

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

**ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ РАСПОЗНАВАНИЯ ТИПА КОСЫ
ПО НИЛЬСЕНУ-ТЁРСТОНУ В ГРУППЕ B_3**

О.Н. БИРЮКОВ

oleg_biryukov@mail.ru

Государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский государственный областной
социально-гуманитарный институт"
РОССИЯ, 140410, Московская область
Коломна, ул. Зеленая, 30

Июль, 2014

АННОТАЦИЯ

Рассматривается группа кос и её гомоморфизм в группу гомеотопий компактной ориентированной двумерной поверхности рода нуль. В соответствии с классификацией гомеотопий по Нильсену-Тёрстону различают периодические, псевдоаносовские и приводимые косы. В статье описывается эффективный алгоритм распознавания типа косы по классификации Нильсена-Тёрстона в группе кос B_3 . Алгоритм имеет линейную сложность по длине входного слова.

Ключевые слова: группа кос, классификация Нильсена-Тёрстона.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В.А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М. Бабич, Н.А. Вавилов, А.М. Вершик, М.А. Всемиров,
А.И. Генералов, И.А. Ибрагимов, Л.Ю. Колотилина, В.Н. Кублановская,
Г.В. Кузьмина, П.П. Кулиш, Б.Б. Лурье, Ю.В. Матиясевич,
Н.Ю. Нецветаев, С.И. Репин, Г.А. Серегин, В.Н. Судаков, О.М. Фоменко.

1 Введение

Рассмотрим компактную ориентированную двумерную поверхность M рода нуль с $n+1$ компонентами края (двумерный диск, из внутренности которого удалены n открытых дисков). Группа гомеотопий этой поверхности, оставляющих поточечно неподвижной одну из компонент края (например, внешнюю границу диска), изоморфна классической группе кос Артина из n нитей B_n , имеющей следующее копредставление:

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{aligned} &\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad 1 \leq i < j+1 \leq n; \\ &\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2 \end{aligned} \rangle.$$

Поверхность M при $n \geq 2$ является гиперболической. Гомеотопии гиперболической поверхности в соответствии с классификацией Нильсена-Тёрстона делятся на три типа: периодические, псевдоаносовские и приводимые. Соответственно различают аналогичные типы кос, и ставится задача распознавания типа косы.

Существует несколько подходов к решению этой задачи: см. [1], [2], [7], [8], [9]. Каждый из этих подходов основан на использовании либо железнодорожных путей (train-tracks), либо некоторых разновидностей саммит-множеств (summit sets). Однако ни про один из них ещё не доказана его эффективность (т. е. полиномиальная сложность) как по длине входного слова в классических образующих Артина σ_i , так и по количеству нитей.

В статьях [5] и [6] описываются эффективные (по длине входного слова) алгоритмы распознавания типа косы, основанные опять-таки на использовании саммит-множеств (а именно, super summit sets). Время выполнения этих алгоритмов оценивается как $O(l^2)$ для четырёх нитей и $O(l^3)$ для произвольного числа нитей, где l есть длина входного слова в классических образующих Артина σ_i .

В настоящей статье предлагается эффективный (по длине входного слова) алгоритм решения задачи распознавания типа косы для случая трёх нитей, не использующий ни железнодорожных путей, ни саммит-множеств. Основная идея заключается в представлении косы из трёх нитей как движения одной нити вокруг двух других и определённом кодировании такого движения, по которому тип косы эффективно распознаётся.

Центральным результатом является следующая теорема.

Теорема 3.10. *В группе кос B_3 существует алгоритм распознавания типа косы по классификации Нильсена-Тёрстона со временем выполнения $O(l)$, где l есть длина входного слова в классических образующих Артина σ_i .*

2 Группа кос и классификация Нильсена-Тёрстона

В данной работе рассматривается классическая группа кос Артина (подробное определение этой группы и описание её свойств можно найти в [3] и [4]). Напомним здесь некоторые определения.

Группа кос из n нитей может быть задана с помощью образующих и соотношений следующим образом:

$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{aligned} &\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad 1 \leq i < j+1 \leq n; \\ &\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2 \end{aligned} \rangle.$$

Группа кос связана с группами классов отображений (гомеотопий) двумерных поверхностей. А именно, пусть M есть компактная ориентированная двумерная поверхность рода нуль с $n+1$ компонентами края $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ (двумерный диск, из внутренней которого удалены n открытых дисков).

Существует известный гомоморфизм группы кос B_n в группу гомеотопий поверхности M

$$\varphi : B_n \rightarrow \text{Homeot}(M), \quad (2.1)$$

который образующей σ_i , где $i = 1, 2, \dots, n-1$, ставит в соответствие половинное скручивание Дена вдоль кривой, охватывающей компоненты края γ_i и γ_{i+1} .

Для наглядного представления кос распространено их схематическое изображение в виде набора восходящих кривых, называемых *нитеми* косы. Нити на схеме косы β показывают движение граничных компонент $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ при изотопии от тождественного гомеоморфизма до гомеоморфизма двумерного диска, определяемого классом отображений $\varphi(\beta)$ поверхности M .

Каждая коса индуцирует перестановку на множестве граничных компонент $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, что приводит к гомоморфизму группы кос в симметрическую группу:

$$B_n \rightarrow S_n. \quad (2.2)$$

Ядро этого гомоморфизма называется *группой крашенных кос из n нитей*.

Особую роль в группе кос играет *коса Гарсайда* Δ — положительное скручивание всех нитей на поборота:

$$\Delta = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-2}) \dots (\sigma_1 \sigma_2)(\sigma_1).$$

Группа B_1 тривиальна, так что будем считать, что количество нитей $n \geq 2$. В этом случае поверхность M является гиперболической, поскольку её эйлерова характеристика отрицательна: $\chi(M) = 1 - n < 0$.

Существует классификация Нильсена-Тёрстона элементов группы классов отображений компактной ориентированной гиперболической поверхности (см. [10] и [11]). Согласно этой классификации в каждом классе существует представитель ровно одного из следующих трёх типов: периодический, псевдоаносовский, приводимый. В зависимости от наличия соответствующего представителя и сами классы отображений также называются периодическими, псевдоаносовскими или приводимыми.

По аналогии косу $\beta \in B_n$ будем называть *периодической*, *псевдоаносовской* или *приводимой* в зависимости от того, какому классу принадлежит её образ при гомоморфизме (2.1).

Поскольку Δ^2 порождает ядро гомоморфизма (2.1), то умножение косы слева на Δ^{2k} , где $k \in \mathbb{Z}$, не меняет тип косы по классификации Нильсена-Тёрстона.

Заметим, что в группе кос существуют периодические косы, несмотря на то, что в этой группе нет кручения. Периодическими являются в точности те косы β , для

которых существует такое натуральное k , что β^k принадлежит ядру гомоморфизма φ . Так, например, коса $\sigma_1\sigma_2 \in B_3$ является периодической, поскольку $(\sigma_1\sigma_2)^3 = \Delta^2 \in \text{Ker } \varphi$.

Для распознавания периодических кос существует эффективный алгоритм (см. [2]). Что касается псевдоаносовских и приводимых кос, то существует несколько способов их распознавания: см. [1], [2], [5], [6], [7], [8], [9]. Каждый из этих способов основан на использовании либо железнодорожных путей (train-tracks), либо некоторых разновидностей саммит-множеств (summit sets). Далее пойдёт речь о принципиально ином способе распознавания типа косы для случая трёх нитей.

3 Эффективное распознавание псевдоаносовских и приводимых кос из трёх нитей

Пусть β есть приводимая коса из трёх нитей. Приводящая система окружностей для такой косы состоит, очевидно, всего из одной компоненты, охватывающей две из трёх граничных компонент. Третью компоненту границы коса оставляет инвариантной. Отсюда теорема.

Теорема 3.1. *Непериодическая коса из трёх нитей, порождающая на множестве нитей транзитивную перестановку (т. е. перестановку, состоящую из одного цикла длины 3), является псевдоаносовской.*

Заметим, что транзитивность перестановки является достаточным, но не необходимым условием того, чтобы коса была псевдоаносовской.

Положим для определённости у приводимой косы β приводящая окружность охватывает граничные компоненты γ_1 и γ_2 . Покажем, что тогда косу β можно представлять как движение нити, которая отвечает инвариантной компоненте γ_3 , вокруг двух других нитей, которые можно считать неподвижными.

Представим поверхность M в виде двумерного диска на евклидовой плоскости, причём условимся, что компоненты границы γ_1 , γ_2 и γ_3 расположены горизонтально в ряд (см. рис. 1).

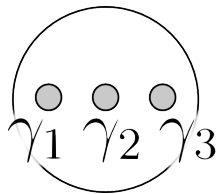


Рис. 1:

Соответственно будем говорить, что нить, отвечающая компоненте γ_1 , расположена слева, компоненте γ_2 — по центру и компоненте γ_3 — справа. Таким образом, изначально нить, движение которой отслеживается, расположена справа. Будем кодировать это движение следующим образом.

Если отслеживаемая нить расположена справа, то обозначим

$$u := \sigma_2\sigma_1, \quad r := \sigma_2\sigma_2.$$

Схематично движение отслеживаемой нити при действии данных кос показано на рис. 2.

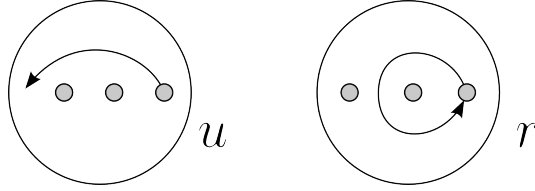


Рис. 2:

В результате применения косы u нить сместится влево, в случае же косы r — останется справа.

Если нить расположена слева, то обозначим

$$d := \sigma_1\sigma_2, \quad l := \sigma_1\sigma_1.$$

Схематично движение отслеживаемой нити при действии данных кос показано на рис. 3.

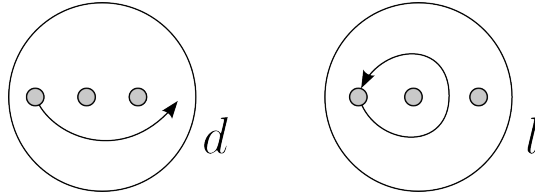


Рис. 3:

В результате применения косы d нить сместится вправо, в случае же косы l — останется слева.

Далее если отслеживаемая нить находится справа и применяется коса σ_1 , то это означает движение первых двух нитей, находящихся внутри приводящей окружности. Будем кодировать эту ситуацию следующим образом:

$$\sigma_1 = d^{-1}\Delta.$$

Цель подобного кодирования в том, что и здесь движется нить, расположенная вне приводящей окружности, только при этом будут возникать дополнительные сомножители Δ .

Аналогично, если отслеживаемая нить находится слева, то:

$$\sigma_2 = u^{-1}\Delta.$$

Введём ещё следующие обозначения:

$$a := \sigma_2 \sigma_1^{-1}, \quad b := \sigma_1^{-1} \sigma_2.$$

Схематично движение отслеживаемой нити при действии данных кос показано на рис. 4.

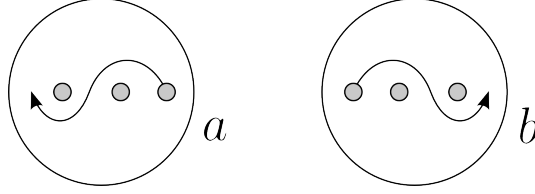


Рис. 4:

В процессе кодирования косы будем отслеживать позицию инвариантной нити, отмечая её нижним индексом клвь (означающим, что инвариантная нить расположена слева) или кпвь (инвариантная нить расположена справа). Изначально индекс клвь или кпвь находится в слове перед первой буквой. Например, если инвариантная нить вначале расположена справа, то:

$$\beta = {}_{\text{п}}\sigma_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots \sigma_{i_k}^{\varepsilon_k}.$$

Перемещаясь по образующим, будем записывать косу в виде слова в алфавите $\mathcal{F} = \{u^{\pm 1}, d^{\pm 1}, r^{\pm 1}, l^{\pm 1}, a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, \Delta^{\pm 1}\}$ с помощью следующих преобразований:

$$\begin{aligned} {}_{\text{п}}\sigma_1 &= d^{-1}\Delta_{\text{п}}, & {}_{\text{п}}\sigma_1^{-1} &= u\Delta_{\text{п}}^{-1}, \\ {}_{\text{п}}\sigma_2\sigma_1 &= u_{\text{л}}, & {}_{\text{п}}\sigma_2\sigma_1^{-1} &= a_{\text{л}}, & {}_{\text{п}}\sigma_2\sigma_2 &= r_{\text{п}}, \\ {}_{\text{п}}\sigma_2^{-1}\sigma_1 &= b_{\text{л}}^{-1}, & {}_{\text{п}}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} &= d_{\text{л}}^{-1}, & {}_{\text{п}}\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1} &= r_{\text{п}}^{-1}, \\ {}_{\text{л}}\sigma_2 &= u^{-1}\Delta_{\text{л}}, & {}_{\text{л}}\sigma_2^{-1} &= d\Delta_{\text{л}}^{-1}, \\ {}_{\text{л}}\sigma_1\sigma_2 &= d_{\text{п}}, & {}_{\text{л}}\sigma_1\sigma_2^{-1} &= a_{\text{п}}^{-1}, & {}_{\text{л}}\sigma_1\sigma_1 &= l_{\text{л}}, \\ {}_{\text{л}}\sigma_1^{-1}\sigma_2 &= b_{\text{п}}, & {}_{\text{л}}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} &= u_{\text{п}}^{-1}, & {}_{\text{л}}\sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1} &= l_{\text{л}}^{-1}. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что данные преобразования исчерпывают все возможные варианты расположения букв $\sigma_1^{\pm 1}$ и $\sigma_2^{\pm 1}$ и инвариантной нити. В самом деле, если текущая позиция этой инвариантной нити — ксправань, в косе не может остаться одна буква $\sigma_2^{\pm 1}$. Аналогично, если эта нить слева, то не может остаться одна буква $\sigma_1^{\pm 1}$.

ПРИМЕР. Представим косу $\sigma_2\sigma_1^3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$ в виде слова в алфавите \mathcal{F} . Эта коса меняет местами левую и центральную нити, оставляя инвариантной правую нить. Поэтому будем записывать косу в алфавите \mathcal{F} , отслеживая движение правой нити.

Вначале имеем

$${}_{\text{п}}\sigma_2\sigma_1^3\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2.$$

В соответствии с перечисленными выше преобразованиями ${}_n\sigma_2\sigma_1$ меняется на u_n :

$$u_n\sigma_1^2\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2.$$

Затем ${}_n\sigma_1^2$ меняется на l_n и так далее:

$$ul_n\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2 = ulu^{-1}\Delta_n\sigma_1^{-1}\sigma_2 = ulu^{-1}\Delta b_n.$$

Предложение 3.2. *Любая коса из трёх нитей может быть за время $O(l)$ записана как слово в алфавите $\mathcal{F} = \{u^{\pm 1}, d^{\pm 1}, r^{\pm 1}, l^{\pm 1}, a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, \Delta^{\pm 1}\}$, где l есть длина входного слова в классически образующих Артина σ_i .*

Доказательство. Предположим, что коса β оставляет инвариантной левую или правую нить. Используя указанные выше преобразования, её можно записать в алфавите \mathcal{F} , отслеживая движение инвариантной нити. При этом, очевидно, для преобразования входного слова достаточно его один раз полностью пройти. Поэтому трудоёмкость такого преобразования есть $O(l)$.

Более того, любая коса из трёх нитей, в результате действия которой левая нить переходит направо или правая налево, также может быть представлена в виде слова в алфавите \mathcal{F} . А это верно для любой косы из трёх нитей. Таким образом, любую косу из трёх нитей можно представить в виде слова в алфавите \mathcal{F} . \square

Замечание 3.3. Если коса оставляет инвариантной центральную нить, а левую и правую нити она либо оставляет инвариантными, либо переводит друг в друга, то такую косу можно представить в виде слова в алфавите \mathcal{F} двумя способами: отслеживая движение левой нити или правой.

Для слов в алфавите \mathcal{F} условимся все буквы $\Delta^{\pm 1}$ перемещать в конец слова. Для этого рассмотрим, как действует внутренний автоморфизм τ (сопряжение косой Гарсайда) на элементах множества \mathcal{F} :

$$u \xleftrightarrow{\tau} d, \quad r \xleftrightarrow{\tau} l, \quad a \xleftrightarrow{\tau} a^{-1}, \quad b \xleftrightarrow{\tau} b^{-1}.$$

Теперь для перемещения букв $\Delta^{\pm 1}$ в конец слова можно использовать следующее равенство:

$$\Delta^{\pm 1}\beta = \tau(\beta)\Delta^{\pm 1}.$$

Предложение 3.4. *При задании кос в виде слов в алфавите \mathcal{F} возникают следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} ul^{-1} &= a, & ub &= r, & dr^{-1} &= a^{-1}, & db^{-1} &= l, \\ rd^{-1} &= a, & rb^{-1} &= u, & lu^{-1} &= a^{-1}, & lb &= d, \\ ad &= r, & al &= u, & br^{-1} &= u^{-1}, & bd^{-1} &= l^{-1}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

позволяющие за время $O(l)$ сократить длину слова до минимальной, где l есть длина входного слова в алфавите \mathcal{F} .

Доказательство. Соотношения (3.1) проверяются прямыми вычислениями. Например:

$$ul^{-1} = \sigma_2\sigma_1 \cdot (\sigma_1\sigma_1)^{-1} = \sigma_2\sigma_1^{-1} = a.$$

Несложно также проверить, что только соотношения (3.1) позволяют сократить длину слова. Скажем, никакое двухбуквенное сочетание, начинающееся с буквы u , кроме ul^{-1} и ub , не сокращается до одной буквы. В самом деле, буква $u = \sigma_2\sigma_1$ может сократиться только с буквами, начинающимися с σ_1^{-1} , т. е. $l^{-1} = \sigma_1^{-1}\sigma_1^{-1}$ и $b = \sigma_1^{-1}\sigma_2$.

Из соотношений (3.1) легко получаются сокращающиеся двухбуквенные сочетания, начинающиеся с букв u^{-1} , d^{-1} , r^{-1} , l^{-1} , a^{-1} и b^{-1} .

Очевидно, для сокращения входного слова достаточно его один раз полностью пройти, перемещая символы $\Delta^{\pm 1}$ в конец слова и применяя соотношения вида $uu^{-1} = 1$, а также соотношения (3.1). Каждое применение соотношения уменьшает длину слова на 1 или 2 буквы. Поэтому трудоёмкость сокращения слова равна $O(l)$. \square

ПРИМЕР. Рассмотрим слово $ulu^{-1}\Delta b$. Переместим букву Δ в конец слова (при этом b изменится на b^{-1}): $ulu^{-1}b^{-1}\Delta$. Полученное слово можно редуцировать ($lu^{-1} = a^{-1}$): $ua^{-1}b^{-1}\Delta$.

Будем говорить, что слово w в алфавите \mathcal{F} , задающее косу β , приведено к *каноническому виду*, если все буквы Δ перемещены в конец слова и слово w имеет наименьшую длину, т. е. к слову нельзя применить соотношения вида $uu^{-1} = 1$ или (3.1), сокращающие его длину.

Слово в алфавите \mathcal{F} будем называть *ud-словом*, если оно состоит из чередующихся букв u и d либо из чередующихся букв u^{-1} и d^{-1} , и, возможно, некоторой степени косы Гарсайда Δ в конце слова.

ПРИМЕР. Слова $dudud$, $udu\Delta$, $d^{-1}u^{-1}\Delta^4$, $u\Delta$, Δ являются *ud-словами*, а слова $dduu$, $dud^{-1}\Delta$, $du\Delta du$ не являются *ud-словами*.

Несложно заметить, что *ud-слова* имеют канонический вид.

Предложение 3.5. *Непериодическая коса $\beta \in B_3$ является приводимой тогда и только тогда, когда существует сопряжённая ей коса, которая в алфавите \mathcal{F} записывается в виде *ud-слова*.*

Доказательство. Пусть коса β приводимая. Переходом к сопряжённой косе всегда можно добиться того, чтобы приводящая окружность была расположена каноническим образом (см. рис. 5).

Такая коса представляется как композиция переплетения первых двух нитей, что записывается как σ_1^k для некоторого целого k , и обматывание третьей нити вокруг первых двух, что записывается в виде $(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)^m$ для некоторого целого m :

$$\beta = \sigma_1^k(\sigma_2\sigma_1^2\sigma_2)^m.$$

При этом здесь $k \neq 2m$, иначе коса β будет периодической.

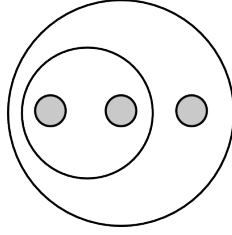


Рис. 5:

Инвариантная нить изначально находится справа. Поэтому в алфавите \mathcal{F} данная коса будет выглядеть так:

$$\beta = (d^{-1}\Delta)^k(ud)^m.$$

Несложно проверить, что после приведения к каноническому виду получится ud -слово:

$$\beta = \underbrace{udud \dots}_{2m-k} \Delta^k, \text{ если } 2m > k, \quad \text{и} \quad \beta = \underbrace{d^{-1}u^{-1}d^{-1}u^{-1} \dots}_{k-2m} \Delta^k, \text{ если } k > 2m.$$

В обратную сторону доказательство почти очевидное. Коса, которая в алфавите \mathcal{F} записывается в виде ud -слова, является приводимой с приводящей окружностью, расположенной каноническим образом. Но тогда и любая ей сопряжённая коса также приводима. \square

Лемма 3.6. Пусть две косы заданы посредством приведённых к каноническому виду слов в алфавите \mathcal{F} :

$$w = x_1x_2 \dots x_p\Delta^k, \quad z = y_1y_2 \dots y_q\Delta^s, \quad x_i, y_j \in \mathcal{F} \setminus \{\Delta\}, \quad k, s \in \mathbb{Z},$$

причём $x_p^{-1} \neq \tau^k(y_1)$. Тогда в процессе приведения слова wz к каноническому виду может произойти всего одно сокращение, а именно, две буквы x_p и $\tau^k(y_1)$ могут сократиться до одной.

Доказательство. В слове wz перенесём все буквы Δ в конец слова

$$wz = x_1x_2 \dots x_p\tau^k(y_1)\tau^k(y_2) \dots \tau^k(y_q)\Delta^{k+s}.$$

Представим это слово в алфавите $\{\sigma_1^{\pm 1}, \sigma_2^{\pm 1}\}$. Так как слова w и z приведены к каноническому виду, то сокращение здесь может произойти только на стыке букв x_p и $\tau^k(y_1)$, в результате чего эти две буквы могут сократиться до одной. Дальнейшие сокращения, очевидно, произойти не могут, что и доказывает утверждение. \square

Предложение 3.7. Непериодическая коса $\beta \in B_3$, заданная в виде приведённого к каноническому виду слова w в алфавите \mathcal{F} , является приводимой тогда и только тогда, когда слово w можно разбить на два подслова $w = w_1w_2$ так, что слово w_2w_1 после приведения к каноническому виду будет id -словом.

Доказательство. Согласно предложению 3.5 приводимую косу β можно представить в виде $\beta = \gamma^{-1}\beta'\gamma$, где коса β' записывается в алфавите \mathcal{F} в виде ud -слова. Следовательно, коса β записывается в алфавите \mathcal{F} в виде слова $z^{-1}wz$.

Не теряя общности, положим, что слова z^{-1} , w и z уже записаны в каноническом виде. В слове $z^{-1}wz$ перенесём все буквы Δ в конец слова. Согласно лемме 3.6 в слове $z^{-1}wz$ сокращения могут произойти только либо в месте соединения подслов z^{-1} и w , либо в месте соединения подслов w и z . При этом можно показать, что сокращения не могут произойти в обоих местах сразу.

В первом случае обозначим через w_1 приведённое к каноническому виду слово $z^{-1}w$, и положим $w_2 = z$. Во втором случае положим $w_1 = z^{-1}$, а через w_2 обозначим приведённое к каноническому виду подслово wz . Несложно показать, что тогда слово w_2w_1 после приведения к каноническому виду будет ud -словом.

В обратную сторону доказательство почти очевидное. Коса, определяемая ud -словом w_2w_1 , получается из косы β , определяемой словом $w = w_1w_2$, путём сопряжения косой, определяемой словом w_1 . С учётом предложения 3.5 всё доказано. \square

Сформулируем ещё одно предложение, необходимое для быстрого распознавания периодических кос.

Предложение 3.8. *Коса $\beta \in B_3$ является целочисленной степенью косы Гарсайда тогда и только тогда, когда соответствующее косе β слово w в алфавите \mathcal{F} после приведения к каноническому виду выглядит как Δ^k для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, причём не имеет значения, движение какой нити (левой или правой) отслеживалось при составлении слова w .*

Доказательство. Предложение легко доказывается прямым вычислением с использованием индукции по числу k . \square

Теперь всё готово для того, чтобы сформулировать алгоритм распознавания типа косы β по классификации Нильсена-Тёрстона.

Шаг 1. Вычислить перестановку s , которую порождает коса β на множестве нитей.

Шаг 2. Если перестановка s транзитивная, то записать косу β^3 в алфавите \mathcal{F} , отслеживая движение правой или левой нити, и привести полученное слово к каноническому виду. Если получилось слово Δ^{2k} для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то коса β является периодической, в противном случае — псевдоаносовской.

Шаг 3. Если перестановка s содержит цикл длины 2, то записать косу β^2 в алфавите \mathcal{F} , отслеживая движение правой или левой нити, и привести полученное слово к каноническому виду. Если получилось слово Δ^{2k} для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то коса β является периодической, в противном случае перейти к шагу 5.

Шаг 4. Если перестановка s тривиальная, то записать косу β в алфавите \mathcal{F} , отслеживая движение правой или левой нити, и привести полученное слово к каноническому виду. Если получилось слово Δ^{2k} для некоторого $k \in \mathbb{Z}$, то коса β является периодической, в противном случае перейти к шагу 5.

Шаг 5. Определить инвариантный элемент перестановки s . Отслеживая движение соответствующей этому элементу нити, выполнить шаги 6 и 7 для косы β . Если перестановка тривиальная, то необходимо выполнить шаги 6 и 7 для каждой из нитей косы β . Если инвариантная нить находится по центру, то необходимо выполнить шаги 6 и 7 для косы $\sigma_1^{-1}\beta\sigma_1$, у которой инвариантная нить будет расположена слева.

Шаг 6. Записать косу в алфавите \mathcal{F} и привести полученное слово к каноническому виду.

Шаг 7. Переносить первые буквы по одной в конец слова, переходя таким образом к сопряжённым косам, и приводить полученное слово к каноническому виду. Если получится ud -слово, то коса β является приводимой. Если же в результате переноса первых букв в конец слова слово прокрутится целиком, а ud -слово так и не получится, то коса является псевдоаносовской.

Замечание 3.9. Если на шаге 5 перестановка является тривиальной, то шаги 6 и 7 надо выполнять для каждой из трёх нитей по очереди. И если хотя бы в одном из случаев на шаге 7 получится ud -слово, то коса β является приводимой, в противном случае — псевдоаносовской.

Теорема 3.10 (основной результат). *В группе кос B_3 существует алгоритм распознавания типа косы по классификации Нильсена-Тёрстона со временем выполнения $O(l)$, где l есть длина входного слова в классических образующих Артина σ_i .*

Доказательство. Алгоритм распознавания типа косы приведён выше. Доказательство его корректности, а также его линейная сложность по длине входного слова следуют из теоремы 3.1, а также предложений 3.2, 3.4, 3.5, 3.7 и 3.8. \square

ПРИМЕР. Рассмотрим косу

$$\beta = (\sigma_1\sigma_2^{-1})^{-1}\sigma_1^3(\sigma_1\sigma_2^{-1}) = \sigma_2\sigma_1^3\sigma_2^{-1}.$$

Эта коса, очевидно, является приводимой, поскольку она получена из приводимой косы σ_1 путём сопряжения косой $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ (последняя, кстати, является псевдоаносовской). Применим к косе β рассмотренный алгоритм.

Коса β порождает перестановку, содержащую цикл (13). Поэтому запишем косу β^2 в алфавите \mathcal{F} , отслеживая движение правой нити:

$${}_n\sigma_2\sigma_1^6\sigma_2^{-1} = u{}_n\sigma_1^5\sigma_2^{-1} = ul{}_n\sigma_1^3\sigma_2^{-1} = ull{}_n\sigma_1\sigma_2^{-1} = ulla^{-1}$$

Как видим, коса β не является периодической.

Коса β меняет местами первую и третью нити и оставляет инвариантной нить, находящуюся по центру. Поэтому выполним сопряжение косой σ_1 :

$$\sigma_1^{-1}\beta\sigma_1 = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^3\sigma_2^{-1}\sigma_1.$$

Инвариантная нить теперь находится слева. Запишем косу β в алфавите \mathcal{F} , отслеживая движение левой нити:

$${}_l\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^3\sigma_2^{-1}\sigma_1 = b{}_n\sigma_1^3\sigma_2^{-1}\sigma_1 = bd^{-1}\Delta{}_n\sigma_1^2\sigma_2^{-1}\sigma_1 =$$

$$\begin{aligned}
&= bd^{-1}\Delta d^{-1}\Delta_{\Pi}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1 = bd^{-1}\Delta d^{-1}\Delta d^{-1}\Delta_{\Pi}\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \\
&= bd^{-1}\Delta d^{-1}\Delta d^{-1}\Delta b^{-1}.
\end{aligned}$$

Приведём слово к каноническому виду:

$$bd^{-1}\Delta d^{-1}\Delta d^{-1}\Delta b^{-1} = bd^{-1}u^{-1}d^{-1}b\Delta^3 = l^{-1}u^{-1}d^{-1}b\Delta^3.$$

Перенесём первую букву в конец слова и приведём к каноническому виду:

$$u^{-1}d^{-1}b\Delta^3l^{-1} = u^{-1}d^{-1}br^{-1}\Delta^3 = u^{-1}d^{-1}u^{-1}\Delta^3.$$

Получилось ud -слово, так что согласно алгоритму коса является приводимой.

Список литературы

- [1] Bestvina M., Handel M. *Train-tracks for surface homeomorphisms*. Topology, 34 (1), 1995, 109–140.
- [2] Bernardete D., Nitecki Z., Gutierrez M. *Braids and the Nielsen-Thurston classification*. J. Knot Theory and its Ramifications, Vol. 4, 1995, 549–618.
- [3] Birman J.S. *Braids, links, and mapping class groups*. Annals of Mathematics Studies, 82, Princeton, N.J., Princeton University Press, 1974.
- [4] Birman J.S., Brendle T.E. *Braids: a survey*. Handbook of knot theory, Amsterdam, Elsevier B. V., 2005, 19–103.
- [5] Calvez M. *Fast Nielsen-Thurston classification of braids*. Preprint arXiv:1112.0165v1.
- [6] Calvez M., Wiest B. *Fast algorithmic Nielsen-Thurston classification of four-strand braids*. to appear in J. Knot Theory Ramifications. Preprint arXiv:1004.0067v3.
- [7] González-Meneses J., Wiest B. *Reducible braids and Garside theory*. to appear in Alg. Geom. Top. Preprint arXiv:1008.0238.
- [8] Lee E.-K., Lee S.-J. *A Garside-theoretic approach to the reducibility problem in braid groups*. J. Algebra, 2, 2008, 783–820.
- [9] Los J. E. *Pseudo-Anosov maps and invariant train tracks in the disc: a finite algorithm*. Proc. London Math. Soc. (3), 66, 1993, 400–430.
- [10] Thurston W. *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*. Bull. Am. Math. Soc., New Ser., 19 (2), 1988, 417–431.
- [11] Кэссон Э., Блейлер С. *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Тёрстону*. М.: ФАЗИС, 1998.