

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

**О производной группе Пикара алгебры,
соответствующей звезде Брауэра**

Александра Звонарёва¹

СпбГУ, Лаборатория им. П.Л.Чебышева
zvozvo@list.ru

Май, 2014

АННОТАЦИЯ

В данной работе доказывается, что в случае $t > 1$ производная группа Пикара $\text{TrPic}(A)$ алгебры, соответствующей звезде Брауэра типа (n, t) , порождена сдвигом, группой Пикара $\text{Pic}(A)$ и эквивалентностями $\{H_i\}_{i=1}^n$, определенными Шапс и Закай-Иллоуз. Они же доказали, что H_i удовлетворяют соотношениям группы кос на аффинной диаграмме \tilde{A}_{n-1} . В случае $t = 1$ доказывается, что $\text{TrPic}(A)$ порождена чуть большим множеством.

Ключевые слова. производная группа Пикара, алгебры, соответствующие деревьям Брауэра, мутации наклоняющих комплексов

¹Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 13-01-00902) и при поддержке Лаборатории им. П.Л.Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В.А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М. Бабич, Н.А. Вавилов, А.М. Вершик, М.А. Всемирнов,
А.И. Генералов, И.А. Ибрагимов, Л.Ю. Колотилина,
Г.В. Кузьмина, П.П. Кулиш, Б.Б. Лурье, Ю.В. Матиясевич,
Н.Ю. Нецевтаев, С.И. Репин, Г.А. Серегин, В.Н. Судаков, О.М. Фоменко.

1 Введение

Производная группа Пикара $\text{TrPic}(A)$ алгебры A – это группа классов изоморфизмов двусторонних наклоняющих комплексов в $D^b(A \otimes A^{op})$, где произведение классов X и Y – это класс $X \otimes_A Y$, или, что то же самое, $\text{TrPic}(A)$ – это группа стандартных автоэквивалентностей $D^b(A)$ по модулю естественных изоморфизмов. Легко видеть, что $\text{TrPic}(A)$ – это инвариант производной категории.

Рукье и Циммерманн начали изучение производной группы Пикара алгебр, соответствующих деревьям Брауэра [16]. В случае кратности 1 они построили морфизм из Артиновой группы кос на $n+1$ нитях (где n – число простых A -модулей) в $\text{TrPic}(A)$, они показали, что это изоморфизм по модулю некоторой центральной подгруппы, когда $n = 2$. В [19] Циммерманн обобщил эти результаты на случай произвольной кратности. Хованов и Зейдель определили действие группы кос на ограниченной производной категории некоторой алгебры, похожей на алгебру, соответствующую дереву Брауэра; из их результатов следует, что действие группы кос на ограниченной производной категории алгебры, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, точно [10].

Шапс и Закай-Иллоуз построили действие группы кос на аффинной диаграмме \tilde{A}_{n-1} на ограниченной производной категории алгебры, соответствующей дереву Брауэра с произвольной кратностью исключительной вершины [17]. Мухтади-Аламсиах показала, что это действие точно в случае кратности 1 [12].

Шапс и Закай-Иллоуз также поставили вопрос, порождают ли образующие группы кос, сдвиг и $\text{Pic}(A)$ производную группу Пикара в случае кратности $\neq 1$, и является ли гомоморфизм из группы кос однозначным. Используя технику мутаций наклоняющих комплексов, разработанную Аихарой и Иямой [3], [2], мы отвечаем на первый вопрос положительно, а именно:

Теорема 1. *Пусть A – алгебра, соответствующая звезде Брауэра типа (n, t) , $t > 1$, и пусть $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} P_i$ – разложение алгебры A на неразложимые неизоморфные проективные модули. Тогда $\text{TrPic}(A)$ порождена сдвигом, $\text{Pic}(A)$ и эквивалентностями H_i , где*

$$H_i(P_j) = \begin{cases} 0 \rightarrow 0 \rightarrow P_j, & j \neq i, i-1 \\ 0 \rightarrow 0 \rightarrow P_{i-1}, & j = i \\ P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{i-1}, & j = i-1. \end{cases}$$

В случае кратности 1 группа $\text{TrPic}(A)$ порождена чуть большим множеством.

Я бы хотела поблагодарить Р. Рукье за то, что он привлек мое внимание к мутациям наклоняющих комплексов, а также М. Антипова,

Ю. Волкова и А. Генералова за многочисленные обсуждения и предложения по улучшению первоначального текста статьи.

2 Предварительные сведения

2.1 Производные эквивалентности

Пусть A и B – алгебры над коммутативным кольцом R , проективные как модули над R . Под A -модулями мы имеем в виду левые A -модули. Обозначим через $D^b(A)$ ограниченную производную категорию A , через $\text{per-}A$ – полную подкатегорию $D^b(A)$, состоящую из совершенных комплексов, то есть объектов изоморфных ограниченным комплексам конечно порожденных проективных модулей; через $K^b(\text{proj-}A)$ – гомотопическую категорию ограниченных комплексов конечно порожденных проективных модулей, через $C(A)$ – категорию комплексов A -модулей. Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие производной эквивалентности A и B .

Теорема. (Рикард, Келлер, [15], [14], [9]) *Следующие условия эквивалентны:*

1. категории $D^b(A)$ и $D^b(B)$ эквивалентны как триангулированные категории;
2. категории $K^b(\text{proj-}A)$ и $K^b(\text{proj-}B)$ эквивалентны как триангулированные категории;
3. существует комплекс $T \in \text{per-}A$, такой что
 - $\text{Hom}(T, T[i]) = 0$ при $i \neq 0$,
 - $\text{per-}A$ порождена T ,
 - $\text{End}_{D^b(A)}(T) \simeq B$;
4. существуют ограниченный комплекс $(A \otimes B^{op})$ -модулей X , ограничения которого на A и на B^{op} проективны, и ограниченный комплекс $(B \otimes A^{op})$ -модулей Y , ограничения которого на B и на A^{op} проективны, такие что $X \otimes_B Y \simeq A$ в $D^b(A \otimes A^{op})$ и $Y \otimes_A X \simeq B$ в $D^b(B \otimes B^{op})$.

Комплекс T из пункта 3 называется наклоняющим комплексом, X и Y из пункта 4 называются двусторонними наклоняющими комплексами, обратными друг другу. Комплекс X как комплекс A -модулей или как комплекс B^{op} -модулей является наклоняющим комплексом. Взаимно обратные эквивалентности между $D^b(A)$ и $D^b(B)$ задаются $X \otimes_B -$ и $Y \otimes_A -$. Такие эквивалентности называются стандартными.

Пусть T – наклоняющий комплекс, $\text{End}_{D^b(A)}(T) \simeq B$. Существует двусторонний наклоняющий комплекс $(A \otimes B^{op})$ -модулей X , ограничение которого на A изоморфно T в $D^b(A)$. Если X' – другой двусторонний наклоняющий комплекс $(A \otimes B^{op})$ -модулей, ограничение которого на A изоморфно T , тогда существует $\sigma \in \text{Aut}(B)$, такой что $X' = X \otimes_B B_\sigma$, где B_σ – это $(B \otimes B^{op})$ -модуль, изоморфный B , но с правым действием, подкрученным на σ [9].

Определение 1. Пусть Γ – дерево с n ребрами и одной отмеченной вершиной, которой приписана кратность $t \in \mathbb{N}$ (эта вершина называется исключительной, t называется кратностью исключительной вершины), и пусть в Γ зафиксирован циклический порядок ребер, инцидентных каждой вершине (в случае, когда Γ лежит на плоскости, будем считать, что ребра упорядочены по часовой стрелке). В этом случае Γ называется деревом Брауэра типа (n, t) .

В случае, когда дерево – это звезда с исключительной вершиной в центре, оно называется звездой Брауэра.

Каждому дереву Брауэра типа (n, t) можно поставить в соответствие алгебру $A(n, t)$. Алгебра $A(n, t)$ – это алгебра путей колчана с соотношениями. По дереву Брауэра Γ построим колчан Брауэра Q_Γ . Вершины Q_Γ – это ребра Γ ; если ребра i и j инцидентны одной вершине в Γ , и ребро j следует за ребром i в соответствии с циклическим порядком ребер, инцидентных их общей вершине, то из вершины i в вершину j в Q_Γ есть стрелка. Колчан Q_Γ обладает следующими свойствами: Q_Γ является объединением ориентированных циклов, соответствующих вершинам Γ ; каждая вершина Q_Γ лежит ровно на двух циклах. Цикл, соответствующий исключительной вершине, называется исключительным. Стрелки Q_Γ можно разбить на два семейства α и β так, что стрелки, принадлежащие пересекающимся циклам, принадлежат разным семействам. Будем обозначать стрелки, принадлежащие семейству α , через α , а стрелки, принадлежащие семейству β , через β соответственно.

Определение 2. Пусть k – алгебраически замкнутое поле. Базисная алгебра Брауэра $A(n, t)$, соответствующая дереву Γ типа (n, t) , – это алгебра kQ_Γ/I , где идеал I порожден соотношениями вида:

1. $\alpha\beta = 0 = \beta\alpha$ для любых стрелок, принадлежащих семействам α и β , соответственно;
2. для любой вершины x , не принадлежащей исключительному циклу, $e_x\alpha^{x_\alpha}e_x = e_x\beta^{x_\beta}e_x$, где x_α , соответственно x_β – длина α , соответственно β -цикла, содержащего x , а e_x – идемпотент, соответствующий x ;

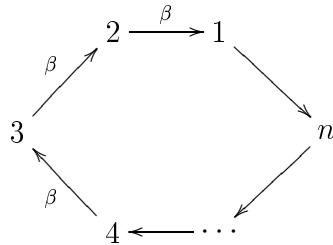
3. для любой вершины x , принадлежащей исключительному α -циклу (соответственно β -циклу), $e_x(\alpha^{x_\alpha})^t e_x = e_x \beta^{x_\beta} e_x$ (соответственно $e_x \alpha^{x_\alpha} e_x = e_x (\beta^{x_\beta})^t e_x$).

Алгебра называется алгеброй Брауэра типа (n, t) , если она Морит-эквивалентна алгебре $A(n, t)$ для некоторого дерева Брауэра Γ типа (n, t) .

Заметим, что идеал I не является допустимым идеалом. Далее для удобства все алгебры предполагаются базисными. Будем также предполагать, что $n > 1$, так как при $n = 1$ алгебра, соответствующая дереву Брауэра, локальна, и по результатам Рукье и Циммерманна [16] производная группа Пикара порождается сдвигом и $\text{Pic}(A)$, на формулировки результатов это ограничение не влияет. Также стоит отметить, что алгебры, соответствующие деревьям Брауэра, симметричны.

Рикард доказал, что две алгебры, соответствующие деревьям Брауэра Γ и Γ' , производно эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы (n, t) и (n', t') совпадают [13], а из результата Габриэля и Ридманн вытекает, что класс алгебр Брауэра замкнут относительно производной эквивалентности [6].

Пусть A – алгебра, соответствующая звезде Брауэра с n ребрами и кратностью исключительной вершины t . Колчан A имеет вид:



Следуя Шапс и Закай-Иллоуз [18], будем называть наклоняющий комплекс дву-ограниченным (two-restricted), если его неразложимые прямые слагаемые являются сдвигами следующих комплексов:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow P_i \longrightarrow 0 \\ 0 \longrightarrow P_i \longrightarrow P_j \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

где изначально P_i сосредоточен в степени 0, модули P_i и P_j – неразложимые проективные A -модули, а морфизм $P_i \rightarrow P_j$ имеет максимальный ранг (как морфизм над k). Дву-ограниченные наклоняющие комплексы соответствуют некоторым дополнительным комбинаторным данным, со-поставленным деревьям Брауэра, которые называются "расстановкой точек" ("pointing"). При этом соответствия дерево, на котором расставляются точки, является деревом Брауэра кольца эндоморфизмов дву-ограниченного наклоняющегося комплекса. Если применить производную

эквивалентность, соответствующую одной расстановке точек, а потом применить эквивалентность обратную к эквивалентности, соответствующей другой расстановке точек на том же дереве, то будет получена автомодель эквивалентность алгебры, соответствующей звезде Брауэра, эта автомодель эквивалентность задается некоторым наклоняющим комплексом; будем называть такие комплексы "сложенными" ("refolded"). Шапс и Закай-Иллоуз изучали подгруппу производной группы Пикара, порожденную сложенными наклоняющими комплексами, и показали, что она порождена наклоняющими комплексами H_i , которые удовлетворяют соотношениям группы кос на аффинной диаграмме A_{n-1} . Будем также обозначать через H_i некоторые стандартные автомодели эквивалентности $D^b(A)$, соответствующие этим комплексам и действующие на неразложимых проективных модулях следующим образом:

$$H_i(P_j) = \begin{cases} 0 \rightarrow 0 \rightarrow P_j, & j \neq i, i-1 \\ 0 \rightarrow 0 \rightarrow P_{i-1}, & j = i \\ P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{i-1}, & j = i-1, \end{cases} \quad (1)$$

где soc – морфизм, образ которого изоморчен цоколю P_{i-1} .

2.2 Мутации

Пусть k – алгебраически замкнутое поле. Пусть \mathcal{T} – k -линейная, Ном-конечная, триангулированная категория Крулля-Шмидта. Морфизм $X \xrightarrow{f} M' \in \mathcal{T}$ называется левым минимальным, если любой морфизм $g : M' \rightarrow M'$ такой, что $gf = f$, является изоморфизмом. Пусть \mathcal{M} – подкатегория \mathcal{T} , X – объект \mathcal{T} , M' – объект \mathcal{M} , морфизм $X \xrightarrow{f} M'$ называется левой аппроксимацией X по отношению к \mathcal{M} , если $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(M', M) \xrightarrow{f^*} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, M)$ сюръективно для любого $M \in \mathcal{M}$. Правый минимальный морфизм и правая \mathcal{M} -аппроксимация определяются двойственно.

$T \in \mathcal{T}$ называется полунаклоняющим объектом (silting), если $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T[i]) = 0$ для любого $i > 0$, и \mathcal{T} порождается $\text{add}(T)$ как триангулированная категория. Будем называть полунаклоняющий объект T базисным, если T изоморчен прямой сумме неразложимых попарно неизоморфных объектов.

Пусть T – базисный полунаклоняющий объект в \mathcal{T} , $T = M \oplus X$, $\mathcal{M} = \text{add}(M)$. Рассмотрим треугольник

$$X \xrightarrow{f} M' \longrightarrow Y \longrightarrow, \quad (2)$$

где f – минимальная левая аппроксимация X по отношению к \mathcal{M} . Заметим, что f единственный с точностью до изоморфизма. Объект $\mu_X^+(T) := M \oplus Y$ называется левой мутацией T по отношению к X . По результатам

Аихары и Иямы [3] объект $\mu_X^+(T)$ снова является базисным полунаклоняющим. Если X неразложим, то мутация называется неприводимой. Правые мутации определяются по двойственности и обозначаются $\mu_X^-(T)$. Заметим, что в обозначениях треугольника (2) имеем $\mu_Y^-(\mu_X^+(T)) = T$.

Пусть T, U – базисные полунаклоняющие объекты в \mathcal{T} . Положим $T \geq U$, если $\text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, U[i]) = 0$ для любого $i > 0$. Отношение \geq задает частичный порядок на множестве классов изоморфизмов базисных полунаклоняющих объектов [3]. Будем говорить, что U связан (связан слева) с T , если U можно получить из T многократными неприводимыми (левыми) мутациями. Триангулированная категория \mathcal{T} называется связной относительно мутаций полунаклоняющих объектов (silting-connected), если все базисные полунаклоняющие объекты в \mathcal{T} связаны друг с другом. \mathcal{T} – сильно связна относительно мутаций полунаклоняющих объектов (strongly silting-connected), если для любых базисных полунаклоняющих объектов T, U таких, что $T \geq U$, U связан слева с T . Известно, что в случае симметрической алгебры любой полунаклоняющий объект в $K^b(\text{proj-}A)$ является наклоняющим комплексом. В этом случае вместо связна относительно мутаций полунаклоняющих объектов будем говорить, что категория связна относительно мутаций наклоняющих комплексов (tilting-connected).

Теорема.(Аихара, [2]) $K^b(\text{proj-}A)$ связна относительно мутаций наклоняющих комплексов, если A – симметрическая алгебра конечного типа представления.

Заметим, что из [2] (Теорема 5.6 и Следствие 3.9) также следует, что в случае симметрической алгебры конечного типа представления $K^b(\text{proj-}A)$ сильно связна относительно мутаций наклоняющих комплексов. Поэтому любой наклоняющий комплекс, сосредоточенный в неположительных степенях, может быть получен из A многократными левыми мутациями.

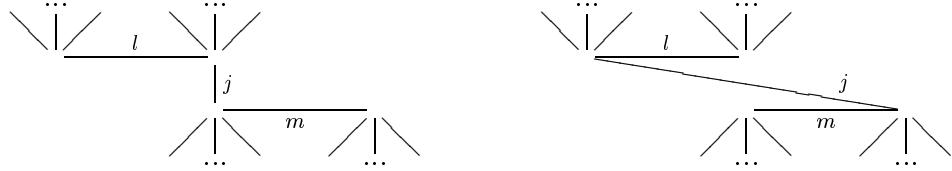
Широко известным примером мутаций наклоняющих комплексов являются мутации графов Брауэра, или, что то же самое, SSB-алгебр. Мы ограничим определение на случай деревьев Брауэра, то есть мы не будем рассматривать петли.

Рассмотрим алгебру A , соответствующую дереву Брауэра, как наклоняющий комплекс над собой. Пусть $A = (\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n P_i) \oplus P_j$ – разложение на неразложимые проективные модули. Рассмотрим левую мутацию

$$\mu_{P_j}^+(A) = \left(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n P_i \right) \oplus (P_j \xrightarrow{f} P_m \oplus P_l)$$

алгебры A по отношению к P_j (соответствующая аппроксимация берется по отношению к $\text{add}(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n P_i)$), где P_m и P_l – проективные модули, соответствующие ребрам в дереве Брауэра, следующим за j в циклическом

порядке ребер, инцидентных одной и той же вершине, а $f = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, где α и β соответствуют стрелкам из j в m и из j в l соответственно. Дерево Брауэра алгебры A представлено слева, а дерево Брауэра кольца эндоморфизмов $\mu_{P_j}^+(A)$ – справа; ребро, соответствующее $P_j \xrightarrow{f} P_m \oplus P_l$, также будем обозначать j .



В случае, когда j инцидентно листу в дереве Брауэра A ,

$$\mu_{P_j}^+(A) = \left(\bigoplus_{i=1, i \neq j}^n P_i \right) \oplus (P_j \xrightarrow{\beta} P_l),$$

и на уровне деревьев Брауэра имеем:



Насколько нам известно, эти движения были впервые рассмотрены Кауэром [8], также они изучались в работах [4], [1], [5], [11]. Мутация $\mu_{P_j}^-(A)$ определяется по двойственности и соответствует движению в обратном направлении. Наклоняющий комплекс вида $\mu_{P_j}^\pm(A)$, где A – произвольная алгебра, соответствующая дереву Брауэра, будем называть элементарным наклоняющим комплексом. Мутации, задействующие лишь одно дополнительное ребро l , будем называть мутациями типа I; мутации, задействующие два дополнительных ребра m и l , будем называть мутациями типа II. Заметим также, что такие мутации задействуют лишь ребра: исключительная вершина при них не меняется.

3 Мутации и производная группа Пикара

Обозначим через $\text{Pic}(A)$ группу Пикара алгебры A , то есть группу классов изоморфизмов обратимых $A \otimes A^{op}$ -модулей, или, что то же самое, группу Морита-автоэквивалентностей A . Группа $\text{Out}(A)$ внешних автоморфизмов A совпадает с $\text{Pic}(A)$ в случае базисной алгебры A и является подгруппой $\text{TrPic}(A)$. Для $\sigma \in \text{Aut}(A)$ существует обратимый $A \otimes A^{op}$ -модуль A_σ , где A_σ – это $(A \otimes A^{op})$ -модуль, изоморфный A как

левый модуль, но с правым действием, подкрученным на σ . Бимодуль A_σ изоморфен $A_{\sigma'}$ тогда и только тогда, когда σ совпадает с σ' по модулю подгруппы внутренних автоморфизмов. Рассмотрим автоэквивалентности $F, F' : D^b(B) \rightarrow D^b(A)$. Предположим, что они заданы двусторонними наклоняющими комплексами X, X' и предположим, что ограничения обоих комплексов на A изоморфны наклоняющему комплексу T ; из [9] следует что, что $X' = X \otimes_B B_\sigma$ для некоторого $\sigma \in \text{Aut}(B)$.

Следующее утверждение очевидно.

Лемма 1. Пусть \mathcal{A}, \mathcal{B} – две триангулированные категории, $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ – триангулированная эквивалентность, \mathcal{M} – подкатегория \mathcal{A} , $X \in \mathcal{A}$ и пусть $X \xrightarrow{f} M'$ ($M' \xrightarrow{f} X$) – минимальная левая (соответственно правая) аппроксимация X по отношению к \mathcal{M} , тогда $F(X) \xrightarrow{F(f)} F(M')$ ($F(M') \xrightarrow{F(f)} F(X)$) – минимальная левая (соответственно правая) аппроксимация $F(X)$ по отношению к $F(\mathcal{M})$.

Пусть A – симметрическая алгебра, T – базисный наклоняющий комплекс. Обозначим через F стандартную эквивалентность такую, что $F(B = \text{End}_{D^b(A)}(T)) \simeq T$, где $F : D^b(B) \rightarrow D^b(A)$. Пусть $T = M \oplus X$, где X – неразложим, а $\mu_X^\pm(T)$ – наклоняющий комплекс, полученный из T правой или левой мутацией. Обозначим через $C = \text{End}_{D^b(A)}(\mu_X^\pm(T))$, а через $G : D^b(C) \rightarrow D^b(A)$ – стандартную эквивалентность такую, что $G(C) \simeq \mu_X^\pm(T)$. Рассмотрим B как наклоняющий комплекс над собой. Слагаемые комплексов T и B находятся под действием F во взаимно однозначном соответствии. Обозначим через P_X неразложимый проективный B -модуль, соответствующий X , наклоняющий комплекс $\mu_{P_X}^\pm(B)$ получен из B мутацией относительно P_X .

Лемма 2. $\text{End}_{D^b(B)}(\mu_{P_X}^\pm(B)) \simeq C$.

Доказательство. Рассмотрим только случай правых мутаций. $C = \text{End}_{D^b(A)}(M \oplus Y)$, $\text{End}_{D^b(B)}(\mu_{P_X}^-(B)) = \text{End}_{D^b(B)}(F^{-1}(M) \oplus Y')$, где $Y' \rightarrow N \rightarrow P_X \rightarrow -$ треугольник, а $N \rightarrow P_X$ – минимальная правая аппроксимация P_X по отношению к $\text{add}(F^{-1}(M))$. F^{-1} – триангулированная эквивалентность, и по предыдущей лемме $F^{-1}(Y) \simeq Y'$, поэтому

$$\text{End}_{D^b(B)}(\mu_{P_X}^-(B)) \simeq \text{End}_{D^b(B)}(F^{-1}(M \oplus Y)),$$

отсюда получаем требуемое утверждение. \square

Обозначим через $H : D^b(C) \rightarrow D^b(B)$ стандартную эквивалентность такую, что $H(C) \simeq \mu_{P_X}^\pm(B)$.

Лемма 3. Существует $\sigma \in \text{Aut}(C)$ такой, что $G \simeq F \circ H \circ (C_\sigma \otimes_C -)$.

Доказательство. По предыдущей лемме имеется следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} D^b(C) & \xrightarrow{H} & D^b(B) \\ & \searrow G & \swarrow F \\ & D^b(A) & \end{array}$$

Достаточно проверить, что действия G и $F \circ H$ на C совпадают. Рассмотрим лишь случай правых мутаций. По предположению $G(C) = \mu_X^-(T)$. Тогда как $H(C) = \mu_{P_X}^-(B) \simeq F^{-1}(M) \oplus Y'$, следовательно, $F(H(C)) \simeq M \oplus F(Y')$, но $F(Y') \simeq Y$, а значит $F(H(C)) \simeq M \oplus Y = \mu_X^-(T)$. \square

Следующая лемма понадобится нам в ходе вычислений, она доказывается прямой проверкой.

Лемма 4. Пусть $V = \cdots \rightarrow X'' \xrightarrow{x} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$, $W = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow X' \xrightarrow{g'} Y \xrightarrow{h'} Z' \xrightarrow{z} Z'' \rightarrow \cdots$ – два объекта $D^b(A)$. Пусть

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & X'' & \xrightarrow{x} & X & \xrightarrow{g} & Y & \xrightarrow{h} & Z \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow w & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow v \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X' & \xrightarrow{g'} & Y & \xrightarrow{h'} & Z' \xrightarrow{z} Z'' \longrightarrow \cdots \end{array}$$

– морфизм $f \in D^b(A)$, тогда $\text{Cone}(f) \simeq \cdots \rightarrow X'' \xrightarrow{x} X \xrightarrow{w} X' \xrightarrow{hg'} Z \xrightarrow{v} Z' \xrightarrow{z} Z'' \rightarrow \cdots$, причем Z' сосредоточен в той же степени, что и в W .

3.1 Стандартная конструкция дерева

В этом пункте мы зафиксируем стандартный способ построения дерева из звезды с помощью мутаций. Эта процедура использует только мутации типа I.

Пусть Γ – дерево Брауэра типа (n, t) . Предположим, что корень Γ выбран в исключительной вершине, и дерево Γ расположено на плоскости так, что все некорневые вершины лежат ниже корневой в соответствии со своим уровнем (чем дальше от корня, тем ниже; вершины одного уровня лежат на горизонтальной прямой). Ребра вокруг вершин упорядочены по часовой стрелке.

Пусть A – алгебра, соответствующая звезде Брауэра. Если соответствующее дерево вложено в плоскость так, как описано выше, будем считать, что его ребра пронумерованы слева направо. $A = \bigoplus_{i=1}^n P_i$, где P_i – неразложимые проективные модули. Мы собираемся проделать некоторую последовательность неприводимых мутаций A , после r -ой мутации мы получим наклоняющий комплекс $T^r = \bigoplus_{i=1}^n T_i^r$, причем слагаемые T^r пронумерованы следующим образом: $T^0 = A$, $T_i^0 = P_i$; каждая мутация

изменяет лишь одно слагаемое наклоняющего комплекса T^{r-1} , например T_j^{r-1} , обозначим через T_j^r слагаемое, которое было изменено r -ой мутацией, $T_i^r := T_i^{r-1}$, $i \neq j$. Это позволяет нам записывать композицию мутаций. Обозначим через μ_j^\pm мутацию, изменяющую T_j^{r-1} . Дерево Брауэра кольца эндоморфизмов T^r может быть получено мутацией дерева T^{r-1} , например, по лемме 2.

Заметим также, что кольцо эндоморфизмов T^r – это алгебра, соответствующая дереву Брауэра, поэтому вычисление минимальной левой аппроксимации T_j^r относительно других слагаемых комплекса T^r не составляет труда. Если ребро j , соответствующее T_j^r , не инцидентно листу, то пусть T_m^r и T_l^r – слагаемые, соответствующие m и l – ребрам, следующим за ребром j в циклических порядках ребер вокруг концов j , и пусть f – морфизм, соответствующий двум стрелкам в $\text{End}_{D^b(A)}(T^r)$, тогда $T_j^r \xrightarrow{f} T_m^r \oplus T_l^r$ – минимальная левая аппроксимация T_j^r относительно других слагаемых T^r . Если j инцидентно листу, то $T_j^r \xrightarrow{f} T_l^r$ – минимальная левая аппроксимация T_j^r , где l – единственное ребро, следующее за j в циклическом порядке, а f – соответствующая стрелка. Будем говорить, что мы мутируем j вдоль ребер m и l или вдоль ребра l соответственно. При этом если компонента f соответствует стрелке, лежащей на неисключительном цикле, то в качестве этой компоненты можно взять любой ненулевой морфизм.

Пусть Γ – дерево Брауэра типа (n, t) , предположим, что $n > 1$. Пронумеруем ребра дерева Γ следующим образом: поставим метку 1 на самом левом ребре, инцидентном корню. Если ребро с меткой 1 не инцидентно листу, поставим 2 на ребре, инцидентном его неисключительному концу, которое предшествует ребру с меткой 1 в циклическом порядке; если ребро с меткой 1 инцидентно листу, поставим 2 на единственном ребре, предшествующем ребру с меткой 1 в циклическом порядке. Предположим, что метка i приписана некоторому ребру, если это ребро не инцидентно листу, поставим метку $i + 1$ на ребре нижнего уровня, которое предшествует ребру с меткой i в циклическом порядке; если ребро с меткой i инцидентно листу, поставим метку $i + 1$ на единственном ребре, предшествующем ребру с меткой i в циклическом порядке; если этому ребру уже приписана метка, найдем ребро l с наибольшей меткой такое, что у его верхнего конца x нашлось инцидентное ребро без метки, поставим метку $i + 1$ на ребре, предшествующем ребру l в циклическом порядке вокруг x . Заметим, что такую же нумерацию можно получить с помощью обхода Грина (Green walk) или обхода дерева в глубину.

Пусть $\phi_\Gamma : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n - 1\}$ – функция, которая ставит в соответствие метке i длину кратчайшего пути от этого ребра до исключительной вершины, или, что то же самое, уровень ребра с меткой i (предполагая, что ребра, инцидентные исключительной вершине, при-

надлежат уровню 0).

Лемма 5. Пусть Γ – дерево Брауэра типа (n, t) , пронумерованное, как описано выше. Пусть $T = (\mu_n^+)^{\phi_\Gamma(n)} \circ (\mu_{n-1}^+)^{\phi_\Gamma(n-1)} \circ \dots \circ (\mu_1^+)^{\phi_\Gamma(1)}(A)$. Тогда Γ – это дерево Брауэра кольца эндомарганизмов T .

Доказательство. Понятно из построения. \square

Вычислим наклоняющий комплекс T из леммы явно. Обозначим через $\psi_\Gamma : \{1, 2, \dots, n\} \setminus \phi_\Gamma^{-1}(0) \rightarrow \{1, \dots, n-1\}$ функцию, которая ставит в соответствие метке i метку ребра высшего уровня, инцидентного ребру i . Мы предполагаем, что в комплексе $0 \rightarrow P_i \rightarrow 0$, соответственно в комплексе $0 \rightarrow P_i \rightarrow P_j \rightarrow 0$, модуль P_i сосредоточен в 0 (мы используем когомологические обозначения).

Лемма 6. Пусть Γ – дерево Брауэра типа (n, t) , пронумерованное, как описано выше. Пусть T – комплекс из леммы 5, тогда T имеет вид $T = \bigoplus_{i=1}^n T_i$, где

$$T_i = \begin{cases} P_i, & \phi_\Gamma(i) = 0, \\ (P_i \xrightarrow{\beta^{i-\psi(i)}} P_{\psi(i)})[\phi_\Gamma(i)], & \phi_\Gamma(i) \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Напомним, что стрелки в алгебре, соответствующей звезде Брауэра, обозначались β . Поскольку

$$T = (\mu_n^+)^{\phi_\Gamma(n)} \circ (\mu_{n-1}^+)^{\phi_\Gamma(n-1)} \circ \dots \circ (\mu_1^+)^{\phi_\Gamma(1)}(A),$$

то сначала мы муттируем слагаемое с меткой 1, потом с меткой 2 и так далее, следовательно, мы можем вычислять T с помощью индукции по номеру метки. $\phi_\Gamma(1) = 0$, следовательно, $T_1 = P_1$. Если ребро с меткой 1 не инцидентно листу, то 2 стоит на ребре, инцидентном его неисключительному концу, которое предшествует ребру с меткой 1 в циклическом порядке; $\phi_\Gamma(2) = 1$ и мы должны применить μ_2^+ к A . Следовательно, $T_2 = P_2 \xrightarrow{\beta} P_1$, и этот комплекс сосредоточен в степенях -1 и 0 , как и требовалось. Если ребро с меткой 1 инцидентно листу, то 2 стоит на ребре, инцидентном исключительной вершине, $\phi_\Gamma(2) = 0$, следовательно, $T_2 = P_2$.

Предположим, что T_i вычислен. Если ребро с меткой $i+1$ инцидентно исключительной вершине, тогда $\phi_\Gamma(i+1) = 0$, и $T_{i+1} = P_{i+1}$.

Предположим, что ребро с меткой $i+1$ приписано некоторому ребру, не инцидентному исключительной вершине. Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_{\phi_\Gamma(i+1)} = \psi(i+1)$ ребра, принадлежащие кратчайшему пути из исключительной вершины к ребру с меткой $i+1$, проиндексированные числами от 1 до $\phi_\Gamma(i+1)$. По предположению

$$T^r = (\mu_i^+)^{\phi_\Gamma(i)} \circ (\mu_{i-1}^+)^{\phi_\Gamma(i-1)} \circ \dots \circ (\mu_1^+)^{\phi_\Gamma(1)}(A) = \bigoplus_{k=1}^i T_k \oplus \bigoplus_{k=i+1}^n P_k.$$

$$T_{x_1} = P_{x_1}, \quad T_{x_k} = (P_{x_k} \xrightarrow{\beta^{x_k - x_{k-1}}} P_{x_{k-1}})[\phi_\Gamma(x_k)].$$

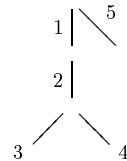
Мы хотим применить $(\mu_{i+1}^+)^{\phi_\Gamma(i+1)}$ к T^r , или, что то же самое, промутуировать P_{i+1} вдоль $T_{x_1}, T_{x_2}, \dots, T_{x_{\phi_\Gamma(i+1)}}$. Понятно, что $T_{i+1}^{r+1} = P_{i+1} \xrightarrow{\beta^{i+1-x_1}} P_{x_1}$. Минимальная левая аппроксимация T_{i+1}^{r+1} относительно других слагаемых T^{r+1} – это морфизм

$$\begin{array}{ccc} P_{i+1} & \xrightarrow{\beta^{i+1-x_1}} & P_{x_1} \\ \downarrow \beta^{i+1-x_2} & & \downarrow \text{Id} \\ P_{x_2} & \xrightarrow{\beta^{x_2-x_1}} & P_{x_1}. \end{array}$$

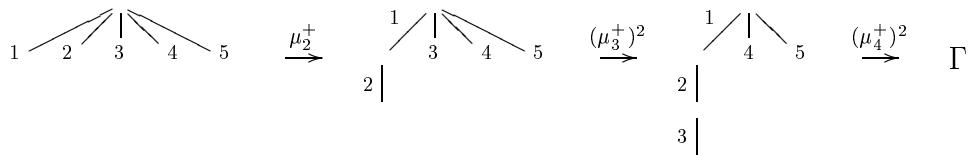
По лемме 4 $T_{i+1}^{r+2} = (P_{i+1} \xrightarrow{\beta^{i+1-x_2}} P_{x_2})[2]$, применив лемму 4 нужное количество раз, получаем желаемый результат. \square

Замечание 1. Полученный комплекс двуограничен. Похожие комплексы уже изучались в работах Шанс и Закай-Иллоуз (см., например, [18]), они соответствуют некоторому специальному выбору расстановки точек.

Пример 1. Пусть Γ – дерево Брауэра



$$T = (\mu_4^+)^2 \circ (\mu_3^+)^2 \circ \mu_2^+(A)$$



Слагаемые T – это:

$$\begin{aligned} & P_1 \\ & P_2 \xrightarrow{\beta} P_1 \\ & P_3 \xrightarrow{\beta} P_2 \\ & P_4 \xrightarrow{\beta^2} P_2 \\ & \quad P_5. \end{aligned}$$

3.2 Основной результат

Пусть A – алгебра, соответствующая звезде Брауэра типа (n, t) . Пусть \mathcal{R} обозначает подгруппу производной группы Пикара $\text{TrPic}(A)$, порожденную сдвигом, $\text{Pic}(A)$ и эквивалентностями H_i (см. формулу (1)).

Замечание 2. (а) Подгруппа \mathcal{R} совпадает с подгруппой, рассматриваемой в [17]. Там же было показано, что на этой подгруппе действует группа кос на диаграмме \tilde{A}_{n-1} , соответствующий гомоморфизм переводит образующие группы кос в H_i . В [12] показано, что это действие точно при $t = 1$.

(б) В $\text{Pic}(A)$ имеется автоморфизм, соответствующий повороту звезды Брауэра, он переводит H_i в H_{i+1} сопряжением, поэтому можно определить \mathcal{R} как подгруппу $\text{TrPic}(A)$, порожденную сдвигом, $\text{Pic}(A)$ и эквивалентностью H_1 .

(с) $H_i(A) \simeq (\mu_i^+)^2(A)$, то есть для комплекса $P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{i-1}$ существует треугольник $P_i \xrightarrow{f'} M' \rightarrow \text{Cone}(f') \rightarrow$ и треугольник

$$\text{Cone}(f') \xrightarrow{f''} M'' \rightarrow \text{Cone}(f'') \rightarrow,$$

где f' и f'' – минимальные левые аппроксимации P_i и $\text{Cone}(f')$ относительно $\text{add}(\bigoplus_{j=1, j \neq i}^n P_j)$, а $\text{Cone}(f'') \simeq (P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{i-1})$.

Теорема 1. Если $t > 1$, то $\text{TrPic}(A) = \mathcal{R}$.

Схема доказательства. Надо проверить, что вложение \mathcal{R} в $\text{TrPic}(A)$ сюръективно. Любой элемент X из $\text{TrPic}(A)$ ограничивается на некоторый наклоняющий комплекс T такой, что $\text{End}_{D^b(A)}(T) \simeq A$; любой другой элемент $\text{TrPic}(A)$, ограничивающийся на тот же наклоняющий комплекс, отличается от X на элемент $\text{Pic}(A)$, то есть на элемент \mathcal{R} . Поэтому достаточно показать, что для любого наклоняющего комплекса T существует элемент из \mathcal{R} , который переводит проективные A -модули в слагаемые T .

Пусть F некоторая автоэквивалентность $D^b(A)$, вычислим $F(H_i(P_j))$. Так как $H_i(P_j) = P_j$, при $j \neq i, i - 1$, то $F(H_i(P_j)) = F(P_j)$, при $j \neq i, i - 1$. $H_i(P_i) = P_{i-1}$, следовательно, $F(H_i(P_i)) = F(P_{i-1})$. Для комплекса $H_i(P_{i-1})$ существуют треугольники $P_i \xrightarrow{f'} M' \rightarrow \text{Cone}(f') \rightarrow$ и $\text{Cone}(f') \xrightarrow{f''} M'' \rightarrow \text{Cone}(f'') \rightarrow$, где f' и f'' – минимальные левые аппроксимации P_i и $\text{Cone}(f')$ относительно $\text{add}(\bigoplus_{j=1, j \neq i}^n P_j)$, следовательно, по лемме 1 для комплекса $F(H_i(P_{i-1}))$ существуют треугольники $F(P_i) \xrightarrow{g'} N' \rightarrow \text{Cone}(g') \rightarrow$ и $\text{Cone}(g') \xrightarrow{g''} N'' \rightarrow \text{Cone}(g'') \rightarrow$, где $g' = F(f')$ и $g'' = F(f'')$ – минимальные левые аппроксимации $F(P_i)$ и $\text{Cone}(g') \simeq F(\text{Cone}(f'))$ относительно $\text{add}(\bigoplus_{j=1, j \neq i}^n F(P_j))$, а $F(H_i(P_{i-1})) \simeq$

$Cone(g'')$. Таким образом, $F(H_i(P_{i-1}))$ – это двойная мутация $F(P_i)$ относительно других слагаемых $F(A)$. Рассмотрим автоэквивалентность

$$H'_i(P_j) = \begin{cases} P_j \rightarrow 0 \rightarrow 0, & j \neq i, i-1 \\ P_i \rightarrow 0 \rightarrow 0, & j = i-1 \\ P_i \xrightarrow{\text{soc}} P_i \xrightarrow{\beta} P_{i-1}, & j = i, \end{cases}$$

Заметим, что $H'_i(A) \simeq (\mu_{i-1}^-)^2(A)$, то есть для $H'_i(P_i)$ существуют два треугольника из определения μ^- . Аналогично предыдущему рассуждению получаем, что применить некоторую автоэквивалентность к $H'_i(A)$ – это то же самое, что вычислить двойную правую мутацию $G(P_{i-1})$ относительно других слагаемых $G(A)$. Легко видеть, что $H'_i(H_i(P_j)) = P_j$ и $H_i(H'_i(P_j)) = P_j$ для любого j . То есть $(H_i)^{-1}$ действует на проективных A -модулях так же как H'_i .

Предположим, что некоторый наклоняющий комплекс T можно получить из A , применяя квадраты мутаций, то есть $T = (\mu_{j_q}^\pm)^2 \circ \dots \circ (\mu_{j_1}^\pm)^2(A)$. Индукцией по q получаем, что существует элемент из \mathcal{R} , который переводит проективные A -модули в слагаемые T . Таким образом, если мы докажем, что любой наклоняющий комплекс T можно получить из A применяя квадраты мутаций и сдвиг, то теорема будет доказана.

Предположим, что T сосредоточен в неположительных степенях. По результатам Аихары [2] $T = \mu_{i_s}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A)$ для некоторых $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$. Обозначим через $T^r := \mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A)$, а через Γ^r – дерево Брауэра его кольца эндоморфизмов. Заметим, что если звезда Брауэра пронумерована стандартным способом, то Γ^r имеет естественную нумерацию ребер, которая может не совпадать со стандартной.

С использованием леммы 5 получаем, что если A – алгебра, соответствующая звезде Брауэра со стандартной нумерацией, то кольцо эндоморфизмов $(\mu_n^+)^{\phi_{\Gamma^r}(n)} \circ (\mu_{n-1}^+)^{\phi_{\Gamma^r}(n-1)} \circ \dots \circ (\mu_1^+)^{\phi_{\Gamma^r}(1)}(A)$ – это алгебра, соответствующая дереву Брауэра Γ^r со стандартной нумерацией. Если нумерация ρ дерева Γ^r не стандартна, то существует некоторая перестановка τ , которую нужно применить к стандартной нумерации Γ^r , чтобы получить ρ . Применив τ к стандартной нумерации звезды Брауэра, получим звезду Брауэра с некоторой нумерацией, которую также будем обозначать ρ . А применив τ к индексам $(\mu_n^+)^{\phi_{\Gamma^r}(n)} \circ (\mu_{n-1}^+)^{\phi_{\Gamma^r}(n-1)} \circ \dots \circ (\mu_1^+)^{\phi_{\Gamma^r}(1)}(A)$, получаем последовательность мутаций, применение которой к звезде Брауэра с нумерацией ρ дает дерево Γ^r с нумерацией ρ . Обозначим эту последовательность мутаций $\tilde{\mu}^r$ для естественной нумерации ρ дерева Γ^r . Через $\tilde{\mu}^{-r} := (\tilde{\mu}^r)^{-1}$ будем обозначать последовательность мутаций $(\mu_{\tau(1)}^-)^{\phi_{\Gamma^r}(\tau(1))} \circ \dots \circ (\mu_{\tau(n-1)}^-)^{\phi_{\Gamma^r}(\tau(n-1))} \circ (\mu_{\tau(n)}^-)^{\phi_{\Gamma^r}(\tau(n))}$. Если A^ρ – алгебра, соответствующая звезде Брауэра с нумерацией ρ , а B^r – алгебра, соответствующая дереву Брауэра Γ^r с естественной нумерацией, то

$$\tilde{\mu}^{-r} \circ \tilde{\mu}^r(A^\rho) = A^\rho \text{ и } \tilde{\mu}^r \circ \tilde{\mu}^{-r}(B^r) = B^r.$$

$$\begin{aligned} T &= \mu_{i_s}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A) = \\ &= \mu_{i_s}^+ \circ \dots \circ \tilde{\mu}^{r+1} \circ \tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \tilde{\mu}^r \circ \tilde{\mu}^{-r} \circ \mu_{i_r}^+ \circ \tilde{\mu}^{r-1} \circ \tilde{\mu}^{-(r-1)} \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \\ &\quad \circ \tilde{\mu}^2 \circ \tilde{\mu}^{-2} \circ \mu_{i_2}^+ \circ \tilde{\mu}^1 \circ \tilde{\mu}^{-1} \circ \mu_{i_1}^+(A). \end{aligned}$$

Получаем, что представимость в виде композиции квадратов мутаций достаточно проверить для комплексов вида: $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \tilde{\mu}^r(A^\rho)$, $\tilde{\mu}^{-1} \circ \mu_{i_1}^+(A)$ и $\mu_{i_s}^+ \circ \tilde{\mu}^{s-1}(A^{\rho'})$ для подходящего ρ' . Кольца энтоморфизмов этих комплексов изоморфны алгебре, соответствующей звезде Брауэра. Ясно, что $\tilde{\mu}^{-1} \circ \mu_{i_1}^+(A) = A$, а $\mu_{i_s}^+ \circ \tilde{\mu}^{r'}(A^{\rho'}) = (\mu_{i_s}^+)^2(A^{\rho'})$, здесь мы используем то, что $t > 1$ и что исключительная вершина выделена кратностью. Остается проверить условие для комплексов $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \tilde{\mu}^r(A^\rho)$ для любого дерева Γ^r и любой мутации $\mu_{i_{r+1}}^+$. Применив τ^{-1} , мы собираемся проделать соответствующую последовательность мутаций со стандартной звездой Брауэра. Этому посвящены следующие пункты. \square

Замечание 3. Вопрос о соотношениях в \mathcal{R} остается открытым.

3.3 Мутации типа I

Заметим, что все последующие вычисления верны и при $t = 1$. Часто мы будем опускать степени, в которых сосредоточены комплексы, но будем принимать их во внимание.

Без потери общности будем предполагать, что Γ^r – дерево со стандартной нумерацией, поэтому $\tilde{\mu}^r(A)$ – это последовательность мутаций, описанная в пункте 3.1. Предположим, что $j := i_{r+1}$ – ребро, инцидентное вершине x степени 1 в Γ^r , то есть μ_j^+ – мутация типа I. Для вычисления $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A)$ рассмотрим следующие три случая: 1) x – не корень, и существует ребро того же уровня, что и ребро j , следующее за ребром j в циклическом порядке; 2) x – не корень, и не существует ребра того же уровня, что ребро j , следующего за ребром j в циклическом порядке; 3) x – корень.

1) x не корень, и существует ребро l того же уровня, что и ребро j , следующее за ребром j в циклическом порядке в Γ^r .

Утверждение: Γ^{r+1} – дерево со стандартной нумерацией, $\mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A)$ изоморфен стандартному наклоняющему комплексу из леммы 6, соответствующему этому дереву, а значит $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq A$.

Доказательство. Понятно, что Γ^{r+1} – дерево со стандартной нумерацией. Предположим, что ребро j не инцидентно корню. Обозначим через q ребро высшего уровня, инцидентное и ребру j , и ребру l в Γ^r . Поскольку $\phi_{\Gamma^r}(j) = \phi_{\Gamma^r}(l)$, а $\psi(j) = \psi(l) = q$ в Γ^r , то минимальная левая аппроксимация T_j^r имеет вид

$$\begin{array}{ccc} P_j & \xrightarrow{\beta^{j-q}} & P_q \\ \downarrow \beta^{j-l} & & \downarrow \text{Id} \\ P_l & \xrightarrow{\beta^{l-q}} & P_q. \end{array}$$

$T_j^{r+1} = (P_j \xrightarrow{\beta^{j-l}} P_l)[\phi_{\Gamma^r}(j) + 1]$ по лемме 4. Отсюда получаем требуемое, так как $\phi_{\Gamma^{r+1}}(j) = \phi_{\Gamma^r}(j) + 1$ и $\psi(j) = l$ в Γ^{r+1} .

Если ребро j инцидентно корню в Γ^r , то ребро l тоже инцидентно корню в Γ^r , и тогда $T_j^{r+1} = (P_j \xrightarrow{\beta^{j-l}} P_l)[1]$. \square

2) x – не корень, и не существует ребра того же уровня, что ребро j , следующего за ребром j в циклическом порядке (в Γ^r). Для упрощения обозначений положим $\phi_\Gamma = \phi_{\Gamma^r}$.

Утверждение: $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq (\mu_j^+)^2(A)$.

Доказательство. $T^r = \bigoplus_{i=1}^n T_i$ – наклоняющий комплекс из леммы 6, ребро с индексом j не инцидентно корню. Обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_{\phi_\Gamma(j)} = \psi(j) = j - 1$ ребра, принадлежащие кратчайшему пути из исключительной вершины к ребру с меткой j , проиндексированные числами от 1 до $\phi_\Gamma(j)$. T_j^{r+1} – это конус морфизма

$$\begin{array}{ccccccc} P_j & \xrightarrow{\beta} & P_{j-1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \text{soc} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & P_{j-1} & \xrightarrow{\beta^a} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}, \end{array}$$

где soc – морфизм, образ которого изоморден цоколю P_{j-1} , а $a = j - 1 - x_{\phi_\Gamma(j)-1}$. Поэтому $T_j^{r+1} \simeq (P_j \xrightarrow{\beta} P_{j-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{j-1} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}})$, где $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$ сосредоточен в той же степени, что и в T^r . Если ребро $j - 1$ инцидентно корню, то $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} = 0$, и $T_j^{r+1} \simeq (P_j \xrightarrow{\beta} P_{j-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{j-1})$. Применим часть последовательности $\tilde{\mu}^{-(r+1)}$, которая содержит мутации с индексами большими j и индекс $j - 1$. Для соответствующего r' получаем, что $T^{r'} \simeq \bigoplus_{i=1}^{j-2} T_i \oplus (P_j \xrightarrow{\beta} P_{j-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{j-1} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}) \oplus P_{j-1} \bigoplus_{i=j+1}^n P_i$. Применим μ_j^- : $T_j^{r'+1}$ – это конус следующего морфизма, сдвинутый на -1 ,

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} & \xrightarrow{\beta^b} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \\ P_j & \xrightarrow{\beta} & P_{j-1} & \xrightarrow{\text{soc}} & P_{j-1} & \xrightarrow{\beta^a} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

где $b = x_{\phi_\Gamma(j)-1} - x_{\phi_\Gamma(j)-2}$. По лемме 4 $T_j^{r'+1} \simeq (P_j \xrightarrow{\beta} P_{j-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{j-1} \xrightarrow{\beta^{a+b}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}})$, где $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$ сосредоточен в той же степени, что и в T^r . Приме-

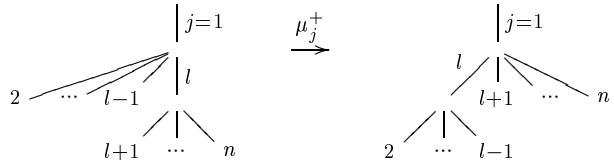
няя лемму 4 нужное количество раз, получаем $T_j \simeq (P_j \xrightarrow{\beta} P_{j-1} \xrightarrow{\text{soc}} P_{j-1})$, где P_j сосредоточен в степени -2 .

Применяя оставшиеся мутации из последовательности $\tilde{\mu}^{-(r+1)}$, очевидно получаем $(\mu_j^+)^2(A)$. \square

3) x – корень, $j = 1$.

Пусть l – ребро, следующее за ребром j в циклическом порядке ребер вокруг некорневого конца ребра j в Γ^r .

$\Gamma = \Gamma^r$ и Γ^{r+1} схематично имеют следующий вид (метки $\{2, \dots, l-1\}$ и $\{l+1, \dots, n\}$ расставлены на произвольных поддеревьях):



Утверждение: $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq ((\mu_1^-)^2 \circ (\mu_2^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{l-1}^-)^2(A))[1]$.

Доказательство. Пусть T^r – комплекс из леммы 6, соответствующий дереву Γ^r . Имеем: $T_1^r = P_1$, а $T_l^r = P_l \xrightarrow{\beta^{l-1}} P_1$. Минимальная левая аппроксимация P_1 – это морфизм

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & P_1 \\ \downarrow & & \downarrow \text{Id} \\ P_l & \xrightarrow{\beta^{l-1}} & P_1. \end{array}$$

Ее конус – это $P_l[1]$.

Применим к комплексу T^{r+1} последовательность мутаций $\tilde{\mu}^{-(r+1)} = \mu_l^- \circ (\mu_2^-)^{\phi_{\Gamma}(2)+1} \circ \dots \circ (\mu_{l-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(l-1)+1} \circ (\mu_{l+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(l+1)-1} \circ \dots \circ (\mu_n^-)^{\phi_{\Gamma}(n)-1}$.

Применение $(\mu_n^-)^{\phi_{\Gamma}(n)-1}$: заметим, что ребро n висячее; если n не инцидентно j , то применив $(\mu_n^-)^{\phi_{\Gamma}(n)-2}$, получим, что n инцидентно j , и ему соответствует комплекс $P_n \xrightarrow{\beta^{n-l}} P_l$. Минимальная правая аппроксимация этого комплекса – это морфизм из $P_l[1]$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{Id}} P_l$, по лемме 4 его конус изоморден $P_n[2]$, следовательно, $T_n \simeq P_n[1]$. Аналогично, применяя $(\mu_{l+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(l+1)-1} \circ \dots \circ (\mu_{n-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(n-1)-1}$ получаем, что $T_{n-1} \simeq P_{n-1}[1], \dots, T_{l+1} \simeq P_{l+1}[1]$.

Применение $(\mu_{l-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(l-1)+1}$: заметим, что ребро $l-1$ висячее; если $l-1$ не инцидентно l , то применив $(\mu_{l-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(l-1)-1}$, получим, что $l-1$ инцидентно l , и ему соответствует комплекс $P_{l-1} \xrightarrow{\beta^{l-2}} P_j$. Минимальная правая аппроксимация этого комплекса – это морфизм (β, Id) из $P_l \xrightarrow{\beta^{l-1}} P_j$. По лемме 4 его конус изоморден $P_l \xrightarrow{\beta} P_{l-1}$. Минимальная правая аппроксимация сдвига этого комплекса – это морфизм из $P_l[1]$,

индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l$, его конус изоморфен $P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta} P_{l-1}$, после сдвига P_{l-1} сосредоточен в 1, следовательно, $T_{l-1} \simeq (P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta} P_{l-1})[1]$.

Аналогично, применяя $(\mu_2^-)^{\phi_{\Gamma}(2)+1} \circ \dots \circ (\mu_{l-2}^-)^{\phi_{\Gamma}(l-2)+1}$ получаем, что

$$T_{l-2} \simeq (P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta^2} P_{l-2})[1],$$

...

$$T_2 \simeq (P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta^{l-2}} P_2)[1].$$

Применим μ_l^- : минимальная правая аппроксимация $P_l \xrightarrow{\beta^{l-j}} P_j$ – это морфизм из $P_l[1]$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l$, его конус изоморфен $P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta^{l-j}} P_j$, после сдвига P_j сосредоточен в 1, следовательно, $T_l \simeq (P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta^{l-1}} P_j)[1] = (P_l \xrightarrow{\text{soc}} P_l \xrightarrow{\beta^{l-1}} P_1)[1]$.

Получаем $T \simeq ((\mu_1^-)^2 \circ (\mu_2^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{l-1}^-)^2(A))[1]$. \square

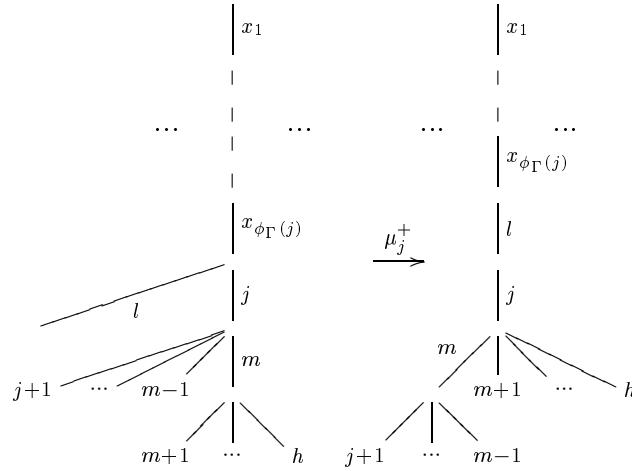
Заметим, что индексы j и l поменялись местами.

3.4 Мутации типа II

Предположим, что оба конца ребра $j := i_{r+1}$ – вершины степени > 1 в Γ^r , то есть μ_j^+ – мутация типа II. Для вычисления $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A)$ рассмотрим следующие три случая: 1) ребро j не инцидентно корню, и существует ребро того же уровня, что и ребро j , следующее за ребром j в циклическом порядке; 2) ребро j инцидентно корню; 3) ребро j не инцидентно корню, и не существует ребра того же уровня, что и ребро j , следующего за ребром j в циклическом порядке.

1) ребро j не инцидентно корню, и существует ребро l того же уровня, что и ребро j , следующее за ребром j в циклическом порядке. Ребро l – не обязательно висячее ребро.

$\Gamma = \Gamma^r$ и Γ^{r+1} схематично имеют следующий вид (метки $\{j+1, \dots, m-1\}$ и $\{m+1, \dots, h\}$ расставлены на произвольных поддеревьях, l – не обязательно висячее ребро):



Как и прежде обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_{\phi_\Gamma(j)} = \psi(j)$ ребра, принадлежащие кратчайшему пути из исключительной вершины к ребру j , проиндексированные числами от 1 до $\phi_\Gamma(j)$.

Утверждение: $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq (\mu_j^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2(A)$.

Доказательство. Пусть T^r – комплекс из леммы 6, соответствующий дереву Γ^r . Так как $\phi_{\Gamma^r}(j) = \phi_{\Gamma^r}(l)$, $\phi_{\Gamma^r}(m) = \phi_{\Gamma^r}(j) + 1$, а $\psi(j) = \psi(l) = x_{\phi_\Gamma(j)}$ в Γ^r , то минимальная левая аппроксимация f слагаемого T_j^r имеет вид:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \xrightarrow{\quad} & P_j & \xrightarrow{\beta^{j-x_{\phi_\Gamma(j)}}} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \\
 \downarrow & & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} \text{Id} \\ \beta^{j-l} \end{smallmatrix} \right) & & \downarrow \text{Id} \\
 P_m & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} \beta^{m-j} \\ 0 \end{smallmatrix} \right)} & P_j \oplus P_l & \xrightarrow{(0, \beta^{l-x_{\phi_\Gamma(j)}})} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}.
 \end{array}$$

Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & P_m & \xrightarrow{-\beta^{m-l}} & P_l & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
Cone(f) = & P_m \oplus P_j & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \text{Id} \\ -\beta^{m-j} \end{pmatrix}} & P_j \oplus P_l & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\beta^{l-x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \end{pmatrix}} & P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} & \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & P_m & \xrightarrow{-\beta^{m-l}} & P_l & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

поэтому $(P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l) \simeq (P_m \xrightarrow{-\beta^{m-l}} P_l)$ – слагаемое $Cone(f)$. Ясно, что $Cone(f)$ гомотопен $P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$, так как это неразложимое слагаемое наклоняющегося комплекса.

Применим к комплексу T^{r+1} последовательность мутаций $\tilde{\mu}^{-(r+1)} = (\mu_2^-)^{\phi_{\Gamma}(2)} \circ \dots \circ (\mu_{j-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(j-1)} \circ (\mu_j^-)^{\phi_{\Gamma}(j)+1} \circ (\mu_m^-)^{\phi_{\Gamma}(m)+1} \circ (\mu_{j+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(j+1)+2} \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(m-1)+2} \circ (\mu_{m+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(m+1)} \circ \dots \circ (\mu_h^-)^{\phi_{\Gamma}(h)} \circ (\mu_{h+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(h+1)} \circ \dots \circ (\mu_n^-)^{\phi_{\Gamma}(n)}$.

Применяя $(\mu_{h+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(h+1)} \circ \dots \circ (\mu_n^-)^{\phi_{\Gamma}(n)}$, очевидно, получаем $T_n \simeq P_n$, ..., $T_{h+1} \simeq P_{h+1}$.

Применение $(\mu_h^-)^{\phi_{\Gamma}(h)}$: заметим, что ребро h висячее; если h не инцидентно j , то применив $(\mu_h^-)^{\phi_{\Gamma}(h)-\phi_{\Gamma}(m)-1}$, получим, что h инцидентно j , и ему соответствует комплекс $P_h \xrightarrow{\beta^{h-m}} P_m$. Минимальная правая аппроксимация этого комплекса – это морфизм из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$, индуцированный $P_m \xrightarrow{\text{Id}} P_m$, по лемме 4 его конус изоморден $P_h \xrightarrow{\beta^{h-l}} P_l$. Минимальная правая аппроксимация сдвига $P_h \xrightarrow{\beta^{h-l}} P_l$ – это морфизм из $P_l \xrightarrow{\beta^{l-x_{\phi_{\Gamma}(j)}}} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}}$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{Id}} P_l$, по лемме 4 его конус изоморден $P_h \xrightarrow{\beta^{h-l}} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}}$, применяя лемму 4 нужное количество раз, получаем, что $T_h \simeq P_h$.

Аналогично, применяя $(\mu_{m+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(m+1)} \circ \dots \circ (\mu_{h-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(h-1)}$ получаем, что $T_{h-1} \simeq P_{h-1}$, ..., $T_{m+1} \simeq P_{m+1}$.

Применение $(\mu_{m-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(m-1)+2}$: заметим, что ребро $m-1$ висячее; если $m-1$ не инцидентно m , то применив $(\mu_{m-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(m-1)-\phi_{\Gamma}(m)}$, получим, что $m-1$ инцидентно m , и ему соответствует комплекс $P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-j}} P_j$. Минимальная правая аппроксимация этого комплекса – это морфизм

(β, Id) из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j$, его конус изоморфен $P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}$. Минимальная правая аппроксимация сдвига $P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}$ – это морфизм $(soc, 0)$ из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$, его конус изоморфен $P_m \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} -\beta^{m-l} \\ soc \end{smallmatrix}\right)} P_l \oplus P_m \xrightarrow{(0, \beta)} P_{m-1}$. Минимальная правая аппроксимация сдвига этого комплекса – это морфизм из $P_l \xrightarrow{\beta^{l-x} \phi_{\Gamma(j)}} P_{x_{\phi_{\Gamma(j)}}}$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{Id}} P_l$, с помощью вычисления, аналогичного лемме 4, получаем, что конус изоморфен $P_m \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} -\beta^{m-x} \phi_{\Gamma(j)} \\ soc \end{smallmatrix}\right)} P_{x_{\phi_{\Gamma(j)}}} \oplus P_m \xrightarrow{(0, \beta)} P_{m-1}$. Применяя оставшиеся степени μ_{m-1}^- , получаем, что

$$T_{m-1} \simeq (P_m \xrightarrow{soc} P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}).$$

Аналогично, применяя $(\mu_{j+1}^-)^{\phi_{\Gamma}(j+1)+2} \circ \dots \circ (\mu_{m-2}^-)^{\phi_{\Gamma}(m-2)+2}$, получаем:

$$T_{m-2} \simeq (P_m \xrightarrow{soc} P_m \xrightarrow{\beta^2} P_{m-2}),$$

...

$$T_{j+1} \simeq (P_m \xrightarrow{soc} P_m \xrightarrow{\beta^{m-j-1}} P_{j+1}).$$

Применение $(\mu_m^-)^{\phi_{\Gamma}(m)+1}$: минимальная правая аппроксимация $P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j$ – это морфизм $(soc, 0)$ из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$, аналогично предыдущему случаю получаем, что

$$T_m \simeq (P_m \xrightarrow{soc} P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j).$$

Применение $(\mu_j^-)^{\phi_{\Gamma}(j)+1}$: минимальная правая аппроксимация $P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$ – это морфизм из $P_l \xrightarrow{\beta^{l-x} \phi_{\Gamma(j)}} P_{x_{\phi_{\Gamma(j)}}}$, индуцированный $P_l \xrightarrow{\text{Id}} P_l$, по лемме 4, получаем, что конус изоморфен $P_m \xrightarrow{\beta^{m-x} \phi_{\Gamma(j)}} P_{x_{\phi_{\Gamma(j)}}}$, применяя лемму 4 нужное количество раз, получаем, что $T_j \simeq P_m$.

Применение $(\mu_2^-)^{\phi_{\Gamma}(2)} \circ \dots \circ (\mu_{j-1}^-)^{\phi_{\Gamma}(j-1)}$ дает $T_{j-1} \simeq P_{j-1}$, ..., $T_2 \simeq P_2$, $T_1 \simeq P_1$.

Получаем, что $T \simeq (\mu_j^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2(A)$. \square

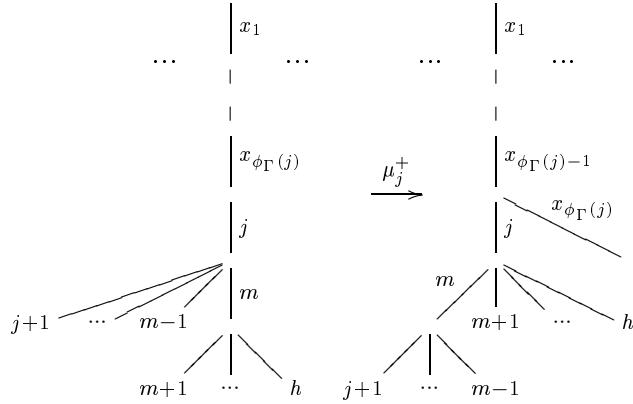
Заметим, что индексы m и j поменялись местами.

2) ребро j инцидентно корню. Этот случай аналогичен случаю (1).

Положим $P_{x_{\phi_{\Gamma(j)}}} = 0$ в (1). Понятно, что $T_j^{r+1} \simeq P_m \xrightarrow{\beta^{m-l}} P_l$. С помощью вычислений аналогичных случаю (1) получаем, что $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq (\mu_j^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2(A)$. \square

3) ребро j не инцидентно корню, и не существует ребра того же уровня, что и ребро j , следующего за ребром j в циклическом порядке.

$\Gamma = \Gamma^r$ и Γ^{r+1} схематично имеют следующий вид (метки $\{j+1, \dots, m-1\}$ и $\{m+1, \dots, h\}$ расставлены на произвольных поддеревьях):



Как и прежде обозначим через $x_1, x_2, \dots, x_{\phi_\Gamma(j)} = \psi(j) = j - 1$ ребра, принадлежащие кратчайшему пути из исключительной вершины к ребру j , проиндексированные числами от 1 до $\phi_\Gamma(j)$.

Утверждение: $\tilde{\mu}^{-(r+1)} \circ \mu_j^+ \circ \tilde{\mu}^r(A) \simeq F_j(A)$, где определение $F_j(A)$ приведено в приложении (циклический порядок ребер, соответствующих слагаемым $F_j(A)$, в звезде Браузера определяется линейным порядком этих слагаемых снизу вверх).

Доказательство. Вычислим T_j^{r+1} . Минимальная левая аппроксимация T_j^r – это

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P_j & \xrightarrow{\beta} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \text{Id} & & \downarrow \text{soc} & & \downarrow \\ P_m & \xrightarrow{\beta^{m-j}} & P_j & \xrightarrow{0} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} & \xrightarrow{\beta^a} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}. \end{array}$$

По лемме 4 имеем: $T_j^{r+1} \simeq (P_m \xrightarrow{\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}})$, где $a = x_{\phi_\Gamma(j)} - x_{\phi_\Gamma(j)-1}$.

Применим к комплексу T^{r+1} последовательность мутаций $\tilde{\mu}^{-(r+1)} = (\mu_2^-)^{\phi_\Gamma(2)} \circ \dots \circ (\mu_{j-2}^-)^{\phi_\Gamma(j-2)} \circ (\mu_j^-)^{\phi_\Gamma(j)-1} \circ (\mu_m^-)^{\phi_\Gamma(m)-1} \circ (\mu_{j+1}^-)^{\phi_\Gamma(j+1)} \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^{\phi_\Gamma(m-1)} \circ (\mu_{m+1}^-)^{\phi_\Gamma(m+1)-2} \circ \dots \circ (\mu_h^-)^{\phi_\Gamma(h)-2} \circ (\mu_{x_{\phi_\Gamma(j)}}^-)^{\phi_\Gamma(j)} \circ (\mu_{h+1}^-)^{\phi_\Gamma(h+1)} \circ \dots \circ (\mu_n^-)^{\phi_\Gamma(n)}$.

Применяя $(\mu_{x_{\phi_\Gamma(j)}}^-)^{\phi_\Gamma(j)} \circ (\mu_{h+1}^-)^{\phi_\Gamma(h+1)} \circ \dots \circ (\mu_n^-)^{\phi_\Gamma(n)}$, очевидно, получаем $T_n \simeq P_n, \dots, T_{h+1} \simeq P_{h+1}, T_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \simeq P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$.

Применение $(\mu_h^-)^{\phi_\Gamma(h)-2}$: заметим, что ребро h висячее; если h не инцидентно j , то применив $(\mu_h^-)^{\phi_\Gamma(h)-\phi_\Gamma(j)-2}$, получим, что h инцидентно j , и ему соответствует комплекс $P_h \xrightarrow{\beta^{h-m}} P_m$. Минимальная правая аппроксимация этого комплекса – это морфизм из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}}$

$P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$, индуцированный $P_m \xrightarrow{\text{Id}} P_m$, по лемме 4 его конус изоморфен $P_h \xrightarrow{\beta^{h-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$. Минимальная правая аппроксимация сдвига этого конуса – это морфизм из $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\beta^b} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$ (где $b = x_{\phi_\Gamma(j)-1} - x_{\phi_\Gamma(j)-2}$), индуцированный $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\text{Id}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$, по лемме 4 конус изоморфен $P_h \xrightarrow{\beta^{h-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^{a+b}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$. Применив лемму 4 нужное количество раз, получаем, что $T_h \simeq (P_h \xrightarrow{\beta^{h-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}})$. Применение $(\mu_{h-1}^-)^{\phi_\Gamma(h-1)-2}, \dots, (\mu_{m+1}^-)^{\phi_\Gamma(m+1)-2}$ полностью аналогично, и мы получаем, что

$$T_{h-1} \simeq (P_{h-1} \xrightarrow{\beta^{h-1-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}),$$

$$\dots \\ T_{m+1} \simeq (P_{m+1} \xrightarrow{\beta^{m+1-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}).$$

Применение $(\mu_{m-1}^-)^{\phi_\Gamma(m-1)}$: если $m-1$ не инцидентно m , то применив $(\mu_{m-1}^-)^{\phi_\Gamma(m-1)-\phi_\Gamma(m)}$, получим, что $m-1$ инцидентно m , и ему соответствует комплекс $P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-j}} P_j$. Минимальная правая аппроксимация $P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-j}} P_j$ – это морфизм (β, Id) из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j$ в $P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-j}} P_j$, по лемме 4 его конус – это $P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}$. Минимальная правая аппроксимация $P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}$ – это морфизм $(\text{soc}, 0, 0, 0)$ из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{soc}}$
 $P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^a} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$ в $P_m \xrightarrow{\beta} P_{m-1}$, его конус – это $P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{m-1} \xrightarrow{(-\beta^a, 0)} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$. Минимальная правая аппроксимация сдвига этого комплекса – это морфизм из $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\beta^b} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$, индуцированный $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\text{Id}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$, по лемме 4 его конус изоморфен $P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{m-1} \xrightarrow{(-\beta^a+b, 0)} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$. Применяя лемму 4 нужное количество раз, получаем, что

$$T_{m-1} \simeq (P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{m-1}).$$

Аналогично,

$$T_{m-2} \simeq (P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ \text{soc} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\text{soc} & 0 \\ 0 & \beta^2 \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{m-2}),$$

$$T_{j+1} \simeq (P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ soc \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -soc & 0 \\ 0 & \beta^{m-j-1} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{j+1}).$$

Применение $(\mu_m^-)^{\phi_\Gamma(m)-1}$: минимальная правая аппроксимация $P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}}$
 P_j – это морфизм $(soc, 0, 0, 0)$ из $P_m \xrightarrow{\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta^a}$
 $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$ в $P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j$, аналогично предыдущему случаю получаем, что

$$T_m \simeq (P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ soc \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\begin{pmatrix} -soc & 0 \\ 0 & \beta^{m-j} \end{pmatrix}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_j).$$

Применение $(\mu_j^-)^{\phi_\Gamma(j)-1}$: минимальная правая аппроксимация

$$P_m \xrightarrow{\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\beta} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$$

– это морфизм из $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\beta^b} P_{x_{\phi_\Gamma(j)-2}}$, индуцированный $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}} \xrightarrow{\text{Id}}$
 $P_{x_{\phi_\Gamma(j)-1}}$, и, применяя лемму 4 нужное количество раз получаем, что
 $T_j \simeq (P_m \xrightarrow{\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}).$

Применение $(\mu_2^-)^{\phi_\Gamma(2)} \circ \dots \circ (\mu_{j-2}^-)^{\phi_\Gamma(j-2)}$ очевидно дает $T_{j-2} \simeq P_{j-2}, \dots,$
 $T_2 \simeq P_2, T_1 \simeq P_1$. \square

Утверждение: $F_j(A) = (\mu_h^+)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m+1}^+)^2 \circ (\mu_j^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ$
 $(\mu_{m-1}^-)^2 \circ (\mu_m^+)^2 \circ (\mu_{m-1}^+)^2 \circ \dots \circ (\mu_j^+)^2(A)$.

Доказательство. Применим к $F_j(A)$ обратную последовательность
 мутаций, если в результате мы получим A , то утверждение доказано.
 Вычислим двойную мутацию T_h вдоль $T_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$. Минимальная правая ап-
 проксимация T_h – это морфизм из $T_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$ в T_h , индуцированный $P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \xrightarrow{\text{Id}}$
 $P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$, по лемме 4 его конус изоморфен $P_h \xrightarrow{\beta^{h-x_{\phi_\Gamma(j)}}} P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$; после приме-
 нения сдвига компонента $P_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$ сосредоточена в той же степени, что и
 в $T_{x_{\phi_\Gamma(j)}}$, применяя лемму 4 еще раз, получаем $[(\mu_h^-)^2(F_j(A))]_h \simeq P_h$.
 Аналогично,

$$[(\mu_{h-1}^-)^2 \circ (\mu_h^-)^2(F_j(A))]_{h-1} \simeq P_{h-1}$$

...

$$[(\mu_{m+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{h-1}^-)^2 \circ (\mu_h^-)^2(F_j(A))]_{m+1} \simeq P_{m+1}.$$

Обозначим комплекс $(\mu_{m+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{h-1}^-)^2 \circ (\mu_h^-)^2(F_j(A))$ через T^r .

Напомним, что гомотопическая категория может быть определена
 как стабильная категория некоторой Фробениусовой категории, а именно

категории комплексов, по отношению к классу точных последовательностей, расщепляющихся в каждой степени. Поэтому треугольники в гомотопической категории соответствуют точным последовательностям в категории комплексов, расщепляющимся в каждой степени [7].

Вычислим двойную мутацию T_m вдоль T_j . Рассмотрим следующую точную последовательность в категории комплексов, расщепляющуюся в каждой степени:

$$\begin{array}{ccccc}
 X = & 0 \xrightarrow{\quad} P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j & & & \\
 \downarrow g & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \text{Id} \end{smallmatrix} \right) & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -soc \end{smallmatrix} \right) & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ \text{Id} \end{smallmatrix} \right) & \\
 T_m = & P_m \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} -\beta^{m-x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \\ soc \end{smallmatrix} \right)} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \oplus P_m \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} -soc & 0 \\ 0 & \beta^{m-j} \end{smallmatrix} \right)} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \oplus P_j & & & \\
 \downarrow f & \downarrow \text{Id} & \downarrow (\text{Id}, 0) & \downarrow (\text{Id}, 0) & \\
 T_j \simeq & P_m \xrightarrow{-\beta^{m-x_{\phi_{\Gamma}(j)}}} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \xrightarrow{-soc} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} & & &
 \end{array}$$

где f очевидно является минимальной левой аппроксимацией T_m по отношению к другим слагаемым T^r . Поэтому, $\text{Cone}(f) \simeq (P_m \xrightarrow{\beta^{m-j}} P_j)$ в соответствующей степени. Минимальная левая аппроксимация $\text{Cone}(f)$ по отношению к другим слагаемым T^{r+1} – это морфизм в $T_j = P_m \xrightarrow{\beta^{m-x_{\phi_{\Gamma}(j)}}} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}}$, индуцированный $(\text{Id}, \beta^{j-x_{\phi_{\Gamma}(j)}})$, и по лемме 4 его конус изоморден $[(\mu_m^+)^2(T^r)]_m \simeq P_j \xrightarrow{\beta^{j-x_{\phi_{\Gamma}(j)}}} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}}$.

Аналогично,

$$[(\mu_{j+1}^+)^2 \circ (\mu_m^+)^2(T^r)]_{j+1} \simeq P_{j+1} \xrightarrow{\beta^{j+1-x_{\phi_{\Gamma}(j)}}} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}}$$

...

$$[(\mu_{m-1}^+)^2 \circ \dots \circ (\mu_{j+1}^+)^2 \circ (\mu_m^+)^2(T^r)]_{m-1} \simeq P_{m-1} \xrightarrow{\beta^{m-1-x_{\phi_{\Gamma}(j)}}} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}} \xrightarrow{soc} P_{x_{\phi_{\Gamma}(j)}}.$$

Поэтому

$$(\mu_{m-1}^+)^2 \circ \dots \circ (\mu_{j+1}^+)^2 \circ (\mu_m^+)^2 \circ (\mu_{m+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{h-1}^-)^2 \circ (\mu_h^-)^2(F_j(A)) \simeq G_j(A),$$

где определение $G_j(A)$ приведено в приложении (циклический порядок ребер, соответствующих слагаемым $G_j(A)$, в звезде Брауэра определяется линейным порядком этих слагаемых снизу вверх).

Очевидно, применяя $(\mu_j^-)^2$ к G_j , получаем $[(\mu_j^-)^2(G_j)]_j \simeq P_m$.

Аналогично,

$$[(\mu_{m-1}^-)^2 \circ (\mu_j^-)^2(G_j)]_{m-1} \simeq P_{m-1}$$

$$\begin{aligned} &[(\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2 \circ (\mu_j^-)^2(G_j)]_{j+1} \simeq P_{j+1} \\ &[(\mu_m^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2 \circ (\mu_j^-)^2(G_j)]_m \simeq P_j. \end{aligned}$$

Поэтому $(\mu_m^-)^2 \circ (\mu_{j+1}^-)^2 \circ \dots \circ (\mu_{m-1}^-)^2 \circ (\mu_j^-)^2(G_j) \simeq A$.

Заметим, что в итоговой копии A циклический порядок проективных модулей стандартный, а нумерация – нет: метки j и t поменялись местами, отсюда получаем требуемое утверждение. \square

На этом заканчивается доказательство теоремы 1.

3.5 Случай $t = 1$

Пусть A – алгебра, соответствующая звезде Брауэра типа $(n, 1)$. Рассмотрим подгруппу $\tilde{\mathcal{R}}$ производной группы Пикара алгебры A , порожденную сдвигом, $\text{Pic}(A)$, эквивалентностями H_i , и эквивалентностями Q_i , где Q_i – некоторые стандартные автоэквивалентности, действующие на проективных модулях следующим образом:

$$Q_i(P_j) = \begin{cases} 0 \rightarrow P_i \rightarrow 0, & j = i \\ 0 \rightarrow P_i \xrightarrow{\beta^{i-j}} P_j, & j \neq i. \end{cases}$$

Замечание 4. Группа, порожденная Q_i , рассматривалась Мухтади-Аламсиах в [12]. На ней действует группа кос, которой соответствует группа Коксетера, заданная полным графом на n вершинах, это действие не точно.

Замечание 5. Понятно, что $Q_i(A) \simeq \mu_{i+1}^- \circ \mu_{i+2}^- \circ \dots \circ \mu_{i-2}^- \circ \mu_{i-1}^-(A)$, эта серия мутаций меняет центральную вершину звезды Брауэра на внешний конец ребра с меткой i . Так же понятно, что Q_i можно получить из Q_{i+1} сопряжением с помощью автоморфизма, соответствующего повороту звезды Брауэра. Заметим также, что Q_i^2 не меняет центральную вершину звезды Брауэра, поэтому $Q_i^2 \in \mathcal{R}$.

Теорема 2. Пусть $t = 1$, тогда $\text{TrPic}(A) = \tilde{\mathcal{R}}$.

Доказательство. Так как $Q_i(A) \simeq \mu_{i+1}^- \circ \mu_{i+2}^- \circ \dots \circ \mu_{i-2}^- \circ \mu_{i-1}^-(A)$, слагаемые $Q_i(A)$ могут быть вычислены как конусы минимальных аппроксимаций проективных модулей. Так же как в случае H_i легко видеть, что для вычисления $F(Q_i(A))$ для некоторой автоэквивалентности F достаточно применить последовательность мутаций $\mu_{i+1}^- \circ \mu_{i+2}^- \circ \dots \circ \mu_{i-2}^- \circ \mu_{i-1}^-$ к $F(A)$.

Как и раньше, достаточно показать, что для любого наклоняющегося комплекса T такого, что $\text{End}_{D^b}(T) \simeq A$, существует элемент из $\tilde{\mathcal{R}}$, переводящий проективные A -модули в слагаемые T . Предположим, что T

сосредоточен в неположительных степенях. По результатам Аихары [2] $T = \mu_{i_s}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A)$ для некоторых $\{i_1, i_2, \dots, i_s\}$. Если последовательность мутаций $\mu_{i_s}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_{r+1}}^+ \circ \mu_{i_r}^+ \circ \mu_{i_{r-1}}^+ \circ \dots \circ \mu_{i_2}^+ \circ \mu_{i_1}^+(A)$ не изменяет центральную вершину звезды Брауэра, то, пользуясь вычислениями из предыдущих пунктов, получаем, что стандартная эквивалентность F такая, что $F(A) \simeq T$, принадлежит \mathcal{R} , а значит и $\tilde{\mathcal{R}}$. Если последовательность мутаций изменяет центральную вершину звезды Брауэра на внешний конец ребра с меткой i , тогда, применив $\mu_{i+1}^- \circ \mu_{i+2}^- \circ \dots \circ \mu_{i-2}^- \circ \mu_{i-1}^-$, получаем наклоняющий комплекс $T' \in \mathcal{R}$. Имеем $T' \simeq F \circ Q_i(A)$, поэтому F принадлежит $\tilde{\mathcal{R}}$. \square

Замечание 6. Как и в случае $t > 1$, вопрос о соотношениях в $\tilde{\mathcal{R}}$ остается открытым.

Замечание 7. По всей видимости, действие производной группы Пикара на ребрах звезды Брауэра не может быть определено корректно, так как во многих примерах вычислений мы находили две последовательности мутаций, которые дают один и тот же наклоняющий комплекс, но по-разному переставляют ребра звезды Брауэра.

4 Приложение

$$F_j = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{j-2} \\ T_j \\ T_m \\ T_{j+1} \\ \vdots \\ T_{m-1} \\ T_{m+1} \\ \vdots \\ T_h \\ T_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ T_{h+1} \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{j-2} \\ P_m & \xrightarrow{\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}}} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} & \xrightarrow{soc} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ P_m & \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} -\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ soc \end{array} \right)} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m & \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} -soc & 0 \\ 0 & \beta^{m-j} \end{array} \right)} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_j \\ P_m & \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} -\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ soc \end{array} \right)} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m & \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} -soc & 0 \\ 0 & \beta^{m-j-1} \end{array} \right)} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{j+1} \\ & & & & \vdots \\ P_m & \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} -\beta^{m-x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ soc \end{array} \right)} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_m & \xrightarrow{\left(\begin{array}{cc} -soc & 0 \\ 0 & \beta \end{array} \right)} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \oplus P_{m-1} \\ P_{m+1} & \xrightarrow{\beta^{m+1-x_{\phi_\Gamma(j)}}} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} & \xrightarrow{soc} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ P_h & \xrightarrow{\beta^{h-x_{\phi_\Gamma(j)}}} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} & \xrightarrow{soc} & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ P_h & & & & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ & & & & P_{x_{\phi_\Gamma(j)}} \\ & & & & P_{h+1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & P_n \end{pmatrix}$$

$$G_j = \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_{j-2} \\ T_m \\ T_{j+1} \\ \vdots \\ T_{m-1} \\ T_j \\ T_{x\phi_\Gamma(j)} \\ T_{m+1} \\ \vdots \\ T_h \\ T_{h+1} \\ \vdots \\ T_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{j-2} \\ P_j & \xrightarrow{\beta^{j-x}\phi_\Gamma(j)} & P_{x\phi_\Gamma(j)} & \xrightarrow{soc} & P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ P_{j+1} & \xrightarrow{\beta^{j+1-x}\phi_\Gamma(j)} & P_{x\phi_\Gamma(j)} & \xrightarrow{soc} & P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ & & & \vdots & \\ P_{m-1} & \xrightarrow{\beta^{m-1-x}\phi_\Gamma(j)} & P_{x\phi_\Gamma(j)} & \xrightarrow{soc} & P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ P_m & \xrightarrow{\beta^{m-x}\phi_\Gamma(j)} & P_{x\phi_\Gamma(j)} & \xrightarrow{soc} & P_{x\phi_\Gamma(j)} \\ & & & P_{x\phi_\Gamma(j)} & P_{m+1} \\ & & & \vdots & \\ & & & P_h & P_{h+1} \\ & & & \vdots & \\ & & & P_n & \end{pmatrix}$$

References

- [1] Aihara, T. (2010). Mutating Brauer trees. arXiv preprint arXiv:1009.3210.
- [2] Aihara, T. (2013). Tilting-connected symmetric algebras. Algebras and Representation Theory, 16(3), 873–894.
- [3] Aihara, T., Iyama, O. (2012). Silting mutation in triangulated categories. J. of the London Math. Soc., 85(3), 633–668.
- [4] Антипов, М. А. (2007). Производная эквивалентность симметрических специальных бирядных алгебр. Записки научных семинаров ПОМИ, 343, 5-32.
- [5] Dugas, A. (2011). Tilting mutation of weakly symmetric algebras and stable equivalence. Algebras and Representation Theory, 1–22.
- [6] Gabriel, P., Riedmann, C. (1979). Group representations without groups. Comment. Math. Helvetici, 54(1), 240–287.
- [7] Happel, D. (1988). Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras (Vol. 119). Cambridge University Press.
- [8] Kauer, M. (1998). Derived equivalence of graph algebras. Contemporary Mathematics, 229, 201–214.

- [9] Keller, B. (1993). A remark on tilting theory and DG algebras. *Manuscripta mathematica*, 79(1), 247–252.
- [10] Khovanov, M., Seidel, P. (2002). Quivers, Floer cohomology, and braid group actions. *J. Amer. Math. Soc.*, 15(1), 203–271.
- [11] Marsh, R. J., Schroll, S. (2013). The geometry of Brauer graph algebras and cluster mutations. arXiv preprint arXiv:1309.4239.
- [12] Muchtadi-Alamsyah, I. (2008). Braid Action on Derived Category Nakayama Algebras. *Commun. Algebra*, 36(7), 2544–2569.
- [13] Rickard, J. (1989). Derived categories and stable equivalence. *J. of pure and applied Algebra*, 61(3), 303–317.
- [14] Rickard, J. (1991). Derived equivalences as derived functors. *J. London Math. Soc.(2)*, 43(1), 37–48.
- [15] Rickard, J. (1989). Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc.(2)*, 39(3), 436–456.
- [16] Rouquier, R., Zimmermann, A. (2003). Picard groups for derived module categories. *Proc. London Math. Soc.*, 87(01), 197–225.
- [17] Schaps, M., Zakay-Illouz, E. (2002). Braid group action on the refolded tilting complex of the Brauer star algebra. *Proceedings ICRA IX* (2), 434–449.
- [18] Schaps, M., Zakay-Illouz, E. (2001). Pointed brauer trees. *J. Algebra*, 246(2), 647–672.
- [19] Zimmermann, A. (2001). Self-equivalences of the derived category of Brauer tree algebras with exceptional vertex. *Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius*, 9(1), 139–148.