

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

СОХРАНЕНИЕ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ
ИНВАРИАНТНОСТИ ПРЕДПУЧКОВ С
Witt-ТРАНСФЕРАМИ ПРИ ПУЧКОВАНИИ В
ТОПОЛОГИИ НИСНЕВИЧА.

А.Э. Дружинин¹

Санкт-Петербургский Государственный Университет,
математико-механический факультет,
С.-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., 28, 198504
andrei.druzh@gmail.com

Май 2014.

АННОТАЦИЯ.

В статье рассматриваются предпучки абелевых групп с *Witt*-трансферами. Такие трансферы являются некоторым вариантом ориентированных трансферов, а предпучки с этими трансферами определяются как функторы из категории *Wor*, которая является некоторым расширением категории гладких аффинных схем. В данной статье доказан изоморфизм этального вырезания в размерности 1 для гомотопически инвариантных предпучков с *Witt*-трансферами. Из этого изоморфизма вместе с изоморфизмом вырезания по Зарисскому на аффинной прямой выведено, что пучок в топологии Нисневича ассоциированный с гомотопически инвариантным предпучком с *Witt*-трансферами гомотопически инвариантен. Доказательство изоморфизма вырезания осуществляется посредством построения специальных морфизмов в категории *Wor*, действующих в сторону противоположную заданным морфизмам схем.

Ключевые слова. предпучок с трансферами, гомотопическая инвариантность, изоморфизм вырезания, резания.

¹Поддержан грантом РФФИ 14-01-31095.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А.
Стеклова РАН.

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич , Н.А.Вавилов , А.М.Вершик , М.А.Всемирнов,
А.И.Генералов , И.А.Ибрагимов, Л.Ю.Колотилина, Г.В.Кузьмина,
П.П.Кулиш , Б.Б.Лурье , Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев,
С.И.Репин , Г.А.Серегин , В.Н.Судаков , О.М.Фоменко

1. ВВЕДЕНИЕ.

В развитие результатов В.А. Воеводского по построению категории мотивов DM^- [1] И.А. Паниным была поставлена задача построения категории $Witt$ -мотивов. Необходимым этапом решения этой задачи является доказательство гомотопической инвариантности пучка, ассоциированного в топологии Нисневича с гомотопически инвариантным предпучком, обладающим $Witt$ -трансферами.

В параграфе 2 приведено определение предпучков с $Witt$ -трансферами на категории гладких аффинных многообразий над некоторым полем как функторов из некоторой категории Wor , в которую вкладывается категория гладких аффинных многообразий.

В параграфе 3 доказывается изоморфизм этального вырезания в размерности 1 для гомотопически инвариантного предпучка с $Witt$ -трансферами, т.е. изоморфизма

$$\pi^*: \frac{\mathcal{F}(U - z)}{\mathcal{F}(U)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{F}(U' - z')}{\mathcal{F}(U')},$$

где $\pi: U \rightarrow U'$ — этальный морфизм гладких локальных одномерных схем, задающий изоморфизм на замкнутых $\pi: z' \simeq z$. Доказательство осуществляется путём построения специальных морфизмов в категории Wor , являющихся в некотором смысле обратными к π .

В параграфе 4 из изоморфизмов вырезания выводится сюръективность $\mathcal{F}_{Zar}|_{\mathbb{A}^1} \rightarrow \mathcal{F}_{Nis}|_{\mathbb{A}^1}$ канонического отображения из сечений ассоциированного пучка в топологии Зарисского в сечения ассоциированного пучка в топологии Нисневича при ограничении на \mathbb{A}^1 , что в сочетании с сюръективностью $\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1} \rightarrow \mathcal{F}_{Zar}|_{\mathbb{A}^1}$ канонического ображения дает сюръективность

$$\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1} \rightarrow \mathcal{F}_{Nis}|_{\mathbb{A}^1}.$$

Из чего следует основной результат о сохранении гомотопической инвариантности, т.е. изоморфизмы

$$\mathcal{F}_{Nis}(X) \simeq \mathcal{F}_{Nis}(\mathbb{A}^1 \times X)$$

для всех X .

2. ПРЕДПУЧКИ С $Witt$ -ТРАНСФЕРАМИ.

Пусть Sm_k — категория аффинных гладких многообразий над полем k .

Определение 1 ($Proj(p)$). Для морфизма гладких аффинных схем $p: S \rightarrow U$ определим категорию $Proj(p)$ — как подкатегорию в категории $k[S]$ -модулей, состоящую из модулей, являющихся конечно порождёнными проективными над $k[U]$, и снабдим $Proj(p)$ функтором двойственности $D_p: Proj(p) \rightarrow Proj(p)$

$$D_p(M) = Hom_{k[U]}(M, k[U]).$$

Замечание 1. Для двух морфизмов $S' \xrightarrow{f} S \xrightarrow{p} U$ определён согласованный с двойственностью функтор ограничения скаляров (или прямого образа) $f_*: Proj(f \circ p) \rightarrow Proj(p)$.

Для двух морфизмов $p: S \rightarrow U$ и $u: U' \rightarrow U$ определён согласованный с двойственностью функтор замены базы (или обратного образа) $u^*: Proj(p) \rightarrow Proj(p')$, где $p': S \times_U U' \rightarrow U'$ — канонический морфизм.

Приведём определения аддитивной категории Wor_k и предпучков с $Witt$ -трансферами.

Определение 2 (Wor_k).

- $Ob Wor_k = Ob Sm$
- $Wor_k(X, Y) = W(Proj(pr))$, где pr — проекция $Y \times X$ на X , а W — группа Витта точной категории с двойственностью (определение 27 из [2]).
- композиция морфизмов $\Phi \in Wor_k(X, Y)$ и $\Psi \in Wor_k(Y, Z)$ определяется как тензорное произведение над $k[Y]$ соответствующих квадратичных пространств;
- тождественный морфизм определяется диагональю, т.е. модулем ${}_{k[X]}k[X]_{k[X]}$ и каноническим изоморфизмом $k[X] \simeq Hom_{k[X]}(k[X], k[X])$.

Определение 3 (Предпучок с *Witt*-трансферами). Предпучком абелевых групп с *Witt*-трансферами называется функтор $F: Wor_k \rightarrow Ab$.

В дальнейшем будут использоваться следующие факты и дополнительные определения.

Замечание 2.

1. Определён функтор вложения $Sm_k \rightarrow Wor_k$, переводящий регулярное отображение $f: X \rightarrow Y$ в морфизм, определяемый пучком ${}_{k[X]}k[X]_{k[Y]}$ и каноническим изоморфизмом $k[X]_{k[Y]} \simeq Hom_{k[X]}(k[X]_{k[Y]}, (k[X]))$.
2. В категорию Wor_k можно добавить существенно гладкие схемы как формальные пределы.
3. Для $K = k(X)$ — поля частных произвольного гладкого аффинного многообразия X , определено вложение $Wor_K \rightarrow Wor_k$.
4. Категория Wor_k может быть определена на пары (X_1, X_2) , где X_2 — открытое подмножество X_1 , определив морфизмы между парами $i_X: X_2 \hookrightarrow X_1$, $i_Y: Y_2 \hookrightarrow Y_1$:

$$\begin{aligned} Wor_k((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) &= \\ &= \text{coker}(Wor_k(X_1, Y_2) \xrightarrow{(- \circ i_X, i_Y \circ -)} Wor_k^{\rightarrow\rightarrow}(X_2 \rightarrow X_1, Y_2 \rightarrow Y_1)), \end{aligned}$$

где $Wor_k^{\rightarrow\rightarrow}$ — категория стрелок. Обычная категория Wor_k вкладывается в категорию пар так что многообразию X сопоставляется пара (X, \emptyset) .

5. Локализовав Wor_k по проекциям $\mathbb{A}^1 \times X \rightarrow X$, для всех X , можно определить $\overline{Wor_k}$. Тогда для двух схем X и Y $\overline{Wor_k}(X, Y) = \text{coker}(Wor_k(\mathbb{A}^1 \times X, Y) \xrightarrow{(- \circ i_0) - (- \circ i_1)} Wor_k(X, Y))$, где $i_0, i_1: X \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times X$ — нулевое и единичное сечения $\mathbb{A}^1 \times X$.

Замечание 3.

1. Произвольный предпучок с *Witt*-трансферами \mathcal{F} можно определить на существенно гладких схемах, как индуктивный предел. В частности, для гладкой схемы X и её точки x

$$\mathcal{F}\left(\varprojlim_{z \in U \subset X} U\right) = \varinjlim_{z \in U \subset X} \mathcal{F}(U).$$

2. Для произвольного предпучка с *Witt*-трансферами \mathcal{F} можно определить функтор \mathcal{F}' на расширенной, в смысле замечания 2.4, категории Wor_k , так, что на паре (X_1, X_2) (X_2 — открытое в X_1):

$$\mathcal{F}'(X_1, X_2) = \frac{\mathcal{F}(X_2)}{\mathcal{F}(X_1)},$$

при этом, поскольку индуктивные пределы коммутируют с коядрами, это определение согласовано с определением из предыдущего пункта, т.е. для пары (U_1, U_2) , являющейся проективным пределом $\varprojlim_i (X_1^i, X_2^i)$,

$$\mathcal{F}'(U_1, U_2) = \varinjlim_i \mathcal{F}'(X_1^i, X_2^i).$$

3. Пучком с *Witt*-трансферами называется предпучок, который является пучком и имеет *Witt*-трансферы.

4. Гомотопически инвариантным предпучком с *Witt*-трансферами называется предпучок, который гомотопически инвариантен и имеет *Witt*-трансферы. Такой предпучок пропускается через $Wor_k \rightarrow \overline{Wor}_k$.

3. ЭТАЛЬНОЕ ВЫРЕЗАНИЕ В РАЗМЕРНОСТИ 1

Теорема 1. Пусть \mathcal{F} — гомотопически инвариантный предпучок с *Witt*-трансферами, и $\pi: X' \rightarrow X$ —etalьный морфизм гладких кривых над полем K , являющимся полем частных некоторого гладкого аффинного многообразия, такой, что прообраз некоторой замкнутой точки $z \in X$ под действием π изоморфен z . Тогда π индуцирует изоморфизм

$$\pi^*: \frac{\mathcal{F}(U - z)}{\mathcal{F}(U)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{F}(U' - z)}{\mathcal{F}(U')},$$

где U — локальная окрестность z в X , а U' — локальная окрестность $z' = pi^{-1}(z)$ в X' .

Замечание 4. В терминах замечания 3.2 теорема 1 означает, что $i^*: \mathcal{F}'(U, U - z) \rightarrow \mathcal{F}'(U', U' - z)$ — изоморфизм.

Лемма 3.1. Пусть $\pi: X \rightarrow X'$ —etalьный морфизм гладких кривых с тривидальными каноническими классами, z и z' — точки X и X' такие, что $\pi(z') = z$ и поля вычетов z и z' изоморфны, $U = \varprojlim_{z \in V \subset X} V$, $U' = \varprojlim_{z' \in V' \subset X'} V'$, тогда:

- a) существует $\Phi \in Wor_K((U, U - z), (X', X' - z'))$ такой, что $[\pi \circ \Phi] = [i]$ в $Wor_K((U, U - z), (X, X - z))$;
- b) существует $\Psi \in Wor_K((U, U - z), (X', X' - z'))$ такой, что $[\Psi \circ \pi] = [i']$ в $Wor_K((U', U' - z'), (X', X' - z'))$.

Замечание 5. Утверждение Леммы 3.1 означает, что в $\overline{Wor}_K((U, U - z), (X, X - z'))$

$$[\pi \circ \Phi] = [i] + [\Omega], \text{ где } \Omega \in Wor_K(U, X - z) \quad \text{и} \\ [\Psi \circ \pi] = [i'] + [\Omega'], \text{ где } \Omega' \in Wor_k(U', X' - z').$$

Это может быть обеспечено следующими коммутативными диаграммами в Wor_K .

$$\begin{array}{ccccc}
& (U - z) \times \mathbb{A}^1 & \hookrightarrow & U \times \mathbb{A}^1 & \\
& \nearrow j_0 & & \swarrow j_1 & \\
(U - z) & \xrightarrow{\pi \circ \Phi} & U & \xleftarrow{i + \Omega} & U \\
& \searrow & \downarrow \Theta' & \uparrow \Theta & \nearrow \\
& & X - z & \xrightleftharpoons{} & X
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
& (U' - z') \times \mathbb{A}^1 & \hookrightarrow & U \times \mathbb{A}^1 & \\
\swarrow & j_0 & \nearrow & \nwarrow & j_1 \\
(U' - z') & \hookrightarrow U' & \Xi' & \Xi & \hookrightarrow U \\
& \Psi \circ \pi & \downarrow & \downarrow & \\
& X' - z & \rightsquigarrow & X' &
\end{array},$$

где j_0 и j_1 — нулевое и единичное сечения.

Вывод теоремы 1 из леммы.

Покажем, что из леммы 3.1a) следует инъективность π^* . Пусть $a \in \mathcal{F}'(U - z, U)$ и $\pi^*(a) = 0$. Поскольку $\mathcal{F}'(U - z, U) = \varinjlim_{z' \in V' \subset X'} \mathcal{F}'(V - z, V)$, уменьшив X и X' можно добиться, чтобы $a = j^*(a_X)$, $a_X \in \mathcal{F}'(X - z, X)$, где $j: U \rightarrow X$, а также, чтобы канонические классы X и X' были тривиальными. Тогда по лемме 3.1a), применённой к новым X и X' , $j^*(a_X) = \Phi^*(\pi^*(a_X)) = 0$. Значит, ядро π^* равно 0.

Теперь покажем, что из леммы 3.1b) следует сюръективность π^* . Пусть $a \in \mathcal{F}'(U' - z, U')$. Аналогично сказанному выше, уменьшив X и X' , можно добиться, чтобы $a = i'^*(a'_X)$, $a'_X \in \mathcal{F}'(X' - z, X')$. Тогда по лемме 3.1b), применённой к X и X' , $i'^*(a'_X) = \pi^*(\Phi^*(a'_X))$. Значит π^* сюръективно. \square

Доказательство леммы 3.1.

Пусть \bar{X}, \bar{X}' — проективные замыкания X и X' . Продолжим π до морфизма $\bar{\pi}: \bar{X}' \rightarrow \bar{X}$. Обозначим $D = \bar{X} \setminus X$, $D' = \bar{X}' \setminus X'$, $D'' = \bar{\pi}^{-1}(D) \subset \bar{X}'$, и $\Delta \subset X \times U$ — график вложения $i: U \hookrightarrow X$.

Для построения искомых морфизмов Φ , Θ и Ω достаточно построить:

1. P — квадратичное пространство в $Proj(pr_U)$, где $pr_U: X' \times U \rightarrow U$ — каноническая проекция. Т.е. $P \in K[X' \times U] - mod$ — конечно порождённый над $K[U]$ и $K[X' \times U]$ -линейный изоморфизм $q_P: P \simeq Hom(P, K[U])$,
2. H — квадратичное пространство в $Proj(pr_{\mathbb{A}^1 \times U})$, где $pr_{\mathbb{A}^1 \times U}: X' \times \mathbb{A}^1 \times U \rightarrow \mathbb{A}^1 \times U$ — каноническая проекция. Т.е. $H \in K[X \times \mathbb{A}^1 \times U] - mod$ — конечно порождённый над $K[\mathbb{A}^1 \times U]$ и $K[X \times \mathbb{A}^1 \times U]$ -линейный изоморфизм $q_H: H \simeq Hom(H, K[\mathbb{A}^1 \times U])$,

такие, что:

3. канонические отображения:

$$P \otimes_{K[U]} K[U - z] \rightarrow K[X' - z'] \otimes_{K[X']} P \otimes_{K[U]} K[U - z],$$

$$H \otimes_{K[U]} K[U - z] \rightarrow K[X - z] \otimes_{K[X]} H \otimes_{K[U]} K[U - z]$$

являются изоморфизмами,

4. и существуют изоморфизмы квадратичных пространств:

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad j_0^*(q_H) &\simeq \pi_{U*}(q_P) \\
j_1^*(q_H) &\simeq q_E \oplus q_G,
\end{aligned}$$

где q_Δ — единичная квадратичная форма на $K[\Delta]$ (т.е. форма, получаемая из единичной при помощи изоморфизма $K[\Delta] \simeq K[U]$), и $K[X \times U]$ -модуль G , на котором определена квадратичная форма q_G , обладает свойством $G \simeq K[X - z] \otimes_{K[X]} G$.

Будем строить эти модули с помощью специально выбранных глобальных сечений пучков $s' \in \mathcal{L}(nD_U'')$ на \bar{X}_U' , $s \in \mathcal{L}(lnD_{U \times \mathbb{A}^1})$ на $\bar{X}_{U \times \mathbb{A}^1}$ и $s_0, s_1 \in \mathcal{L}(lnD_U)$

на \overline{X}_U (нижними индексами здесь обозначены замены базы), которые будем находить с помощью следующей подлеммы, являющейся следствием теоремы Серра (теорема 5.2, гл. 3 из [3]):

Подлемма 3.1.1. *Пусть X — проективная схема над спектром некоторого нётеровского кольца, Z — замкнутая подсхема, \mathcal{F} — когерентный пучок, и \mathcal{L} — очень обильное линейное расслоение на X . Для всех n , больших некоторого k , ограничение $\Gamma(\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow \Gamma((\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})|_Z)$ — сюръективно.*

Введём дополнительные обозначения: \mathbf{z} — диагональ в $z \times z$, \mathbf{z}' — график $\pi: z' \rightarrow z$, который фактически тоже является диагональю, поскольку π задаёт изоморфизм z и z' , W — локальная окрестность \mathbf{z} в $z \times U$, W' — локальная окрестность \mathbf{z} в $z' \times U$, δ' — локальный параметр в $K[W']$, $N' = \text{Spec } K[W']/\delta'^2$ — замкнутая подсхема в W' .

Сначала построим искомое сечение на \overline{X}'_z , для этого докажем следующее утверждение:

Подлемма 3.1.2. *Пусть $\pi: X' \rightarrow X$ — конечный морфизм проективных кривых над бесконечным полем, z — замкнутая точка X' , Y — замкнутая подсхема X' не содержащая z , и \mathcal{L} — очень обильный локально свободный пучок ранга 1 на X' . Тогда для всех n больших n_0 существует глобальное сечение s пучка $\mathcal{L}^{\otimes n}$, обращающееся в 0 в z , не обращающееся в 0 на Y , и такое, что ограничение π на $\text{div } s$ является замкнутым вложением (точнее, имеется виду ограничение π на подсхему в X' определяемую пучком идеалов в $\mathcal{O}(X')$ состоящим из функций $f: \text{div } f \geqslant \text{div } s$).*

Доказательство подлеммы 3.1.2.

То, что $\pi: \text{div } s \rightarrow X$ — замкнутое вложение, означает, что $\varepsilon_\pi: \mathcal{O}(X) \rightarrow \pi_*(\mathcal{O}(\text{div } s))$, индуцированное π , сюръективно. Обозначим через Γ аффинное пространство глобальных сечений $\mathcal{L}^{\otimes n}$, состоящее из сечений обращающихся в 0 в z . По подлемме 3.1.1 для больших n Γ непусто. Покажем, что несюръективность ε_π — замкнутое условие в Γ . Для этого рассмотрим отображение $\mu = \pi_\Gamma: X' \times \Gamma \rightarrow X \times \Gamma$ и универсальное сечение $s_\Gamma \in \Gamma(pr_{X'}^*(\mathcal{L}^{\otimes n}))$, где $pr: X' \times \Gamma \rightarrow X'$ — проекция вдоль Γ . Определим $Z_i \subset X' \times \Gamma$ — носитель ядра $\varepsilon_\mu: \mathcal{O}(X \times \Gamma) \rightarrow \mu_*(\mathcal{O}(\text{div } s_\Gamma))$, и $Z_n \subset \Gamma$ — объединение подпространств сечений обращающихся в 0 в какой-либо из точек Y . Тогда искомое сечение s — рациональная точка Γ , лежащая вне $pr_\Gamma(Z_i)$ (где pr_Γ — проекция вдоль X'), и вне Z_n . Наличие рациональных точек Γ вне $pr_\Gamma(Z_i) \cup Z_n$, равносильно тому, что $\Gamma \neq pr_\Gamma(Z_i) \cup Z_n$, как схемы над базовым полем.

Поскольку Y не содержит z , по подлемме 3.1.1, для достаточно больших n существует сечение обращающееся в 0 в z , и не обращающееся в 0 на Y , поэтому $\Gamma \neq Z_n$, и поскольку Γ неприводимо достаточно доказать, что $\Gamma \neq pr_\Gamma(Z_i)$.

Поскольку после расширения скаляров равенство бы не нарушилось, достаточно доказывать утверждение над алгебраически замкнутым полем F . Если $\pi: \text{div } s \rightarrow X$ не является вложением, то $\text{div } s \geqslant p_1 + p_2$ для некоторых $p_1, p_2 \in X'$, $\pi(p_1) = \pi(p_2)$ (p_1 и p_2 могут совпадать). Для того, чтобы оценить размерность Z_i , определим коразмерность подпространства. Обозначим через $S(D)$ замкнутую подсхему в X' , определяемую пучком идеалов в $\mathcal{O}(X)$, состоящих из функций $f: \text{div } f \geqslant D$ для дивизора D в X' . Заметим, что для больших n для любой пары точек $p_1, p_2 \in X'$ отображение ограничения

$$r_{p_1, p_2, n}: \Gamma(\mathcal{L}^{\otimes n}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{L}^{\otimes n})|_{S(p_1 + p_2 + z)} = F^2$$

сюръективно, поскольку при фиксированном n сюръективность $r_{p_1, p_2, n}$ является открытым условием на пару (p_1, p_2) , а для каждой пары p_1, p_2 по подлемме 3.1.1 для больших n $r_{p_1, p_2, n}$ сюръективно. Следовательно, коразмерность подпространства в Γ_0 , состоящего из сечений $\operatorname{div} s \geq p_1 + p_2$ совпадает с коразмерностью подпространства функций $\{f \in F[S(p_1 + p_2 + z)] : \operatorname{div} f \geq p_1 + p_2, \operatorname{div} f \geq z\}$ в пространстве функций, обращающихся в 0 в z , т.е. равна 2, когда $p_1, p_2 \neq z$ и равна 1, когда хотя бы одна из точек совпадает с z .

Для произвольной точки $p \in X$ существует конечное множество пар $p_1, p_2 \in X : \pi(p_1) = \pi(p_2) = p$. Поскольку для $p \neq \pi(z)$ для каждой такой пары условие $\operatorname{div} s \geq p_1 + p_2$ определяет подмножество в Γ коразмерности 2, то $\dim(Z \cap (p \times \Gamma)) \leq \dim \Gamma - 2$. Для $p = \pi(z)$ эти условия имеют коразмерность хотя бы 1, значит, $\dim(Z \cap (\pi(z) \times \Gamma)) \leq \dim \Gamma - 1$. Таким образом, $\dim Z \leq \dim \Gamma - 1$, и значит, $\Gamma \neq pr_\Gamma(Z_i)$. \square

По подлемме 3.1.2, применённой к $\pi_z : \bar{X}' \rightarrow \bar{X}$ и пучку $\mathcal{L}(D'' \times z)$, для n больших некоторого \bar{k} существует сечение $\bar{s} \in L(nD'' \times z)$ на \bar{X}'_z , такое, что ограничение $\bar{\pi}_z$ на $\operatorname{div} \bar{s}$ является замкнутым вложением, \bar{s} обращается в ноль в \mathbf{z}' и не обращается в ноль на $\bar{\pi}^{-1}(z) \times z - \mathbf{z}'$ и на $D'' \times U$. По подлемме 3.1.1, применённой к многообразиям $X' \times U, X \times U$, пучкам $\mathcal{O}(X' \times U), \mathcal{O}(X \times U)$ и линейным расслоениям $\mathcal{L}(D'' \times U)$ и $\mathcal{L}(D'' \times U)$ для всех n , больших некоторого k , отображения ограничения

$$\begin{aligned} \Gamma(X' \times U, \mathcal{L}(nD'' \times U)) &\rightarrow \Gamma(\mathcal{L}(nD'' \times U)|_{z' \times U \cup D' \times U \cup \bar{X}' \times z}) \\ \Gamma(X \times U, \mathcal{L}(lnD \times U)) &\rightarrow \Gamma(\mathcal{L}(lnD \times U)|_{z \times U \cup D \times U \cup \Delta}) \end{aligned}$$

сюръективны. Выберем $n > \bar{k}, k$. И выберем \bar{s} , удовлетворяющее описанным выше условиям.

Выберем s' — глобальное сечение $\mathcal{L}(nD'' \times U)$ такое, что $s'|_{X' \times z} = \bar{s}$, s' — не обращается в ноль на $D' \times U$, $s'|_{N'} = \delta$, (здесь используется некоторая тривиализация $\mathcal{L}(nD'' \times U)|_{N'}$). Тогда

$$(3.2) \quad s' \cdot (\bar{\pi}^{-1}(z') \times U) = \mathbf{z}', \quad \operatorname{div} s' \cdot (D' \times U) = 0.$$

Первое равенство следует из того, что s' не обращается в ноль на $(\bar{\pi}^{-1}(z') \times U) - \mathbf{z}'$, поскольку \bar{s} не обращается в ноль на $\bar{\pi}^{-1}(z) \times z - \mathbf{z}'$, и того, что $s'|_{N'} = \delta'$, а второе — переформулировка необращения в ноль.

Пусть s_0 — некоторое сечение $\mathcal{L}(lnD_U)$, такое, что $\operatorname{div} s_0 = \bar{\pi}_{U*}(\operatorname{div} s')$. Тогда из 3.2 следует:

$$(3.3) \quad \operatorname{div} s_0 \cdot (z' \times U) = \mathbf{z}, \quad \operatorname{div} s_0 \cdot (D \times U) = 0.$$

Теперь выберем сечение s_1 пучка $\mathcal{L}(lnD \times U)$:

$$s_1|_{\Delta} = 0, \quad s_1|_{(z \cup D) \times U} = s_0|_{(z \cup D) \times U}$$

(согласованность условий на пересечениях обеспечивается тем, что $\Delta \cap (z \times U) = \mathbf{z}$ и s_0 обращается в ноль в \mathbf{z}). И Пусть $s = s_0 \cdot (1-t) + s_1 \cdot t$ — сечение $\mathcal{L}(lnD \times U \times \mathbb{A}^1)$. Тогда из 3.3 получим:

$$(3.4) \quad \operatorname{div} s \cdot (z \times U \times \mathbb{A}^1) = \mathbf{z} \times \mathbb{A}^1, \quad \operatorname{div} s \cdot (D \times U \times \mathbb{A}^1) = 0,$$

поскольку $s|_{(z \cup D) \times U \times \mathbb{A}^1} = s_0|_{(z \cup D) \times U}$.

Пусть $S' = \operatorname{div} s'$, $S = \operatorname{div} s$, $S_0 = \operatorname{div} s_0$, $S_1 = \operatorname{div} s_1$. Ограничение $\bar{\pi}_U$ на подсхему S' является замкнутым вложением, поскольку над замкнутой точкой U (т.е. z) оно совпадает с ограничением $\bar{\pi}_z$ на $\operatorname{div} \bar{s}$, и является замкнутым

вложением. Следовательно $\bar{\pi}_U$ задаёт изоморфизм $S' \xrightarrow{\sim} S_0$. Заметим, что $S' \subset X' \times U$ и $S \subset X \times U \times \mathbb{A}^1$ по вторым равенствам из 3.2 и 3.4, и с учётом того, что $s|_{\overline{X} \times U \times 0} = s_0$, $s|_{\overline{X} \times U \times 1} = s_1$ получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc}
 S_1 & \hookrightarrow & S & \leftarrow & S_0 & \xleftarrow{\cong} & S' \\
 \downarrow i_{S_1} (1) & & \downarrow i_S (3) & & \downarrow i_{S_0} (5) & & \downarrow i_{S'} \\
 X_U & \xhookrightarrow{id_X \times j_1} & X_{\mathbb{A}^1 \times U} & \xleftarrow{id_X \times j_0} & X_U & \xleftarrow{\pi_U} & X'_U \\
 \downarrow pr_U (2) & \downarrow pr_{U \times \mathbb{A}^1} (4) & \downarrow & & \downarrow pr_U & & \downarrow pr_U \\
 U & \xhookrightarrow{j_1} & U \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{j_0} & U & = & U,
 \end{array}$$

в которой квадраты (1-4) декартовы.

И теперь определим модули

$$P = K[S']_{K[X' \times U]}, \quad H = K[S]_{K[X \times U \times \mathbb{A}^1]}.$$

Для проверки условия 3, которое не зависит от выбора изоморфизмов q_P и q_H , воспользуемся тем, что s — не обращается в ноль на $z \times (U - z) \times \mathbb{A}^1$ и s' не обращается в ноль на $z' \times (U - z)$, и следовательно

$$\begin{aligned}
 S \cap (z \times U \times \mathbb{A}^1) &\subset z \times z \times \mathbb{A}^1 \subset S \cap (\overline{X} \times z \times \mathbb{A}^1) \\
 S' \cap (z' \times U) &\subset z' \times z \subset S' \cap (\overline{X}' \times z).
 \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 K[X - z] \otimes_{K[X]} K[S] \otimes_{K[U]} K[U - z] &\simeq K[S] \otimes_{K[U]} K[U - z] \\
 K[X' - z'] \otimes_{K[X']} K[S'] \otimes_{K[U]} K[U - z] &\simeq K[S'] \otimes_{K[U]} K[U - z].
 \end{aligned}$$

Теперь убедимся что P и H — конечно порождённые проективные $K[U]$ и $K[U \times \mathbb{A}^1]$ соответственно модули, и зададим на них структуры квадратичных пространств. Для этого покажем, что морфизмы схем $p_{S'} = pr_U \circ i_{S'}: S' \rightarrow U$ и $p_S = pr_U \circ i_S: S \rightarrow U$ являются конечными и плоскими. И определим некоторые $K[S']$ -линейный и $K[S]$ -линейный изоморфизмы

$$\begin{aligned}
 q_{S'}: K[S'] &\simeq \text{Hom}(K[S'], K[U]), \\
 q_S: K[S] &\simeq \text{Hom}(K[S], K[U \times \mathbb{A}^1]),
 \end{aligned}$$

которые определяют квадратичные пространства в $\text{Proj}(p_{S'})$ и $\text{Proj}(p_S)$, и ограничениями скаляров вдоль вложений $i_{S'}$ и i_S получим искомые изоморфизмы q_P и q_H .

Пусть $d \in \mathcal{L}(lnD \times U \times \mathbb{A}^1)$ — сечение, которое задаёт дивизор $lnD \times U \times \mathbb{A}^1$, тогда $f = \frac{s}{d}$ — рациональная функция на $\overline{X} \times U \times \mathbb{A}^1$, которая регулярна на $X \times U \times \mathbb{A}^1$. Рассмотрим отображение

$$F = (f, pr_{U \times \mathbb{A}^1}): X \times U \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1,$$

и обозначим $B \in K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1] - \text{mod}$ — кольцо $K[X \times U \times \mathbb{A}^1]$ рассмотренное как $K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]$ -модуль посредством F .

Покажем, что B — конечно порождённый проективный $K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]$ -модуль. Для этого заметим, что F получается при помощи замены базы $\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$ из проективного морфизма

$$\overline{F} = ([s : d], id_{U \times \mathbb{A}^1}): \overline{X} \times U \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times U \times \mathbb{A}^1.$$

\overline{F} — морфизм относительной проективной кривой $\overline{X} \times U \times \mathbb{A}^1$ в относительную проективную прямую $\mathbb{P}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$ заданный двумя непропорциональными сечениями, поскольку s не обращается в ноль на $D_{U \times \mathbb{A}^1}$. По приведённой ниже подлемме \overline{F} — конечный, сюръективный, плоский, значит F — конечное, сюръективное, плоское, и, поскольку конечно порождённый плоский модуль — проективный, то B — конечно порождённый проективный $K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]$ -модуль.

Подлемма 3.1.3. *Пусть $F: X_T \rightarrow \mathbb{P}_T^1$ — морфизм гладкой относительной проективной кривой X_T в относительную проективную прямую \mathbb{P}_T^1 над некоторой существенно гладкой схемой T , заданный двумя непропорциональными сечениями s, d некоторого линейного расслоения на X_T . Тогда F — конечный, сюръективный, плоский.*

Доказательство. Прообраз $F^{-1}(t) \subset X_T$ произвольной точки $t \in \mathbb{P}_T^1$ изоморфен $\text{div}(s \cdot t_1 - d \cdot t_2) \subset \overline{X}_t$, где t_1, t_2 непропорциональные сечения $\mathcal{O}(1)$ на \mathbb{P}_T^1 . Поскольку s непропорционально d , то $s \cdot t_1 - d \cdot t_2 \neq 0$, и значит, $\text{div}(s \cdot t_1 - d \cdot t_2)$ — не пустое собственное замкнутое подножество в X_t , и значит, $\dim F^{-1}(t) = 0$, для любой точки t . Таким образом, F — сюръективный и квазиконечный. А поскольку квазиконечный проективный морфизм — конечный, то F — конечный. Теперь заметим, что поскольку X_T и \mathbb{P}_T^1 — существенно гладкие и их размерности совпадают, то F — плоский (см. следствие V.3.9. и теорема II.4.7 [5]). \square

Поскольку канонические классы $X \times U \times \mathbb{A}^1$ и $\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$ тривиальны, по утверждению 2.1 из [4] существует $K[X \times U \times \mathbb{A}^1]$ -линейный изоморфизм

$$q: B \simeq \text{Hom}(B, K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]).$$

Поскольку $S = \text{div}_0 s = \text{div}_0 f$, имеет место коммутативная диаграмма, в которой квадраты декартовы:

$$\begin{array}{ccccc} X \times U \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{\quad} & S & \xleftarrow{\quad} & S_0 \xleftarrow{\cong} S' \\ F \downarrow & & pr_{U \times \mathbb{A}^1} \downarrow & & pr_U \downarrow \\ \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{0 \times id_{U \times \mathbb{A}^1}} & U \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{j_0} & U \end{array} .$$

Теперь определим изоморфизмы $q_S = (0 \times id_{U \times \mathbb{A}^1})^*(q)$, $q_{S_0} = j_0^*(q_S)$, и $q_{S'}$ — как изоморфизм полученный из q_{S_0} с помощью изоморфизма $\pi_U^*: K[S_0] \simeq K[S']$.

Первый изоморфизм из 3.1 устанавливается следующей последовательностью изоморфизмов:

$$\begin{aligned} \pi_{U*}(q_P) \simeq (\pi_U \circ i_{S'})_* (q_{S'}) &\stackrel{1}{\simeq} i_{S_0*}(q_{S_0}) \simeq i_{S_0*} j_0^*(q_S) \stackrel{2}{\simeq} \\ &\stackrel{2}{\simeq} j_0^* i_{S*}(q_S) \simeq j_0^*(q_H), \end{aligned}$$

в которой изоморфизм 1 следует из коммутативности квадрата (5) диаграммы 3 и того, что композиция ограничений скаляров совпадает с ограничением скаляров вдоль композиции, изоморфизм 2 — из декартовости квадратов (3-4) диаграммы 3 и того, что ограничение скаляров коммутирует с заменой базы, а остальные — из определений q_P , q_{S_0} , и q_H .

Остается добиться выполнения второго изоморфизма из 3.1. Аналогично q_{S_0} определим $q_{S_1} = j_1^*(q_S)$. Поскольку квадраты (1-2) диаграммы 3 декартовы

$$j_1^*(q_H) = j_1^* i_{S*}(q_S) \simeq i_{S_1*} j_1^*(q_S) = i_{S_1*}(q_{S_1}).$$

Так как $s_1|_{\Delta} = 0$, то $\operatorname{div} s_1 = \Delta + R$.

$$R \cap (z \times U) = \operatorname{div} s_1.(z \times U) - \Delta.(z \times U) = \operatorname{div} s_0.(z \times U) - \mathbf{z} = 0,$$

т.е. $R \cap (z \times U) = \emptyset$, и поскольку \mathbf{z} — единственная замкнутая точка Δ , то $R \cap \Delta = \emptyset$. Следовательно S_1 распадается в дизъюнктное объединение Δ и R . Значит, $K[S_1]$ раскладывается в произведение колец $K[\Delta]$ и $K[R]$, и $K[S_1]$ -линейная квадратичная форма q_{S_1} раскладывается в прямую сумму форм на $K[\Delta]$ и на $G = K[R]$. И, поскольку $R \cap (z \times U) = \emptyset$, $G \simeq K[X - z] \otimes_{K[X]} G$. Остаётся удовлетворить условие, чтобы квадратичная форма на $K[\Delta]$ являлась единичной. В действительности она может оказаться заданной некоторой обратимой в $K[U]$ функцией l . Тогда домножим квадратичные формы на H , P и G на l^{-1} , при этом их согласованность не нарушится, а новое ограничение на $K[\Delta]$ будет задано единичной формой.

b) Для построения искомых морфизмов достаточно построить:

1. P — квадратичное пространство в $\operatorname{Proj}(pr_U)$, где $pr_U: X' \times U \rightarrow U$ — каноническая проекция. Т.е. $P \in K[X' \times U] - \text{mod}$ — конечно порождённый над $K[U]$ и $K[X' \times U]$ -линейный изоморфизм $P \simeq \operatorname{Hom}(P, K[U])$,
2. H — квадратичное пространство в $\operatorname{Proj}(pr_{\mathbb{A}^1 \times U'})$, где $pr_U: X' \times \mathbb{A}^1 \times U' \rightarrow \mathbb{A}^1 \times U'$ — каноническая проекция. Т.е. $H \in K[X' \times \mathbb{A}^1 \times U'] - \text{mod}$ — конечно порождённый над $K[\mathbb{A}^1 \times U']$ и $K[X' \times \mathbb{A}^1 \times U']$ -линейный изоморфизм $H \simeq \operatorname{Hom}(H, K[\mathbb{A}^1 \times U'])$,

такие, что:

3. канонические отображения:

$$\begin{aligned} P \otimes_{K[U]} K[U - z] &\rightarrow K[X' - z'] \otimes_{K[X']} P \otimes_{K[U]} K[U - z], \\ H \otimes_{K[U']} K[U' - z'] &\rightarrow K[X' - z'] \otimes_{K[X']} H \otimes_{K[U']} K[U' - z'] \end{aligned}$$

являются изоморфизмами,

4. и существуют изоморфизмы квадратичных пространств:

$$(3.5) \quad \begin{aligned} j_0^*(q_H) &\simeq (\operatorname{id}(X) \times \pi)^*(q_P) \\ j_1^*(q_H) &\simeq q_{\Delta'} \oplus q_G, \end{aligned}$$

где $q_{\Delta'}$ — единичная квадратичная форма на $K[\Delta']$, Δ' — график вложения $U' \hookrightarrow X'$ (т.е. имеется ввиду форма, получаемая из единичной при помощи изоморфизма $K[\Delta'] \simeq K[U']$), и $K[X' \times U']$ -модуль G , на котором определена квадратичная форма q_G , обладает свойством $G \simeq K[X' - z'] \otimes_{K[X']} G$.

Будем строить эти модули с помощью специально выбранных глобальных сечений пучков $\mathcal{L}(nD'_U)$ на \overline{X}'_U , $\mathcal{L}(nD'_{U' \times \mathbb{A}^1})$ на $\overline{X}'_{U' \times \mathbb{A}^1}$ и $\mathcal{L}(nD'_{U'})$ на $\overline{X}'_{U'}$ для достаточно большого n (условия на эти сечения приведены ниже).

Обозначим: \mathbf{z}'' — диагональ в $z' \times z'$, W'' — локальная окрестность \mathbf{z}'' в $z' \times U'$.

По подлемме 3.1.1 для любого n , большего некоторого k , существует сечение s' пучка $\mathcal{L}(nD'_U)$, такое, что s' не обращается в ноль на $D' \times U$ и в точках $z' \times U$ отличных от \mathbf{z}' , и $s'|_{N'} = \delta'$ (здесь используется некоторая тривиализация $\mathcal{L}(nD'_U)$ на N'). Пусть теперь $s_0 = (\operatorname{id}_{\overline{X}'} \times \pi)^*(s')$ — сечение $\mathcal{L}(nD'_{U'})$, являющееся обратным образом s' вдоль $\operatorname{id}_{\overline{X}'} \times \pi$. Тогда s_0 не обращается в ноль на $D' \times U'$ и в точках $z' \times U'$ отличных от \mathbf{z}'' , и $s_0|_{N''} = \delta''$, где δ'' — обратный образ δ вдоль $\operatorname{id}_{\overline{X}'} \times \pi$.

Теперь выберем сечение s_1 пучка $\mathcal{L}(nD' \times U')$ на $\overline{X}' \times U'$ такое, что

$$s_1|_{(z' \cup D') \times U'} = s_0|_{(z' \cup D') \times U''}, \quad s_1|_{\Delta'} = 0,$$

условия согласованы поскольку s_0 обращается в ноль на $\Delta' \cap ((z' \cup D') \times U) = \mathbf{z}''$. Пусть $s = s_0 \cdot (1 - t) + s_1 \cdot t$ — сечение $\mathcal{L}(nD' \times U' \times \mathbb{A}^1)$ на $\overline{X}' \times U' \times \mathbb{A}^1$, тогда s не обращается в ноль на $D' \times U' \times \mathbb{A}^1$ и на $(z' \times U' - \mathbf{z}') \times \mathbb{A}^1$, $s|_{W' \times \mathbb{A}^1} = \delta'$ (здесь подразумевается тривиализация $\mathcal{L}(lnD_{U' \times \mathbb{A}^1})|_{W' \times \mathbb{A}^1} = \mathcal{O}(W' \times \mathbb{A}^1)$), $s|_{\overline{X}' \times U' \times 0} = s_0$, $s|_{\overline{X}' \times U' \times 1} = s_1$.

Рассмотрим замкнутые подсхемы $S' = divs'$, $S = divs$, $S_1 = divs_1$, $S_0 = divs_0$ в $X' \times U$, $X' \times U' \times \mathbb{A}^1$ и $X' \times U'$.

$$\begin{array}{ccccccc} S_1 & \hookrightarrow & S & \xleftarrow{\quad} & S_0 & \xrightarrow{\quad} & S' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X'_U & \xhookrightarrow{id_X \times j_1} & X'_{\mathbb{A}^1 \times U'} & \xleftarrow{id_{X'} \times j_0} & X'_{U'} & \xrightarrow{id_{X'} \times \pi} & X'_U \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U' & \xhookrightarrow{j_1} & U' \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{j_0} & U' & \xrightarrow{\pi} & U. \end{array}$$

$S' \subset X' \times U$, поскольку s' не обращается в ноль на $D' \times U$, и $S \subset X' \times U' \times \mathbb{A}^1$, поскольку s не обращается в ноль на $D' \times U'$.

Положим $P = K[S']_{K[X' \times U]}$, $H = K[S]_{K[X' \times U']}$.

Проверим условие 3. Поскольку s не обращается в ноль на $z' \times (U' - z') \times \mathbb{A}^1$ и s' не обращается в ноль на $z' \times (U - z)$, то

$$\begin{aligned} S \cap (z' \times U' \times \mathbb{A}^1) &\subset z' \times z' \times \mathbb{A}^1 \subset S \cap (\overline{X}' \times z' \times \mathbb{A}^1) \\ S' \cap (z' \times U) &\subset z' \times z \subset S' \cap (\overline{X}' \times z) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} K[S] \otimes_{K[U']} K[U' - z'] &\simeq K[X' - z'] \otimes_{K[X']} K[S] \otimes_{K[U']} K[U' - z'] \\ K[S'] \otimes_{K[U]} K[U - z] &\simeq K[X' - z'] \otimes_{K[X']} K[S'] \otimes_{K[U]} K[U - z]. \end{aligned}$$

Теперь нужно задать структуры квадратичных пространств на P и H . Сделаем это с помощью отображений

$$\begin{aligned} F &= \left(\frac{s}{d}, pr_{U' \times \mathbb{A}^1}\right): X' \times U' \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1, \\ F_0 &= \left(\frac{s_0}{d}, pr_{U'}\right): X' \times U' \rightarrow \mathbb{A}^1 \times U', \\ F' &= \left(\frac{s'}{d}, pr_U\right): X' \times U \rightarrow \mathbb{A}^1 \times U, \end{aligned}$$

где $d \in \mathcal{L}(nD')$ — сечение, задающее дивизор nD' на \overline{X}' (точнее подразумеваются его обратные образы в $\mathcal{L}(nD' \times U' \times \mathbb{A}^1)$, $\mathcal{L}(nD' \times U')$ и $\mathcal{L}(nD' \times U)$). Благодаря согласованности s , s_0 и s' на $X' \times U'$, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & S & \xleftarrow{\quad} & S_0 & \xleftarrow{\quad} S' \\ & \swarrow & & \searrow & \downarrow \\ X' \times U' \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{p} & X' \times U' & \xleftarrow{\quad} & X' \times U \\ & \downarrow F & & \downarrow F_0 & \downarrow F' \\ & U' \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{id_{U'} \times 0} & U' & \xrightarrow{\pi} \\ & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{id_{\mathbb{A}^1} \times id_{U' \times \mathbb{A}^1}} & \mathbb{A}^1 \times U' & \xleftarrow{id_{\mathbb{A}^1} \times \pi} & \mathbb{A}^1 \times U \\ & \searrow 0 \times id_{U' \times \mathbb{A}^1} & & \searrow 0 \times id_{U'} & \searrow 0 \times id_U \end{array}.$$

Из соображений, аналогичных приведённым в доказательстве пункта *a*), морфизмы F, F_0 и F' являются конечными сюръективными и плоскими, а $K[X' \times U' \times \mathbb{A}^1], K[X' \times U']$ и $K[X' \times U]$ — конечно порождёнными проективными модулями над $K[\mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1], K[\mathbb{A}^1 \times U']$ и $K[\mathbb{A}^1 \times U]$, соответственно.

Поскольку F, F_0 и F' морфизмы относительных кривых $X'_{U' \times \mathbb{A}^1}, X'_{U'}$ и X'_U в относительные аффинные прямые $\mathbb{A}^1_{U' \times \mathbb{A}^1}, \mathbb{A}^1_{U'}$ и \mathbb{A}^1_U , относительные канонические классы $\omega(F), \omega(F_0), \omega(F')$ согласованно изоморфны $\omega(X')F^*(\omega(\mathbb{A}^1))^{-1}, \omega(X')F_0^*(\omega(\mathbb{A}^1))^{-1}, \omega(X')F'^*(\omega(\mathbb{A}^1))^{-1}$ соответственно. Канонические классы X' и \mathbb{A}^1 тривиальны, значит, существует согласованная тривиализация $\omega(F), \omega(F_0)$ и $\omega(F')$. По утверждению 2.1 из [4] $\text{Hom}(B, A)$ естественно изоморфен $\omega(B/A)$ для гомоморфизма $A \rightarrow B$, такого, что B — конечно порождённый проективный A -модуль. Значит, тривиализация канонических классов X' и \mathbb{A}^1 даёт согласованные изоморфизмы

$$q_B: B_B \simeq \text{Hom}_A(B_B, A), q_{B_0}: B_{0B_0} \simeq \text{Hom}_{A_0}(B_{0B_0}, A_0),$$

$$q_{B'}: B'_{B'} \simeq \text{Hom}_{A'}(B'_{B'}, A'),$$

где $B = K[X' \times U' \times \mathbb{A}^1], A = K[\mathbb{A}^1 \times U' \times \mathbb{A}^1], B_0 = K[X' \times U'], A_0 = K[\mathbb{A}^1 \times U'], B' = K[X' \times U], A' = K[\mathbb{A}^1 \times U]$. Из изоморфизмов $q_B, q_{B_0}, q_{B'}$ заменой базы $0 \hookrightarrow \mathbb{A}^1$ получим изоморфизмы

$$q_S: K[S] \simeq \text{Hom}(K[S], K[U' \times \mathbb{A}^1]), q_{S_0}: K[S_0] \simeq \text{Hom}(K[S_0], K[U']),$$

$$q_{S'}: K[S'] \simeq \text{Hom}(K[S'], K[U]).$$

Это изоморфизмы над кольцами $K[S], K[S_0]$ и $K[S']$ соответственно, и, ограничивая скаляры до $K[X' \times U' \times \mathbb{A}^1], K[X' \times U']$ и $K[X' \times U]$, получим изоморфизмы

$$q_H: H \simeq \text{Hom}(H, K[U' \times \mathbb{A}^1]), q_0: K[S_0] \simeq \text{Hom}_{K[X' \times U']}(K[S_0], K[U']),$$

$$q_P: P \simeq \text{Hom}(P, K[U]),$$

поскольку $H \simeq K[S], P \simeq K[S']$. Наличие изоморфизма q_0 , получающегося заменами баз из q_H и q_P , означает их согласованность в смысле первого изоморфизма из 3.5.

Для того чтобы добиться выполнения второго изоморфизма из 3.5, заметим, что поскольку $s_1|_{\Delta'} = 0, s_1|_{N''} = \delta'', s_1$ не обращается в ноль на $(z' \times U) - \mathbf{z}'', \mathbf{z}''$, а δ'' — локальный параметр на W'' , то $\text{div } s_1 \cap (z' \times U') = \mathbf{z}'' = \Delta \cap (z' \times U')$, и аналогично тому как было показано в доказательстве пункта *a*) $K[S_1]$ раскладывается в произведение колец $K[\Delta']$ и $K[R']$ для некоторого $R' \subset (X' - z) \times U'$.

Квадратичная форма, получающаяся из q_H в результате замены базы $U' \times \times 1: U' \hookrightarrow U' \times \mathbb{A}^1$ и ограничения на слагаемое $K[\Delta']$, может оказаться не единичной, а заданной некоторой обратимой функцией в $l \in K[U]^*$. Домножив все полученные квадратичные формы на некоторую обратимую функцию $l' \in K[U]^*$, такую что $l'(z) = l(z)^{-1}$, можно добиться того чтобы $l(z) = 1$. После чего по следующей подлемме, соответствующее квадратичное пространство определяет элемент равный вложению i' в $\overline{\text{Wor}}((U', U' - z'), (X', X' - z'))$, что влечёт второй изоморфизм из 3.5.

Подлемма 3.1.4. *X — гладкая схема, U — локальная подсхема в точке z , i — вложение $U \hookrightarrow X$. Пусть морфизм $\varepsilon \in \text{Wor}((U, U - z), (X, X - z))$ определяется $K[X \times U]$ -модулем $K[\Delta]$ (Δ — график вложения i) и квадратичной формой, заданной обратимой функцией $e \in K[U]^*$. Пусть $e(z) = 1$, тогда $[\varepsilon] = [i]$ в $\overline{\text{Wor}}((U, U - z), (X, X - z))$.*

Доказательство подлеммы. Пусть V — окрестность по Зарисскому z в X , для которой определён морфизм $\varepsilon_V \in \text{Wor}((V, V - z), (X, X - z))$, такой, что $\varepsilon \circ i^V$, где i^V — вложение $U \hookrightarrow V$.

Рассмотрим накрытие $p: V' = \text{Spec } K[V][b]/(b^2 = e) \rightarrow V$. Отображение p — эталльно над z поскольку $e(z) = 1$. Пусть z' — прообраз z , в котором $b(z') = 1$. Уменьшив V и V' можно добиться того, чтобы p было этальным, и чтобы $p^{-1}(z) = z'$.

Обозначим i_V — вложение $V \hookrightarrow X$ и соответствующий морфизм в $\text{Wor}((V, V - z), (X, X - z))$. Поскольку $p^{-1}(z) = z'$, p задаёт морфизм в $\text{Wor}((V', V' - z'), (X, X - z))$.

Рассмотрим морфизмы $i_{V'} = i_V \circ p$ и $\varepsilon_{V'} = \varepsilon_V \circ p$ в $\text{Wor}((V', V' - z'), (X, X - z))$. Морфизм $i_{V'}$ определяется модулем $K[\Delta']$ (где Δ' — график отображения $p \circ i_V: V' \rightarrow X$) и единичной функцией. Морфизм $\varepsilon \circ p$ определяется тем же модулем $K[\Delta']$ и функцией $p^*(e)$. Поскольку в $K[V']$ $p^*(e) = b^2$, т.е. $p^*(e)$ является квадратом, то квадратичная форма, определяемая e , изоморфна единичной, и в $\text{Wor}((V', V' - z'), (X, X - z))$ $\varepsilon \circ p = i'_V$.

$$\begin{array}{ccccc}
& & (V', V' - z') & & \\
& \swarrow \Psi & & \searrow i_{V'} & \\
(U, U - z) & \xrightarrow{\quad p \quad} & (X, X - z) & & \\
& \downarrow \varepsilon & & & \\
& \searrow i^V & & \swarrow i_V & \\
& (V, V - z) & & & .
\end{array}$$

Теперь заметим, что по уже доказанному пункту а) Леммы, применённому к $p: V' \rightarrow V$, существует $\Psi \in \text{Wor}((U, U - z), (V', V' - z'))$: $[\Psi \circ p] = [i^V]$ в $\overline{\text{Wor}}((U, U - z), (V, V - z))$. И получим

$$[i^V \circ \varepsilon] = [\Psi] \circ [p \circ \varepsilon] = [\Psi] \circ [p \circ i_V] = [i].$$

□
□

4. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ АССОЦИИРОВАННОГО ПУЧКА.

Теорема 2. Для гомотопически инвариантного предпучка \mathcal{F} с Witt-трансферами, ассоциированный пучок в топологии Зарисского \mathcal{F}_{Nis} гомотопически инвариантен.

Лемма 4.1. Пусть \mathcal{F} — гомотопически инвариантный пучок с Witt-трансферами. Тогда пучки \mathcal{F}_{Zar} и \mathcal{F}_{Nis} совпадают при ограничении на \mathbb{A}_K^1 , для произвольного поля K , являющегося полем частных некоторого гладкого многообразия.

Доказательство леммы 4.1. Сечения пучков \mathcal{F}_{Zar} и \mathcal{F}_{Nis} определяются своими ростками на соответствующих локальных схемах, и вследствие инъективности для гомотопически инвариантных предпучков с Witt-трансферами², гомоморфизмы ограничения вдоль вложения общей точки $\eta \hookrightarrow \mathbb{A}_K^1$ $\mathcal{F}_{Zar}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\eta)$ и $\mathcal{F}_{Nis}(U) \rightarrow \mathcal{F}(\eta)$ — инъективны, и следовательно, каноническое отображение $\mathcal{F}_{Zar}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{Nis}(U)$ — инъективно. Для доказательства сюръективности

²инъективность для предпучков с Witt-трансферами доказана в дипломной работе К. Чепуркина. •

по произвольному сечению $s_{Nis} \in F_{Nis}(U)$ найдем сечение $s_{Zar} \in \mathcal{F}_{Zar}(U)$, согласованное с s_{Nis} в общей точке.

Пусть $c: \mathfrak{U} \rightarrow U$ — покрытие по Нисневичу, для которого существует $s_{\mathfrak{U}}$, такое что $c^*(s) = \varepsilon(s_{\mathfrak{U}})$, где ε — естественное преобразование $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{Nis}$. Как покрытие по Нисневичу \mathfrak{U} содержит некоторое открытое по Зарисскому подмножество $V \subset U$, и для любой точки $z \in U \setminus V$ U_z такое, что $c_z: U_z \rightarrow \mathbb{A}^1_K$ — этально, и $c_z^{-1}(z) \cong z$. Обозначим $s_V \in \mathcal{F}(V)$ и $s_{U_z} \in \mathcal{F}(U_z)$ — ограничения $s_{\mathfrak{U}}$ на V и U_z , для всех $z \in U \setminus V$.

Выберем некоторую точку $z \in U \setminus V$. Поскольку, для всех достаточно малых окрестностей по Зарисскому $W \subset \mathbb{A}^1_K$ точки z , выполняется включение $W - z \subset V$, определён элемент $r_z \in \lim_{z \in W \subset \mathbb{A}^1_K} \frac{\mathcal{F}(W-z)}{\mathcal{F}(W)}$ — образ s_V . По теореме 1

$$\lim_{z \in W \subset \mathbb{A}^1_K} \frac{\mathcal{F}(W-z)}{\mathcal{F}(W)} \simeq \lim_{z \in W \subset U_z} \frac{\mathcal{F}(W-z)}{\mathcal{F}(W)},$$

и поскольку существует $s_{U_z} \in \mathcal{F}(U_z)$, согласованное с s_V на $U_z - z$, то $r_z = 0$. Значит, существует $s_{V_z} \in \mathcal{F}(V_z)$, для некоторой достаточно малой окрестности по Зарисскому точки $z \in \mathbb{A}^1_K$, согласованное с s_V .

Полученные сечения s_{V_z} предпучка \mathcal{F} (для всех $z \in U \setminus V$) вместе с s_V , задают некоторое сечение \mathcal{F}_{Zar} на U (попарная согласованность сечений s_{V_z} следует из согласованности всех s_{V_z} с s_V , поскольку окрестности V_z достаточно малы, т.е. $V_z - z \subset V$). Поскольку сечения s_{Nis} и s_{Zar} согласованы с s_V на V , то они согласованы в общей точке \mathbb{A}^1_K . \square

Доказательство теоремы 2.

По определению гомотопическая инвариантность некоторого предпучка \mathcal{N} , означает что $\mathcal{N}(pr_X): \mathcal{N}(X) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbb{A}^1_X)$ — изоморфизм, для проекции $pr_X: \mathbb{A}^1_X \rightarrow X$ над произвольным X . Поскольку нулевое сечение $i_X: X \rightarrow \mathbb{A}^1_X$ предоставляет отображение $\mathcal{N}(i_X)$ — левое обратное к $\mathcal{N}(pr_X)$, то имеют место эквивалентности: $\mathcal{N}(i_X)$ — инъективно $\Leftrightarrow \mathcal{N}$ — гомотопически инвариантен $\Leftrightarrow \mathcal{N}(pr_X)$ — сюръективно.

Пусть $\eta - j: \eta \hookrightarrow X$ — вложение общей точки в X , а $\varepsilon: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{Nis}$ — естественное преобразование между предпучком и ассоциированным пучком. Левый и правый квадраты следующей диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}_{Zar}(\mathbb{A}^1_\eta) & \xrightarrow{\varepsilon(\mathbb{A}^1_\eta)} & \mathcal{F}_{Nis}(\mathbb{A}^1_\eta) & \xleftarrow{\mathcal{F}_{Nis}(j_{\mathbb{A}^1})} & \mathcal{F}_{Nis}(\mathbb{A}^1_X) \\ \mathcal{F}_{Zar}(pr_\eta) \uparrow & & \mathcal{F}_{Nis}(pr_\eta) \uparrow & \downarrow \mathcal{F}_{Nis}(i_\eta) & \downarrow \mathcal{F}_{Nis}(i_X) \\ \mathcal{F}_{Zar}(\eta) & \xrightarrow{\varepsilon(\eta)} & \mathcal{F}_{Nis}(\eta) & \xleftarrow{\mathcal{F}_{Nis}(j)} & \mathcal{F}_{Nis}(X). \end{array}$$

$\varepsilon(\mathbb{A}^1_\eta)$ — сюръективно, в силу леммы 4.1. $\mathcal{F}_{Zar}(pr_\eta)$ — изоморфизм, в силу гомотопической инвариантности \mathcal{F}_{Zar} , которая доказана в [6]. Тогда из коммутативности левого квадрата следует, что $\mathcal{F}_{Nis}(pr_\eta)$ — сюръективно, и по приведённому выше замечанию, $\mathcal{F}_{Nis}(i_\eta)$ — инъективно. $\mathcal{F}_{Nis}(j_{\mathbb{A}^1})$ — инъективно вследствие инъективности для предпучков с Witt-трансферами, и из коммутативности правого квадрата, следует, что $\mathcal{F}_{Nis}(i_X)$ — инъективно. \square

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В работе обоснована гомотопическая инвариантность пучков, ассоциированных в топологии Нисневича с гомотопически инвариантными предпучками с

Witt-трансферами. Следующим шагом построения категории *Witt*-мотивов является доказательство гомотопической инвариантности когомологий, планируемое в будущей работе.

В приведённом доказательстве изоморфизма этального вырезания не используется предположение о факторизации по гиперболическим пространствам в определении морфизмов категории *Wor*.

Автор благодарен своему научному руководителю чл.-корр. РАН И.А. Панину за постановку задачи и оказанную помощь в её решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Voevodsky V. Triangulated Category of Motives over a field, Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories (V. Voevodsky, A. Suslin and E. Friedlander, eds.), Annals of Math. Studies, 1999.
- [2] Balmer P. Witt groups Handbook of K-theory, vol. 2, Springer, Berlin (2005), 539–576.
- [3] Hartshorne R. Algebraic Geometry, Graduate Texts in Mathematics 52, Springer (1977).
- [4] Ojanguren M.; Panin I. A purity theorem for the Witt group. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 32 (1999), no. 1, 71–86.
- [5] Altman A.; Kleiman S. Introduction to Grothendieck Duality Theory, Lecture Notes in Mathematics 146, Springer (1970).
- [6] Сохранение гомотопической инвариантности предпучков с *Witt*-трансферами при пучковании в топологии Зарисского, ПОМИ ПРЕПРИНТ - 07/2014.