.63.2012 и РФФИ (проект 14-01-00760).

**ПРЕПРИНТЫ**

Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
РАН

**ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

С. В. Кисляков

**РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, Л. Ю. Колотилина, В. Н. Кублановская,  
Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич,  
Н. Ю. Нецевтаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин, В. Н. Судаков, О. М. Фоменко.

## ВВЕДЕНИЕ

Работа относится к теории усреднений (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам усреднения в пределе малого периода посвящена обширная литература. Укажем в первую очередь книги [BeLP], [BaPa], [ZhKO].

**0.1. Класс операторов.** Изучается широкий класс матричных (размера  $n \times n$ ) сильно эллиптических операторов, заданных дифференциальным выражением  $b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D})$ ,  $\varepsilon > 0$ . Здесь  $g(\mathbf{x})$  — эрмитова матрица-функция в  $\mathbb{R}^d$  (размера  $m \times m$ ), ограниченная, положительно определенная и периодическая относительно некоторой решетки Г. Оператор  $b(\mathbf{D})$  —  $(m \times n)$ -матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами. Считается, что  $m \geq n$ ; на символ оператора  $b(\mathbf{D})$  налагдается условие, гарантирующее сильную эллиптичность рассматриваемого оператора.

Дифференциальному выражению  $b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x}/\varepsilon)b(\mathbf{D})$  отвечает самосопряженный оператор  $\mathcal{A}_\varepsilon$ , действующий в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Мы изучаем также самосопряженные операторы  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  и  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  в  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ , заданные тем же выражением при условии Дирихле или Неймана на границе  $\partial\mathcal{O}$ , соответственно. Здесь  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченная область класса  $C^{1,1}$ .

Простейший пример оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  — акустический оператор  $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ ; оператор теории упругости также допускает запись в требуемом виде. Эти и другие примеры подробно рассмотрены в [BSu2].

Изучается задача усреднения: в операторных терминах, задача состоит в аппроксимации резольвенты описанных операторов при малом  $\varepsilon$  в различных операторных нормах.

**0.2. Обзор результатов по операторным оценкам погрешности.** Задачи усреднения для оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  изучались в цикле работ Бирмана и Суслиной [BSu1–4]. В [BSu1,2] была получена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.1)$$

Здесь  $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})$  — эффективный оператор,  $g^0$  — постоянная положительная эффективная матрица. (Определение  $g^0$  дано в §1 ниже.) Далее, в [BSu4] была найдена аппроксимация резольвенты  $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$  по норме операторов, действующих из  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в пространство Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , при учете корректора:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.2)$$

Оценки вида (0.1), (0.2), получившие название *операторных оценок погрешности*, точны по порядку; постоянные в оценках контролируются явно через данные задачи. Метод работ [BSu1–4] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в задачах усреднения был предложен Жиковым. В работах [Zh1,2], [ZhPas]

рассматривались операторы акустики и теории упругости. Для них были получены оценки вида (0.1), (0.2). Метод основан на анализе первого приближения к решению и введении дополнительного параметра. Помимо задач в  $\mathbb{R}^d$  в [Zh1,2], [ZhPas] изучались задачи в ограниченной области  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  при условии Дирихле либо Неймана на границе; были получены аналоги оценок (0.1), (0.2), но с погрешностью  $O(\varepsilon^{1/2})$ . Погрешность ухудшается за счет влияния границы. (В случае задачи Дирихле для оператора акустики ( $L_2 \rightarrow L_2$ )-оценка была улучшена в [ZhPas]; но порядок оценки не был точным.)

Близкие результаты для оператора  $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$  в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана были установлены в работах Гризо [Gr1,2] с помощью „unfolding“-метода. В работе [Gr2] впервые был получен аналог оценки (0.1) для того же скалярного эллиптического оператора с условием Дирихле или Неймана на границе с точной по порядку погрешностью  $O(\varepsilon)$ .

Для рассматриваемых нами матричных операторов  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ ,  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  операторные оценки погрешности получены в недавних работах [PSu1,2], [Su1–3]. В [PSu1,2] изучалась задача Дирихле и была установлена оценка

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq C\varepsilon^{1/2}.$$

Здесь  $\mathcal{A}_D^0$  — оператор, заданный выражением  $b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})$  при условии Дирихле,  $K_D(\varepsilon)$  — соответствующий корректор. В [Su1,2] удалось получить точную по порядку оценку

$$\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq C\varepsilon. \quad (0.3)$$

Для задачи Неймана аналогичные результаты получены в [Su3]. (Отметим, что в [Su3] рассматривалась резольвента  $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  в произвольной регулярной точке  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ , но не ставилась цель найти оптимальную зависимость констант в оценках от параметра  $\zeta$ .) Метод работ [PSu1,2], [Su1–3] основан на использовании результатов для задачи в  $\mathbb{R}^d$ , введении поправки типа пограничного слоя и получении оценок норм этой поправки в  $H^1(\mathcal{O})$  и в  $L_2(\mathcal{O})$ . Некоторые технические приемы заимствованы из [ZhPas].

Оценка вида (0.3) для равномерно эллиптических систем при условии Дирихле или Неймана была независимо получена другим методом в работе [KeLiS] при некоторых условиях регулярности коэффициентов.

**0.3. Основные результаты.** В настоящей работе изучаются операторы  $\mathcal{A}_\varepsilon$ ,  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ ,  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ . Цель работы — получение аппроксимаций резольвенты в регулярной точке  $\zeta$  в зависимости от  $\varepsilon$  и от спектрального параметра  $\zeta$ . Особый интерес представляют оценки при малом  $\varepsilon$  и большом  $|\zeta|$ .

Опишем основные результаты. Для оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  получены следующие оценки при  $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  и  $\varepsilon > 0$ :

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\varepsilon, \quad (0.4)$$

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C(\varphi)(1 + |\zeta|^{-1/2})\varepsilon. \quad (0.5)$$

Для операторов  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  и  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  и  $|\zeta| \geq 1$  установлены оценки

$$\|(\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_{\dagger}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq C_1(\varphi)(|\zeta|^{-1/2}\varepsilon + \varepsilon^2), \quad (0.6)$$

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}_{\dagger,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_{\dagger}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_\dagger(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \\ &\leq C_2(\varphi)|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2} + C_3(\varphi)\varepsilon, \end{aligned} \quad (0.7)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  (где  $\varepsilon_1$  — достаточно малое число, зависящее от области  $\mathcal{O}$  и решетки  $\Gamma$ ). Здесь  $\dagger = D, N$ . Проследена зависимость констант в оценках (0.4)–(0.7) от угла  $\varphi$ . Оценки (0.4)–(0.7) по существу являются двупараметрическими (относительно  $\varepsilon$  и  $|\zeta|$ ); они равномерны по  $\varphi$  в секторе  $\varphi \in [\varphi_0, 2\pi - \varphi_0]$  при сколь угодно малом  $\varphi_0 > 0$ .

Корректоры в (0.5), (0.7) в общем случае содержат сглаживающий оператор. Мы выделяем дополнительное условие, при котором можно использовать стандартный корректор.

Помимо аппроксимации резольвенты, мы находим аппроксимацию операторов вида  $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$  (отвечающих „потокам“) в  $(L_2 \rightarrow L_2)$ -операторной норме. Кроме того, для строго внутренней подобласти  $\mathcal{O}'$  области  $\mathcal{O}$  найдена аппроксимация резольвенты операторов  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  и  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  по  $(L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}'))$ -норме точного порядка (относительно  $\varepsilon$ ).

Для полноты изложения мы находим аппроксимацию резольвенты операторов  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  и  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  другого типа, которая справедлива в более широкой области изменения параметра  $\zeta$ , и может оказаться предпочтительнее при ограниченных значениях  $|\zeta|$ . Поясним характер этих результатов на примере задачи Дирихле. Пусть  $c_* > 0$  — общая нижняя грань операторов  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  и  $\mathcal{A}_D^0$ . Рассматриваем значения  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$ . Положим  $\zeta - c_* = |\zeta - c_*|e^{i\psi}$ . Справедливы оценки

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \hat{C}(\zeta)\varepsilon, \quad (0.8)$$

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \hat{C}(\zeta)\varepsilon^{1/2} \quad (0.9)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , где  $\hat{C}(\zeta) = C(\psi)|\zeta - c_*|^{-2}$  при  $|\zeta - c_*| < 1$ ,  $\hat{C}(\zeta) = C(\psi)$  при  $|\zeta - c_*| \geq 1$ . Проследена зависимость постоянных в оценках (0.8), (0.9) от угла  $\psi$ . Оценки равномерны по  $\psi$  в секторе  $\psi \in [\psi_0, 2\pi - \psi_0]$  для сколь угодно малого  $\psi_0$ .

Главными результатами работы автор считает оценки (0.6), (0.7).

**0.4. Метод.** Для задачи в  $\mathbb{R}^d$  оценки (0.4), (0.5) несложно вывести из известных оценок в точке  $\zeta = -1$  (см. (0.1), (0.2)) с помощью подходящих резольвентных тождеств и масштабного преобразования (см. §2). Однако этот путь не проходит для задач в ограниченной области. Для доказательства оценок (0.6), (0.7) приходится проводить всю схему исследования из работ [PSu2], [Su2,3] заново, тщательно отслеживая зависимость оценок от спектрального параметра  $\zeta$ . Метод состоит в использовании

оператора продолжения  $P_{\mathcal{O}} : H^s(\mathcal{O}) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^d)$ , рассмотрении ассоциированной задачи в  $\mathbb{R}^d$ , введении поправки типа пограничного слоя и ее тщательном анализе. Существенную техническую роль играет использование сглаживания по Стеклову (заимствованное из работы [ZhPas]) и оценки в  $\varepsilon$ -окрестности границы. Сначала мы доказываем оценку (0.7), а затем оценку (0.6), опираясь на уже доказанное неравенство (0.7) и соображения двойственности.

Нам удалось достичь некоторых технических упрощений в схеме исследования по сравнению с [PSu2], [Su2,3]: изложение последовательно ведется на языке интегральных тождеств, мы уходим от рассмотрений пространств Соболева с отрицательным индексом, а в задаче Неймана уходим от рассмотрения конormalной производной и иначе вводим поправку по сравнению с [Su3].

Оценки (0.8), (0.9) сравнительно просто выводятся из уже полученных оценок в точке  $\zeta = -1$  и подходящих резольвентных тождеств.

**0.5. Применение результатов.** Стимулом для настоящего исследования послужило изучение усреднения начально-краевых задач для параболического уравнения вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad t \geq 0,$$

при начальном условии  $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x})$ ,  $\phi \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ , и краевом условии Дирихле или Неймана на  $\partial\mathcal{O}$ . Решение выражается через операторную экспоненту:  $\mathbf{u}_\varepsilon = e^{-\mathcal{A}_{\dagger, \varepsilon} t} \phi$ , а потому задача сводится к аппроксимации операторной экспоненты  $e^{-\mathcal{A}_{\dagger, \varepsilon} t}$  в различных операторных нормах. Для изучения этой задачи можно использовать представление операторной экспоненты через интеграл от резольвенты по подходящему контуру  $\gamma$  в комплексной плоскости:

$$e^{-\mathcal{A}_{\dagger, \varepsilon} t} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-\zeta t} (\mathcal{A}_{\dagger, \varepsilon} - \zeta I)^{-1} d\zeta.$$

Оказалось, что для получения двупараметрических аппроксимаций экспоненты  $e^{-\mathcal{A}_{\dagger, \varepsilon} t}$  правильного порядка по  $\varepsilon$  и  $t$  требуются аппроксимации резольвенты вида (0.6), (0.7), в которых отслежена зависимость не только от  $\varepsilon$ , но и от  $\zeta$ . Параболическим задачам будет посвящена отдельная статья [MSu2] (см. также краткую заметку [MSu1]).

**0.6. Структура статьи.** Работа состоит из трех глав. Глава 1 (§1, 2) посвящена задаче в  $\mathbb{R}^d$ . В §1 вводится класс рассматриваемых операторов, описан эффективный оператор, введен сглаживающий оператор по Стеклову  $S_\varepsilon$ . В §2 из известных оценок при  $\zeta = -1$  выводятся оценки вида (0.4), (0.5) с помощью резольвентных тождеств и масштабного преобразования. Корректор в (0.5) в общем случае содержит оператор  $S_\varepsilon$ . Показано, что при дополнительном условии (когда решение  $\Lambda(\mathbf{x})$  вспомогательной задачи (1.7) ограничено) можно устранить  $S_\varepsilon$  и использовать стандартный корректор.

Глава 2 (§3–8) посвящена задаче Дирихле. В §3 дана постановка задачи, описан эффективный оператор, приведены вспомогательные утверждения, касающиеся оценок в окрестности границы. В §4 сформулированы основные результаты для задачи Дирихле (теоремы 4.2 и 4.3). Приведены первые два этапа доказательства: рассмотрена ассоциированная задача в  $\mathbb{R}^d$  и введена поправка  $\mathbf{w}_\varepsilon$  типа пограничного слоя, вопрос сведен к оценкам норм  $\mathbf{w}_\varepsilon$  в  $H^1(\mathcal{O})$  и  $L_2(\mathcal{O})$ . В §5 установлены требуемые оценки поправки и завершено доказательство теорем 4.2 и 4.3. В §6 рассмотрен случай  $\Lambda \in L_\infty$ , а также специальные случаи. §7 посвящен аппроксимации решений задачи Дирихле в строго внутренней подобласти области  $\mathcal{O}$ . В §8 получена аппроксимация резольвенты оператора  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  другого типа (оценки (0.8), (0.9)).

Глава 3 (§9–14) посвящена задаче Неймана. В §9 приведена постановка задачи и описан эффективный оператор. В §10 сформулированы основные результаты для задачи Неймана (теоремы 10.1 и 10.2), проведены первые два этапа доказательства: рассмотрена ассоциированная задача в  $\mathbb{R}^d$ , введена поправка  $\mathbf{w}_\varepsilon$  типа пограничного слоя, вопрос сведен к оценкам норм  $\mathbf{w}_\varepsilon$  в  $H^1(\mathcal{O})$  и  $L_2(\mathcal{O})$ . В §11 проведены оценки поправки и завершено доказательство теорем 10.1 и 10.2. В §12 рассмотрен случай  $\Lambda \in L_\infty$  и специальные случаи, а также проведены оценки в строго внутренней подобласти области  $\mathcal{O}$ . В §13 найдена аппроксимация резольвенты оператора  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  другого типа при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . Наконец, в §14 рассмотрен оператор  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$ , являющийся частью  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  в инвариантном подпространстве, ортогональном к ядру оператора  $b(\mathbf{D})$ . Для резольвенты оператора  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$  получены аппроксимации резольвенты (аналогичные (0.8), (0.9)) при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$ , где  $c_b > 0$  — общая нижняя грань операторов  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$  и  $\mathcal{B}_N^0$ . Затем эти результаты применяются к оператору  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ : найдены аппроксимации резольвенты  $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  в регулярной точке  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$ ,  $\zeta \neq 0$ .

**0.7. Обозначения.** Пусть  $\mathfrak{H}$ ,  $\mathfrak{H}_*$  — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{H}}$  и  $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$  означают скалярное произведение и норму в  $\mathfrak{H}$ ; символ  $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*}$  означает норму линейного непрерывного оператора из  $\mathfrak{H}$  в  $\mathfrak{H}_*$ .

Символы  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и  $|\cdot|$  означают соответственно скалярное произведение и норму в  $\mathbb{C}^n$ ;  $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$  — единичная  $(n \times n)$ -матрица. Если  $a$  —  $(m \times n)$ -матрица, то символ  $|a|$  означает норму матрицы  $a$  как оператора из  $\mathbb{C}^n$  в  $\mathbb{C}^m$ . Используем обозначения  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ ,  $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$ ,  $j = 1, \dots, d$ ,  $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$ . Классы  $L_p$  вектор-функций в области  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  со значениями в  $\mathbb{C}^n$  обозначаем через  $L_p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ . Классы Соболева  $\mathbb{C}^n$ -значных функций в области  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  обозначаются через  $H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Через  $H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  обозначается замыкание класса  $C_0^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  в пространстве  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . При  $n = 1$  пишем просто  $L_p(\mathcal{O})$ ,  $H^s(\mathcal{O})$  и т. д., но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций.

Используем обозначение  $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ . Различные оценочные постоянные обозначаются символами  $c, C, \mathcal{C}, \mathfrak{C}$  (возможно, с индексами и значками).

Краткое сообщение о результатах этой работы опубликовано в [Su4].

## ГЛАВА 1. ЗАДАЧА В $\mathbb{R}^d$

### §1. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

В этом параграфе мы описываем класс рассматриваемых матричных эллиптических операторов в  $\mathbb{R}^d$ , определяем эффективную матрицу и эффективный оператор.

**1.1. Решетки в  $\mathbb{R}^d$ .** Пусть  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  — решетка, порожденная базисом  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d \in \mathbb{R}^d$ :

$$\Gamma = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d \nu_j \mathbf{a}_j, \nu_j \in \mathbb{Z}\},$$

и пусть  $\Omega$  — (элементарная) ячейка решетки  $\Gamma$ :

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \tau_j \mathbf{a}_j, -\frac{1}{2} < \tau_j < \frac{1}{2}\}.$$

Будем пользоваться обозначением  $|\Omega| = \text{mes } \Omega$ .

Двойственный по отношению к  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$  базис  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$  в  $\mathbb{R}^d$  определяется из соотношений  $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi\delta_{ij}$ . Этот базис порождает решетку  $\tilde{\Gamma}$ , двойственную к решетке  $\Gamma$ . Ниже используются обозначения

$$r_0 = \frac{1}{2} \min_{\mathbf{0} \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\mathbf{b}|, \quad r_1 = \frac{1}{2} \text{diam } \Omega.$$

Через  $\tilde{H}^1(\Omega)$  обозначается подпространство тех функций из  $H^1(\Omega)$ ,  $\Gamma$ -периодическое продолжение которых на  $\mathbb{R}^d$  принадлежит  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ . Если  $\varphi(\mathbf{x})$  —  $\Gamma$ -периодическая функция в  $\mathbb{R}^d$ , обозначим

$$\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0.$$

**1.2. Класс операторов.** В  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  рассматривается ДО  $\mathcal{A}_\varepsilon$  второго порядка, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.1}$$

Здесь измеримая эрмитова матрица-функция  $g(\mathbf{x})$  размера  $m \times m$  (вообще говоря, с комплексными элементами) предполагается периодической относительно решётки  $\Gamma$ , равномерно положительно определенной и ограниченной. Далее,  $b(\mathbf{D})$  — однородный  $(m \times n)$ -матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l, \tag{1.2}$$

где  $b_l$  — постоянные матрицы (вообще говоря, с комплексными элементами). Оператору  $b(\mathbf{D})$  отвечает символ  $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$ ,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$ . Предполагается, что  $m \geq n$  и

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.3)$$

Это условие равносильно существованию постоянных  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$  таких, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty. \quad (1.4)$$

Отметим сразу, что из (1.4) следует оценка

$$|b_l| \leq \alpha_1^{1/2}, \quad l = 1, \dots, d. \quad (1.5)$$

Строгое определение оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  даётся через соответствующую квадратичную форму

$$a_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}, b(\mathbf{D}) \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

При сделанных предположениях эта форма замкнута в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  и неотрицательна. Используя преобразование Фурье и условие (1.4), легко убедиться, что выполнены оценки

$$c_0 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \leq a_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq c_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad (1.6)$$

$$c_0 = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}, \quad c_1 = \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}.$$

Простейший пример оператора (1.1) — это скалярный эллиптический оператор  $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}$ . В этом случае  $n = 1$ ,  $m = d$ ,  $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$ . Очевидно, условие (1.4) выполнено при  $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ . Оператор теории упругости также допускает запись в виде (1.1) при  $n = d$ ,  $m = d(d+1)/2$ . Эти и другие примеры подробно рассмотрены в [BSu2].

**1.3. Эффективный оператор.** Для формулировки результатов нам нужно описать эффективный оператор  $\mathcal{A}^0$ . Пусть  $\Lambda \in \tilde{H}^1(\Omega)$  — матрица-функция размера  $n \times m$ , являющаяся (слабым) Г-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.7)$$

Так называемая *эффективная матрица*  $g^0$  размера  $m \times m$  строится по следующему правилу:

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (1.8)$$

где

$$\tilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \quad (1.9)$$

Оказывается, что матрица  $g^0$  положительна. *Эффективный оператор*  $\mathcal{A}^0$  для оператора (1.1) задается дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$$

на области определения  $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ .

Ниже нам понадобятся следующие оценки для  $\Lambda(\mathbf{x})$ , установленные в [BSu3, (6.28) и п. 7.3]:

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2} m^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad (1.10)$$

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leq |\Omega|^{1/2} m^{1/2} (2r_0)^{-1} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \quad (1.11)$$

**1.4. Свойства эффективной матрицы.** Следующие свойства эффективной матрицы проверены в [BSu2, гл. 3, теорема 1.5].

**Предложение 1.1.** Для эффективной матрицы справедливы оценки

$$g \leq g^0 \leq \bar{g}. \quad (1.12)$$

Здесь

$$\bar{g} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \underline{g} = \left( |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

При  $m = n$  эффективная матрица  $g^0$  совпадает с  $\underline{g}$ .

Оценки (1.12) известны в теории усреднений для конкретных ДО как вилка Фойгта-Рейсса. Выделим случаи, когда в (1.12) реализуется верхняя или нижняя грань. Следующие утверждения получены в [BSu2, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7].

**Предложение 1.2.** Равенство  $g^0 = \bar{g}$  равносильно соотношениям

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.13)$$

где  $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ ,  $k = 1, \dots, m$ , — столбцы матрицы  $g(\mathbf{x})$ .

**Предложение 1.3.** Равенство  $g^0 = \underline{g}$  равносильно представлениям

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, \dots, m, \quad (1.14)$$

где  $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$ ,  $k = 1, \dots, m$ , — столбцы матрицы  $g(\mathbf{x})^{-1}$ .

Очевидно, из (1.12) вытекают оценки нормы для матриц  $g^0$  и  $(g^0)^{-1}$ :

$$|g^0| \leq \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leq \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \quad (1.15)$$

Отметим оценки для символа эффективного оператора  $\mathcal{A}^0$ , вытекающие из (1.4) и (1.15):

$$c_0 |\xi|^2 \mathbf{1}_n \leq b(\xi)^* g^0 b(\xi) \leq c_1 |\xi|^2 \mathbf{1}_n, \quad \xi \in \mathbb{R}^d, \quad (1.16)$$

где константы  $c_0, c_1$  — те же, что в (1.6).

**1.5. Сглаживание по Стеклову.** Нам понадобится вспомогательный сглаживающий оператор  $S_\varepsilon$ , действующий в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$  по правилу

$$(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (1.17)$$

и называемый *сглаживающим оператором по Стеклову*. Отметим, что

$$\|S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 1. \quad (1.18)$$

Очевидно,  $D^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u} = S_\varepsilon D^\alpha \mathbf{u}$  при  $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$  для любого мультииндекса  $\alpha$ , такого что  $|\alpha| \leq s$ .

Укажем некоторые свойства оператора (1.17), см. [ZhPas, леммы 1.1 и 1.2] или [PSu2, предложения 3.1, 3.2].

**Предложение 1.4.** Для любой функции  $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$  выполнена оценка

$$\|S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon r_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0.$$

**Предложение 1.5.** Пусть  $f(\mathbf{x})$  — Г-периодическая функция в  $\mathbb{R}^d$  такая, что  $f \in L_2(\Omega)$ . Пусть  $[f^\varepsilon]$  — оператор умножения на функцию  $f^\varepsilon(\mathbf{x})$ . Тогда оператор  $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$  непрерывен в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ , причем

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Отметим сразу неравенства, вытекающие из предложения 1.5 и оценок (1.10), (1.11):

$$\|[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq m^{1/2} (2r_0)^{-1} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} =: M_1, \quad \varepsilon > 0, \quad (1.19)$$

$$\|[(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq m^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} =: M_2, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.20)$$

## §2. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ УСРЕДНЕНИЯ В $\mathbb{R}^d$

В этом параграфе мы получаем результаты об усреднении оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Точнее, из уже известных результатов об аппроксимации резольвенты  $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ , полученных в [BSu2], [BSu4], а также в [PSu2], мы выводим теоремы об аппроксимации резольвенты  $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$  при любом  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ .

**2.1. Аппроксимация резольвенты по операторной норме в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ .** Точка  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  является регулярной точкой как для  $\mathcal{A}_\varepsilon$ , так и для  $\mathcal{A}^0$ . Положим  $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in (0, 2\pi)$ , и введем обозначение

$$c(\varphi) = \begin{cases} |\sin \varphi|^{-1}, & \varphi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ 1, & \varphi \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases} \quad (2.1)$$

Рассмотрим эллиптическое уравнение в  $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon - \zeta \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ .

**Лемма 2.1.** Решение  $\mathbf{u}_\varepsilon$  задачи (2.2) при  $\varepsilon > 0$  подчинено оценкам

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq c(\varphi)|\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.3)$$

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.4)$$

где  $C_0 = \sqrt{2}c_0^{-1/2}$ . В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq c(\varphi)|\zeta|^{-1}, \quad (2.5)$$

$$\|\mathbf{D}(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}.$$

**Доказательство.** Спектр оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$  содержится в  $\mathbb{R}_+$ . Норма решольвенты  $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$  оценивается через величину, обратную к расстоянию от точки  $\zeta$  до  $\mathbb{R}_+$ . Поскольку это расстояние равно  $|\zeta|$  при  $\operatorname{Re} \zeta \leq 0$  и равно  $|\zeta| \sin \varphi$  при  $\operatorname{Re} \zeta > 0$ , мы приходим к оценке (2.5).

Чтобы проверить (2.4), выпишем интегральное тождество для решения  $\mathbf{u}_\varepsilon$  уравнения (2.2):

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} - \zeta(\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (2.6)$$

Подставим  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon$  в (2.6) и возьмем вещественную часть. Тогда

$$a_\varepsilon[\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon] = \operatorname{Re} \zeta \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \operatorname{Re} (\mathbf{F}, \mathbf{u}_\varepsilon)_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из (2.3) получаем:

$$a_\varepsilon[\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon] \leq 2c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

С учетом (1.6) отсюда вытекает (2.4). •

Известно, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решение  $\mathbf{u}_\varepsilon$  сходится в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  к решению „усреднённого“ уравнения

$$\mathcal{A}^0 \mathbf{u}_0 - \zeta \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}. \quad (2.7)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.2.** Пусть  $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — решение уравнения (2.2) и  $\mathbf{u}_0$  — решение уравнения (2.7). Справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Иначе говоря, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.8)$$

Здесь  $c(\varphi)$  определено в (2.1), а постоянная  $C_1$  зависит лишь от норм  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от констант  $\alpha_0, \alpha_1$  из (1.4) и от параметров решётки  $\Gamma$ .

**Доказательство.** В работе [BSu2, гл. 4, теорема 2.1] оценка (2.8) была доказана в случае  $\zeta = -1$  при  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Нам надо лишь объяснить, как перенести оценку на общий случай.

Заметим, что при  $\zeta = -1$  и  $\varepsilon > 1$  левая часть в (2.8) очевидным образом оценивается через 2, а тогда и через  $2\varepsilon$ . Поэтому будем исходить из оценки

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \check{C}_1 \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.9)$$

Постоянная  $\check{C}_1$  зависит лишь от  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\alpha_0, \alpha_1$  и от параметров решётки  $\Gamma$ .

Перенесем оценку на случай  $\zeta = \hat{\zeta} = e^{i\varphi}$  с помощью тождества

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} \\ &= (\mathcal{A}_\varepsilon + I)(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} ((\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}) (\mathcal{A}^0 + I)(\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Имеем:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)(\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{x \geq 0} (x+1)|x - \widehat{\zeta}|^{-1} \leq 2c(\varphi). \quad (2.11)$$

Аналогичную оценку допускает и норма оператора  $(\mathcal{A}^0 + I)(\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1}$ :

$$\|(\mathcal{A}^0 + I)(\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2c(\varphi). \quad (2.12)$$

Из (2.9)–(2.12) получаем оценку

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 4\check{C}_1 c(\varphi)^2 \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.13)$$

Далее, за счет масштабного преобразования (2.13) равносильно неравенству

$$\|(\mathcal{A} - \varepsilon^2 \widehat{\zeta}I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \varepsilon^2 \widehat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 4\check{C}_1 c(\varphi)^2 \varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0. \quad (2.14)$$

Здесь  $\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ . Если записать (2.14) с заменой  $\varepsilon$  на  $\varepsilon|\zeta|^{1/2}$ , а затем применить обратное преобразование, то получится (2.8) с постоянной  $C_1 = 4\check{C}_1$ . •

**2.2. Аппроксимация резольвенты по  $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме.** Для того, чтобы получить аппроксимацию решения  $\mathbf{u}_\varepsilon$  в пространстве  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , необходимо учесть корректор первого порядка. Положим

$$K(\varepsilon; \zeta) = [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}. \quad (2.15)$$

Здесь  $[\Lambda^\varepsilon]$  — оператор умножения на матрицу-функцию  $\Lambda(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ , а  $S_\varepsilon$  — слаживающий оператор, определенный в (1.17). Оператор (2.15) непрерывен из  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ ; это видно из тождества

$$K(\varepsilon; \zeta) = K(\varepsilon; -1)(\mathcal{A}^0 + I)(\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} \quad (2.16)$$

и следующей леммы.

**Лемма 2.3.** При  $\varepsilon > 0$  и  $\zeta = -1$  оператор (2.15) непрерывен из  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , причем выполнены оценки

$$\|K(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_K^{(1)}, \quad (2.17)$$

$$\|\varepsilon \mathbf{D} K(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_K^{(2)} \varepsilon + C_K^{(3)}. \quad (2.18)$$

Постоянные  $C_K^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , зависят лишь от  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$  и параметров решетки  $\Gamma$ .

**Доказательство.** Оценим  $(L_2 \rightarrow L_2)$ -норму оператора  $K(\varepsilon; -1)$ :

$$\|K(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \|[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon\|_{L_2 \rightarrow L_2} \|b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2}. \quad (2.19)$$

Используя преобразование Фурье и (1.4), (1.16), получаем:

$$\begin{aligned} \|b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |b(\xi)| (b(\xi)^* g^0 b(\xi) + 1)^{-1} \\ &\leq \alpha_1^{1/2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\xi| (c_0 |\xi|^2 + 1)^{-1} \leq \frac{1}{2} \alpha_1^{1/2} c_0^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Из (1.19), (2.19) и (2.20) вытекает (2.17) с постоянной  $C_K^{(1)} = \frac{1}{2}\alpha_1^{1/2}c_0^{-1/2}M_1$ .

Рассмотрим теперь операторы

$$\varepsilon D_j K(\varepsilon; -1) = [(D_j \Lambda)^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1} + \varepsilon [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon D_j b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}. \quad (2.21)$$

Аналогично (2.20) имеем

$$\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \alpha_1^{1/2} \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\xi|^2 (c_0 |\xi|^2 + 1)^{-1} \leq \alpha_1^{1/2} c_0^{-1}. \quad (2.22)$$

Теперь из (1.19), (1.20) и (2.20)–(2.22) вытекает оценка (2.18) с постоянными  $C_K^{(2)} = (2\alpha_1)^{1/2}c_0^{-1}M_1$ ,  $C_K^{(3)} = \alpha_1^{1/2}(2c_0)^{-1/2}M_2$ . •

„Первое приближение“ к решению  $\mathbf{u}_\varepsilon$  имеет вид

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K(\varepsilon; \zeta) \mathbf{F}. \quad (2.23)$$

**Теорема 2.4.** Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Пусть функция  $\mathbf{v}_\varepsilon$  определена в (2.23). Тогда при  $\varepsilon > 0$  выполнены оценки

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 c(\varphi)^2 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (2.24)$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_3 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (2.25)$$

Иначе говоря, в операторных терминах,

$$\|\mathbf{D}((\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta))\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 c(\varphi)^2 \varepsilon, \quad (2.26)$$

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_3 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon. \quad (2.27)$$

Здесь  $c(\varphi)$  определено в (2.1), а постоянные  $C_2$ ,  $C_3$  зависят только от  $m$ ,  $d$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и от параметров решётки  $\Gamma$ .

Непосредственно из теоремы 2.4 вытекает следующее утверждение.

**Следствие 2.5.** В условиях теоремы 2.4 выполнена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq c(\varphi)^2 (C_2 + C_3 |\zeta|^{-1/2}) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0.$$

**Доказательство теоремы 2.4.** В [BSu4, теорема 10.6] аналогичные оценки были установлены при  $\zeta = -1$ , но с другим слаживающим оператором вместо  $S_\varepsilon$ . В [PSu2, теорема 3.3] было выяснено, что можно перейти к слаживателю  $S_\varepsilon$ , и неравенства (2.24), (2.25) были доказаны при  $\zeta = -1$  и  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Итак, будем исходить из оценок

$$\|\mathbf{D}((\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; -1))\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \check{C}_2 \varepsilon, \quad (2.28)$$

$$0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \check{C}_3 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.29)$$

Постоянные  $\check{C}_2$ ,  $\check{C}_3$  зависят лишь от  $m$ ,  $d$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$  и параметров решётки  $\Gamma$ .

При  $\varepsilon > 1$  оценки тривиальны: достаточно оценить каждый оператор под знаком нормы в (2.28), (2.29) по отдельности. С учетом (2.17) левая часть в (2.29) оценивается через  $2 + C_K^{(1)}\varepsilon$ , что не превосходит  $(2 + C_K^{(1)})\varepsilon$  при  $\varepsilon > 1$ . Отсюда и из (2.29) получаем оценку

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_3\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.30)$$

где  $\widehat{C}_3 = \max\{\check{C}_3, 2 + C_K^{(1)}\}$ .

Далее, из нижнего неравенства (1.6) вытекает оценка

$$\|\mathbf{D}(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq c_0^{-1/2}. \quad (2.31)$$

С учетом (1.15) для нормы оператора  $\mathbf{D}(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}$  справедлива такая же оценка:

$$\|\mathbf{D}(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq c_0^{-1/2}. \quad (2.32)$$

Из (2.18), (2.31) и (2.32) видно, что левая часть в (2.28) оценивается через  $2c_0^{-1/2} + C_K^{(2)}\varepsilon + C_K^{(3)}$ , что не превосходит  $(2c_0^{-1/2} + C_K^{(2)} + C_K^{(3)})\varepsilon$  при  $\varepsilon > 1$ . Отсюда и из (2.28) получаем оценку

$$\|\mathbf{D}((\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; -1))\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_2\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.33)$$

где  $\widehat{C}_2 = \max\{\check{C}_2, 2c_0^{-1/2} + C_K^{(2)} + C_K^{(3)}\}$ .

Перенесем теперь оценки (2.30), (2.33) на случай  $\zeta = \widehat{\zeta} = e^{i\varphi}$  с помощью тождества

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta) \\ &= (\mathcal{A}_\varepsilon + I)(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} ((\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; -1)) \\ &\quad \times (\mathcal{A}^0 + I)(\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} + \varepsilon(\zeta + 1)(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1}K(\varepsilon; \zeta). \end{aligned} \quad (2.34)$$

В силу (2.5)

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq c(\varphi). \quad (2.35)$$

Из (2.12), (2.16) и (2.17) следует, что

$$\|K(\varepsilon; \widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2C_K^{(1)}c(\varphi). \quad (2.36)$$

Из (2.30) и (2.34)–(2.36) с учетом (2.11), (2.12) вытекает неравенство

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \widehat{\zeta})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_3c(\varphi)^2\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.37)$$

где  $C_3 = 4\widehat{C}_3 + 4C_K^{(1)}$ .

Далее, соотношения (2.11), (2.12), (2.34) и (2.36) влекут

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2} ((\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \widehat{\zeta}))\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq 4c(\varphi)^2 \|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2} ((\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; -1))\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \quad + 2\varepsilon|\widehat{\zeta}| + 1|C_K^{(1)}c(\varphi)|\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}(\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Имеем:

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}(\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \sup_{x \geq 0} x^{1/2} |x - \widehat{\zeta}|^{-1} \leq c(\varphi). \quad (2.39)$$

Теперь из (1.6), (2.33), (2.38) и (2.39) вытекает оценка

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2} \left( (\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \widehat{\zeta}) \right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widetilde{C}_2 c(\varphi)^2 \varepsilon \quad (2.40)$$

при  $\varepsilon > 0$ , где  $\widetilde{C}_2 = 4(c_1^{1/2} \widehat{C}_2 + C_K^{(1)})$ . Отсюда и из нижней оценки (1.6) получаем

$$\|\mathbf{D} \left( (\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \widehat{\zeta}) \right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 c(\varphi)^2 \varepsilon \quad (2.41)$$

при  $\varepsilon > 0$ , где  $C_2 = c_0^{-1/2} \widetilde{C}_2$ .

За счет масштабного преобразования (2.37) равносильно неравенству

$$\|(\mathcal{A} - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 I)^{-1} - \Lambda S_1 b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq C_3 c(\varphi)^2 \varepsilon^{-1} \quad (2.42)$$

при  $\varepsilon > 0$ , а (2.41) равносильно оценке

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{D} \left( (\mathcal{A} - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 I)^{-1} - \Lambda S_1 b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta} \varepsilon^2 I)^{-1} \right)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ &\leq C_2 c(\varphi)^2, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Запишем (2.42), (2.43) с заменой  $\varepsilon$  на  $\varepsilon |\zeta|^{1/2}$  и выполним обратное преобразование. Это приводит к (2.26), (2.27). •

Получим теперь аппроксимацию так называемых потоков  $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$  в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ .

**Теорема 2.6.** *Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Пусть  $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$ . Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 c(\varphi)^2 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0,$$

или, в операторных терминах,

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 c(\varphi)^2 \varepsilon. \quad (2.44)$$

Здесь  $\tilde{g}(\mathbf{x})$  — матрица (1.9), постоянная  $C_4$  зависит только от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$  и параметров решётки  $\Gamma$ .

**Доказательство.** Начнем со случая  $\zeta = \widehat{\zeta} = e^{i\varphi}$ . Из (2.40) вытекает оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \left( (\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta} I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta} I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \widehat{\zeta}) \right)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \widetilde{C}_2 c(\varphi)^2 \varepsilon \quad (2.45)$$

при  $\varepsilon > 0$ . С учетом (1.2) имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D})K(\varepsilon; \hat{\zeta}) &= g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \hat{\zeta}I)^{-1} \\ &\quad + \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l (\mathcal{A}^0 - \hat{\zeta}I)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Отметим оценку, вытекающую из (2.12) и (2.22):

$$\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \hat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\alpha_1^{1/2} c_0^{-1} c(\varphi). \quad (2.47)$$

Второй член в правой части (2.46) оценим с помощью (1.5), (1.19) и (2.47):

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left\| \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l (\mathcal{A}^0 - \hat{\zeta}I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2\varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1 c_0^{-1} M_1 d^{1/2} c(\varphi). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Далее, в силу предложения 1.4 и (2.47) выполнена оценка

$$\|g^\varepsilon(I - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \hat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\varepsilon \|g\|_{L_\infty} r_1 \alpha_1^{1/2} c_0^{-1} c(\varphi). \quad (2.49)$$

В итоге из (2.45), (2.46), (2.48), (2.49) с учетом (1.9) вытекает оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_\varepsilon - \hat{\zeta}I)^{-1} - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \hat{\zeta}I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 c(\varphi)^2 \varepsilon \quad (2.50)$$

при  $\varepsilon > 0$ , где  $C_4 = \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \tilde{C}_2 + 2\|g\|_{L_\infty} c_0^{-1} \alpha_1^{1/2} ((d\alpha_1)^{1/2} M_1 + r_1)$ .

За счет масштабного преобразования (2.50) равносильно оценке

$$\|gb(\mathbf{D})(\mathcal{A} - \hat{\zeta}\varepsilon^2 I)^{-1} - \tilde{g}S_1 b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \hat{\zeta}\varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_4 c(\varphi)^2 \quad (2.51)$$

при  $\varepsilon > 0$ . Записывая (2.51) с заменой  $\varepsilon$  на  $\varepsilon|\zeta|^{1/2}$  и выполняя обратное преобразование, приходим к (2.44). •

Выделим случай, когда корректор обращается в ноль. Следующее утверждение вытекает из теоремы 2.4, предложения 1.2 и уравнения (1.7).

**Предложение 2.7.** *Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — решение уравнения (2.2) и  $\mathbf{u}_0$  — решение уравнения (2.7). Если  $g^0 = \bar{g}$ , т. е. выполнены соотношения (1.13), то  $\Lambda = 0$  и  $K(\varepsilon; \zeta) = 0$ . Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2 c(\varphi)^2 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0.$$

### 2.3. Результаты для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$ в случае $\Lambda \in L_\infty$ .

Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях относительно свойств решения задачи (1.7) сглаживающий оператор  $S_\varepsilon$  в выражении (2.15) для корректора может быть устранен (заменен тождественным оператором). Наложим следующее условие.

**Условие 2.8.** *Предположим, что Г-периодическое решение  $\Lambda(\mathbf{x})$  задачи (1.7) ограничено:  $\Lambda \in L_\infty$ .*

Нам понадобится следующее мультиликаторное свойство матрицы  $\Lambda$ , см. [PSu2, следствие 2.4].

**Предложение 2.9.** *При условии 2.8 для любой функции  $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$  при  $\varepsilon > 0$  выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u|^2 d\mathbf{x} \leq \beta_1 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \beta_2 \|\Lambda\|_{L_\infty}^2 \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u|^2 d\mathbf{x}.$$

Постоянныe  $\beta_1, \beta_2$  задаются выражениями

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 16m\alpha_0^{-1}\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}, \\ \beta_2 &= 2(1 + 2d\alpha_0^{-1}\alpha_1 + 20d\alpha_0^{-1}\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}). \end{aligned}$$

Положим

$$K^0(\varepsilon; \zeta) = [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1}. \quad (2.52)$$

При условии 2.8 оператор (2.52) непрерывен из  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ ; это видно из тождества

$$K^0(\varepsilon; \zeta) = K^0(\varepsilon; -1)(\mathcal{A}^0 + I)(\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} \quad (2.53)$$

и следующей леммы.

**Лемма 2.10.** *Пусть выполнено условие 2.8. При  $\varepsilon > 0$  и  $\zeta = -1$  оператор (2.52) непрерывен из  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ , причем выполнены оценки*

$$\|K^0(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \check{C}_K^{(1)}, \quad (2.54)$$

$$\|\varepsilon \mathbf{D}K^0(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \check{C}_K^{(2)}\varepsilon + \check{C}_K^{(3)}. \quad (2.55)$$

Постоянныe  $\check{C}_K^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , зависят лишь от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решетки  $\Gamma$  и от  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** В силу (2.20)

$$\|K^0(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2} \|\Lambda\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} c_0^{-1/2} =: \check{C}_K^{(1)},$$

что доказывает (2.54). Рассмотрим теперь операторы

$$\varepsilon D_j K^0(\varepsilon; -1) = [(D_j \Lambda)^\varepsilon] b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1} + \varepsilon [\Lambda^\varepsilon] D_j b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}. \quad (2.56)$$

Оценим второй член в (2.56) с помощью (2.22):

$$\sum_{j=1}^d \|\varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_j (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2}^2 \leq \varepsilon^2 \|\Lambda\|_{L_\infty}^2 \alpha_1 c_0^{-2}. \quad (2.57)$$

Для оценки первого члена в (2.56) применим предложение 2.9 и (2.20), (2.22):

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^d \| (D_j \Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} \|_{L_2 \rightarrow L_2}^2 \\ & \leq \beta_1 \| b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} \|_{L_2 \rightarrow L_2}^2 + \beta_2 \varepsilon^2 \| \Lambda \|_{L_\infty}^2 \| \mathbf{D} b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} \|_{L_2 \rightarrow L_2}^2 \\ & \leq \beta_1 \alpha_1 (4c_0)^{-1} + \beta_2 \varepsilon^2 \| \Lambda \|_{L_\infty}^2 \alpha_1 c_0^{-2}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Теперь из (2.56)–(2.58) вытекает неравенство (2.55) с постоянными  $\check{C}_K^{(2)} = (2\alpha_1)^{1/2} c_0^{-1} (\beta_2 + 1)^{1/2} \| \Lambda \|_{L_\infty}$ ,  $\check{C}_K^{(3)} = (\beta_1 \alpha_1)^{1/2} (2c_0)^{-1/2}$ . •

Рассмотрим вместо (2.23) другое приближение к решению  $\mathbf{u}_\varepsilon$ :

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K^0(\varepsilon; \zeta) \mathbf{F}. \quad (2.59)$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.11.** Пусть выполнены условия теоремы 2.2 и условие 2.8. Пусть функция  $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$  определена в (2.59). Пусть  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$ . Тогда при  $\varepsilon > 0$  выполнены оценки

$$\| \mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_5 c(\varphi)^2 \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

$$\| \mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_6 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

$$\| \mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_7 c(\varphi)^2 \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Иначе говоря, в операторных терминах,

$$\| \mathbf{D} ((\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; \zeta)) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_5 c(\varphi)^2 \varepsilon, \quad (2.60)$$

$$\| (\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; \zeta) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_6 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon, \quad (2.61)$$

$$\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}^0 - \zeta I)^{-1} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_7 c(\varphi)^2 \varepsilon. \quad (2.62)$$

Постоянные  $C_5$ ,  $C_6$ ,  $C_7$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$  и параметров решётки  $\Gamma$ , а также от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство** проведем по аналогии с доказательством теоремы 2.4. В [BSu4] было показано, что при условии 2.8 справедливы оценки

$$\| \mathbf{D} ((\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; -1)) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \check{C}_5 \varepsilon, \quad (2.63)$$

$$0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$\| (\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; -1) \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \check{C}_6 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (2.64)$$

Постоянны  $\check{C}_5$ ,  $\check{C}_6$  зависят лишь от  $m$ ,  $d$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$  и от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

При  $\varepsilon > 1$  оценки тривиальны. С учетом (2.54) левая часть в (2.64) оценивается через  $2 + \check{C}_K^{(1)}\varepsilon$ , что не превосходит  $(2 + \check{C}_K^{(1)})\varepsilon$  при  $\varepsilon > 1$ . Отсюда и из (2.64) получаем

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_6\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.65)$$

где  $\widehat{C}_6 = \max\{\check{C}_6, 2 + \check{C}_K^{(1)}\}$ .

Из (2.31), (2.32) и (2.55) следует, что левая часть в (2.63) оценивается через  $2c_0^{-1/2} + \check{C}_K^{(2)}\varepsilon + \check{C}_K^{(3)}$ , что не превосходит  $(2c_0^{-1/2} + \check{C}_K^{(2)} + \check{C}_K^{(3)})\varepsilon$  при  $\varepsilon > 1$ . Вместе с (2.63) это показывает, что

$$\|\mathbf{D}((\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; -1))\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{C}_5\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.66)$$

где  $\widehat{C}_5 = \max\{\check{C}_5, 2c_0^{-1/2} + \check{C}_K^{(2)} + \check{C}_K^{(3)}\}$ .

Справедлив аналог тождества (2.34) с  $K(\varepsilon; \zeta)$  замененным на  $K^0(\varepsilon; \zeta)$ . С помощью него перенесем оценки (2.65), (2.66) в точку  $\widehat{\zeta} = e^{i\varphi}$ . Учитывая (2.11), (2.12), (2.35), (2.53), (2.54), из (2.65) выводим неравенство

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; \widehat{\zeta})\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq C_6 c(\varphi)^2 \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.67)$$

где  $C_6 = 4\widehat{C}_6 + 4\check{C}_K^{(1)}$ .

Далее, аналогично (2.38)–(2.40) получаем:

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}((\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; \widehat{\zeta}))\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \widetilde{C}_5 c(\varphi)^2 \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.68)$$

где  $\widetilde{C}_5 = 4(c_1^{1/2}\widehat{C}_5 + \check{C}_K^{(1)})$ . Отсюда и из нижней оценки (1.6) следует, что

$$\|\mathbf{D}((\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; \widehat{\zeta}))\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq C_5 c(\varphi)^2 \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.69)$$

где  $C_5 = \widetilde{C}_5 c_0^{-1/2}$ .

Теперь с помощью масштабного преобразования оценка (2.61) выводится из (2.67), а (2.60) — из (2.69). (Ср. доказательство теоремы 2.4.)

Остается проверить (2.62). Из (2.68) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})((\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta}I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1} - \varepsilon K^0(\varepsilon; \widehat{\zeta}))\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \widetilde{C}_5 c(\varphi)^2 \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D})K^0(\varepsilon; \widehat{\zeta}) &= g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1} \\ &\quad + \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta}I)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Второй член в (2.71) оценим с помощью (1.5) и (2.47):

$$\varepsilon \left\| \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l (\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta} I)^{-1} \right\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq 2\varepsilon \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \alpha_1 c_0^{-1} d^{1/2} c(\varphi). \quad (2.72)$$

Теперь из (2.70)–(2.72) с учетом (1.9) получаем:

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_\varepsilon - \widehat{\zeta} I)^{-1} - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 - \widehat{\zeta} I)^{-1}\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq C_7 c(\varphi)^2 \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad (2.73)$$

где  $C_7 = \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \widetilde{C}_5 + 2\|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \alpha_1 c_0^{-1} d^{1/2}$ .

Неравенство (2.62) выводится из (2.73) масштабным преобразованием. (Ср. доказательство теоремы 2.6.) •

В некоторых случаях условие 2.8 выполнено автоматически. Следующее утверждение проверено в [BSu4, лемма 8.7].

**Предложение 2.12.** Условие 2.8 *заведомо выполнено, если имеет место хотя бы одно из следующих предположений:*

- 1°. размерность не превосходит двух, т. е.  $d \leq 2$ ;
- 2°. оператор действует в  $L_2(\mathbb{R}^d)$ ,  $d \geq 1$ , и имеет вид  $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}$ , где  $g(\mathbf{x})$  — вещественная матрица;
- 3°. размерность произвольна и  $g^0 = \underline{g}$ , т. е. выполнено (1.14).

Отметим, что выполнение условия 2.8 можно обеспечить и за счет предположения о некоторой гладкости матрицы  $g(\mathbf{x})$ .

Выделим специальный случай, когда  $g^0 = \underline{g}$ . В этом случае матрица (1.9) оказывается постоянной:  $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$ . Кроме того, в этом случае выполнено условие 2.8. Применяя утверждение теоремы 2.11 относительно аппроксимации потоков, приходим к следующему предложению.

**Предложение 2.13.** Пусть выполнены условия теоремы 2.2. Пусть  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$ . Пусть  $g^0 = \underline{g}$ , т. е. выполнены соотношения (1.14). Тогда

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_7 c(\varphi)^2 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0.$$

## ГЛАВА 2. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

### §3. ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ: ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

**3.1. Оператор  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ .** Пусть  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченная область с границей класса  $C^{1,1}$ . В пространстве  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  рассмотрим оператор  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ , формально заданный дифференциальным выражением  $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$  при условии Дирихле на границе  $\partial\mathcal{O}$ . Строго говоря,  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  есть самосопряженный оператор в  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ , порожденный квадратичной формой

$$a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}, b(\mathbf{D}) \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).$$

Эта форма замкнута и положительно определена. Действительно, продолжая  $\mathbf{u}$  нулем на  $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$  и применяя (1.6), получаем

$$c_0 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \leq a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq c_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (3.1)$$

Остается принять во внимание, что  $\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}$  задает в  $H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  норму, эквивалентную стандартной. В силу неравенства Фридрихса из (3.1) следует, что

$$a_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq c_2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n), \quad c_2 = c_0(\text{diam } \mathcal{O})^{-2}. \quad (3.2)$$

*Наша цель* в главе 2 — найти аппроксимацию при малом  $\varepsilon$  обобщенного решения  $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  задачи Дирихле

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) - \zeta \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad (3.3)$$

где  $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Как и в §2, считаем, что  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . (Случай других допустимых значений  $\zeta$  изучается в §8.) Имеем:  $\mathbf{u}_\varepsilon = (\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \mathbf{F}$ . В операторных терминах, мы изучаем поведение резольвенты  $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  при малом  $\varepsilon$ .

**Лемма 3.1.** *Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — обобщенное решение задачи (3.3). Тогда при  $\varepsilon > 0$  справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi)|\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (3.4)$$

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (3.5)$$

Здесь  $\mathcal{C}_0 = \sqrt{2} \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}$ . В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi)|\zeta|^{-1}, \quad (3.6)$$

$$\|\mathbf{D}(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}.$$

**Доказательство.** В силу (3.2) спектр оператора  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  содержится в  $[c_2, \infty) \subset \mathbb{R}_+$ . Норма резольвенты  $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  оценивается через величину, обратную к расстоянию от точки  $\zeta$  до  $\mathbb{R}_+$ . В результате приходим к оценке (3.6).

Чтобы проверить (3.5), выпишем интегральное тождество для решения  $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  задачи (3.3):

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta (\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (3.7)$$

Подставим  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon$  в (3.7) и возьмем вещественную часть. Тогда

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} = \operatorname{Re} \zeta \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 + \operatorname{Re} (\mathbf{F}, \mathbf{u}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда и из (3.4) получаем:

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leq 2c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2.$$

С учетом (3.1) это влечет (3.5) с постоянной  $\mathcal{C}_0 = \sqrt{2} c_0^{-1/2}$ . •

**3.2. Эффективный оператор  $\mathcal{A}_D^0$ .** В пространстве  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  рассмотрим самосопряженный оператор  $\mathcal{A}_D^0$ , порожденный квадратичной формой

$$a_D^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (3.8)$$

Здесь  $g^0$  — эффективная матрица, определенная в (1.8). Учитывая (1.15), убеждаемся, что форма (3.8) удовлетворяет оценкам вида (3.1) и (3.2) с теми же постоянными.

В силу условия  $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$  оператор  $\mathcal{A}_D^0$  задается выражением  $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$  на области определения  $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . При этом выполнена оценка

$$\|(\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^2(\mathcal{O})} \leq \hat{c}. \quad (3.9)$$

Постоянная  $\hat{c}$  зависит лишь от  $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$  и от области  $\mathcal{O}$ . Для оправдания этого факта достаточно заметить, что оператор  $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$  относится к классу *сильно эллиптических* матричных операторов, и сослаться на теоремы о повышении гладкости решений сильно эллиптических уравнений (см., например, [McL, гл. 4]).

Пусть  $\mathbf{u}_0 \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  — обобщенное решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \zeta \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad \mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \quad (3.10)$$

Тогда  $\mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} \mathbf{F}$ .

**Лемма 3.2.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . Пусть  $\mathbf{u}_0$  — обобщенное решение задачи (3.10). Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq c(\varphi)|\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ \|\mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} &\leq \hat{c} c(\varphi) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi)|\zeta|^{-1}, \quad (3.12)$$

$$\|\mathbf{D}(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_0 c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}, \quad (3.13)$$

$$\|(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^2(\mathcal{O})} \leq \hat{c} c(\varphi). \quad (3.14)$$

**Доказательство.** Оценки (3.12), (3.13) проверяются по аналогии с доказательством леммы 3.1. Оценка (3.14) вытекает из (3.9) и неравенства

$$\|\mathcal{A}_D^0(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \sup_{x \geq 0} x|x - \zeta|^{-1} \leq c(\varphi).$$

•

**3.3. Вспомогательные утверждения: оценки в окрестности границы.** В этом пункте мы формулируем несколько вспомогательных утверждений (см., например, [PSu2, §5]).

**Лемма 3.3.** Пусть  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченная область с границей класса  $C^1$ . Обозначим  $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \text{dist} \{\mathbf{x}; \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\}$ ,  $B_\varepsilon = (\partial\mathcal{O})_\varepsilon \cap \mathcal{O}$ .

Пусть число  $\varepsilon_0 > 0$  таково, что полоску  $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0}$  можно покрыть конечным числом окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса  $C^1$ , расправляющие границу. Тогда имеют место следующие утверждения.

1°. Для любой функции  $u \in H^1(\mathcal{O})$  справедлива оценка

$$\int_{B_\varepsilon} |u|^2 d\mathbf{x} \leq \beta\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \|u\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

2°. Для любой функции  $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$  справедлива оценка

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |u|^2 d\mathbf{x} \leq \beta\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Постоянная  $\beta$  зависит только от области  $\mathcal{O}$ .

**Лемма 3.4.** Пусть выполнены условия леммы 3.3. Пусть  $f(\mathbf{x})$  — Г-периодическая функция в  $\mathbb{R}^d$  такая, что  $f \in L_2(\Omega)$ . Пусть  $S_\varepsilon$  — оператор (1.17). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  для любой функции  $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$  справедлива оценка

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |(S_\varepsilon \mathbf{u})|^2 d\mathbf{x} \leq \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$ ,  $\beta_* = \beta(1+r_1)$ ,  $2r_1 = \text{diam } \Omega$ .

#### §4. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Будем считать, что числа  $\varepsilon_0, \varepsilon_1 \in (0, 1]$  выбраны в соответствии со следующим условием.

**Условие 4.1.** Пусть число  $\varepsilon_0 \in (0, 1]$  таково, что полоску  $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0}$  можно покрыть конечным числом окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса  $C^{1,1}$ , расправляющие границу  $\partial\mathcal{O}$ . Пусть  $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$ , где  $2r_1 = \text{diam } \Omega$ .

Ясно, что  $\varepsilon_1$  зависит лишь от области  $\mathcal{O}$  и решетки  $\Gamma$ .

**4.1. Аппроксимация резольвенты**  $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  при  $|\zeta| \geq 1$ . Сформулируем наши основные результаты для оператора  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ . Наиболее интересен случай больших значений  $|\zeta|$ , а потому будем пока считать, что  $|\zeta| \geq 1$ . (Другие допустимые значения  $\zeta$  будут рассмотрены в §8.)

**Теорема 4.2.** Пусть  $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  и  $|\zeta| \geq 1$ . Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — решение задачи (3.3) и  $\mathbf{u}_0$  — решение задачи (3.10) при  $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Пусть число  $\varepsilon_1$  удовлетворяет условию 4.1. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq C_1 c(\varphi)^5 (|\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (4.1)$$

где  $c(\varphi)$  определено в (2.1). В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq C_1 c(\varphi)^5 (|\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \varepsilon^2). \quad (4.2)$$

Постоянная  $C_1$  зависит от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

Для аппроксимации решения в классе  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  нужно ввести корректор. Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения  $P_{\mathcal{O}} : H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \rightarrow H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Требуется, чтобы  $P_{\mathcal{O}}$  одновременно был непрерывен из  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  в  $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  и из  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Такой оператор существует (см., например, [St]). Обозначим

$$\|P_{\mathcal{O}}\|_{H^s(\mathcal{O}) \rightarrow H^s(\mathbb{R}^d)} =: C_{\mathcal{O}}^{(s)}, \quad s = 0, 1, 2. \quad (4.3)$$

Постоянные  $C_{\mathcal{O}}^{(s)}$  зависят только от области  $\mathcal{O}$ . Далее, через  $R_{\mathcal{O}}$  обозначим оператор сужения функций в  $\mathbb{R}^d$  на область  $\mathcal{O}$ . Введем корректор

$$K_D(\varepsilon; \zeta) = R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}. \quad (4.4)$$

Оператор  $K_D(\varepsilon; \zeta)$  непрерывно переводит  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Действительно, оператор  $b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}$  непрерывно отображает  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ , а оператор  $[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon$  непрерывен из  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$  в  $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  (это следует из предложения 1.5 и включения  $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ ).

Пусть  $\mathbf{u}_0$  — решение задачи (3.10). Обозначим  $\tilde{\mathbf{u}}_0 := P_{\mathcal{O}} \mathbf{u}_0$ . Определим в  $\mathbb{R}^d$  функцию

$$\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}), \quad (4.5)$$

и положим

$$\mathbf{v}_\varepsilon := \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}. \quad (4.6)$$

Тогда

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta) \mathbf{F} = (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta) \mathbf{F}. \quad (4.7)$$

**Теорема 4.3.** Пусть выполнены условия теоремы 4.2. Пусть функция  $\mathbf{v}_\varepsilon$  определена в (4.4), (4.7). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \left( \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (4.8)$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \\ &\leq \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \left( \tilde{\mathcal{C}}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \tilde{\mathcal{C}}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (4.10)$$

Постоянны  $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \tilde{\mathcal{C}}_2, \tilde{\mathcal{C}}_3$  зависят от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**4.2. Первый этап доказательства. Ассоциированная задача в  $\mathbb{R}^d$ .** Доказательство теорем 4.2, 4.3 опирается на применение результатов для задачи в  $\mathbb{R}^d$  и выделение поправки типа пограничного слоя.

В силу леммы 3.2 и (4.3) справедливы оценки

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\mathcal{O}}^{(0)} c(\varphi) |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (4.11)$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\mathcal{O}}^{(1)}(C_0 + 1)c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (4.12)$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\mathcal{O}}^{(2)}\widehat{c}c(\varphi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (4.13)$$

Мы учли, что  $|\zeta| \geq 1$ . Положим

$$\tilde{\mathbf{F}} := \mathcal{A}^0\tilde{\mathbf{u}}_0 - \zeta\tilde{\mathbf{u}}_0. \quad (4.14)$$

Тогда  $\tilde{\mathbf{F}} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  и  $\tilde{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{F}$ . Из (1.16), (4.11) и (4.13) вытекает оценка функции (4.14):

$$\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq c_1\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + |\zeta|\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}_4c(\varphi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (4.15)$$

где  $\mathcal{C}_4 = c_1C_{\mathcal{O}}^{(2)}\widehat{c} + C_{\mathcal{O}}^{(0)}$ .

Пусть  $\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  — решение уравнения в  $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathcal{A}_{\varepsilon}\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} - \zeta\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (4.16)$$

т. е.  $\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} = (\mathcal{A}_{\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\tilde{\mathbf{F}}$ . Применимы теоремы из §2. Из теоремы 2.2 с учетом (4.14)–(4.16) следует, что при  $\varepsilon > 0$  выполнена оценка

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1c(\varphi)^2|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1\mathcal{C}_4c(\varphi)^3|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (4.17)$$

Из теоремы 2.4 и соотношений (4.5), (4.14)–(4.16) вытекает, что при  $\varepsilon > 0$  справедливы оценки

$$\|\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{v}}_{\varepsilon})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2c(\varphi)^2\varepsilon\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_2\mathcal{C}_4c(\varphi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (4.18)$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_{\varepsilon} - \tilde{\mathbf{v}}_{\varepsilon}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_3c(\varphi)^2|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_3\mathcal{C}_4c(\varphi)^3|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (4.19)$$

**4.3. Второй этап доказательства. Введение поправки  $\mathbf{w}_{\varepsilon}$ .** Первое приближение  $\mathbf{v}_{\varepsilon}$  к решению  $\mathbf{u}_{\varepsilon}$  не удовлетворяет условию Дирихле. Имеем:  $\mathbf{v}_{\varepsilon}|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon\Lambda^{\varepsilon}(S_{\varepsilon}b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0)|_{\partial\mathcal{O}}$ . Рассмотрим „поправку“  $\mathbf{w}_{\varepsilon}$  — обобщенное решение задачи

$$b(\mathbf{D})^*g^{\varepsilon}(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{w}_{\varepsilon} - \zeta\mathbf{w}_{\varepsilon} = 0 \quad \text{в } \mathcal{O}; \quad \mathbf{w}_{\varepsilon}|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon\Lambda^{\varepsilon}(S_{\varepsilon}b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0)|_{\partial\mathcal{O}}. \quad (4.20)$$

Уравнение здесь понимается в слабом смысле: функция  $\mathbf{w}_{\varepsilon} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  удовлетворяет тождеству

$$(g^{\varepsilon}b(\mathbf{D})\mathbf{w}_{\varepsilon}, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{w}_{\varepsilon}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (4.21)$$

**Лемма 4.4.** Пусть  $\mathbf{u}_{\varepsilon}$  — решение задачи (3.3),  $\mathbf{v}_{\varepsilon}$  — функция (4.7),  $\mathbf{w}_{\varepsilon}$  — решение задачи (4.20). Тогда при  $\varepsilon > 0$  справедливы оценки

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{v}_{\varepsilon} + \mathbf{w}_{\varepsilon})\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_5c(\varphi)^4\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (4.22)$$

$$\|\mathbf{u}_{\varepsilon} - \mathbf{v}_{\varepsilon} + \mathbf{w}_{\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_6c(\varphi)^4|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (4.23)$$

Постоянные  $\mathcal{C}_5$ ,  $\mathcal{C}_6$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_{\infty}}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_{\infty}}$ , от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Обозначим для краткости  $\mathbf{V}_\varepsilon := \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon$ . В силу (3.7), (4.20) и (4.21) функция  $\mathbf{V}_\varepsilon$  принадлежит  $H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  и удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] &:= (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= (\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} + \zeta(\mathbf{v}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Продолжим функцию  $\boldsymbol{\eta}$  нулем на  $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$ , сохраняя то же обозначение; тогда  $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ . Вспомним, что  $\mathbf{F}$  является продолжением функции  $\mathbf{F}$ , а  $\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$  является продолжением функции  $\mathbf{v}_\varepsilon$ . Следовательно,

$$J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] = (\tilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} - (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \zeta(\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

С учетом (4.16) приходим к равенству

$$J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} - \zeta(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Применяя (1.4), (4.18), (4.19), получаем оценку

$$|J_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| \leq \varepsilon c(\varphi)^3 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \left( C_7 \|g^\varepsilon\|^{1/2} b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta} \|_{L_2(\mathcal{O})} + C_8 |\zeta|^{1/2} \|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right) \quad (4.25)$$

при  $\varepsilon > 0$ , где  $C_7 = \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \alpha_1^{1/2} C_2 C_4$ ,  $C_8 = C_3 C_4$ .

Подставим теперь  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$  в (4.24), возьмем мнимую часть от полученного равенства и применим (4.25):

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \zeta| \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq \varepsilon c(\varphi)^3 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\times \left( C_7 \|g^\varepsilon\|^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} + C_8 |\zeta|^{1/2} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

При  $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$  (а тогда  $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ ) отсюда выводим неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq 2\varepsilon |\zeta|^{-1} c(\varphi)^4 C_7 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|g^\varepsilon\|^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ \varepsilon^2 |\zeta|^{-1} c(\varphi)^8 C_8^2 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Если  $\operatorname{Re} \zeta < 0$ , то возьмем вещественную часть полученного равенства и применим (4.25). Тогда

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} \zeta| \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq \varepsilon c(\varphi)^3 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\times \left( C_7 \|g^\varepsilon\|^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} + C_8 |\zeta|^{1/2} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Складывая (4.26) и (4.28), выводим неравенство, аналогичное (4.27). В итоге при всех рассматриваемых значениях  $\zeta$  получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq 4\varepsilon |\zeta|^{-1} c(\varphi)^4 C_7 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|g^\varepsilon\|^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ 4\varepsilon^2 |\zeta|^{-1} c(\varphi)^8 C_8^2 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Теперь из (4.24) при  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ , (4.25) и (4.29) вытекает оценка

$$\begin{aligned} a_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon] &\leq 9C_7 c(\varphi)^4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|g^\varepsilon\|^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{V}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} + 9C_8^2 c(\varphi)^8 \varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \end{aligned}$$

Отсюда выводим неравенство

$$a_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon] \leq \check{\mathcal{C}}_5^2 c(\varphi)^8 \varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad (4.30)$$

где  $\check{\mathcal{C}}_5^2 = 18\mathcal{C}_8^2 + 81\mathcal{C}_7^2$ . Из (4.30) с учетом (3.1) вытекает оценка (4.22) с постоянной  $\mathcal{C}_5 = \check{\mathcal{C}}_5 c_0^{-1/2}$ . Наконец, из (4.29) и (4.30) следует (4.23) с постоянной  $\mathcal{C}_6 = 2(\mathcal{C}_7 \check{\mathcal{C}}_5 + \mathcal{C}_8^2)^{1/2}$ . •

**Выводы.** 1) Из оценок (4.22) и (4.23) следует, что

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_5 c(\varphi)^4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.31)$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_6 c(\varphi)^4 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.32)$$

Поэтому для доказательства теоремы 4.3 достаточно оценить надлежащим образом норму  $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}$ .

2) Заметим, что разность  $\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 = \varepsilon(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0)|_{\mathcal{O}}$  можно оценить с помощью (1.4), (1.19) и (4.12):

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \|\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}_9 c(\varphi) |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (4.33)$$

где  $\mathcal{C}_9 = M_1 \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(1)} (\mathcal{C}_0 + 1)$ . Из (4.32) и (4.33) вытекает оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq (\mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_9) c(\varphi)^4 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \quad (4.34)$$

Поэтому для доказательства теоремы 4.2 нужно оценить надлежащим образом норму  $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$ .

## §5. ОЦЕНКИ ПОПРАВКИ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 4.2 И 4.3

Сначала мы оценим  $H^1$ -норму поправки  $\mathbf{w}_\varepsilon$  и завершим доказательство теоремы 4.3. Затем, используя уже доказанную теорему 4.3 и соображения двойственности, мы оценим  $L_2$ -норму поправки  $\mathbf{w}_\varepsilon$  и докажем теорему 4.2.

**5.1. Локализация вблизи границы.** Пусть число  $\varepsilon_0 \in (0, 1]$  выбрано в соответствии с условием 4.1. Будем считать, что  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Фиксируем гладкую срезку  $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$  в  $\mathbb{R}^d$ , сосредоточенную в  $\varepsilon$ -окрестности границы  $\partial\mathcal{O}$ , такую, что

$$\begin{aligned} \theta_\varepsilon &\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \text{supp } \theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon, \quad 0 \leq \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leq 1, \\ \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) &= 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}; \quad \varepsilon |\nabla \theta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leq \kappa = \text{Const}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Постоянная  $\kappa$  зависит только от области  $\mathcal{O}$ . Рассмотрим в  $\mathbb{R}^d$  функцию

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}). \quad (5.2)$$

**Лемма 5.1.** *Пусть  $\mathbf{w}_\varepsilon$  — решение задачи (4.20), а  $\phi_\varepsilon$  — функция (5.2). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , справедлива оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq c(\varphi) \left( \mathcal{C}_{10} |\zeta|^{1/2} \|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_{11} \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \right). \quad (5.3)$$

Постоянные  $\mathcal{C}_{10}$ ,  $\mathcal{C}_{11}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** В силу (4.20), (5.1) и (5.2) имеем  $\mathbf{w}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \phi_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}}$ . С учетом (4.21) функция  $\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= -(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\phi_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} + \zeta(\phi_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Подставим  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon$  в (5.4) и возьмем мнимую часть от полученного равенства. Тогда с учетом (1.2) и (1.5) имеем

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \zeta| \|\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq \mathcal{C}_{12} \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(g^\varepsilon)^{1/2} b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + |\zeta| \|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где  $\mathcal{C}_{12} = \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (d\alpha_1)^{1/2}$ . При  $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$  (а тогда  $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ ) отсюда выводим неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq 2\mathcal{C}_{12}c(\varphi)|\zeta|^{-1} \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(g^\varepsilon)^{1/2} b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + c(\varphi)^2 \|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Если  $\operatorname{Re} \zeta < 0$ , то возьмем вещественную часть полученного равенства и находим

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} \zeta| \|\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq \mathcal{C}_{12} \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(g^\varepsilon)^{1/2} b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + |\zeta| \|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Складывая (5.5) и (5.7), выводим неравенство, аналогичное (5.6). В итоге при всех рассматриваемых значениях  $\zeta$  получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq 4\mathcal{C}_{12}c(\varphi)|\zeta|^{-1} \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(g^\varepsilon)^{1/2} b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + 4c(\varphi)^2 \|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Теперь из (5.4) при  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon$  и (5.8) вытекает, что

$$\begin{aligned} & a_{D,\varepsilon}[\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon] \\ & \leq 9c(\varphi)^2 |\zeta| \|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 + 9\mathcal{C}_{12}c(\varphi) \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(g^\varepsilon)^{1/2} b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Отсюда выводим неравенство

$$a_{D,\varepsilon}[\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon] \leq 18c(\varphi)^2 |\zeta| \|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 + 81\mathcal{C}_{12}^2 c(\varphi)^2 \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \quad (5.9)$$

Из (5.9) с учетом (3.1) следует, что

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi) \left( \check{\mathcal{C}}_{10} |\zeta|^{1/2} \|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \check{\mathcal{C}}_{11} \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \right), \quad (5.10)$$

где  $\check{\mathcal{C}}_{10} = \sqrt{18}c_0^{-1/2}$ ,  $\check{\mathcal{C}}_{11} = 9c_0^{-1/2}\mathcal{C}_{12}$ . Далее, из (5.8) и (5.9) видно, что

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi) \left( \sqrt{22} \|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \sqrt{85} \mathcal{C}_{12} |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \right). \quad (5.11)$$

С учетом условия  $|\zeta| \geq 1$  соотношения (5.10), (5.11) влекут искомое неравенство (5.3) с постоянными  $\mathcal{C}_{10} = \check{\mathcal{C}}_{10} + \sqrt{22} + 1$ ,  $\mathcal{C}_{11} = \check{\mathcal{C}}_{11} + \sqrt{85}\mathcal{C}_{12} + 1$ .

•

### 5.2. Оценка функции $\phi_\varepsilon$ .

**Лемма 5.2.** *Пусть число  $\varepsilon_1$  удовлетворяет условию 4.1. Пусть  $\phi_\varepsilon$  — функция (5.2). При  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , справедливы оценки*

$$\|\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{13}c(\varphi)|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (5.12)$$

$$\|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi)\left(\mathcal{C}_{14}|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_{15}\varepsilon\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (5.13)$$

Постоянные  $\mathcal{C}_{13}$ ,  $\mathcal{C}_{14}$ ,  $\mathcal{C}_{15}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Считаем, что  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Начнем с оценки  $L_2$ -нормы функции (5.2). Из (1.4), (1.19), (4.12) и (5.1) вытекает оценка (5.12) с постоянной  $\mathcal{C}_{13} = M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(1)}(\mathcal{C}_0 + 1)$ .

Теперь рассмотрим производные

$$\begin{aligned} \partial_j \phi_\varepsilon &= \varepsilon(\partial_j \theta_\varepsilon)\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0 + \theta_\varepsilon(\partial_j \Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0 \\ &\quad + \varepsilon\theta_\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial_j \tilde{\mathbf{u}}_0, \quad j = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq 3\varepsilon^2\|(\nabla\theta_\varepsilon)\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \\ &\quad + 3\|\theta_\varepsilon(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + 3\varepsilon^2\sum_{j=1}^d\|\theta_\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial_j \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Обозначим слагаемые в правой части (5.14) через  $J_1(\varepsilon)$ ,  $J_2(\varepsilon)$ ,  $J_3(\varepsilon)$  соответственно.

В силу (5.1) и леммы 3.4 имеем:

$$\begin{aligned} J_1(\varepsilon) &\leq 3\kappa^2 \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq 3\kappa^2\beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)}^2\|b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

С учетом (1.4), (1.11), (4.12) и (4.13) это приводит к оценке

$$J_1(\varepsilon) \leq \gamma_1 c(\varphi)^2|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad (5.15)$$

где  $\gamma_1 = 3\kappa^2\beta_*M_1^2\alpha_1C_{\mathcal{O}}^{(2)}\hat{c}C_{\mathcal{O}}^{(1)}(\mathcal{C}_0 + 1)$ . Аналогично оцениваем второй член в (5.14):

$$\begin{aligned} J_2(\varepsilon) &\leq 3 \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq 3\beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)}^2\|b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Используя (1.4), (1.10), (4.12) и (4.13), отсюда выводим, что

$$J_2(\varepsilon) \leq \gamma_2 c(\varphi)^2|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad (5.16)$$

где  $\gamma_2 = 3\beta_* M_2^2 \alpha_1 C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{c} C_{\mathcal{O}}^{(1)} (\mathcal{C}_0 + 1)$ . Третий член в (5.14) оценивается с помощью (1.4), (1.19), (4.13) и (5.1):

$$J_3(\varepsilon) \leq \gamma_3 c(\varphi)^2 \varepsilon^2 \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad (5.17)$$

где  $\gamma_3 = 3M_1^2 \alpha_1 (C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{c})^2$ . Теперь из (5.14)–(5.17) вытекает (5.13) с постоянными  $\mathcal{C}_{14} = (\gamma_1 + \gamma_2)^{1/2}$ ,  $\mathcal{C}_{15} = \gamma_3^{1/2}$ . •

**5.3. Завершение доказательства теоремы 4.3.** Из лемм 5.1 и 5.2 следует неравенство

$$\| \mathbf{w}_\varepsilon \|_{H^1(\mathcal{O})} \leq c(\varphi)^2 \left( \mathcal{C}_{16} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_{17} \varepsilon \right) \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1,$$

где  $\mathcal{C}_{16} = \mathcal{C}_{11} \mathcal{C}_{14}$ ,  $\mathcal{C}_{17} = \mathcal{C}_{10} \mathcal{C}_{13} + \mathcal{C}_{11} \mathcal{C}_{15}$ . Вместе с (4.31), (4.32) это влечет искомую оценку (4.8) с постоянными  $\mathcal{C}_2 = \sqrt{2} \mathcal{C}_{16}$ ,  $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6 + \sqrt{2} \mathcal{C}_{17}$ .

Остается проверить (4.10). Из (4.8) с учетом (1.2) и (1.5) следует, что

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} \\ & \leq \| g \|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \left( \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon &= g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0 \\ &\quad + \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \tilde{\mathbf{u}}_0. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Третий член в (5.19) оценим с помощью (1.4), (1.5) и (1.19):

$$\left\| \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \tilde{\mathbf{u}}_0 \right\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}' \varepsilon \| \tilde{\mathbf{u}}_0 \|_{H^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (5.20)$$

где  $\mathcal{C}' = \| g \|_{L_\infty} \alpha_1 d^{1/2} M_1$ . Заметим, что в силу предложения 1.4 и (1.4) выполнено

$$\| g^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0 \|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}'' \varepsilon \| \tilde{\mathbf{u}}_0 \|_{H^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (5.21)$$

где  $\mathcal{C}'' = \| g \|_{L_\infty} r_1 \alpha_1^{1/2}$ . Из (5.19)–(5.21) с учетом (1.9) и (4.13) вытекает, что

$$\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0 \|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{18} c(\varphi) \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (5.22)$$

где  $\mathcal{C}_{18} = (\mathcal{C}' + \mathcal{C}'') C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{c}$ .

Теперь неравенства (5.18) и (5.22) влекут оценку (4.10) с постоянными  $\tilde{\mathcal{C}}_2 = \| g \|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}_2$ ,  $\tilde{\mathcal{C}}_3 = \| g \|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_{18}$ . •

#### 5.4. Доказательство теоремы 4.2.

**Лемма 5.3.** Пусть  $\mathbf{w}_\varepsilon$  – решение задачи (4.20). Пусть число  $\varepsilon_1$  подчинено условию 4.1. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  и  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ , справедлива оценка

$$\| \mathbf{w}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi)^5 \left( \mathcal{C}_{19} |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \mathcal{C}_{20} \varepsilon^2 \right) \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (5.23)$$

Постоянные  $\mathcal{C}_{19}$  и  $\mathcal{C}_{20}$  зависят от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Считаем, что  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Рассмотрим тождество (5.4) и в качестве пробной функции  $\boldsymbol{\eta}$  возьмем  $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = (\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \bar{\zeta}I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$ , где  $\boldsymbol{\Phi} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Тогда левая часть в (5.4) преобразуется к виду

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следовательно,

$$(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} = -(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + \zeta(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (5.24)$$

Для аппроксимации функции  $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$  в  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  применим уже доказанную теорему 4.3. Положим  $\boldsymbol{\eta}_0 = (\mathcal{A}_D^0 - \bar{\zeta}I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0 = P_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\eta}_0$ . Приближением функции  $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$  служит функция  $\boldsymbol{\eta}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ . Перепишем (5.24) в виде

$$\begin{aligned} (\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} &= -(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0))_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad - (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}_0)_{L_2(\mathcal{O})} - (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})(\varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0))_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + \zeta(\boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (5.25) через  $\mathcal{I}_j(\varepsilon)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ .

Проще всего оценить четвертый член в (5.25), используя лемму 3.1 и (5.12):

$$|\mathcal{I}_4(\varepsilon)| \leq |\zeta| \|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{13} c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (5.26)$$

Оценим первый член в (5.25). С учетом (1.2) и (1.5) имеем:

$$|\mathcal{I}_1(\varepsilon)| \leq \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 \|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Применяя теорему 4.3 и (5.13), приходим к оценке

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_1(\varepsilon)| &\leq \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 c(\varphi) \left( \mathcal{C}_{14} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_{15} \varepsilon \right) \\ &\quad \times \left( \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\mathcal{I}_1(\varepsilon)| \leq c(\varphi)^5 \left( \check{\gamma}_1 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \check{\gamma}_2 \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (5.27)$$

где  $\check{\gamma}_1 = \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 (\mathcal{C}_2 \mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_{15} + \mathcal{C}_3 \mathcal{C}_{14}), \check{\gamma}_2 = \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 (\mathcal{C}_3 \mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_3 \mathcal{C}_{15} + \mathcal{C}_2 \mathcal{C}_{15})$ .

Чтобы оценить второй член в (5.25), вспомним, что функция  $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$  сосредоточена в  $\varepsilon$ -окрестности границы, и применим лемму 3.3(1°). С учетом (1.2) и (1.5) имеем:

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_2(\varepsilon)| &\leq \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \left( \int_{B_\varepsilon} |b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}_0|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &\leq \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \beta^{1/2} \varepsilon^{1/2} \|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}_0\|_{H^1(\mathcal{O})}^{1/2} \|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}^{1/2}. \end{aligned}$$

Вместе с леммой 3.2 и (5.13) это влечет

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_2(\varepsilon)| &\leq \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 c(\varphi) \left( \mathcal{C}_{14} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_{15} \varepsilon \right) \\ &\times \beta^{1/2} \varepsilon^{1/2} (\widehat{cc}(\varphi))^{1/2} (\mathcal{C}_0 c(\varphi) |\zeta|^{-1/2})^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\Phi\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\mathcal{I}_2(\varepsilon)| \leq c(\varphi)^2 \left( \check{\gamma}_3 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \check{\gamma}_4 \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\Phi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (5.28)$$

где  $\check{\gamma}_3 = \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 (\beta \widehat{c} \mathcal{C}_0)^{1/2} (\mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_{15})$ ,  $\check{\gamma}_4 = \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 (\beta \widehat{c} \mathcal{C}_0)^{1/2} \mathcal{C}_{15}$ .

Осталось оценить третий член в (5.25). С учетом (1.2) имеем:

$$\mathcal{I}_3(\varepsilon) = \mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon) + \mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon), \quad (5.29)$$

$$\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon) = - (g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \phi_\varepsilon, (b(\mathbf{D}) \Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\eta}_0)_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (5.30)$$

$$\mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon) = - (g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \phi_\varepsilon, \varepsilon \sum_{l=1}^d b_l \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \tilde{\eta}_0)_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (5.31)$$

Член (5.30) оценим с помощью (1.2), (1.5) и леммы 3.4:

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon)| &\leq \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \left( \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(b(\mathbf{D}) \Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\eta}_0|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \\ &\leq \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\times \left( \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|b(\mathbf{D}) \Lambda\|_{L_2(\Omega)}^2 \|b(\mathbf{D}) \tilde{\eta}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D}) \tilde{\eta}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Аналогично (4.12), (4.13) имеем:

$$\|\tilde{\eta}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\mathcal{O}}^{(1)} (\mathcal{C}_0 + 1) c(\varphi) |\zeta|^{-1/2} \|\Phi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (5.33)$$

$$\|\tilde{\eta}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{cc}(\varphi) \|\Phi\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (5.34)$$

Из (5.32)–(5.34) с учетом (1.10) и (5.13) вытекает оценка

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon)| &\leq \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1^{3/2} M_2 c(\varphi) \left( \mathcal{C}_{14} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_{15} \varepsilon \right) \\ &\times \beta_*^{1/2} \varepsilon^{1/2} (C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{cc}(\varphi))^{1/2} (C_{\mathcal{O}}^{(1)} (\mathcal{C}_0 + 1) c(\varphi) |\zeta|^{-1/2})^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\Phi\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon)| \leq c(\varphi)^2 \left( \check{\gamma}_5 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \check{\gamma}_6 \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\Phi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (5.35)$$

где  $\check{\gamma}_5 = \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1^{3/2} M_2 (\beta_* C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{c} C_{\mathcal{O}}^{(1)} (\mathcal{C}_0 + 1))^{1/2} (\mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_{15})$ ,  $\check{\gamma}_6 = \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1^{3/2} M_2 (\beta_* C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{c} C_{\mathcal{O}}^{(1)} (\mathcal{C}_0 + 1))^{1/2} \mathcal{C}_{15}$ .

Наконец, член (5.31) оценивается с помощью (1.2), (1.4), (1.5) и (1.19):

$$|\mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon)| \leq \varepsilon \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1^{3/2} M_1 \|\mathbf{D}\phi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\tilde{\eta}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда с учетом (5.13) и (5.34) получаем

$$|\mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon)| \leq c(\varphi)^2 (\check{\gamma}_7 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \check{\gamma}_8 \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\Phi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (5.36)$$

где  $\check{\gamma}_7 = \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1^{3/2} M_1 C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{c} \mathcal{C}_{14}$ ,  $\check{\gamma}_8 = \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1^{3/2} M_1 C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{c} (\mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_{15})$ .

В итоге соотношения (5.25)–(5.29), (5.35) и (5.36) влекут оценку

$$|(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon, \Phi)_{L_2(\mathcal{O})}| \leq c(\varphi)^5 (\widetilde{\gamma} |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \widehat{\gamma} \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\Phi\|_{L_2(\mathcal{O})}$$

при любом  $\Phi \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ , где  $\widetilde{\gamma} = \mathcal{C}_{13} + \check{\gamma}_1 + \check{\gamma}_3 + \check{\gamma}_5 + \check{\gamma}_7$ ,  $\widehat{\gamma} = \check{\gamma}_2 + \check{\gamma}_4 + \check{\gamma}_6 + \check{\gamma}_8$ . Следовательно,

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi)^5 (\widetilde{\gamma} |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \widehat{\gamma} \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (5.37)$$

Теперь искомая оценка (5.23) прямо вытекает из (5.37) и (5.12); при этом  $\mathcal{C}_{19} = \widetilde{\gamma} + \mathcal{C}_{13}$ ,  $\mathcal{C}_{20} = \widehat{\gamma}$ . •

**Завершение доказательства теоремы 4.2.** В силу (4.34) и (5.23) при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq (\mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_9) c(\varphi)^4 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ c(\varphi)^5 (\mathcal{C}_{19} |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \mathcal{C}_{20} \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Отсюда прямо вытекает искомая оценка (4.1) с постоянной  $\mathcal{C}_1 = \max\{\mathcal{C}_6 + \mathcal{C}_9 + \mathcal{C}_{19}; \mathcal{C}_{20}\}$ . •

## §6. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ: СЛУЧАЙ $\Lambda \in L_\infty$ , СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ

**6.1. Случай  $\Lambda \in L_\infty$ .** Как и для задачи в  $\mathbb{R}^d$  (см. п. 2.3), при дополнительном условии 2.8 можно устраниТЬ слаживающий оператор в корректоре, т. е. вместо корректора (4.4) можно использовать более простой оператор

$$K_D^0(\varepsilon; \zeta) = [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}. \quad (6.1)$$

Используя предложение 2.9, нетрудно убедиться, что при условии 2.8 оператор (6.1) непрерывно отображает  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Вместо (4.7) сейчас используем другое приближение к решению  $\mathbf{u}_\varepsilon$  задачи (3.3):

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon := (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K_D^0(\varepsilon; \zeta) \mathbf{F} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0. \quad (6.2)$$

**Теорема 6.1.** Пусть выполнены условия теоремы 4.2 и условие 2.8. Пусть функция  $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$  определена в (6.2). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \left( \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_3^\circ c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (6.3)$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \\ &\leq \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_3^\circ c(\varphi)^4 \varepsilon. \end{aligned}$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \left( \tilde{\mathcal{C}}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \tilde{\mathcal{C}}_3^\circ c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (6.4)$$

Постоянные  $\mathcal{C}_2, \tilde{\mathcal{C}}_2$  — те же, что и в теореме 4.3. Постоянны  $\mathcal{C}_3^\circ, \tilde{\mathcal{C}}_3^\circ$  зависят от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$ , от области  $\mathcal{O}$  и от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** Чтобы вывести (6.3) из (4.8), достаточно оценить  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ -норму функции  $\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon = \varepsilon (\Lambda^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0)|_{\mathcal{O}}$ . Начнем с оценки  $L_2$ -нормы. С учетом условия 2.8 и оценок (1.4), (1.18) имеем:

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \varepsilon \|\Lambda\|_{L_\infty} \|(S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2 \|\Lambda\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \quad (6.5)$$

Теперь рассмотрим производные

$$\partial_j(\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon) = ((\partial_j \Lambda)^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0)|_{\mathcal{O}} + \varepsilon (\Lambda^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \partial_j \tilde{\mathbf{u}}_0)|_{\mathcal{O}},$$

$j = 1, \dots, d$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}(\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq 2 \|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + 2\varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \|\Lambda^\varepsilon (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \partial_j \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

С учетом предложения 2.9 это влечет

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}(\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq 2\beta_1 \|(S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\quad + 2\varepsilon^2 \|\Lambda\|_{L_\infty}^2 (\beta_2 + 1) \sum_{j=1}^d \|(S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \partial_j \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Для оценки первого члена справа применим предложение 1.4, а второй член оценим с помощью (1.18). Учитывая также (1.4), приходим к неравенству

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{21} \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (6.8)$$

где  $\mathcal{C}_{21} = \alpha_1^{1/2} (2\beta_1 r_1^2 + 8(\beta_2 + 1) \|\Lambda\|_{L_\infty}^2)^{1/2}$ . В итоге из (6.5) и (6.8) получаем

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}''' \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (6.9)$$

где  $\mathcal{C}''' = \alpha_1^{1/2} (2\beta_1 r_1^2 + (8\beta_2 + 12) \|\Lambda\|_{L_\infty}^2)^{1/2}$ . Теперь из (4.8) и (6.9) с учетом (4.13) вытекает искомая оценка (6.3) с постоянной  $\mathcal{C}_3^\circ = \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}''' C_{\mathcal{O}}^{(2)} \hat{c}$ .

Остается проверить (6.4). Из (6.3) с учетом (1.2) и (1.5) следует, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ \leq \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \left( \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_3^\circ c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \end{aligned} \quad (6.10)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} g^\varepsilon b(\mathbf{D})\check{\mathbf{v}}_\varepsilon &= g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 \\ &\quad + \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \mathbf{u}_0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Третий член в (6.11) оценим с помощью (1.2) и (1.5):

$$\left\| \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \mathbf{u}_0 \right\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathcal{C}}' \varepsilon \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}, \quad (6.12)$$

где  $\tilde{\mathcal{C}}' = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1 d \|\Lambda\|_{L_\infty}$ . Из (6.11), (6.12) с учетом (1.9) вытекает, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\check{\mathbf{v}}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathcal{C}}' \varepsilon \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}. \quad (6.13)$$

Теперь неравенства (6.10) и (6.13) с учетом (3.11) влекут оценку (6.4) с постоянной  $\tilde{\mathcal{C}}_3^\circ = \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}_3^\circ + \tilde{\mathcal{C}}' \hat{c}$ . •

**6.2. Случай нулевого корректора.** Следующее утверждение вытекает из теоремы 4.3, предложения 1.2 и уравнения (1.7). (Ср. предложение 2.7.)

**Предложение 6.2.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Если  $g^0 = \underline{g}$ , т. е. выполнены соотношения (1.13), то  $\Lambda = 0$  и  $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \left( \mathcal{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

**6.3. Случай  $g^0 = \underline{g}$ .** Как уже отмечалось (см. п. 2.3), при условии  $g^0 = \underline{g}$  матрица (1.9) постоянна:  $\tilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$ . Кроме того, в этом случае выполнено условие 2.8 (см. предложение 2.12). Применяя утверждение теоремы 6.1 относительно потоков, приходим к следующему результату.

**Предложение 6.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Если  $g^0 = \underline{g}$ , т. е. справедливы представления (1.14), то при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \left( \tilde{\mathcal{C}}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \tilde{\mathcal{C}}_3^\circ c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

## §7. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В СТРОГО ВНУТРЕННЕЙ ПОДОБЛАСТИ

**7.1. Общий случай.** Используя теорему 4.2 и результаты для задачи усреднения в  $\mathbb{R}^d$ , нетрудно улучшить  $H^1$ -оценки погрешности в строго внутренней подобласти  $\mathcal{O}'$  области  $\mathcal{O}$ .

**Теорема 7.1.** *Пусть выполнены условия теоремы 4.3. Пусть  $\mathcal{O}'$  – строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ . Введем обозначение  $\delta := \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leq (\mathcal{C}_{22}' \delta^{-1} + \mathcal{C}_{22}'' c(\varphi)^6 \varepsilon) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (7.1)$$

или, в операторных терминах,

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leqslant (\mathcal{C}'_{22}\delta^{-1} + \mathcal{C}''_{22})c(\varphi)^6\varepsilon. \end{aligned}$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant (\tilde{\mathcal{C}}'_{22}\delta^{-1} + \tilde{\mathcal{C}}''_{22})c(\varphi)^6\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (7.2)$$

Постоянные  $\mathcal{C}'_{22}, \mathcal{C}''_{22}, \tilde{\mathcal{C}}'_{22}$  и  $\tilde{\mathcal{C}}''_{22}$  зависят от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Фиксируем гладкую срезку  $\chi(\mathbf{x})$  со следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \chi \in C_0^\infty(\mathcal{O}), \quad 0 \leqslant \chi(\mathbf{x}) \leqslant 1; \\ \chi(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \mathcal{O}'; \quad |\nabla \chi(\mathbf{x})| \leqslant \kappa'\delta^{-1}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Постоянная  $\kappa'$  зависит только от области  $\mathcal{O}$ . Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — решение задачи (3.3) и  $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$  — решение уравнения (4.16). Тогда  $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta)(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) = 0$  в области  $\mathcal{O}$ . Следовательно, выполнено тождество

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (7.4)$$

Подставим  $\boldsymbol{\eta} = \chi^2(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)$  в (7.4) и обозначим

$$\mathfrak{A}(\varepsilon) := (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)), b(\mathbf{D})(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)))_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (7.5)$$

Нетрудно преобразовать полученное тождество к виду

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\varepsilon) - \zeta\|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &= -(g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)), \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ (g^\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon, b(\mathbf{D})(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)))_{L_2(\mathcal{O})} + (g^\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \quad (7.6)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{z}_\varepsilon := \sum_{l=1}^d b_l(D_l \chi)(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon). \quad (7.7)$$

Правая часть в (7.6) оценивается через  $2\mathfrak{A}(\varepsilon)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2$ . Возьмем мнимую часть в (7.6). Тогда

$$|\operatorname{Im} \zeta|\|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \leqslant 2\mathfrak{A}(\varepsilon)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \quad (7.8)$$

Если  $\operatorname{Re} \zeta \geqslant 0$  (а тогда  $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ ), отсюда получаем

$$\|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \leqslant c(\varphi)|\zeta|^{-1} \left( 2\mathfrak{A}(\varepsilon)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \right). \quad (7.9)$$

Если  $\operatorname{Re} \zeta < 0$ , то возьмем вещественную часть в (7.6). Тогда

$$|\operatorname{Re} \zeta|\|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \leqslant 2\mathfrak{A}(\varepsilon)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \quad (7.10)$$

Складывая (7.8) и (7.10), выводим неравенство, аналогичное (7.9). В итоге при всех рассматриваемых значениях  $\zeta$  получаем

$$\begin{aligned} & \|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \\ & \leq 2c(\varphi)|\zeta|^{-1} \left( 2\mathfrak{A}(\varepsilon)^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \right). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Теперь из (7.6) и (7.11) выводим оценку

$$\mathfrak{A}(\varepsilon) \leq 42c(\varphi)^2 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \quad (7.12)$$

В силу (1.5) и (7.3) справедлива оценка функции (7.7)

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq (d\alpha_1)^{1/2} \kappa' \delta^{-1} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (7.13)$$

Из (7.5), (7.12) и (7.13) с учетом (3.1) получаем:

$$\|\mathbf{D}(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon))\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{23} c(\varphi) \delta^{-1} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (7.14)$$

где  $\mathcal{C}_{23} = c_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (42d\alpha_1)^{1/2} \kappa'$ .

В силу (4.1) и (4.17) выполнена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{24} c(\varphi)^5 (|\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad (7.15)$$

где  $\mathcal{C}_{24} = C_1 \mathcal{C}_4 + \mathcal{C}_1$ . Из (7.14) и (7.15) вытекает, что

$$\|\mathbf{D}(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon))\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{23} \mathcal{C}_{24} \delta^{-1} c(\varphi)^6 (|\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leq \mathcal{C}_{24} (\mathcal{C}_{23} \delta^{-1} + 1) c(\varphi)^6 (|\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (7.16)$$

В силу (4.6), (4.18) и (4.19) имеем

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq (C_2 + C_3) \mathcal{C}_4 c(\varphi)^3 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (7.17)$$

В итоге из (7.16) и (7.17) вытекает искомая оценка (7.1) с постоянными  $\mathcal{C}'_{22} = 2\mathcal{C}_{23}\mathcal{C}_4$ ,  $\mathcal{C}''_{22} = 2\mathcal{C}_{24} + (C_2 + C_3)\mathcal{C}_4$ .

Проверим неравенство (7.2). Из (7.1) с учетом (1.2) и (1.5) получаем:

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leq \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} (\mathcal{C}'_{22} \delta^{-1} + \mathcal{C}''_{22}) c(\varphi)^6 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда и из (5.22) следует оценка (7.2) с постоянными  $\mathcal{C}'_{22} = \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}'_{22}$ ,  $\mathcal{C}''_{22} = \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}''_{22} + \mathcal{C}_{18}$ . •

**7.2. Случай  $\Lambda \in L_\infty$ .** Аналогичным образом в случае, когда выполнено условие 2.8, получаем следующий результат.

**Теорема 7.2.** Пусть выполнены условия теоремы 6.1. Пусть  $\mathcal{O}'$  – строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$  и  $\delta := \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leq (\mathcal{C}'_{22} \delta^{-1} + \check{\mathcal{C}}''_{22}) c(\varphi)^6 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (7.18)$$

или, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \leq (\mathcal{C}'_{22} \delta^{-1} + \check{\mathcal{C}}''_{22}) c(\varphi)^6 \varepsilon.$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leq (\tilde{\mathcal{C}}'_{22}\delta^{-1} + \tilde{\mathcal{C}}''_{22})c(\varphi)^6\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (7.19)$$

Постоянные  $\mathcal{C}'_{22}$ ,  $\tilde{\mathcal{C}}'_{22}$  — те же, что и в теореме 7.1. Постоянныe  $\tilde{\mathcal{C}}''_{22}$  и  $\hat{\mathcal{C}}''_{22}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$ , от области  $\mathcal{O}$  и от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** Из (7.1), (6.9) и (4.13) следует оценка (7.18) с постоянной  $\check{\mathcal{C}}''_{22} = \mathcal{C}''_{22} + \mathcal{C}'''_{\mathcal{O}} C_{\mathcal{O}}^{(2)} \hat{c}$ .

Из (7.18) вытекает, что

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leq \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}(\mathcal{C}'_{22}\delta^{-1} + \check{\mathcal{C}}''_{22})c(\varphi)^6\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Отсюда и из (6.13), (3.11) вытекает (7.19) с постоянной  $\hat{\mathcal{C}}''_{22} = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\check{\mathcal{C}}''_{22} + \tilde{\mathcal{C}}'\hat{c}$ . •

## §8. ДРУГАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$

**8.1. Аппроксимация резольвенты  $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$ .** Теоремы 4.2, 4.3 и 6.1 дают двупараметрические оценки относительно  $\varepsilon$  и  $|\zeta|$ , равномерные в области  $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| \geq 1, \varphi \in [\varphi_0, 2\pi - \varphi_0]\}$  со сколь угодно малым  $\varphi_0 > 0$ .

Для полноты изложения приведем еще один результат об аппроксимации резольвенты  $(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ , справедливый в более широкой области изменения параметра  $\zeta$ . При ограниченных значениях  $|\zeta|$ , а также в точках  $\zeta$  с малым  $\varphi$  или  $2\pi - \varphi$  этот результат может быть предпочтительнее.

**Теорема 8.1.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$ , где  $c_* > 0$  — общая нижняя грань операторов  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  и  $\mathcal{A}_D^0$ . Положим  $\zeta - c_* = |\zeta - c_*|e^{i\psi}$  и введем обозначение

$$\rho_*(\zeta) = \begin{cases} c(\psi)^2|\zeta - c_*|^{-2}, & |\zeta - c_*| < 1, \\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_*| \geq 1. \end{cases} \quad (8.1)$$

Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — решение задачи (3.3),  $\mathbf{u}_0$  — решение задачи (3.10),  $\mathbf{v}_\varepsilon$  — функция (4.7). Пусть число  $\varepsilon_1$  удовлетворяет условию 4.1. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{25}\rho_*(\zeta)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (8.2)$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{26}\rho_*(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (8.3)$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{25}\rho_*(\zeta)\varepsilon, \quad (8.4)$$

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{26}\rho_*(\zeta)\varepsilon^{1/2}. \quad (8.5)$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{27}\rho_*(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (8.6)$$

Постоянныe  $\mathcal{C}_{25}$ ,  $\mathcal{C}_{26}$ ,  $\mathcal{C}_{27}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Замечание 8.2.** 1) Величина  $c(\psi)^2|\zeta - c_*|^{-2}$  из (8.1) есть ни что иное, как величина, обратная к квадрату расстояния от точки  $\zeta$  до  $[c_*, \infty)$ . 2) В качестве  $c_*$  можно выбрать  $c_* = c_2$ , где  $c_2$  определено в (3.2). 3) Пусть  $\nu > 0$  — сколь угодно малое число. Если считать  $\varepsilon$  достаточно малым, то в качестве  $c_*$  можно принять  $c_* = \lambda_1^0(D) - \nu$ , где  $\lambda_1^0(D)$  — первое собственное значение оператора  $\mathcal{A}_D^0$ . 4) Легко указать верхнюю оценку числа  $c_*$ : из (3.1) видно, что  $c_* \leq c_1 \mu_1^0(D)$ , где  $\mu_1^0(D)$  — первое собственное значение оператора  $-\Delta$  с условием Дирихле. Поэтому  $c_*$  ограничено величиной, зависящей лишь от  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Применим теорему 4.2 при  $\zeta = -1$ . В силу (4.2)

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_1(\varepsilon + \varepsilon^2) \leq 2\mathcal{C}_1\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Используя аналог тождества (2.10) (с заменой  $\mathcal{A}_\varepsilon$  на  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$  и  $\mathcal{A}^0$  на  $\mathcal{A}_D^0$ ), получаем, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнено

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq 2\mathcal{C}_1\varepsilon \sup_{x \geq c_*} (x+1)^2|x-\zeta|^{-2}. \quad (8.7)$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x \geq c_*} (x+1)^2|x-\zeta|^{-2} \leq \check{c}\rho_*(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty), \quad (8.8)$$

где  $\check{c} = (c_* + 2)^2$ . В силу замечания 8.2(4),  $\check{c}$  ограничено величиной, зависящей лишь от  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$  и от области  $\mathcal{O}$ . Теперь из (8.7) и (8.8) вытекает оценка (8.4) с постоянной  $\mathcal{C}_{25} = 2\mathcal{C}_1\check{c}$ .

Применим теперь теорему 4.3 при  $\zeta = -1$ . В силу (4.9) при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнена оценка

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \\ &\leq \mathcal{C}_2\varepsilon^{1/2} + \mathcal{C}_3\varepsilon \leq (\mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3)\varepsilon^{1/2}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Заметим, что из леммы 5.2 с  $\zeta = -1$  следует, что

$$\|\varepsilon\theta_\varepsilon K_D(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq (\mathcal{C}_{13} + \mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_{15})\varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (8.10)$$

Из (8.9) и (8.10) вытекает неравенство

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 + I)^{-1} - \varepsilon(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{28}\varepsilon^{1/2} \quad (8.11)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ ,  $\mathcal{C}_{28} = \mathcal{C}_2 + \mathcal{C}_3 + \mathcal{C}_{13} + \mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_{15}$ . Используем аналог тождества (2.34):

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; \zeta) \\ &= (\mathcal{A}_{D,\varepsilon} + I)(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \\ &\times ((\mathcal{A}_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 + I)^{-1} - \varepsilon(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; -1)) \\ &\times (\mathcal{A}_D^0 + I)(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} + \varepsilon(\zeta + 1)(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; \zeta). \end{aligned} \quad (8.12)$$

Поскольку образ операторов в (8.12) содержится в  $H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ , можно домножить слева на  $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{1/2}$ . Тогда с учетом (8.8) получаем

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{1/2} ((\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; \zeta))\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ & \leq \check{c}\rho_*(\zeta)\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{1/2} ((\mathcal{A}_{D,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 + I)^{-1} - \varepsilon(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; -1))\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ & + \varepsilon|\zeta + 1| \sup_{x \geq c_*} x^{1/2}|x - \zeta|^{-1} \|(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Обозначим слагаемые в правой части (8.13) через  $\mathcal{L}_1(\varepsilon)$  и  $\mathcal{L}_2(\varepsilon)$ . Оценка первого члена вытекает из (8.11) и (3.1):

$$\mathcal{L}_1(\varepsilon) \leq c_1^{1/2} \check{c} \mathcal{C}_{28} \rho_*(\zeta) \varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (8.14)$$

Оператор  $K_D(\varepsilon; \zeta)$  можно представить в виде  $K_D(\varepsilon; \zeta) = R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_D^0)^{-1/2} (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}$ , а потому с учетом (1.4), (1.19), (4.3) и (5.1) получаем

$$\mathcal{L}_2(\varepsilon) \leq \varepsilon|\zeta + 1| \left( \sup_{x \geq c_*} x|x - \zeta|^{-2} \right) M_1 \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(1)} \|(\mathcal{A}_D^0)^{-1/2}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})}. \quad (8.15)$$

Из аналогов оценок (3.1) и (3.2) для оператора  $\mathcal{A}_D^0$  следует неравенство

$$\|(\mathcal{A}_D^0)^{-1/2}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq (c_0^{-1} + c_2^{-1})^{1/2}. \quad (8.16)$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x \geq c_*} x|x - \zeta|^{-2} \leq \begin{cases} (c_* + 1)c(\psi)^2|\zeta - c_*|^{-2}, & |\zeta - c_*| < 1, \\ (c_* + 1)c(\psi)^2|\zeta - c_*|^{-1}, & |\zeta - c_*| \geq 1. \end{cases}$$

Заметим, что  $|\zeta + 1| \leq 2 + c_*$  при  $|\zeta - c_*| < 1$ , и  $|\zeta + 1||\zeta - c_*|^{-1} \leq 2 + c_*$  при  $|\zeta - c_*| \geq 1$ , а потому

$$|\zeta + 1| \sup_{x \geq c_*} x|x - \zeta|^{-2} \leq (c_* + 2)(c_* + 1)\rho_*(\zeta). \quad (8.17)$$

Из (8.15)–(8.17) следует, что

$$\mathcal{L}_2(\varepsilon) \leq \mathcal{C}_{29} \rho_*(\zeta) \varepsilon, \quad (8.18)$$

где  $\mathcal{C}_{29} = (c_* + 2)(c_* + 1)M_1 \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(1)} (c_0^{-1} + c_2^{-1})^{1/2}$ .

В итоге неравенства (8.13), (8.14) и (8.18) приводят к оценке

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{1/2} ((\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; \zeta))\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \\ & \leq (c_1^{1/2} \check{c} \mathcal{C}_{28} + \mathcal{C}_{29}) \rho_*(\zeta) \varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (3.1), (3.2) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \\ & \leq (c_0^{-1} + c_2^{-1})^{1/2} (c_1^{1/2} \check{c} \mathcal{C}_{28} + \mathcal{C}_{29}) \rho_*(\zeta) \varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (8.19)$$

Наконец, в силу (8.10) и (8.8) имеем

$$\begin{aligned} \|\varepsilon\theta_\varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} &\leq \|\varepsilon\theta_\varepsilon K_D(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \\ &\times \|(\mathcal{A}_D^0 + I)(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq (\mathcal{C}_{13} + \mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_{15})\check{c}^{1/2}\rho_*(\zeta)^{1/2}\varepsilon^{1/2} \end{aligned} \quad (8.20)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . В итоге из (8.19) и (8.20) следует неравенство (8.5) с постоянной  $\mathcal{C}_{26} = (c_0^{-1} + c_2^{-1})^{1/2}(c_1^{1/2}\check{c}\mathcal{C}_{28} + \mathcal{C}_{29}) + (\mathcal{C}_{13} + \mathcal{C}_{14} + \mathcal{C}_{15})\check{c}^{1/2}$ .

Остается проверить (8.6). Из (8.3) с учетом (1.2), (1.5) видно, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнено

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathcal{C}_{26}\rho_*(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (8.21)$$

Далее, аналогично (5.19)–(5.21) получаем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq (\mathcal{C}' + \mathcal{C}'')\varepsilon\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (8.22)$$

Из (3.9) с учетом (8.8) вытекает оценка

$$\|(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^2(\mathcal{O})} \leq \hat{c} \sup_{x \geq c_*} x|x - \zeta|^{-1} \leq \hat{c}\check{c}^{1/2}\rho_*(\zeta)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leq \hat{c}\check{c}^{1/2}\rho_*(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (8.23)$$

Отсюда и из (4.3), (8.22) вытекает, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathcal{C}}_{27}\rho_*(\varepsilon)^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (8.24)$$

где  $\tilde{\mathcal{C}}_{27} = (\mathcal{C}' + \mathcal{C}'')C_{\mathcal{O}}^{(2)}\hat{c}\check{c}^{1/2}$ . Вместе с (8.21) это влечет (8.6) с постоянной  $\mathcal{C}_{27} = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathcal{C}_{26} + \tilde{\mathcal{C}}_{27}$ . •

## 8.2. Случай $\Lambda \in L_\infty$ .

**Теорема 8.3.** Пусть выполнены условия теоремы 8.1 и условие 2.8. Пусть функция  $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$  определена в (6.2). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{26}^\circ\rho_*(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (8.25)$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{26}^\circ\rho_*(\zeta)\varepsilon^{1/2}.$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{27}^\circ\rho_*(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (8.26)$$

Постоянные  $\mathcal{C}_{26}^\circ$ ,  $\mathcal{C}_{27}^\circ$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$ , от области  $\mathcal{O}$  и от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** Аналогично рассмотрениям из доказательства теоремы 6.1 (см. (6.5)–(6.9)) легко проверить оценку

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}''' \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

С учетом (8.23) и (4.3) отсюда получаем

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}''' C_{\mathcal{O}}^{(2)} \hat{c}\check{c}^{1/2}\rho_*(\zeta)^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (8.27)$$

Теперь из (8.3) и (8.27) вытекает искомая оценка (8.25) с постоянной  $\mathcal{C}_{26}^\circ = \mathcal{C}_{26} + \mathcal{C}''' C_O^{(2)} \tilde{c} \check{c}^{1/2}$ .

Остается проверить (8.26). Из (8.25) с учетом (1.2), (1.5) вытекает, что

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}_{26}^\circ \rho_*(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (8.28)$$

Аналогично (6.11)–(6.13) убеждаемся, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathcal{C}}' \varepsilon \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}. \quad (8.29)$$

В итоге соотношения (8.23), (8.28) и (8.29) влекут (8.26) с постоянной  $\mathcal{C}_{27}^\circ = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}_{26}^\circ + \tilde{\mathcal{C}}' \tilde{c} \check{c}^{1/2}$ . •

**8.3. Специальные случаи.** Аналогично предложению 6.2 получаем следующее утверждение.

**Предложение 8.4.** *Пусть выполнены условия теоремы 8.1. Если  $g^0 = \bar{g}$ , т. е. выполнены соотношения (1.13), то  $\Lambda = 0$  и  $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{26} \rho_*(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следующее утверждение получается аналогично предложению 6.3.

**Предложение 8.5.** *Пусть выполнены условия теоремы 8.1. Если  $g^0 = g$ , т. е. справедливы представления (1.14), то при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}_{27}^\circ \rho_*(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

**8.4. Оценки в строго внутренней подобласти.** Аналогично теореме 7.1 в строго внутренней подобласти  $\mathcal{O}'$  области  $\mathcal{O}$  можно получить  $H^1$ -оценку погрешности порядка  $\varepsilon$ , используя теорему 8.1 и результаты для задачи в  $\mathbb{R}^d$ .

**Теорема 8.6.** *Пусть выполнены условия теоремы 8.1. Пусть  $\mathcal{O}'$  – строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ , и пусть  $\delta := \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathcal{C}'_{30} \delta^{-1} (c(\psi) \rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2} \rho_*(\zeta)^{3/4}) + \mathcal{C}''_{30} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathcal{C}'_{30} \delta^{-1} (c(\psi) \rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2} \rho_*(\zeta)^{3/4}) + \mathcal{C}''_{30} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \tilde{\mathcal{C}}'_{30} \delta^{-1} (c(\psi) \rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2} \rho_*(\zeta)^{3/4}) + \tilde{\mathcal{C}}''_{30} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (8.31)$$

Постоянные  $C'_{30}, C''_{30}, \tilde{C}'_{30}, \tilde{C}''_{30}$  зависят от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Общий план доказательства аналогичен доказательству теоремы 7.1. Однако ассоциированную задачу в  $\mathbb{R}^d$  приходится выбирать иначе. Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — решение задачи (3.3),  $\mathbf{u}_0$  — решение задачи (3.10), и  $\tilde{\mathbf{u}}_0 = P_{\mathcal{O}} \mathbf{u}_0$ . Поскольку  $\|(\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq c(\psi) |\zeta - c_*|^{-1}$ , с учетом (4.3) получаем

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\mathcal{O}}^{(0)} \|\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq C_{\mathcal{O}}^{(0)} c(\psi) |\zeta - c_*|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (8.32)$$

В силу (4.3) и (8.23) справедлива оценка

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\mathcal{O}}^{(2)} \hat{c}^{1/2} \rho_*(\zeta)^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (8.33)$$

Положим

$$\hat{\mathbf{F}} := \mathcal{A}^0 \tilde{\mathbf{u}}_0 - (\zeta - c_*) \tilde{\mathbf{u}}_0. \quad (8.34)$$

Аналогично (4.15) из (8.32) и (8.33) выводим неравенство

$$\|\hat{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{31} \rho_*(\zeta)^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (8.35)$$

где  $C_{31} = c_1 C_{\mathcal{O}}^{(2)} \hat{c}^{1/2} + C_{\mathcal{O}}^{(0)}$ . Заметим, что  $(\hat{\mathbf{F}} - \mathbf{F})|_{\mathcal{O}} = c_* \mathbf{u}_0$ .

По условиям теоремы  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_*, \infty)$ . Тогда точка  $\zeta - c_* \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  является регулярной для оператора  $\mathcal{A}_\varepsilon$ . Пусть  $\hat{\mathbf{u}}_\varepsilon$  — решение уравнения

$$\mathcal{A}_\varepsilon \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon - (\zeta - c_*) \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon = \hat{\mathbf{F}} \quad (8.36)$$

в  $\mathbb{R}^d$ . Тогда функция  $\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon$  удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\zeta - c_*)(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= c_*(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \end{aligned} \quad (8.37)$$

Пусть  $\chi(\mathbf{x})$  — срезка, подчиненная условиям (7.3). Подставим  $\boldsymbol{\eta} = \chi^2(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)$  в (8.37) и обозначим

$$\mathfrak{B}(\varepsilon) := (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)), b(\mathbf{D})(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)))_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Аналогично (7.6) нетрудно преобразовать полученное тождество к виду

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(\varepsilon) - (\zeta - c_*) \|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &= c_*(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0, \chi^2(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon))_{L_2(\mathcal{O})} \\ &- (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)), \mathbf{r}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ (g^\varepsilon \mathbf{r}_\varepsilon, b(\mathbf{D})(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)))_{L_2(\mathcal{O})} + (g^\varepsilon \mathbf{r}_\varepsilon, \mathbf{r}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \quad (8.38)$$

где введено обозначение

$$\mathbf{r}_\varepsilon := \sum_{l=1}^d b_l(D_l \chi)(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon). \quad (8.39)$$

Возьмем мнимую часть в (8.38). Тогда

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \zeta| \|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq c_* \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ 2\mathfrak{B}(\varepsilon)^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Если  $\operatorname{Re} \zeta \geq c_*$  (а тогда  $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ ), отсюда выводим неравенство

$$\begin{aligned} \|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq c(\psi)^2 |\zeta - c_*|^{-2} c_*^2 \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \\ &+ c(\psi) |\zeta - c_*|^{-1} \left( 4\mathfrak{B}(\varepsilon)^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + 2\|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \right). \end{aligned} \quad (8.41)$$

Если  $\operatorname{Re} \zeta < c_*$ , то возьмем вещественную часть в (8.38) и получим

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} \zeta - c_*| \|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq c_* \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ 2\mathfrak{B}(\varepsilon)^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Складывая (8.40) и (8.42), выводим неравенство, аналогичное (8.41). В итоге при всех рассматриваемых значениях  $\zeta$  получаем

$$\begin{aligned} \|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leq 4c(\psi)^2 |\zeta - c_*|^{-2} c_*^2 \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \\ &+ c(\psi) |\zeta - c_*|^{-1} \left( 8\mathfrak{B}(\varepsilon)^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + 4\|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \right). \end{aligned} \quad (8.43)$$

Теперь из (8.38) и (8.43) выводим неравенство

$$\mathfrak{B}(\varepsilon) \leq 342c(\psi)^2 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 + 18c_*^2 c(\psi)^2 |\zeta - c_*|^{-1} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \quad (8.44)$$

В силу (1.5) и (7.3) справедлива оценка функции (8.39)

$$\|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq (d\alpha_1)^{1/2} \kappa' \delta^{-1} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (8.45)$$

Из (8.44), (8.45) с учетом (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon))\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq \mathcal{C}_{32} c(\psi) \delta^{-1} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ \sqrt{18} c_0^{-1/2} c_* c(\psi) |\zeta - c_*|^{-1/2} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \quad (8.46)$$

где  $\mathcal{C}_{32}^2 = 342c_0^{-1} \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 (\kappa')^2$ .

Для  $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}$  выполнено (8.2). Чтобы оценить  $\|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ , применим теорему 2.2, учитывая (8.34) и (8.36). Используя также (8.35), получаем:

$$\begin{aligned} \|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq \|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 c(\psi)^2 |\zeta - c_*|^{-1/2} \varepsilon \|\widehat{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_1 \mathcal{C}_{31} c(\psi)^2 \rho_*(\zeta)^{1/2} |\zeta - c_*|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (8.47)$$

В силу (8.1), (8.2) и (8.47)

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \left( \mathcal{C}_{25} \rho_*(\zeta) + C_1 \mathcal{C}_{31} c(\psi)^{3/2} \rho_*(\zeta)^{3/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (8.48)$$

Теперь соотношения (8.2), (8.46) и (8.48) приводят к оценке

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon))\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq \left( \mathcal{C}'_{30} \delta^{-1} (c(\psi) \rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2} \rho_*(\zeta)^{3/4}) + \mathcal{C}_{33} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{C}'_{30} = \mathcal{C}_{32} \max\{\mathcal{C}_{25}, C_1 \mathcal{C}_{31}\}$ ,  $\mathcal{C}_{33} = \sqrt{18} c_0^{-1/2} c_* \mathcal{C}_{25}$ . Отсюда и из (8.48) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon \|_{H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathcal{C}'_{30} \delta^{-1} (c(\psi) \rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2} \rho_*(\zeta)^{3/4}) + \mathcal{C}_{34} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \quad (8.49)$$

где  $\mathcal{C}_{34} = \mathcal{C}_{33} + \mathcal{C}_{25} + C_1 \mathcal{C}_{31}$ .

В силу следствия 2.5 и (8.35)

$$\begin{aligned} & \| \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0 \|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq c(\psi)^2 (C_2 + C_3 |\zeta - c_*|^{-1/2}) \varepsilon \| \widehat{\mathbf{F}} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \mathcal{C}_{31} (C_2 + C_3) c(\psi)^{3/2} \rho_*(\zeta)^{3/4} \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (8.50)$$

В итоге соотношения (8.49) и (8.50) влекут искомую оценку (8.30) с постоянной  $\mathcal{C}''_{30} = \mathcal{C}_{34} + \mathcal{C}_{31}(C_2 + C_3)$ .

Остается проверить (8.31). Из (8.30) с учетом (1.2), (1.5) вытекает, что

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O}')} \leq \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2} \\ & \times \left( \mathcal{C}'_{30} \delta^{-1} (c(\psi) \rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2} \rho_*(\zeta)^{3/4}) + \mathcal{C}''_{30} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (8.24) следует оценка (8.31) с постоянными  $\tilde{\mathcal{C}}'_{30} = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}'_{30}$ ,  $\tilde{\mathcal{C}}''_{30} = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}''_{30} + \tilde{\mathcal{C}}_{27}$ . •

Аналогичным образом в случае, когда выполнено условие 2.8, получаем следующий результат.

**Теорема 8.7.** *Пусть выполнены условия теоремы 8.3. Пусть  $\mathcal{O}'$  – строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ , и пусть  $\delta := \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon \|_{H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathcal{C}'_{30} \delta^{-1} (c(\psi) \rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2} \rho_*(\zeta)^{3/4}) + \check{\mathcal{C}}''_{30} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (8.51)$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} & \| (\mathcal{A}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D^0(\varepsilon; \zeta) \|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathcal{C}'_{30} \delta^{-1} (c(\psi) \rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2} \rho_*(\zeta)^{3/4}) + \check{\mathcal{C}}''_{30} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 \|_{L_2(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \tilde{\mathcal{C}}'_{30} \delta^{-1} (c(\psi) \rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2} \rho_*(\zeta)^{3/4}) + \tilde{\mathcal{C}}''_{30} c(\psi)^{1/2} \rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (8.52)$$

Постоянные  $\mathcal{C}'_{30}$ ,  $\tilde{\mathcal{C}}'_{30}$  – те же, что в теореме 8.6. Постоянныe  $\check{\mathcal{C}}''_{30}$ ,  $\tilde{\mathcal{C}}''_{30}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от параметров решётки  $\Gamma$ , от области  $\mathcal{O}$  и от  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** Из (8.27) и (8.30) вытекает оценка (8.51) с константой  $\tilde{C}_{30}'' = C_{30}'' + C'''C_O^{(2)}\tilde{c}\tilde{c}^{1/2}$ .

Из (8.51) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O}')} &\leq \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2} \\ &\times \left( C'_{30}\delta^{-1}(c(\psi)\rho_*(\zeta) + c(\psi)^{5/2}\rho(\zeta)^{3/4}) + \check{C}_{30}''c(\psi)^{1/2}\rho_*(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Вместе с (8.29) и (8.23) это влечет (8.52) с постоянной  $\tilde{C}_{30}'' = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\check{C}_{30}'' + \tilde{C}'\tilde{c}\tilde{c}^{1/2}$ . •

### ГЛАВА 3. ЗАДАЧА НЕЙМАНА

#### §9. ЗАДАЧА НЕЙМАНА В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ: ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РАССМОТРЕНИЯ

**9.1. Коэрцитивность.** Как и в главе 2, считаем, что  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$  — ограниченная область класса  $C^{1,1}$ . На символ  $b(\xi)$  оператора (1.2) накладывается дополнительное условие.

**Условие 9.1.** Предположим, что для матрицы-функции  $b(\xi) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$  выполнено

$$\text{rank } b(\xi) = n, \quad 0 \neq \xi \in \mathbb{C}^d. \quad (9.1)$$

Отметим, что условие (9.1) является более ограничительным, чем условие (1.3). Как установлено в книге [Ne] (см. теорему 7.8 из §3.7), условие 9.1 является необходимым и достаточным условием коэрцитивности формы  $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2$  на классе  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ .

**Предложение 9.2.** [Ne] Условие 9.1 необходимо и достаточно для существования постоянных  $k_1 > 0$ ,  $k_2 \geq 0$  таких, что выполнено неравенство типа Гордина

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 + k_2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \geq k_1 \|\mathbf{Du}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (9.2)$$

**Замечание 9.3.** Постоянные  $k_1$  и  $k_2$  зависят от матрицы  $b(\xi)$  и от области  $\mathcal{O}$ , но в общем случае их трудно контролировать явно. Однако часто для конкретных операторов их можно найти. Поэтому в дальнейшем мы будем ссылаться на зависимость других постоянных от  $k_1$ ,  $k_2$ .

Всюду ниже условие 9.1 предполагается выполненным.

**9.2. Оператор  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ .** В пространстве  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  рассмотрим оператор  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ , формально заданный дифференциальным выражением  $b(\mathbf{D})^*g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$  при условии Неймана на  $\partial\mathcal{O}$ . Строгое определение:  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  есть самосопряженный оператор в  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ , порожденный квадратичной формой

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] := \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (9.3)$$

В силу (1.2) и (1.5) выполнена оценка сверху

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (9.4)$$

Из (9.2) следует оценка снизу

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \left( k_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 - k_2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \right), \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (9.5)$$

Из (9.3)–(9.5) видно, что форма (9.3) замкнута и неотрицательна.

Спектр оператора  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  содержится в  $\mathbb{R}_+$ . Точка  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  регулярна для этого оператора. *Наша цель* в главе 3 — найти аппроксимацию при малом  $\varepsilon$  обобщенного решения  $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  задачи Неймана

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) - \zeta \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad \partial_\nu^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad (9.6)$$

где  $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Тогда  $\mathbf{u}_\varepsilon = (\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \mathbf{F}$ . Здесь использовано обозначение  $\partial_\nu^\varepsilon$  для соответствующей „конормальной производной“. Пусть  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial\mathcal{O}$  в точке  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}$ . Тогда формальное дифференциальное выражение для конормальной производной имеет вид:  $\partial_\nu^\varepsilon \mathbf{u}(\mathbf{x}) := b(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x})$ .

Аналогом леммы 3.1 является следующее утверждение.

**Лемма 9.4.** *Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ . Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — обобщенное решение задачи (9.6). Тогда при  $\varepsilon > 0$  справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi) |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (9.7)$$

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_0 c(\varphi) |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (9.8)$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi) |\zeta|^{-1}, \quad (9.9)$$

$$\|\mathbf{D}(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_0 c(\varphi) |\zeta|^{-1/2}.$$

Постоянная  $\mathfrak{C}_0$  зависит лишь от  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$  и от постоянных  $k_1$  и  $k_2$  из неравенства (9.2).

**Доказательство.** Поскольку норма резольвенты  $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  оценивается через величину, обратную к расстоянию от точки  $\zeta$  до  $\mathbb{R}_+$ , получаем оценку (9.9).

Чтобы проверить (9.8), запишем интегральное тождество для решения  $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  задачи (9.6):

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta (\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (9.10)$$

Подставим  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon$  в (9.10). Тогда с учетом (9.7) получаем

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon] \leq 2c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2.$$

Вместе с (9.5) и (9.7) это влечет неравенство (9.8) с постоянной  $\mathfrak{C}_0 = (2k_1^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} + k_2 k_1^{-1})^{1/2}$ . •

**9.3. Эффективный оператор  $\mathcal{A}_N^0$ .** В пространстве  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  рассмотрим самосопряженный оператор  $\mathcal{A}_N^0$ , порожденный квадратичной формой

$$a_N^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (9.11)$$

Здесь  $g^0$  — эффективная матрица, определенная в (1.8). Учитывая (1.15) и (9.2), убеждаемся, что форма (9.11) удовлетворяет оценкам вида (9.4), (9.5) с теми же постоянными.

В силу условия  $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$  оператор  $\mathcal{A}_N^0$  задается дифференциальным выражением  $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$  на области определения  $\{\mathbf{u} \in H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) : \partial_\nu^0 \mathbf{u}|_{\partial\mathcal{O}} = 0\}$ , где  $\partial_\nu^0$  — конормальная производная, отвечающая оператору  $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ , т. е.  $\partial_\nu^0 \mathbf{u}(\mathbf{x}) = b(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))^* g^0 b(\nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x})$ . При этом выполнена оценка

$$\|(\mathcal{A}_N^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^2(\mathcal{O})} \leq c^\circ. \quad (9.12)$$

Здесь постоянная  $c^\circ$  зависит лишь от констант  $k_1, k_2$  из неравенства (9.2), от  $\alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$  и от области  $\mathcal{O}$ . Для оправдания этого факта достаточно сослаться на теоремы о регулярности решений сильно эллиптических систем (см., например, [McL, глава 4]).

Пусть  $\mathbf{u}_0$  — обобщенное решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) - \zeta \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad \partial_\nu^0 \mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad (9.13)$$

где  $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Тогда  $\mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} \mathbf{F}$ .

**Лемма 9.5.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ . Пусть  $\mathbf{u}_0$  — обобщенное решение задачи (9.13). Тогда справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq c(\varphi) |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ \|\mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leq \mathfrak{C}_0 c(\varphi) |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} &\leq 2c^\circ c(\varphi) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi) |\zeta|^{-1}, \quad (9.15)$$

$$\|\mathbf{D}(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_0 c(\varphi) |\zeta|^{-1/2}, \quad (9.16)$$

$$\|(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^2(\mathcal{O})} \leq 2c^\circ c(\varphi). \quad (9.17)$$

**Доказательство.** Оценки (9.15), (9.16) проверяются по аналогии с доказательством леммы 9.4. Оценка (9.17) вытекает из (9.12) и неравенства

$$\|(\mathcal{A}_N^0 + I)(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \sup_{x \geq 0} (x+1) |x - \zeta|^{-1} \leq 2c(\varphi),$$

справедливого при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ ,  $|\zeta| \geq 1$ . •

## §10. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

**10.1. Аппроксимация резольвенты**  $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  при  $|\zeta| \geq 1$ . Сфор-  
мулируем наши основные результаты для оператора  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ .

**Теорема 10.1.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  и  $|\zeta| \geq 1$ . Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — решение задачи (9.6) и  $\mathbf{u}_0$  — решение задачи (9.13) при  $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Пусть число  $\varepsilon_1$  удовлетворяет условию 4.1. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_1 c(\varphi)^5 (|\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (10.1)$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_1 c(\varphi)^5 (|\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \varepsilon^2).$$

Постоянная  $\mathfrak{C}_1$  зависит от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от посто-  
янных  $k_1, k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$  и от  
области  $\mathcal{O}$ .

Для аппроксимации решения в классе  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  введем корректор,  
аналогичный (4.4):

$$K_N(\varepsilon; \zeta) = R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}. \quad (10.2)$$

Оператор  $K_N(\varepsilon; \zeta)$  непрерывно отображает  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ .

Пусть  $\mathbf{u}_0$  — решение задачи (9.13). Обозначим  $\tilde{\mathbf{u}}_0 := P_{\mathcal{O}} \mathbf{u}_0$ . Аналогич-  
но (4.5)–(4.7) определим в  $\mathbb{R}^d$  функцию

$$\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) (S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}),$$

и положим

$$\mathbf{v}_\varepsilon := \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}. \quad (10.3)$$

Тогда

$$\mathbf{v}_\varepsilon = (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K_N(\varepsilon; \zeta) \mathbf{F}. \quad (10.4)$$

**Теорема 10.2.** Пусть выполнены условия теоремы 10.1. Пусть функция  $\mathbf{v}_\varepsilon$  определена в (10.2), (10.4). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива  
оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \left( \mathfrak{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (10.5)$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \\ &\leq \mathfrak{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon. \end{aligned}$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \left( \tilde{\mathfrak{C}}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \tilde{\mathfrak{C}}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (10.6)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \tilde{\mathfrak{C}}_2, \tilde{\mathfrak{C}}_3$  зависят от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от констант  $k_1, k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$  и от  
области  $\mathcal{O}$ .

**10.2. Первый этап доказательства. Ассоциированная задача в  $\mathbb{R}^d$ .** Как и в п. 4.2, мы начинаем с рассмотрения ассоциированной задачи в  $\mathbb{R}^d$ . В силу леммы 9.5 и (4.3) справедливы оценки

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\mathcal{O}}^{(0)} c(\varphi) |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (10.7)$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C_{\mathcal{O}}^{(1)} (\mathfrak{C}_0 + 1) c(\varphi) |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (10.8)$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leq 2C_{\mathcal{O}}^{(2)} c^\circ c(\varphi) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (10.9)$$

Положим

$$\tilde{\mathbf{F}} := \mathcal{A}^0 \tilde{\mathbf{u}}_0 - \zeta \tilde{\mathbf{u}}_0. \quad (10.10)$$

Тогда  $\tilde{\mathbf{F}} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  и  $\tilde{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{F}$ . Аналогично (4.15), из (1.16), (10.7) и (10.9) вытекает, что

$$\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_4 c(\varphi) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (10.11)$$

где  $\mathfrak{C}_4 = 2c_1 C_{\mathcal{O}}^{(2)} c^\circ + C_{\mathcal{O}}^{(0)}$ .

Пусть  $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$  — решение уравнения в  $\mathbb{R}^d$ :

$$\mathcal{A}_\varepsilon \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \zeta \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (10.12)$$

т. е.  $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = (\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta I)^{-1} \tilde{\mathbf{F}}$ . Применимы теоремы из §2. Из теоремы 2.2 с учетом (10.10)–(10.12) следует, что при  $\varepsilon > 0$  выполнена оценка

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_4 C_1 c(\varphi)^3 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (10.13)$$

Из теоремы 2.4 и соотношений (10.10)–(10.12) вытекает, что при  $\varepsilon > 0$  справедливы оценки

$$\|\mathbf{D}(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_4 C_2 c(\varphi)^3 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (10.14)$$

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_4 C_3 c(\varphi)^3 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (10.15)$$

Наконец, из теоремы 2.6 и (10.10)–(10.12) получаем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_4 C_4 c(\varphi)^3 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \quad (10.16)$$

**10.3. Второй этап доказательства. Введение поправки  $\mathbf{w}_\varepsilon$ .** Введем „поправку“  $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  как функцию, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & (g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta (\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= (\tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\zeta \mathbf{u}_0 + \mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \end{aligned} \quad (10.17)$$

Поскольку правая часть в (10.17) является антилинейным непрерывным функционалом над  $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ , стандартным образом проверяется, что решение  $\mathbf{w}_\varepsilon$  существует и единственno.

**Лемма 10.3.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  и  $|\zeta| \geq 1$ . Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — решение задачи (9.6),  $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$  — решение уравнения (10.12), и  $\mathbf{w}_\varepsilon$  удовлетворяет тождеству (10.17). Тогда при  $\varepsilon > 0$  справедливы оценки

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_5 c(\varphi)^4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (10.18)$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_6 c(\varphi)^4 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (10.19)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_5$ ,  $\mathfrak{C}_6$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от констант  $k_1$ ,  $k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Обозначим для краткости  $\mathbf{U}_\varepsilon := \mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon$ . В силу (9.10) и (10.17) функция  $\mathbf{U}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{U}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta(\mathbf{U}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= -(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} + \zeta(\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \\ & \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \end{aligned} \quad (10.20)$$

Из (10.13) и (10.16) следует, что правая часть в (10.20) оценивается через  $\mathfrak{C}_4 c(\varphi)^3 \varepsilon (C_4 \|b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_1 |\zeta|^{1/2} \|\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ .

Подставляя  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{U}_\varepsilon$  в (10.20), аналогично (4.26)–(4.29) выводим неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathbf{U}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &\leqslant 4\mathfrak{C}_4 C_4 c(\varphi)^4 |\zeta|^{-1} \varepsilon \|b(\mathbf{D})\mathbf{U}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ 4\mathfrak{C}_4^2 C_1^2 c(\varphi)^8 |\zeta|^{-1} \varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Теперь из (10.20) при  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{U}_\varepsilon$  и (10.21) получаем оценку

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{U}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \tilde{\mathfrak{C}}_5 c(\varphi)^4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (10.22)$$

где  $\tilde{\mathfrak{C}}_5^2 = 9\mathfrak{C}_4^2 (2C_1^2 \|g^{-1}\|_{L_\infty} + 9C_4^2 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^2)$ . Из (10.21) и (10.22) следует неравенство (10.19) с постоянной  $\mathfrak{C}_6 = 2(\mathfrak{C}_4 \tilde{\mathfrak{C}}_5 C_4 + \mathfrak{C}_4^2 C_1^2)^{1/2}$ . Наконец, неравенства (9.2), (10.19) и (10.22) влечут (10.18) с постоянной  $\mathfrak{C}_5^2 = k_1^{-1} (\tilde{\mathfrak{C}}_5^2 + k_2 \mathfrak{C}_6^2)$ . •

**Выводы.** 1) Из соотношений (10.3), (10.14), (10.15), (10.18) и (10.19) следует, что

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_7 c(\varphi)^4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0, \quad (10.23)$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_8 c(\varphi)^4 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0, \quad (10.24)$$

$\mathfrak{C}_7 = \mathfrak{C}_4 C_2 + \mathfrak{C}_5$ ,  $\mathfrak{C}_8 = \mathfrak{C}_4 C_3 + \mathfrak{C}_6$ . Поэтому для доказательства теоремы 10.2 нужно надлежащим образом оценить норму  $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}$ .

2) Из (10.13) и (10.19) видно, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_9 c(\varphi)^4 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0, \quad (10.25)$$

где  $\mathfrak{C}_9 = \mathfrak{C}_6 + \mathfrak{C}_4 C_1$ . Следовательно, для доказательства теоремы 10.1 надо оценить надлежащим образом норму  $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$ .

## §11. ОЦЕНКИ ПОПРАВКИ. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 10.1 И 10.2

Как и в §5, сначала мы оценим  $H^1$ -норму поправки  $\mathbf{w}_\varepsilon$  и докажем теорему 10.2, а затем, используя уже доказанную теорему 10.2 и соображения двойственности, оценим  $L_2$ -норму поправки  $\mathbf{w}_\varepsilon$  и докажем теорему 10.1.

**11.1. Оценка нормы  $\mathbf{w}_\varepsilon$  в  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ .** Обозначим

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] := (\tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0 - g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (11.1)$$

Заметим, что решение  $\mathbf{u}_0$  задачи (9.13) удовлетворяет тождеству

$$(g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - (\zeta \mathbf{u}_0 + \mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (11.2)$$

Из (10.17) и (11.2) видно, что для  $\mathbf{w}_\varepsilon$  выполнено тождество

$$(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \zeta (\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}], \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (11.3)$$

**Лемма 11.1.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  и  $|\zeta| \geq 1$ . Пусть число  $\varepsilon_1$  удовлетворяет условию 4.1. При  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  функционал (11.1) подчинен оценке

$$|\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| \leq c(\varphi) \left( \mathfrak{C}_{10} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_{11} \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (11.4)$$

Постоянныe  $\mathfrak{C}_{10}$ ,  $\mathfrak{C}_{11}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от констант  $k_1$ ,  $k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Представим функционал (11.1) в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] = \mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] + \mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}], \quad (11.5)$$

где

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] = (g^0 S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0 - g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (11.6)$$

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = ((\tilde{g}^\varepsilon - g^0) S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (11.7)$$

Член (11.6) легко оценить с помощью предложения 1.4 и соотношений (1.2), (1.4), (1.5), (1.15) и (10.9):

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}]| &\leq |g^0| \| (S_\varepsilon - I) b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0 \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \| b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\eta} \|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leq \mathfrak{C}^{(1)} c(\varphi) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \quad (11.8)$$

где  $\mathfrak{C}^{(1)} = 2 \|g\|_{L_\infty} r_1 \alpha_1 d^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(2)} c^\circ$ .

Используя (1.2), преобразуем член (11.7):

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \sum_{l=1}^d (f_l^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0, D_l \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (11.9)$$

где  $f_l(\mathbf{x}) := b_l^*(\tilde{g}(\mathbf{x}) - g^0)$ ,  $l = 1, \dots, d$ . Согласно [Su3, (5.13)], выполнена оценка

$$\begin{aligned} \|f_l\|_{L_2(\Omega)} &\leq |\Omega|^{1/2} \check{\mathfrak{C}}, \quad l = 1, \dots, d, \\ \check{\mathfrak{C}} &= \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} (1 + (dm)^{1/2} \alpha_1^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}). \end{aligned} \quad (11.10)$$

Как проверено в [Su3, п. 5.2], существуют  $\Gamma$ -периодические  $(n \times m)$ -матрицы-функции  $M_{lj}(\mathbf{x})$  в  $\mathbb{R}^d$ ,  $l, j = 1, \dots, d$ , такие, что

$$\begin{aligned} M_{lj} &\in \widetilde{H}^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} M_{lj}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad M_{lj}(\mathbf{x}) = -M_{jl}(\mathbf{x}), \quad l, j = 1, \dots, d, \\ f_l(\mathbf{x}) &= \sum_{j=1}^d \partial_j M_{lj}(\mathbf{x}), \quad l = 1, \dots, d. \end{aligned} \tag{11.11}$$

При этом справедливы оценки

$$\|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \leq r_0^{-1} |\Omega|^{1/2} \check{\mathfrak{C}}, \quad l, j = 1, \dots, d. \tag{11.12}$$

В силу (11.11)  $f_l^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon \sum_{j=1}^d \partial_j M_{lj}^\varepsilon(\mathbf{x})$ ,  $l = 1, \dots, d$ , а потому член (11.9) можно представить в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] + \widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}], \tag{11.13}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \varepsilon \sum_{l,j=1}^d (\partial_j (M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0), D_l \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{11.14}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = -\varepsilon \sum_{l,j=1}^d (M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial_j \tilde{\mathbf{u}}_0, D_l \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{11.15}$$

Член (11.15) легко оценить, используя предложение 1.5:

$$|\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]| \leq \varepsilon \sum_{l,j=1}^d |\Omega|^{-1/2} \|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D}) \partial_j \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|D_l \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда с учетом (1.4), (10.9) и (11.12) получаем

$$|\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]| \leq \mathfrak{C}^{(2)} c(\varphi) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0, \tag{11.16}$$

где  $\mathfrak{C}^{(2)} = 2dr_0^{-1} \check{\mathfrak{C}} \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(2)} c^\circ$ .

Рассмотрим теперь член (11.14). Будем считать, что  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Пусть  $\theta_\varepsilon$  — срезка, удовлетворяющая условиям (5.1). Справедливо тождество

$$\sum_{l,j=1}^d (\partial_j ((1 - \theta_\varepsilon) M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0), D_l \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n),$$

что проверяется интегрированием по частям при учете (11.11). Следовательно, член (11.14) допускает запись в виде

$$\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \varepsilon \sum_{l,j=1}^d (\partial_j (\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0), D_l \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{11.17}$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{j=1}^d \partial_j (\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0) &= \varepsilon \theta_\varepsilon \sum_{j=1}^d M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon (b(\mathbf{D}) \partial_j \tilde{\mathbf{u}}_0) \\ &+ \varepsilon \sum_{j=1}^d (\partial_j \theta_\varepsilon) M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0 + \theta_\varepsilon f_l^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\varepsilon \left\| \sum_{j=1}^d \partial_j (\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0) \right\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq J_l^{(1)}(\varepsilon) + J_l^{(2)}(\varepsilon) + J_l^{(3)}(\varepsilon), \quad (11.18)$$

где

$$J_l^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{j=1}^d \|\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon (b(\mathbf{D}) \partial_j \tilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (11.19)$$

$$J_l^{(2)}(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{j=1}^d \|(\partial_j \theta_\varepsilon) M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad (11.20)$$

$$J_l^{(3)}(\varepsilon) = \|\theta_\varepsilon f_l^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (11.21)$$

Для оценки члена (11.19) применим (5.1), предложение 1.5 и (1.4), (10.9), (11.12):

$$J_l^{(1)}(\varepsilon) \leq \varepsilon \sum_{j=1}^d |\Omega|^{-1/2} \|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D}) \partial_j \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \nu_1 c(\varphi) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (11.22)$$

где  $\nu_1 = 2r_0^{-1} \check{\mathfrak{C}}(d\alpha_1)^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(2)} c^\circ$ . Член (11.20) оценивается с помощью (5.1) и леммы 3.4:

$$\begin{aligned} (J_l^{(2)}(\varepsilon))^2 &\leq d\kappa^2 \sum_{j=1}^d \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0|^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \varepsilon d\kappa^2 \beta_* |\Omega|^{-1} \sum_{j=1}^d \|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Вместе с соотношениями (1.4), (10.8), (10.9), (11.12) это влечет

$$J_l^{(2)}(\varepsilon) \leq \nu_2 c(\varphi) |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad (11.23)$$

где  $\nu_2 = d\kappa r_0^{-1} \check{\mathfrak{C}} \left( 2\beta_* \alpha_1 C_{\mathcal{O}}^{(2)} C_{\mathcal{O}}^{(1)} c^\circ (\mathfrak{C}_0 + 1) \right)^{1/2}$ . Аналогично, используя (5.1) и лемму 3.4, для члена (11.21) получаем

$$\begin{aligned} (J_l^{(3)}(\varepsilon))^2 &\leq \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |f_l^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0|^2 dx \\ &\leq \varepsilon \beta_* |\Omega|^{-1} \|f_l\|_{L_2(\Omega)}^2 \|b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Учитывая (1.4), (10.8), (10.9), (11.10), отсюда выводим, что

$$J_l^{(3)}(\varepsilon) \leq \nu_3 c(\varphi) |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad (11.24)$$

где  $\nu_3 = \check{\mathfrak{C}} \left( 2\beta_* \alpha_1 C_{\mathcal{O}}^{(2)} C_{\mathcal{O}}^{(1)} c^\circ (\mathfrak{C}_0 + 1) \right)^{1/2}$ .

Теперь соотношения (11.18), (11.22)–(11.24) приводят к неравенству

$$\begin{aligned} &\varepsilon \left\| \sum_{j=1}^d \partial_j (\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0) \right\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leq c(\varphi) \left( \nu_1 \varepsilon + (\nu_2 + \nu_3) |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (11.25)$$

Комбинируя (11.17) и (11.25), приходим к оценке

$$|\tilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]| \leq d^{1/2} c(\varphi) \left( \nu_1 \varepsilon + (\nu_2 + \nu_3) |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \quad (11.26)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . В итоге соотношения (11.5), (11.8), (11.13), (11.16) и (11.26) влекут искомую оценку (11.4) с постоянными  $\mathfrak{C}_{10} = d^{1/2}(\nu_2 + \nu_3)$ ,  $\mathfrak{C}_{11} = \mathfrak{C}^{(1)} + \mathfrak{C}^{(2)} + d^{1/2} \nu_1$ . •

**Лемма 11.2.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  и  $|\zeta| \geq 1$ . Пусть  $\mathbf{w}_\varepsilon$  удовлетворяет тождеству (10.17). Пусть число  $\varepsilon_1$  удовлетворяет условию 4.1. При  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнена оценка

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq c(\varphi)^2 \left( \mathfrak{C}_{12} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_{13} \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (11.27)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_{12}$ ,  $\mathfrak{C}_{13}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от констант  $k_1$ ,  $k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** В тождество (11.3) подставим  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_\varepsilon$  и возьмем минимальную часть полученного равенства. С учетом (11.4) при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнено неравенство

$$|\operatorname{Im} \zeta| \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \leq c(\varphi) \left( \mathfrak{C}_{10} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_{11} \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (11.28)$$

Если  $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$  (а тогда  $\operatorname{Im} \zeta \neq 0$ ), отсюда выводим

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \leq c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1} \left( \mathfrak{C}_{10} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_{11} \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (11.29)$$

Если  $\operatorname{Re} \zeta < 0$ , то возьмем вещественную часть полученного равенства и при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  получим

$$|\operatorname{Re} \zeta| \| \mathbf{w}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \leq c(\varphi) \left( \mathfrak{C}_{10} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_{11} \varepsilon \right) \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})} \| \mathbf{D} \mathbf{w}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (11.30)$$

Складывая (11.28) и (11.30), выводим неравенство, аналогичное (11.29). В итоге при всех рассматриваемых значениях  $\zeta$  имеем

$$\| \mathbf{w}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \leq 2c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1} \left( \mathfrak{C}_{10} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_{11} \varepsilon \right) \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})} \| \mathbf{D} \mathbf{w}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} \quad (11.31)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Теперь из (11.3) с  $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_\varepsilon$ , (11.4) и (11.31) вытекает, что

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{w}_\varepsilon] \leq 3c(\varphi)^2 \left( \mathfrak{C}_{10} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_{11} \varepsilon \right) \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})} \| \mathbf{D} \mathbf{w}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})}$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Вместе с (9.5) и (11.31) это влечет

$$\| \mathbf{D} \mathbf{w}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi)^2 \mathfrak{C}_{14} \left( \mathfrak{C}_{10} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_{11} \varepsilon \right) \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad (11.32)$$

где  $\mathfrak{C}_{14} = k_1^{-1} (3 \|g^{-1}\|_{L_\infty} + 2k_2)$ . Сопоставляя (11.31) и (11.32), приходим к неравенству (11.27) с постоянными  $\mathfrak{C}_{12} = (2\mathfrak{C}_{14} + \mathfrak{C}_{14}^2)^{1/2} \mathfrak{C}_{10}$ ,  $\mathfrak{C}_{13} = (2\mathfrak{C}_{14} + \mathfrak{C}_{14}^2)^{1/2} \mathfrak{C}_{11}$ . •

**11.2. Завершение доказательства теоремы 10.2.** Соотношения (10.23), (10.24) и (11.27) приводят к искомой оценке (10.5) с постоянными  $\mathfrak{C}_2 = \sqrt{2} \mathfrak{C}_{12}$ ,  $\mathfrak{C}_3 = \mathfrak{C}_7 + \mathfrak{C}_8 + \sqrt{2} \mathfrak{C}_{13}$ .

Остается проверить (10.6). Из (10.5) с учетом (1.2) и (1.5) следует, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнено неравенство

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} \\ & \leq \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} (\mathfrak{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon) \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (11.33)$$

По аналогии с (5.19)–(5.22) с учетом (10.9) легко убедиться, что

$$\| g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0 \|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{15} c(\varphi) \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (11.34)$$

где  $\mathfrak{C}_{15} = 2(\mathcal{C}' + \mathcal{C}'') C_{\mathcal{O}}^{(2)} c^\circ$ . Из (11.33) и (11.34) вытекает неравенство (10.6) с постоянными  $\mathfrak{C}_2 = \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathfrak{C}_2$ ,  $\mathfrak{C}_3 = \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_{15}$ . •

### 11.3. Доказательство теоремы 10.1.

**Лемма 11.3.** *В условиях леммы 11.2 при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнена оценка*

$$\| \mathbf{w}_\varepsilon \|_{L_2(\mathcal{O})} \leq c(\varphi)^5 \left( \mathfrak{C}_{16} |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \mathfrak{C}_{17} \varepsilon^2 \right) \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (11.35)$$

*Постоянные  $\mathfrak{C}_{16}$ ,  $\mathfrak{C}_{17}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от констант  $k_1$ ,  $k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим тождество (11.3) и в качестве пробной функции  $\boldsymbol{\eta}$  возьмем  $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = (\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \bar{\zeta}I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$ , где  $\boldsymbol{\Phi} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Тогда левая часть (11.3) совпадает с  $(\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}$ , и тождество приобретает вид

$$(\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]. \quad (11.36)$$

Считаем, что  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Для оценки  $\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]$  воспользуемся соотношениями (11.5), (11.8), (11.13) и (11.16). Имеем:

$$|\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]| \leq (\mathfrak{C}^{(1)} + \mathfrak{C}^{(2)})c(\varphi)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\tilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]|.$$

Применяя лемму 9.4 для оценивания  $\|\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$ , отсюда получаем

$$|\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]| \leq \mathfrak{C}_0(\mathfrak{C}^{(1)} + \mathfrak{C}^{(2)})c(\varphi)^2|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\tilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]|. \quad (11.37)$$

Рассмотрим член  $\tilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]$ . Согласно (11.17) имеем

$$\tilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon] = \varepsilon \sum_{l,j=1}^d (\partial_j(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0), D_l \boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (11.38)$$

Для аппроксимации функции  $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$  применим уже доказанную теорему 10.2. Положим  $\boldsymbol{\eta}_0 = (\mathcal{A}_N^0 - \bar{\zeta}I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0 = P_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\eta}_0$ . Приближением функции  $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$  служит функция  $\boldsymbol{\eta}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ . Перепишем член (11.38) в виде

$$\tilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon] = \mathcal{J}_1(\varepsilon) + \mathcal{J}_2(\varepsilon) + \mathcal{J}_3(\varepsilon), \quad (11.39)$$

где

$$\mathcal{J}_1(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{l,j=1}^d (\partial_j(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0), D_l(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0))_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\mathcal{J}_2(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{l,j=1}^d (\partial_j(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0), D_l \boldsymbol{\eta}_0)_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (11.40)$$

$$\mathcal{J}_3(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{l,j=1}^d (\partial_j(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0), D_l(\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0))_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (11.41)$$

Применяя теорему 10.2 и (11.25), приходим к оценке

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_1(\varepsilon)| &\leq c(\varphi) \left( \nu_1\varepsilon + (\nu_2 + \nu_3)|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2} \right) \\ &\times d^{1/2} \left( \mathfrak{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\mathcal{J}_1(\varepsilon)| \leq c(\varphi)^5 \left( \check{\nu}_1|\zeta|^{-1/2}\varepsilon + \check{\nu}_2\varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (11.42)$$

$$\text{где } \begin{aligned} \check{\nu}_1 &= d^{1/2} ((\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)\mathfrak{C}_2 + (\nu_2 + \nu_3)\mathfrak{C}_3), & \check{\nu}_2 &= \\ d^{1/2} (\nu_1(\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3) + (\nu_2 + \nu_3)\mathfrak{C}_3). \end{aligned}$$

С учетом (5.1) и (11.25) для члена (11.40) справедлива оценка

$$|\mathcal{J}_2(\varepsilon)| \leq c(\varphi) \left( \nu_1 \varepsilon + (\nu_2 + \nu_3) |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} d^{1/2} \left( \int_{B_\varepsilon} |\mathbf{D}\boldsymbol{\eta}_0|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

Применяя лемму 3.3(1°) и лемму 9.5, приходим к оценке

$$|\mathcal{J}_2(\varepsilon)| \leq c(\varphi)^2 \left( \check{\nu}_3 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \check{\nu}_4 \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (11.43)$$

где  $\check{\nu}_3 = (2d\beta c^\circ \mathfrak{C}_0)^{1/2}(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)$ ,  $\check{\nu}_4 = (2d\beta c^\circ \mathfrak{C}_0)^{1/2}\nu_1$ .

Остается оценить член (11.41), который можно записать в виде

$$\mathcal{J}_3(\varepsilon) = \mathcal{J}_3^{(1)}(\varepsilon) + \mathcal{J}_3^{(2)}(\varepsilon), \quad (11.44)$$

где

$$\mathcal{J}_3^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{l,j=1}^d \left( \partial_j (\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0), (D_l \Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \right)_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (11.45)$$

$$\mathcal{J}_3^{(2)}(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{l,j=1}^d \left( \partial_j (\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\mathbf{u}}_0), \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0 \right)_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (11.46)$$

В силу (5.1) и (11.25) член (11.45) подчинен оценке

$$\begin{aligned} |\mathcal{J}_3^{(1)}(\varepsilon)| &\leq c(\varphi) \left( \nu_1 \varepsilon + (\nu_2 + \nu_3) |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\times d^{1/2} \left( \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Применяя лемму 3.4, (1.4), (1.10) и аналоги оценок (10.8), (10.9) для  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ , получаем

$$|\mathcal{J}_3^{(1)}(\varepsilon)| \leq c(\varphi)^2 \left( \check{\nu}_5 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \check{\nu}_6 \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (11.47)$$

где  $\check{\nu}_5 = M_2 (2d\beta_* \alpha_1 C_{\mathcal{O}}^{(1)} C_{\mathcal{O}}^{(2)} (\mathfrak{C}_0 + 1) c^\circ)^{1/2} (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)$ ,  $\check{\nu}_6 = M_2 (2d\beta_* \alpha_1 C_{\mathcal{O}}^{(1)} C_{\mathcal{O}}^{(2)} (\mathfrak{C}_0 + 1) c^\circ)^{1/2} \nu_1$ .

Наконец, член (11.46) легко оценить, используя (11.25), (1.4), (1.19) и аналог (10.9) для  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ :

$$|\mathcal{J}_3^{(2)}(\varepsilon)| \leq c(\varphi)^2 \left( \check{\nu}_7 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \check{\nu}_8 \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (11.48)$$

где  $\check{\nu}_7 = 2M_1 (d\alpha_1)^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(2)} c^\circ (\nu_2 + \nu_3)$ ,  $\check{\nu}_8 = 2M_1 (d\alpha_1)^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(2)} c^\circ (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)$ .

В итоге из (11.39), (11.42)–(11.44), (11.47) и (11.48) вытекает оценка

$$|\tilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\mathbf{n}_\varepsilon]| \leq c(\varphi)^5 \left( \check{\nu}_9 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \check{\nu}_{10} \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1,$$

где  $\check{\nu}_9 = \check{\nu}_1 + \check{\nu}_3 + \check{\nu}_5 + \check{\nu}_7$ ,  $\check{\nu}_{10} = \check{\nu}_2 + \check{\nu}_4 + \check{\nu}_6 + \check{\nu}_8$ . Вместе с (11.37) это влечет неравенство

$$|\mathcal{I}_\varepsilon[\eta_\varepsilon]| \leq c(\varphi)^5 \left( \mathfrak{C}_{16} |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \mathfrak{C}_{17} \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\Phi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad (11.49)$$

где  $\mathfrak{C}_{16} = \mathfrak{C}_0(\mathfrak{C}^{(1)} + \mathfrak{C}^{(2)}) + \check{\nu}_9$ ,  $\mathfrak{C}_{17} = \check{\nu}_{10}$ .

Из (11.36) и (11.49) вытекает, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнено неравенство

$$|(\mathbf{w}_\varepsilon, \Phi)_{L_2(\mathcal{O})}| \leq c(\varphi)^5 \left( \mathfrak{C}_{16} |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \mathfrak{C}_{17} \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\Phi\|_{L_2(\mathcal{O})}$$

при любом  $\Phi \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ , что влечет искомое неравенство (11.35). •

**Завершение доказательства теоремы 10.1.** Из (10.25) и леммы 11.3 вытекает, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедливо неравенство (10.1) с постоянной  $\mathfrak{C}_1 = \max\{\mathfrak{C}_9 + \mathfrak{C}_{16}, \mathfrak{C}_{17}\}$ . •

## §12. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА:

СЛУЧАЙ  $\Lambda \in L_\infty$ , СПЕЦИАЛЬНЫЕ СЛУЧАИ,

ОЦЕНКИ В СТРОГО ВНУТРЕННЕЙ ПОДОБЛАСТИ

**12.1. Случай  $\Lambda \in L_\infty$ .** Как для задачи в  $\mathbb{R}^d$  (см. п. 2.3) и для задачи Дирихле (см. п. 6.1), при условии 2.8 можно устранить оператор  $S_\varepsilon$  в корректоре. Сейчас вместо корректора (10.2) будем использовать оператор

$$K_N^0(\varepsilon; \zeta) = [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}. \quad (12.1)$$

При условии 2.8 оператор (12.1) непрерывно отображает  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  в  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Вместо (10.4) используем другое приближение к решению  $\mathbf{u}_\varepsilon$  задачи (9.6):

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon := (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K_N^0(\varepsilon; \zeta) \mathbf{F} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0. \quad (12.2)$$

**Теорема 12.1.** Пусть выполнены условия теоремы 10.1 и условие 2.8. Пусть функция  $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$  определена в (12.2). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \left( \mathfrak{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_3^\circ c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (12.3)$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \\ & \leq \mathfrak{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_3^\circ c(\varphi)^4 \varepsilon. \end{aligned}$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \left( \tilde{\mathfrak{C}}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \tilde{\mathfrak{C}}_3^\circ c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (12.4)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_2$ ,  $\tilde{\mathfrak{C}}_2$  — те же, что и в теореме 10.2. Постоянное  $\mathfrak{C}_3^\circ$ ,  $\tilde{\mathfrak{C}}_3^\circ$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1$ ,  $k_2$

из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$ , от области  $\mathcal{O}$  и от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** Чтобы вывести (12.3) из (10.5), достаточно оценить разность функций (10.4) и (12.2). По аналогии с (6.5)–(6.9) легко проверить оценку

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}''' \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда и из (10.5), (10.9) вытекает (12.3) с постоянной  $\mathfrak{C}_3^\circ = \mathfrak{C}_3 + 2\mathcal{C}''' C_{\mathcal{O}}^{(2)} c^\circ$ .

Проверим (12.4). Из (12.3) с учетом (1.2) и (1.5) следует, что

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ & \leq \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \left( \mathfrak{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_3^\circ c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

По аналогии с (6.11)–(6.13) убеждаемся, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{v}}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathcal{C}}' \varepsilon \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}. \quad (12.6)$$

Из (12.5) и (12.6) с учетом (9.14) вытекает (12.4) с постоянной  $\tilde{\mathfrak{C}}_3^\circ = \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathfrak{C}_3^\circ + 2\tilde{\mathcal{C}}' c^\circ$ . •

**12.2. Специальные случаи.** Следующие два утверждения проверяются аналогично предложениям 6.2 и 6.3.

**Предложение 12.2.** Пусть выполнены условия теоремы 10.2. Если  $g^0 = \bar{g}$ , т. е. выполнены соотношения (1.13), то при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \left( \mathfrak{C}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \mathfrak{C}_3 c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

**Предложение 12.3.** Пусть выполнены условия теоремы 10.2. Если  $g^0 = g$ , т. е. справедливы представления (1.14), то при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \left( \tilde{\mathfrak{C}}_2 c(\varphi)^2 |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + \tilde{\mathfrak{C}}_3^\circ c(\varphi)^4 \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

**12.3. Аппроксимация решений задачи Неймана в строго внутренней подобласти.** Следующую теорему легко установить по аналогии с доказательством теоремы 7.1, опираясь на теорему 10.1 и результаты для задачи усреднения в  $\mathbb{R}^d$ . Мы опускаем доказательство.

**Теорема 12.4.** Пусть выполнены условия теоремы 10.2. Пусть  $\mathcal{O}'$  – строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ , и пусть  $\delta := \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leq (\mathfrak{C}'_{18} \delta^{-1} + \mathfrak{C}''_{18}) c(\varphi)^6 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

или, в операторных терминах,

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq (\mathfrak{C}'_{18} \delta^{-1} + \mathfrak{C}''_{18}) c(\varphi)^6 \varepsilon. \end{aligned}$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leq (\check{\mathfrak{C}}'_{18}\delta^{-1} + \check{\mathfrak{C}}''_{18})c(\varphi)^6\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Постоянные  $\mathfrak{C}'_{18}$ ,  $\mathfrak{C}''_{18}$ ,  $\check{\mathfrak{C}}'_{18}$  и  $\check{\mathfrak{C}}''_{18}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1$ ,  $k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

По аналогии с доказательством теоремы 7.2 легко проверить справедливость следующего результата.

**Теорема 12.5.** Пусть выполнены условия теоремы 12.1. Пусть  $\mathcal{O}'$  – строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ , и  $\delta := \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leq (\mathfrak{C}'_{18}\delta^{-1} + \check{\mathfrak{C}}''_{18})c(\varphi)^6\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

или, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \leq (\mathfrak{C}'_{18}\delta^{-1} + \check{\mathfrak{C}}''_{18})c(\varphi)^6\varepsilon.$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leq (\check{\mathfrak{C}}'_{18}\delta^{-1} + \hat{\mathfrak{C}}''_{18})c(\varphi)^6\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Постоянны  $\mathfrak{C}'_{18}$ ,  $\check{\mathfrak{C}}'_{18}$  – те же, что и в теореме 12.4. Постоянны  $\check{\mathfrak{C}}''_{18}$  и  $\hat{\mathfrak{C}}''_{18}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1$ ,  $k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$ , от области  $\mathcal{O}$  и от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

### §13. ДРУГАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$

**13.1. Аппроксимация резольвенты  $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ .** Следующий результат проверяется аналогично теореме 8.1.

**Теорема 13.1.** Пусть  $\zeta = |\zeta|e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ . Введем обозначение

$$\rho_0(\zeta) = \begin{cases} c(\varphi)^2|\zeta|^{-2}, & |\zeta| < 1, \\ c(\varphi)^2, & |\zeta| \geq 1. \end{cases}$$

Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  – решение задачи (9.6),  $\mathbf{u}_0$  – решение задачи (9.13),  $\mathbf{v}_\varepsilon$  – функция (10.4). Пусть число  $\varepsilon_1$  удовлетворяет условию 4.1. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{19}\rho_0(\zeta)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (13.1)$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{20}\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (13.2)$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{19}\rho_0(\zeta)\varepsilon, \quad (13.3)$$

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{20}\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}. \quad (13.4)$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{21}\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (13.5)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_{19}$ ,  $\mathfrak{C}_{20}$ ,  $\mathfrak{C}_{21}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1$ ,  $k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Применим теорему 10.1 при  $\zeta = -1$  и аналог тождества (2.10), при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  получаем

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq 2\mathfrak{C}_1\varepsilon \sup_{x \geq 0} (x+1)^2|x-\zeta|^{-2}. \quad (13.6)$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x \geq 0} (x+1)^2|x-\zeta|^{-2} \leq 4\rho_0(\zeta). \quad (13.7)$$

Из (13.6) и (13.7) вытекает (13.3) с постоянной  $\mathfrak{C}_{19} = 8\mathfrak{C}_1$ .

Применим теперь теорему 10.2 при  $\zeta = -1$ : при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнено

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3)\varepsilon^{1/2}. \quad (13.8)$$

Положим  $\lambda := \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}(k_1 + k_2)$ . Заметим, что в силу (9.5)

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 \leq k_1^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{1/2}\mathbf{v}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{v} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (13.9)$$

Используя аналог тождества (2.34) и (13.7), получаем

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{1/2}((\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon; \zeta))\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ &\leq 4\rho_0(\zeta)\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{1/2}((\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon; -1))\|_{L_2 \rightarrow L_2} \\ &+ \varepsilon|\zeta + 1| \sup_{x \geq 0} (x+\lambda)^{1/2}|x-\zeta|^{-1}\|K_N(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2 \rightarrow L_2}. \end{aligned} \quad (13.10)$$

Обозначим слагаемые в правой части (13.10) через  $L_1(\varepsilon)$ ,  $L_2(\varepsilon)$ . С учетом (9.4) и (13.8) для первого члена получаем оценку

$$L_1(\varepsilon) \leq \mathfrak{C}_{22}\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad (13.11)$$

где  $\mathfrak{C}_{22} = 4(\max\{d\alpha_1\|g\|_{L_\infty}, \lambda\})^{1/2}(\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3)$ .

Далее, оператор  $K_N(\varepsilon; \zeta)$  можно записать в виде  $K_N(\varepsilon; \zeta) = R_\mathcal{O}[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1/2}(\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{1/2}(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}$ . Тогда с учетом (1.4), (1.19) и (4.3) получаем

$$L_2(\varepsilon) \leq \varepsilon|\zeta + 1| \left( \sup_{x \geq 0} (x+\lambda)|x-\zeta|^{-2} \right) M_1\alpha_1^{1/2}C_\mathcal{O}^{(1)}\|(\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1/2}\|_{L_2 \rightarrow H^1}. \quad (13.12)$$

Вычисление показывает, что

$$|\zeta + 1| \sup_{x \geq 0} (x+\lambda)|x-\zeta|^{-2} \leq 2(\lambda + 1)\rho_0(\zeta). \quad (13.13)$$

Аналогично (13.9)

$$\|(\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1/2}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq k_1^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \quad (13.14)$$

Из (13.12)–(13.14) вытекает неравенство

$$L_2(\varepsilon) \leq \mathfrak{C}_{23} \rho_0(\zeta) \varepsilon, \quad (13.15)$$

где  $\mathfrak{C}_{23} = 2(\lambda + 1)M_1\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}^{(1)}k_1^{-1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}$ . Теперь из (13.10), (13.11), (13.15) с учетом (13.9) вытекает оценка (13.4) с постоянной  $\mathfrak{C}_{20} = k_1^{-1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(\mathfrak{C}_{22} + \mathfrak{C}_{23})$ .

Проверим справедливость неравенства (13.5). Из (13.2) следует, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнено

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathfrak{C}_{20}\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (13.16)$$

Далее, аналогично (5.19)–(5.21) имеем:

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq (\mathcal{C}' + \mathcal{C}'')C_{\mathcal{O}}^{(2)}\varepsilon\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}. \quad (13.17)$$

В силу (9.12) и (13.7) справедлива оценка

$$\|(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^2(\mathcal{O})} \leq 2c^\circ\rho_0(\zeta)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leq 2c^\circ\rho_0(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (13.18)$$

Соотношения (13.16), (13.17), (13.18) влекут (13.5) с постоянной  $\mathfrak{C}_{21} = \mathfrak{C}_{20}\|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2} + 2(\mathcal{C}' + \mathcal{C}'')C_{\mathcal{O}}^{(2)}c^\circ$ . •

Аналогом теоремы 8.3 является следующий результат.

**Теорема 13.2.** Пусть выполнены условия теоремы 13.1 и условие 2.8. Пусть  $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$  – функция (12.2). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{20}^\circ\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (13.19)$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{20}^\circ\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}.$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{21}^\circ\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (13.20)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_{20}^\circ$ ,  $\mathfrak{C}_{21}^\circ$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1$ ,  $k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$ , от области  $\mathcal{O}$  и от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** Аналогично (6.5)–(6.9)

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}''' \varepsilon \|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (13.21)$$

Соотношения (4.3), (13.2), (13.18) и (13.21) влекут (13.19) с постоянной  $\mathfrak{C}_{20}^\circ = \mathfrak{C}_{20} + 2\mathcal{C}'''C_{\mathcal{O}}^{(2)}c^\circ$ .

Проверим теперь (13.20). Из (13.19) следует, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathfrak{C}_{20}^o\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (13.22)$$

Аналогично (6.11), (6.12) имеем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathcal{C}}'\varepsilon\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}. \quad (13.23)$$

Из (13.22), (13.23) с учетом (13.18) вытекает оценка (13.20) с постоянной  $\mathfrak{C}_{21}^o = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathfrak{C}_{20}^o + 2c^o\tilde{\mathcal{C}}'$ . •

**13.2. Специальные случаи.** Случай, когда корректор обращается в ноль, выделяется следующим утверждением (ср. предложение 8.4).

**Предложение 13.3.** *Пусть выполнены условия теоремы 13.1. Если  $g^0 = \bar{g}$ , т. е. выполнены соотношения (1.13), то  $\Lambda = 0$  и  $\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{20}\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следующее утверждение получается аналогично предложению 8.5.

**Предложение 13.4.** *Пусть выполнены условия теоремы 13.1. Если  $g^0 = g$ , т. е. справедливы представления (1.14), то при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{21}^o\rho_0(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

**13.3. Аппроксимация резольвенты  $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$  в строго внутренней подобласти.** Аналогом теоремы 8.6 является следующий результат.

**Теорема 13.5.** *Пусть выполнены условия теоремы 13.1. Пусть  $\mathcal{O}'$  – строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ , и  $\delta = \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq (\mathcal{C}_{23}\delta^{-1} + 1) \left( \mathfrak{C}_{19}c(\varphi)\rho_0(\zeta) + \mathfrak{C}_{24}c(\varphi)^{5/2}\rho_0(\zeta)^{3/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (13.24)$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq (\mathcal{C}_{23}\delta^{-1} + 1) \left( \mathfrak{C}_{19}c(\varphi)\rho_0(\zeta) + \mathfrak{C}_{24}c(\varphi)^{5/2}\rho_0(\zeta)^{3/4} \right) \varepsilon. \end{aligned}$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \\ & \leq (\mathcal{C}_{23}\delta^{-1} + 1) (\mathfrak{C}_{25}c(\varphi)\rho_0(\zeta) + \mathfrak{C}_{26}c(\varphi)^{5/2}\rho_0(\zeta)^{3/4}) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (13.25)$$

Здесь постоянная  $\mathcal{C}_{23}$  – та же, что в (7.14),  $\mathfrak{C}_{19}$  – постоянная из оценки (13.1). Постоянные  $\mathfrak{C}_{24}, \mathfrak{C}_{25}, \mathfrak{C}_{26}$  зависят от  $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1, k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Первая часть доказательства проводится по аналогии с первой частью доказательства теоремы 7.1. Пусть  $\chi(\mathbf{x})$  — срезка, удовлетворяющая условиям (7.3). Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — решение задачи (9.6),  $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$  — решение уравнения (10.12). Тогда  $(\mathcal{A}_\varepsilon - \zeta)(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) = 0$  в области  $\mathcal{O}$ . Отсюда аналогично (7.4)–(7.14) выводим неравенство

$$\|\mathbf{D}(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon))\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq C_{23}c(\varphi)\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (13.26)$$

Далее, в силу теоремы 2.2

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1c(\varphi)^2|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (13.27)$$

Из (1.16) и (4.3) следует оценка функции (10.10):

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq c_1\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + |\zeta|\|\tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq c_1C_{\mathcal{O}}^{(2)}\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} + |\zeta|C_{\mathcal{O}}^{(0)}\|\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (13.18) и оценки  $\|\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq |\zeta|^{-1}c(\varphi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$  вытекает, что

$$\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_{27}\rho_0(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (13.28)$$

где  $\mathfrak{C}_{27} = 2c_1C_{\mathcal{O}}^{(2)}c^\circ + C_{\mathcal{O}}^{(0)}$ . Из (13.27) и (13.28) следует, что

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1\mathfrak{C}_{27}c(\varphi)^2|\zeta|^{-1/2}\rho_0(\zeta)^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с (13.1) это влечет

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \left(\mathfrak{C}_{19}\rho_0(\zeta) + C_1\mathfrak{C}_{27}c(\varphi)^{3/2}\rho_0(\zeta)^{3/4}\right)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (13.29)$$

Теперь, сопоставляя (13.26) и (13.29), получаем

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{D}(\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon))\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leq C_{23}\delta^{-1}\left(\mathfrak{C}_{19}c(\varphi)\rho_0(\zeta) + C_1\mathfrak{C}_{27}c(\varphi)^{5/2}\rho_0(\zeta)^{3/4}\right)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \\ &\leq (C_{23}\delta^{-1} + 1)\left(\mathfrak{C}_{19}c(\varphi)\rho_0(\zeta) + C_1\mathfrak{C}_{27}c(\varphi)^{5/2}\rho_0(\zeta)^{3/4}\right)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (13.30)$$

В силу следствия 2.5 и (13.28) имеем

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leq (C_2 + C_3|\zeta|^{-1/2})c(\varphi)^2\varepsilon\|\tilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (C_2 + C_3)\mathfrak{C}_{27}c(\varphi)^{3/2}\rho_0(\zeta)^{3/4}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Из (13.30) и (13.31) с учетом (10.3) вытекает (13.24) с постоянной  $\mathfrak{C}_{24} = \mathfrak{C}_{27}(C_1 + C_2 + C_3)$ .

Неравенство (13.25) выводится из (13.24) и (13.17), (13.18). •

Следующий результат аналогичен теореме 8.7.

**Теорема 13.6.** Пусть выполнены условия теоремы 13.2. Пусть  $\mathcal{O}'$  — строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ , и  $\delta = \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \tilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leq (C_{23}\delta^{-1} + 1)(\mathfrak{C}_{19}c(\varphi)\rho_0(\zeta) + \tilde{\mathfrak{C}}_{24}c(\varphi)^{5/2}\rho_0(\zeta)^{3/4})\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (13.32)$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \\ &\leq (C_{23}\delta^{-1} + 1)(\mathfrak{C}_{19}c(\varphi)\rho_0(\zeta) + \tilde{\mathfrak{C}}_{24}c(\varphi)^{5/2}\rho_0(\zeta)^{3/4})\varepsilon. \end{aligned}$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \\ &\leq (C_{23}\delta^{-1} + 1)(\mathfrak{C}_{28}c(\varphi)\rho_0(\zeta) + \mathfrak{C}_{29}c(\varphi)^{5/2}\rho_0(\zeta)^{3/4})\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (13.33)$$

Постоянные  $\tilde{\mathfrak{C}}_{24}$ ,  $\mathfrak{C}_{28}$ ,  $\mathfrak{C}_{29}$  зависят от  $d$ ,  $m$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\|g\|_{L_\infty}$ ,  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1$ ,  $k_2$  из неравенства (9.2), от параметров решётки  $\Gamma$ , от области  $\mathcal{O}$  и от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** Из (4.3), (13.18), (13.21) и (13.24) вытекает (13.32) с постоянной  $\tilde{\mathfrak{C}}_{24} = \mathfrak{C}_{24} + 2\mathcal{C}'''C_{\mathcal{O}}^{(2)}c^\circ$ .

Неравенство (13.33) выводится из (13.18), (13.23) и (13.32). •

## §14. АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ $(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$

**14.1. Оператор  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$ .** Введем обозначение

$$Z = \text{Ker } b(\mathbf{D}) = \{\mathbf{z} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) : b(\mathbf{D})\mathbf{z} = 0\}.$$

Из (9.2) вытекает неравенство

$$\|\mathbf{D}\mathbf{z}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 \leq k_1^{-1}k_2\|\mathbf{z}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{z} \in Z.$$

Отсюда и из компактности вложения  $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  в  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  следует, что пространство  $Z$  конечномерно. Обозначим  $\dim Z = p$ . Заведомо  $Z$  содержит  $n$ -мерное подпространство постоянных  $\mathbb{C}^n$ -значных функций в  $\mathcal{O}$ . Положим

$$\mathcal{H}(\mathcal{O}) = L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \ominus Z, \quad H_\perp^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) = H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \cap \mathcal{H}(\mathcal{O}).$$

Как проверено в [Su3, предложение 9.1], форма  $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}$  задает в  $H_\perp^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  норму, эквивалентную стандартной: существует постоянная  $\tilde{k}_1$  такая, что

$$\tilde{k}_1\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 \leq \|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{u} \in H_\perp^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (14.1)$$

Пусть  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  — оператор в  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ , порожденный формой (9.3). Очевидно,  $\text{Ker } \mathcal{A}_{N,\varepsilon} = Z$ . Ортогональное разложение  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) = \mathcal{H}(\mathcal{O}) \oplus Z$  приводит оператор  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ . Обозначим через  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$  часть оператора  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  в

подпространстве  $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ . Иначе говоря,  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$  — самосопряженный оператор в  $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ , порожденный квадратичной формой

$$b_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_\perp^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).$$

В силу (1.2), (1.5) и (14.1) справедливы оценки

$$\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \tilde{k}_1 \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 \leq b_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{u} \in H_\perp^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (14.2)$$

Пусть  $\mathcal{A}_N^0$  — эффективный оператор, порожденный формой (9.11) в пространстве  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Очевидно,  $\text{Ker } \mathcal{A}_N^0 = Z$ . Разложение  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) = \mathcal{H}(\mathcal{O}) \oplus Z$  приводит оператор  $\mathcal{A}_N^0$ . Пусть  $\mathcal{B}_N^0$  — часть оператора  $\mathcal{A}_N^0$  в подпространстве  $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ . Иначе говоря,  $\mathcal{B}_N^0$  — оператор, порожденный в  $\mathcal{H}(\mathcal{O})$  квадратичной формой

$$b_N^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = (g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_\perp^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).$$

Аналогично (14.2) проверяются оценки

$$\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \tilde{k}_1 \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})}^2 \leq b_N^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2, \quad \mathbf{u} \in H_\perp^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \quad (14.3)$$

Через  $\mathcal{P}$  обозначим ортопроектор пространства  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  на  $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ , а через  $\mathcal{P}_Z$  — ортопроектор на  $Z$ ; тогда  $\mathcal{P} = I - \mathcal{P}_Z$ .

Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$ , где  $c_b > 0$  — общая нижняя грань операторов  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$  и  $\mathcal{B}_N^0$ . Иначе говоря,  $0 < c_b \leq \min\{\lambda_{2,\varepsilon}(N), \lambda_2^0(N)\}$ , где  $\lambda_{2,\varepsilon}(N)$  (соответственно,  $\lambda_2^0(N)$ ) — первое ненулевое собственное число оператора  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$  (соответственно,  $\mathcal{A}_N^0$ ). (С учетом кратностей — это  $(p+1)$ -е собственные значения.)

**Замечание 14.1.** 1) В силу (14.2), (14.3) в качестве  $c_b$  подходит число  $\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \tilde{k}_1$ . 2) Пусть  $\nu > 0$  — сколь угодно малое число. Если считать  $\varepsilon$  достаточно малым, то в качестве  $c_b$  можно принять  $c_b = \lambda_2^0(N) - \nu$ . 3) Легко указать верхнюю оценку числа  $c_b$ : из (14.2), (14.3) и из вариационного принципа видно, что  $c_b \leq \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 \mu_{p+1}^0(N)$ , где  $\mu_{p+1}^0(N) > 0$  —  $(p+1)$ -ое собственное значение оператора  $-\Delta$  с условием Неймана в пространстве  $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$  (если нумеровать собственные значения в порядке неубывания с учетом кратностей). Тем самым,  $c_b$  оценивается величиной, зависящей лишь от  $d, n, p, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}$  и от области  $\mathcal{O}$ .

Пусть  $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = (\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \mathbf{F}$ , где  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$ , т. е.  $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$  является обобщенным решением задачи Неймана

$$\begin{aligned} b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon - \zeta \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon &= \mathbf{F} \quad \text{в } \mathcal{O}; \\ \partial_\nu^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} &= 0; \quad (\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})} = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in Z. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Здесь условие ортогональности  $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$  к  $Z$  выполнено автоматически, если  $\zeta \neq 0$ , а при  $\zeta = 0$  его надо накладывать.

Пусть  $\varphi_0 = (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} \mathbf{F}$ ,  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$ . Тогда  $\varphi_0$  является обобщенным решением задачи Неймана

$$\begin{aligned} b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \varphi_0 - \zeta \varphi_0 &= \mathbf{F} \quad \text{в } \mathcal{O}; \\ \partial_\nu^0 \varphi_0|_{\partial\mathcal{O}} &= 0; \quad (\varphi_0, \mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})} = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in Z. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Здесь также условие ортогональности  $\varphi_0$  к  $Z$  выполнено автоматически, если  $\zeta \neq 0$ , а при  $\zeta = 0$  его надо накладывать.

Обозначим

$$\mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta) := R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}} (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}$$

и положим  $\tilde{\varphi}_0 = P_{\mathcal{O}} \varphi_0$ ,

$$\psi_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\varphi}_0 = (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon \mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta) \mathbf{F}. \quad (14.6)$$

**Теорема 14.2.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$ , где  $c_b > 0$  — общая нижняя граница операторов  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$  и  $\mathcal{B}_N^0$ . Положим  $\zeta - c_b = |\zeta - c_b| e^{i\vartheta}$  и введем обозначение

$$\rho_b(\zeta) = \begin{cases} c(\vartheta)^2 |\zeta - c_b|^{-2}, & |\zeta - c_b| < 1, \\ c(\vartheta)^2, & |\zeta - c_b| \geqslant 1. \end{cases} \quad (14.7)$$

Пусть  $\varphi_\varepsilon$  — решение задачи (14.4) и  $\varphi_0$  — решение задачи (14.5) при  $\mathbf{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$ . Пусть  $\psi_\varepsilon$  — функция (14.6). Пусть число  $\varepsilon_1$  удовлетворяет условию 4.1. Тогда при  $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathfrak{C}_{30} \rho_b(\zeta) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\ \|\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant \mathfrak{C}_{31} \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (14.8)$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{30} \rho_b(\zeta) \varepsilon, \quad (14.9)$$

$$\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{31} \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2}. \quad (14.10)$$

Для потока  $g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \varphi_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \varphi_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \tilde{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_{32} \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (14.11)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_{30}$ ,  $\mathfrak{C}_{31}$ ,  $\mathfrak{C}_{32}$  зависят от  $d, n, m, p, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1, k_2$  из неравенства (9.2), от постоянной  $k_1$  из (14.1), от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство.** Применяя теорему 10.1 при  $\zeta = -1$ , при  $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$  получаем

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 + I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O})} \\ &= \|((\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + I)^{-1}) \mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_1 (\varepsilon + \varepsilon^2) \leqslant 2\mathfrak{C}_1 \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда, используя аналог тождества (2.10) для операторов  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$  и  $\mathcal{B}_N^0$ , приходим к неравенству

$$\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathfrak{C}_1 \varepsilon \sup_{x \geqslant c_b} (x+1)^2 |x-\zeta|^{-2} \quad (14.12)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Аналогично (8.8),

$$\sup_{x \geq c_b} (x+1)^2 |x - \zeta|^{-2} \leq \check{c}_b \rho_b(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty), \quad (14.13)$$

где  $\check{c}_b = (c_b + 2)^2$ . В силу замечания 14.1(3)  $\check{c}_b$  ограничено величиной, зависящей лишь от  $d, n, p, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}$  и от области  $\mathcal{O}$ . Из (14.12) и (14.13) вытекает (14.9) с постоянной  $\mathfrak{C}_{30} = 2\mathfrak{C}_1\check{c}_b$ .

Применим теперь теорему 10.2 при  $\zeta = -1$ . При  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  имеем:

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3)\varepsilon^{1/2}. \quad (14.14)$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{A}_{N,\varepsilon}^{1/2} ((\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon; -1))\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \\ & \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (d\alpha_1)^{1/2} (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3)\varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Домножим оператор под знаком нормы в (14.15) с двух сторон на проектор  $\mathcal{P}$ . Получим

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{1/2} ((\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 + I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{P}\mathcal{K}_N(\varepsilon; -1))\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O})} \\ & \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (d\alpha_1)^{1/2} (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3)\varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \end{aligned} \quad (14.16)$$

Справедливо тождество

$$\begin{aligned} & (\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{P}\mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta) \\ & = (\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + I)(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} ((\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 + I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{P}\mathcal{K}_N(\varepsilon; -1)) \\ & \times (\mathcal{B}_N^0 + I)(\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} + (\zeta + 1)(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \varepsilon \mathcal{P}\mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta). \end{aligned} \quad (14.17)$$

Домножая (14.17) слева на  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{1/2}$  и используя (14.16), приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{1/2} ((\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{P}\mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta))\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O})} \\ & \leq \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (d\alpha_1)^{1/2} (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3)\varepsilon^{1/2} \sup_{x \geq c_b} (x+1)^2 |x - \zeta|^{-2} \\ & + |\zeta + 1| \varepsilon \sup_{x \geq c_b} x |x - \zeta|^{-2} \|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}_N^0)^{-1/2}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (14.18)$$

Обозначим слагаемые в правой части (14.18) через  $\mathcal{T}_1(\varepsilon), \mathcal{T}_2(\varepsilon)$ . С учетом (14.13) имеем

$$\mathcal{T}_1(\varepsilon) \leq \mathfrak{C}_{33}\varepsilon^{1/2}\rho_b(\zeta), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \quad (14.19)$$

где  $\mathfrak{C}_{33} = \check{c}_b \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (d\alpha_1)^{1/2} (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3)$ . Далее, из (14.3) вытекает, что

$$\|(\mathcal{B}_N^0)^{-1/2}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \tilde{k}_1^{-1/2}.$$

Отсюда и из (1.4), (1.19), (4.3) получаем оценку

$$\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}_N^0)^{-1/2}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq M_1 \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(1)} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \tilde{k}_1^{-1/2}. \quad (14.20)$$

В силу (14.20) второе слагаемое в (14.18) допускает оценку

$$\mathcal{T}_2(\varepsilon) \leq \varepsilon |\zeta + 1| M_1 \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(1)} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \tilde{k}_1^{-1/2} \sup_{x \geq c_b} x |x - \zeta|^{-2}. \quad (14.21)$$

Аналогично (8.17) имеем:

$$|\zeta + 1| \sup_{x \geq c_b} x |x - \zeta|^{-2} \leq (c_b + 2)(c_b + 1) \rho_b(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty).$$

Вместе с (14.21) это влечет

$$\mathcal{T}_2(\varepsilon) \leq \mathfrak{C}_{34} \varepsilon \rho_b(\zeta), \quad (14.22)$$

где  $\mathfrak{C}_{34} = (c_b + 2)(c_b + 1) M_1 \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}}^{(1)} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \tilde{k}_1^{-1/2}$ .

В итоге из (14.18), (14.19) и (14.22) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} & \| \mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{1/2} ((\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{P} \mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta)) \|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O})} \\ & \leq (\mathfrak{C}_{33} + \mathfrak{C}_{34}) \varepsilon^{1/2} \rho_b(\zeta), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (14.2) следует оценка

$$\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{P} \mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{35} \varepsilon^{1/2} \rho_b(\zeta) \quad (14.23)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , где  $\mathfrak{C}_{35} = \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \tilde{k}_1^{-1/2} (\mathfrak{C}_{33} + \mathfrak{C}_{34})$ .

Покажем теперь, что в (14.23) последний член под знаком нормы можно заменить на  $\varepsilon \mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta)$ ; это приведет лишь к изменению константы в оценке. Если домножить оператор под знаком нормы в (14.14) справа на  $\mathcal{P}$ , то при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  получим

$$\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 + I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_N(\varepsilon; -1)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3) \varepsilon^{1/2}. \quad (14.24)$$

С другой стороны, из (14.16) при учете (14.2) следует, что

$$\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 + I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{P} \mathcal{K}_N(\varepsilon; -1)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{36} \varepsilon^{1/2} \quad (14.25)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , где  $\mathfrak{C}_{36} = \tilde{k}_1^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (d\alpha_1)^{1/2} (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3)$ . Сопоставляя (14.24) и (14.25), убеждаемся, что

$$\varepsilon \|\mathcal{P}_Z \mathcal{K}_N(\varepsilon; -1)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_{36}) \varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Следовательно, с учетом (14.13) при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  имеем

$$\begin{aligned} & \varepsilon \|\mathcal{P}_Z \mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \varepsilon \|\mathcal{P}_Z \mathcal{K}_N(\varepsilon; -1)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \\ & \times \|(\mathcal{B}_N^0 + I)(\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O})} \leq (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_{36}) \check{c}_b^{1/2} \varepsilon^{1/2} \rho_b(\zeta)^{1/2}. \end{aligned} \quad (14.26)$$

В итоге из (14.23) и (14.26) при учете равенства  $\mathcal{P} + \mathcal{P}_Z = I$  вытекает оценка (14.10) с постоянной  $\mathfrak{C}_{31} = \mathfrak{C}_{35} + (\mathfrak{C}_2 + \mathfrak{C}_3 + \mathfrak{C}_{36}) \check{c}_b^{1/2}$ .

Остается проверить (14.11). Из (14.8) с учетом (1.2), (1.5) следует, что при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  выполнено

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \varphi_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \psi_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathfrak{C}_{31} \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (14.27)$$

Аналогично (5.19)–(5.21) имеем:

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\psi_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq (\mathcal{C}' + \mathcal{C}'')\varepsilon \|\tilde{\varphi}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}. \quad (14.28)$$

Оценим  $H^2(\mathcal{O})$ -норму функции  $\varphi_0 = (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}\mathbf{F}$ . С учетом (9.12) и (14.13) имеем:

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^2(\mathcal{O})} &\leq \|(\mathcal{B}_N^0 + I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^2(\mathcal{O})} \\ &\times \|(\mathcal{B}_N^0 + I)(\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathcal{O})} \leq c^\circ \check{c}_b^{1/2} \rho_b(\zeta)^{1/2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\varphi_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leq c^\circ \check{c}_b^{1/2} \rho_b(\zeta)^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (14.29)$$

В силу (4.3), (14.28) и (14.29)

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\psi_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{37}\varepsilon \rho_b(\zeta)^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (14.30)$$

где  $\mathfrak{C}_{37} = (\mathcal{C}' + \mathcal{C}'')C_\mathcal{O}^{(2)}c^\circ \check{c}_b^{1/2}$ . Из (14.27) и (14.30) вытекает (14.11) с постоянной  $\mathfrak{C}_{32} = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathfrak{C}_{31} + \mathfrak{C}_{37}$ . •

Выделим случай, когда  $\Lambda \in L_\infty$ . Обозначим

$$\mathcal{K}_N^0(\varepsilon; \zeta) := [\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} \quad (14.31)$$

и положим

$$\check{\psi}_\varepsilon = \varphi_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_0 = (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon \mathcal{K}_N^0(\varepsilon; \zeta)\mathbf{F}. \quad (14.32)$$

**Теорема 14.3.** Пусть выполнены условия теоремы 14.2 и условие 2.8. Пусть функция  $\check{\psi}_\varepsilon$  определена в (14.32). Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\varphi_\varepsilon - \check{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{31}\rho_b(\zeta)\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (14.33)$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_N^0(\varepsilon; \zeta)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{31}\rho_b(\zeta)\varepsilon^{1/2}. \quad (14.34)$$

Для потока  $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{32}\rho_b(\zeta)\varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (14.35)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_{31}^\circ$ ,  $\mathfrak{C}_{32}^\circ$  зависят от  $d, n, m, p, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1, k_2$  из неравенства (9.2), от постоянной  $k_1$  из (14.1), от параметров решётки  $\Gamma$ , от области  $\mathcal{O}$  и от нормы  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство.** Аналогично (6.5)–(6.9),

$$\|\psi_\varepsilon - \check{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}''' \varepsilon \|\tilde{\varphi}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Вместе с (4.3) и (14.29) это влечет

$$\|\psi_\varepsilon - \check{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathcal{C}''' C_\mathcal{O}^{(2)} c^\circ \check{c}_b^{1/2} \varepsilon \rho_b(\zeta)^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (14.36)$$

Теперь из (14.8) и (14.36) вытекает искомое неравенство (14.33) с постоянной  $\mathfrak{C}_{31}^\circ = \mathfrak{C}_{31} + \mathcal{C}''' C_\mathcal{O}^{(2)} c^\circ \check{c}_b^{1/2}$ .

Проверим (14.35). Из (14.33) следует, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\check{\psi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathfrak{C}_{31}^o\rho_b(\zeta)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \quad (14.37)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Аналогично (6.11), (6.12) имеем:

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\check{\psi}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \tilde{\mathfrak{C}}' \varepsilon \|\varphi_0\|_{H^2(\mathcal{O})}. \quad (14.38)$$

С учетом (14.29) неравенства (14.37) и (14.38) приводят к оценке (14.35) с постоянной  $\mathfrak{C}_{32}^o = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\mathfrak{C}_{31}^o + \tilde{\mathfrak{C}}' c^o c_b^{1/2}$ .  $\bullet$

**14.3. Специальные случаи.** Случай, когда корректор обращается в ноль, выделяется следующим утверждением.

**Предложение 14.4.** *Пусть выполнены условия теоремы 14.2. Если  $g^0 = \bar{g}$ , т. е. выполнены соотношения (1.13), то  $\Lambda = 0$  и  $\psi_\varepsilon = \varphi_0$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\|\varphi_\varepsilon - \varphi_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{31} \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следующее утверждение получается аналогично предложению 8.5.

**Предложение 14.5.** *Пусть выполнены условия теоремы 14.2. Если  $g^0 = g$ , т. е. справедливы представления (1.14), то при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D})\varphi_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{32}^o \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

**14.4. Аппроксимация резольвенты оператора  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$  в строго внутренней подобласти.** Пусть  $\mathcal{O}'$  — строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ . Используя теорему 14.2 и результаты для задачи в  $\mathbb{R}^d$ , можно получить аппроксимацию решения  $\varphi_\varepsilon$  в  $H^1(\mathcal{O}')$  точного порядка по  $\varepsilon$ .

**Теорема 14.6.** *Пусть выполнены условия теоремы 14.2. Пусть  $\mathcal{O}'$  — строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ , и пусть  $\delta := \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка*

$$\begin{aligned} & \|\varphi_\varepsilon - \psi_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathfrak{C}_b' \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_b(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_b(\zeta)^{3/4}) + \mathfrak{C}_b'' c(\vartheta)^{1/2} \rho_b(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathfrak{C}_b' \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_b(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_b(\zeta)^{3/4}) + \mathfrak{C}_b'' c(\vartheta)^{1/2} \rho_b(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon. \end{aligned} \quad (14.39)$$

Для потока  $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\begin{aligned} & \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\tilde{\varphi}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathfrak{C}_b' \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_b(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_b(\zeta)^{3/4}) + \tilde{\mathfrak{C}}_b'' c(\vartheta)^{1/2} \rho_b(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (14.40)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}'_b$ ,  $\mathfrak{C}''_b$ ,  $\check{\mathfrak{C}}'_b$ ,  $\check{\mathfrak{C}}''_b$  зависят от  $d, n, m, p, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1, k_2$  из неравенства (9.2), от постоянной  $\tilde{k}_1$  из (14.1), от параметров решётки  $\Gamma$  и от области  $\mathcal{O}$ .

**Доказательство** полностью аналогично доказательству теоремы 8.6; мы опускаем детали. •

**Теорема 14.7.** Пусть выполнены условия теоремы 14.3. Пусть  $\mathcal{O}'$  – строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ , и пусть  $\delta := \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|\varphi_\varepsilon - \check{\psi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathfrak{C}'_b \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_b(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_b(\zeta)^{3/4}) + \check{\mathfrak{C}}''_b c(\vartheta)^{1/2} \rho_b(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_N^0(\varepsilon; \zeta)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathfrak{C}'_b \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_b(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_b(\zeta)^{3/4}) + \check{\mathfrak{C}}''_b c(\vartheta)^{1/2} \rho_b(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon. \end{aligned} \quad (14.41)$$

Для потока  $g^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\begin{aligned} & \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\varphi_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \tilde{\mathfrak{C}}'_b \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_b(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_b(\zeta)^{3/4}) + \hat{\mathfrak{C}}''_b c(\vartheta)^{1/2} \rho_b(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (14.42)$$

Постоянны  $\mathfrak{C}'_b$ ,  $\mathfrak{C}''_b$  – те же, что в теореме 14.6. Постоянны  $\check{\mathfrak{C}}'_b$ ,  $\check{\mathfrak{C}}''_b$  зависят от  $d, n, m, p, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ , от постоянных  $k_1, k_2$  из неравенства (9.2), от постоянной  $\tilde{k}_1$  из (14.1), от параметров решётки  $\Gamma$  от области  $\mathcal{O}$  и от  $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ .

**Доказательство** легко провести, применяя теорему 14.6 и соотношения (14.29), (14.36), (14.38). •

**14.5. Приложение результатов об операторе  $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$  к оператору  $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ .** Теорема 14.2 позволяет получить аппроксимацию резольвенты  $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$  в регулярной точке  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$ ,  $\zeta \neq 0$ .

**Теорема 14.8.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$  и  $\zeta \neq 0$ . Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  – решение задачи (9.6),  $\mathbf{u}_0$  – решение задачи (9.13) при  $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Пусть число  $\varepsilon_1$  удовлетворяет условию 4.1. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{30} \rho_b(\zeta) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

где  $\rho_b(\zeta)$  определено в (14.7). В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{30} \rho_b(\zeta) \varepsilon. \quad (14.43)$$

Обозначим  $\widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widehat{\mathbf{u}}_0$ , где  $\widehat{\mathbf{u}}_0 = P_{\mathcal{O}} (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} \mathcal{P} \mathbf{F}$ . При  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{31} \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \widehat{K}_N(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{31} \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2}, \quad (14.44)$$

где  $\widehat{K}_N(\varepsilon; \zeta) := R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} \mathcal{P}$ . Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \hat{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{32} \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (14.45)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_{30}$ ,  $\mathfrak{C}_{31}$ ,  $\mathfrak{C}_{32}$  — те же, что в теореме 14.2.

**Доказательство.** Заметим, что при  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$ ,  $\zeta \neq 0$ , выполнено

$$(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} = (\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \mathcal{P} + (\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \mathcal{P}_Z.$$

Имеем:  $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \mathcal{P} = (\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \mathcal{P}$ ,  $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \mathcal{P}_Z = -\zeta^{-1} \mathcal{P}_Z$ . Следовательно,

$$(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} = (\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \mathcal{P} - \zeta^{-1} \mathcal{P}_Z.$$

Аналогично,

$$(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} = (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} \mathcal{P} - \zeta^{-1} \mathcal{P}_Z.$$

Поэтому

$$(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} = ((\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}) \mathcal{P}. \quad (14.46)$$

Оценка (14.43) непосредственно следует из (14.9) и (14.46). Отметим очевидное равенство  $\widehat{K}_N(\varepsilon; \zeta) = \mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta) \mathcal{P}$ . Тогда

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \widehat{K}_N(\varepsilon; \zeta) \\ &= ((\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_N(\varepsilon; \zeta)) \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (14.47)$$

Отсюда и из (14.10) вытекает (14.44).

Далее, поскольку  $b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} \mathcal{P}_Z = 0$ , то

$$\begin{aligned} & g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} \mathcal{P} \\ &= (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}) \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (14.48)$$

Очевидно, неравенство (14.11) в операторных терминах означает, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}}(\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{32} \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2} \quad (14.49)$$

при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ . Теперь из (14.48) и (14.49) вытекает оценка

$$\begin{aligned} & \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} \mathcal{P}\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow L_2(\mathcal{O})} \\ &\leq \mathfrak{C}_{32} \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1, \end{aligned}$$

равносильная неравенству (14.45). •

Из теоремы 14.3 выводится следующий результат.

**Теорема 14.9.** Пусть  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_b, \infty)$  и  $\zeta \neq 0$ . Пусть  $\mathbf{u}_\varepsilon$  — решение задачи (9.6),  $\mathbf{u}_0$  — решение задачи (9.13) при  $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ . Пусть выполнено условие 2.8. Пусть корректор  $K_N^0(\varepsilon; \zeta)$  определен в (12.1), а

$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$  — функция (12.2). Пусть число  $\varepsilon_1$  удовлетворяет условию 4.1. Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{31}^\circ \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

или, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{31}^\circ \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2}. \quad (14.50)$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leq \mathfrak{C}_{32}^\circ \rho_b(\zeta) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \quad (14.51)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}_{31}^\circ, \mathfrak{C}_{32}^\circ$  — те же, что в теореме 14.3.

**Доказательство.** С учетом (12.1), (14.31) и тождества  $b(\mathbf{D})\mathcal{P}_Z = 0$  имеем:  $K_N^0(\varepsilon; \zeta) = \mathcal{K}_N^0(\varepsilon; \zeta)\mathcal{P}$ . Вместе с (14.46) это дает тождество

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon; \zeta) \\ &= ((\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_N^0(\varepsilon; \zeta)) \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (14.52)$$

Из (14.34) и (14.52) прямо вытекает (14.50).

Далее, поскольку  $b(\mathbf{D})\mathcal{P}_Z = 0$ , то

$$\begin{aligned} & g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} \\ &= (g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{B}_N^0 - \zeta I)^{-1}) \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (14.53)$$

Соотношения (14.35) и (14.53) влекут (14.51). •

Теперь мы извлечем следствие из теоремы 14.6.

**Теорема 14.10.** Пусть выполнены условия теоремы 14.8. Пусть  $\mathcal{O}'$  — строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ , и пусть  $\delta := \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_\varepsilon - \hat{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathfrak{C}_b' \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_b(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_b(\zeta)^{3/4}) + \mathfrak{C}_b'' c(\vartheta)^{1/2} \rho_b(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} & \|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon \hat{K}_N(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathfrak{C}_b' \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_b(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_b(\zeta)^{3/4}) + \mathfrak{C}_b'' c(\vartheta)^{1/2} \rho_b(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon. \end{aligned} \quad (14.54)$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\hat{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \tilde{\mathfrak{C}}_b' \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_b(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_b(\zeta)^{3/4}) + \tilde{\mathfrak{C}}_b'' c(\vartheta)^{1/2} \rho_b(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (14.55)$$

Постоянны  $\mathfrak{C}_b', \mathfrak{C}_b'', \tilde{\mathfrak{C}}_b', \tilde{\mathfrak{C}}_b''$  — те же, что в теореме 14.6.

**Доказательство.** Оценка (14.54) следует из (14.39) и (14.47). Неравенство (14.55) является следствием (14.40) и (14.48). •

Следующий результат выводится из теоремы 14.7.

**Теорема 14.11.** Пусть выполнены условия теоремы 14.9. Пусть  $\mathcal{O}'$  – строго внутренняя подобласть области  $\mathcal{O}$ , и пусть  $\delta := \text{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$ . Тогда при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon \|_{H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathfrak{C}'_\vartheta \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_\vartheta(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_\vartheta(\zeta)^{3/4}) + \check{\mathfrak{C}}''_\vartheta c(\vartheta)^{1/2} \rho_\vartheta(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned} & \| (\mathcal{A}_{N,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon; \zeta) \|_{L_2(\mathcal{O}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \mathfrak{C}'_\vartheta \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_\vartheta(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_\vartheta(\zeta)^{3/4}) + \check{\mathfrak{C}}''_\vartheta c(\vartheta)^{1/2} \rho_\vartheta(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon. \end{aligned} \quad (14.56)$$

Для потока  $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$  при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$  справедлива аппроксимация

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{p}_\varepsilon - \tilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 \|_{L_2(\mathcal{O}')} \\ & \leq \left( \tilde{\mathfrak{C}}'_\vartheta \delta^{-1} (c(\vartheta) \rho_\vartheta(\zeta) + c(\vartheta)^{5/2} \rho_\vartheta(\zeta)^{3/4}) + \hat{\mathfrak{C}}''_\vartheta c(\vartheta)^{1/2} \rho_\vartheta(\zeta)^{5/4} \right) \varepsilon \| \mathbf{F} \|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \quad (14.57)$$

Постоянные  $\mathfrak{C}'_\vartheta, \check{\mathfrak{C}}''_\vartheta, \tilde{\mathfrak{C}}'_\vartheta, \hat{\mathfrak{C}}''_\vartheta$  – те же, что в теореме 14.7.

**Доказательство.** Неравенство (14.56) вытекает из (14.41) и (14.52). Неравенство (14.57) является следствием (14.42) и (14.53). •

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [BSu1] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.
- [BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.
- [BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.
- [BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева  $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.
- [Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.
- [Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.
- [Zh1] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), № 3, 305–308.
- [Zh2] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), № 5, 597–601.

- [ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.
- [ZhPas] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.
- [KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in  $L^2$  for elliptic homogenization problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.
- [McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
- [MSu1] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение решений начально-краевых задач для параболических систем*, Функц. анализ и его прил., в печати.
- [MSu2] Meshkova Y. M., Suslina T. A., *Homogenization of the initial boundary-value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, in preparation.
- [Ne] Nečas J., *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer Monographs in Mathematics, 2011.
- [PSu1] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптической задачи Дирихле: оценки погрешности в  $(L_2 \rightarrow H^1)$ -норме*, Функц. анализ и прил. **46** (2012), вып. 2, 92–96.
- [PSu2] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), вып. 6, 139–177.
- [St] Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.
- [Su1] Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности в  $L_2$  при усреднении эллиптической задачи Дирихле*, Функц. анализ и прил. **46** (2012), вып. 3, 91–96.
- [Su2] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems:  $L_2$ -operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463–476.
- [Su3] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453–3493.
- [Su4] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических задач в зависимости от спектрального параметра*, Функц. анализ и его прил., в печати.