

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

СОХРАНЕНИЕ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ
ИНВАРИАНТНОСТИ ПРЕДПУЧКОВ С
Witt-ТРАНСФЕРАМИ ПРИ ПУЧКОВАНИИ В
ТОПОЛОГИИ ЗАРИССКОГО.

А.Э. Дружинин¹

Санкт-Петербургский Государственный Университет,
математико-механический факультет,
С.-Петербург, Ст. Петергоф, Университетский пр., 28, 198504
andrei.druzh@gmail.com

Май 2014.

АННОТАЦИЯ.

В статье рассматриваются предпучки абелевых групп с *Witt*-трансферами. Такие трансферы являются некоторым вариантом ориентированных трансферов, а предпучки с этими трансферами определяются как функторы из категории *Wor*, которая является некоторым расширением категории гладких аффинных схем. В данной статье доказан изоморфизм вырезания по Зарисскому на аффинной прямой для гомотопически инвариантных предпучков с *Witt*-трансферами. Из этого изоморфизма выведено, что пучок в топологии Зарисского ассоциированный с гомотопически инвариантным предпучком с *Witt*-трансферами гомотопически инвариантен. Доказательство изоморфизма вырезания осуществляется посредством построения специальных морфизмов в категории *Wor*, действующих в сторону противоположную заданным морфизмам схем.

Ключевые слова. предпучок с трансферами, гомотопическая инвариантность, изоморфизм вырезания.

¹Поддержан грантом РФФИ 14-01-31095.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А.
Стеклова РАН.

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич , Н.А.Вавилов , А.М.Вершик , М.А.Всемирнов,
А.И.Генералов , И.А.Ибрагимов, Л.Ю.Колотилина, Г.В.Кузьмина,
П.П.Кулиш , Б.Б.Лурье , Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев,
С.И.Репин , Г.А.Серегин , В.Н.Судаков , О.М.Фоменко

1. ВВЕДЕНИЕ.

В развитие результатов В.А. Воеводского, по построению категории мотивов DM^- [1], И.А. Паниным была поставлена задача построения категории $Witt$ -мотивов. Необходимым этапом решения этой задачи является доказательство гомотопической инвариантности пучка, ассоциированного с гомотопически инвариантным предпучком с $Witt$ -трансферами. В данной статье это доказано для пучка ассоциированного в топологии Зарисского.

В параграфе 2 даётся определение предпучков с $Witt$ -трансферами на категории гладких аффинных многообразий над некоторым полем как функторов из некоторой категории Wor , в которую вкладывается категория гладких аффинных многообразий, формулируются основные свойства категории Wor и предпучков с $Witt$ -трансферами, а также приводится описание свойства гомотопической инвариантности для таких предпучков.

В параграфе 3 доказывается изоморфизм вырезания на аффинной прямой для гомотопически инвариантного предпучка с $Witt$ -трансферами, т.е. изоморфизма

$$\frac{\mathcal{F}(V - z)}{\mathcal{F}(V)} \xrightarrow{\sim} \frac{\mathcal{F}(U - z)}{\mathcal{F}(U)},$$

где $U \hookrightarrow V$ — пара вложенных окрестностей по Зариссому точки $z \in \mathbb{A}^1$. Доказательство осуществляется путём построения специального морфизма в категории Wor , являющегося обратным к вложению $U \hookrightarrow V$.

В параграфе 4 из изоморфизмов вырезания выводится сюръективность

$$\mathcal{F}|_{\mathbb{A}^1} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_{Zar}|_{\mathbb{A}^1}$$

канонического отображения из сечений предпучка в сечения ассоциированного пучка в топологии Зарисского при ограничении на \mathbb{A}^1 . Из чего следует основной результат о сохранении гомотопической инвариантности, т.е. изоморфизмы

$$\mathcal{F}_{Zar}(X) \simeq \mathcal{F}_{Zar}(\mathbb{A}^1 \times X)$$

для всех X .

2. ПРЕДПУЧКИ С $Witt$ -ТРАНСФЕРАМИ.

Пусть Sm_k — категория аффинных гладких многообразий над полем k . Определим аддитивную категорию Wor_k .

Определение 1 (Wor_k).

- $Ob Wor_k = Ob Sm$;
- $Wor_k(X, Y)$ — группа Витта категории пучков $\mathcal{O}(X \times Y)$ -модулей, конечно порождённых проективных над $\mathcal{O}(X)$, с двойственностью $P \mapsto \widehat{P_{\mathcal{O}(X)}} = Hom_{\mathcal{O}(X)}(P, \mathcal{O}(X))$ (в соответствии с определением 27 из [2]);
- композиция морфизмов $\Phi \in Wor_k(X, Y)$ и $\Psi \in Wor_k(Y, Z)$ определяется как тензорное произведение над $\mathcal{O}(Y)$ соответствующих квадратичных пространств (см. Замечание 1.1);
- тождественный морфизм определяется диагональю, т.е. пучком ${}_{\mathcal{O}(X)}\mathcal{O}(X)_{\mathcal{O}(X)}$ и каноническим изоморфизмом $\mathcal{O}(X) \simeq Hom_{\mathcal{O}(X)}(\mathcal{O}(X), \mathcal{O}(X))$ (такое квадратичное пространство будем обозначать $E_{\mathcal{O}(X)}$);

Замечание 1.

1. Для определения композиции используются канонические гомоморфизмы:

$$\begin{aligned} \text{Hom}(P_Y, \mathcal{O}(Y)) \otimes_{\mathcal{O}(Y)} \text{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(P_X, \mathcal{O}(X)) &\xrightarrow{\sim} \\ \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}(Y)}(P_Y, \text{Hom}(P_X, \mathcal{O}(X))) &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(P_Y \otimes_{\mathcal{O}(Y)} P_X, \mathcal{O}(X)), \end{aligned}$$

первый из которых является изоморфизмом, когда P_Y — конечно порождённый проективный над $\mathcal{O}(Y)$.

2. Можно определить функтор вложения $Sm_k \rightarrow W or_k$, переводящий регулярное отображение $f: X \rightarrow Y$ в морфизм, определяемый пучком ${}_{\mathcal{O}(X)}\mathcal{O}(X)_{\mathcal{O}(Y)}$ и каноническим изоморфизмом $\mathcal{O}(X)_{\mathcal{O}(Y)} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}(X)}(\mathcal{O}(X)_{\mathcal{O}(Y)}, \mathcal{O}(X))$.

3. Квадратичное пространство, определяющее композицию $\Phi \in W or_k(X, Y)$ с регулярным отображением $f: Y \rightarrow Z$, является “прямым образом” квадратичного пространства определяющего Φ вдоль $id_X \times f$.

3'. Квадратичное пространство, определяющее композицию $\Phi \in W or_k(Y, Z)$ с регулярным отображением $f: X \rightarrow Y$, является обратным образом квадратичного пространства определяющего Φ вдоль $f \times id_Z$.

4. $W or_k$ можно расширить на существенно гладкие схемы, присоединив их как формальные пределы (другими словами, рассмотреть подкатегорию категории про-объектов $W or_k$, состоящую из диаграмм, в которых все морфизмы являются открытыми вложениями).

5. Для $K = k(X)$ — поля частных произвольного гладкого аффинного многообразия X , категория $W or_K$ вкладывается в расширенную категорию $W or_k$.

6. Категорию $W or_k$ можно расширить на пары (X_1, X_2) , где X_2 — открытое подмножество X_1 , определив морфизмы между парами $i_X: X_2 \hookrightarrow X_1$, $i_Y: Y_2 \hookrightarrow Y_1$:

$$\begin{aligned} W or_k((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) &= \\ &= \text{coker}(W or_k(X_1, Y_2) \xrightarrow{(i_Y \circ -, - \circ i_X)} W or_k^{\rightarrow\rightarrow}(X_2 \rightarrow X_1, Y_2 \rightarrow Y_1)), \end{aligned}$$

где $W or_k^{\rightarrow\rightarrow}$ — категория стрелок. Т.е. морфизм $W or_k((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))$ определяется парой $\Phi_i \in W or_k(X_i, Y_i)$, $i = 1, 2$, согласованной с вложениями (т.е. $\Phi_1 \circ i_X = i_Y \circ \Phi_2$), и пары вида $(i_Y \circ \Xi, \Xi \circ i_X)$, для $\Xi \in W or_k(X_1, Y_2)$ считаются равными 0.

$$\begin{array}{ccc} X_2 \xleftarrow{i_X} X_1 & & X_2 \xleftarrow{i_X} X_1 \\ \downarrow \Phi_2 & & \downarrow \Xi \circ i_X \\ Y_2 \xleftarrow{i_Y} Y_1 & & Y_2 \xleftarrow{i_Y} Y_1 \end{array}$$

Определим также категорию $\overline{W or_k}$, в которой гомотопные морфизмы отождествляются.

Определение 2 ($\overline{W or_k}$).

- $Ob \overline{W or_k} = Ob W or_k$.
- $\overline{W or_k}(X, Y) = \text{coker}(W or_k(\mathbb{A}^1 \times X, Y) \xrightarrow{(- \circ i_0) - (- \circ i_1)} W or_k(X, Y))$,
где $i_0, i_1: X \hookrightarrow \mathbb{A}^1 \times X$ — нулевое и единичное сечения $\mathbb{A}^1 \times X$.

Замечание 2.

1. Категория $\overline{W or_k}$ получается из $W or_k$ локализацией по проекциям $\mathbb{A}^1 \times X \rightarrow X$ для всех X .

2. Категорию $\overline{Wor_k}$ можно расширить на существенно гладкие схемы, добавив их как формальные пределы.
3. Аналогично Wor_k , категория $\overline{Wor_k}$ расширяется на пары (X_1, X_2) :

$$\begin{aligned} \overline{Wor_k}((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)) &= \\ &= \text{coker}(Wor_k((\mathbb{A}^1 \times X_1, \mathbb{A}^1 \times X_2), (Y_1, Y_2)) \xrightarrow{(- \circ i_0) - (- \circ i_1)} Wor_k((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))). \end{aligned}$$

Определение 3 (Предпучок с *Witt*-трансферами). Предпучком абелевых групп с *Witt*-трансферами называется функтор $F: Wor_k \rightarrow Ab$.

Замечание 3.

1. Для гладкой схемы X и её точки x определим росток произвольного предпучка F стандартным образом, положив

$$\mathcal{F}\left(\varprojlim_{z \in U \subset X} U\right) = \varinjlim_{z \in U \subset X} \mathcal{F}(U).$$

А так же зададим значения произвольного предпучка на существенно гладкой схеме как индуктивный предел значений этого предпучка на гладкой схемах.

2. Для произвольного предпучка абелевых групп \mathcal{F} можно определить предпучок \mathcal{F}' на парах (X_1, X_2) (X_2 — открытое в X_1):

$$\mathcal{F}'((X_1, X_2)) = \frac{\mathcal{F}(X_2)}{\mathcal{F}(X_1)};$$

При этом, если \mathcal{F} — предпучок с *Witt*-трансферами, то определённый таким образом \mathcal{F}' является функтором на расширенной в смысле замечания 1.6 категории Wor_k .

3. Пучком с *Witt*-трансферами называется предпучок, который является пучком и имеет *Witt*-трансферы.
4. Гомотопически инвариантным предпучком с *Witt*-трансферами называется предпучок, который гомотопически инвариантен и имеет *Witt*-трансферы. Такой предпучок пропускается через $Wor_k \rightarrow \overline{Wor_k}$.

3. ВЫРЕЗАНИЕ НА \mathbb{A}^1

Теорема 1. Пусть \mathcal{F} — гомотопически инвариантный предпучок с *Witt*-трансферами, тогда для двух вложенных окрестностей по Зарисскому $U \subset V$ точки z в \mathbb{A}^1_K (для $K = k(X)$ — поле частных многообразия X) ограничение

$$i^*: \frac{\mathcal{F}(V - z)}{\mathcal{F}(V)} \rightarrow \frac{\mathcal{F}(U - z)}{\mathcal{F}(U)}$$

является изоморфизмом (i обозначает вложение U в V).

Замечание 4.

1. Предпучок \mathcal{F} можно ограничить на схемы над K , и в терминах замечания 3.2 теорема 1 означает, что $i^*: \mathcal{F}'(V, V - z) \rightarrow \mathcal{F}'(U, U - z)$ — изоморфизм.
2. Поскольку гомотопически инвариантный предпучок с *Witt*-трансферами как функтор из Wor_k пропускается через $\overline{Wor_k}$, то теорема 1 следует из следующей леммы.

Лемма 3.1. $[i]: (U, U - z) \rightarrow (V, V - z)$ в $\overline{Wor_k}$ является изоморфизмом.

Замечание 5.

a) Правый обратный к $[i]$ определяется элементом $\Phi \in \overline{Wor}_K((V, V - z), (U, U - z))$ таким, что $[i \circ \Phi] = [id] \in \overline{Wor}_K((V, V - z), (V, V - z))$. Что означает существование $\Theta \in \overline{Wor}_K((V \times \mathbb{A}^1, (V - z) \times \mathbb{A}^1), (V, V - z))$ такого, что

$$(3.1) \quad \Theta \circ j_0 = i \circ \Phi, \quad \Theta \circ j_1 = id,$$

где j_0, j_1 — вложения нулевого и единичного сечений в $(V, V - z) \times \mathbb{A}^1$.

$$\begin{array}{ccccc} & (V - z) \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\quad} & V \times \mathbb{A}^1 & \\ & \nearrow j_0 & & \searrow & \downarrow \Theta' \\ V - z & \xrightarrow{i \circ \Phi} & V & \xleftarrow{\quad} & \downarrow \Theta \\ & \searrow & & \nearrow & \downarrow id \\ & & V - z & \xleftarrow{\quad} & V \end{array} .$$

b) Левый обратный к $[i]$ определяется элементом $\Psi \in \overline{Wor}_K((V, V - z), (U, U - z))$ таким, что $[\Psi \circ i] = [id] \in \overline{Wor}_K((U, U - z), (U, U - z))$. Что означает существование $\Xi \in \overline{Wor}_K((U \times \mathbb{A}^1, (U - z) \times \mathbb{A}^1), (U, U - z))$ такого, что

$$(3.2) \quad \Xi \circ j_0 = \Psi \circ i, \quad \Xi \circ j_1 = id,$$

где j_0, j_1 — вложения нулевого и единичного сечений в $(U, U - z) \times \mathbb{A}^1$.

$$\begin{array}{ccccc} & (U - z) \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\quad} & U \times \mathbb{A}^1 & \\ & \nearrow j_0 & & \searrow & \downarrow \Xi' \\ U - z & \xrightarrow{\Psi \circ i} & U & \xleftarrow{\quad} & \downarrow \Xi \\ & \searrow & & \nearrow & \downarrow id \\ & & U - z & \xleftarrow{\quad} & U \end{array} .$$

Доказательство леммы 3.1

Перейдём к рассмотрению схем над K , и будем строить искомые морфизмы в категории \overline{Wor}_K , которая является подкатегорией в \overline{Wor}_k .

a) Для построения правого обратного к $i \in \overline{Wor}((U, U - z), (V, V - z))$ нужно найти квадратичные пространства P и H , соответствующие элементам Φ и Θ , а именно:

1. $P \in K[U \times V] - mod$ — конечно порождённый, проективный над $K[V]$ и $K[U \times V]$ -линейный изоморфизм $P \simeq \text{Hom}(P, K[V])$,
2. $H \in K[V \times V \times \mathbb{A}^1] - mod$ — конечно порождённый, проективный над $K[V \times \mathbb{A}^1]$ и $K[V \times V \times \mathbb{A}^1]$ -линейный изоморфизм $H \simeq \text{Hom}(H, K[V \times \mathbb{A}^1])$,

такие, что:

3. канонические отображения

$$\begin{aligned} P \otimes_{K[V]} K[V - z] &\rightarrow K[U - z] \otimes_{K[U]} P \otimes_{K[V]} K[V - z], \\ H \otimes_{K[V]} K[V - z] &\rightarrow K[V - z] \otimes_{K[V]} H \otimes_{K[V]} K[V - z] \end{aligned}$$

являются изоморфизмами (здесь одна из структур $K[V]$ -модуля на H подразумевается правой, а другая — левой), что означает, что P и H задают морфизмы пар,

4. и в группе Витта категории $K[V \times V]$ -модулей, конечно порождённых, проективных над второй компонентой $K[V]$, с функтором двойственности

$\text{Hom}_{K[V]}(-, K[V])$, верны равенства

$$(3.3) \quad \begin{aligned} [H \otimes_{K[V \times \mathbb{A}^1]} K[V \times 0]] &= [{}_{K[V]} K[U] \otimes_{K[U]} P] \\ [H \otimes_{K[V \times \mathbb{A}^1]} K[V \times 1]] &= [E_{K[V]}], \end{aligned}$$

что означает выполнение тождеств (3.1).

Обозначим $D = \mathbb{A}^1_K \setminus V$ и $D' = \mathbb{A}^1_K \setminus U$. Будем рассматривать $V \times V$ и $U \times V$ как подмножества в \mathbb{A}^2_K и обозначим координаты соответственно X и Y .

Для достаточно большого нечётного n по интерполяционной теореме найдём многочлен $f_0 \in K[X, Y]$, по X имеющий степень n и старший коэффициент 1, такой, что

$$f_0|_{(z \cup D) \times V} = (X - Y)^n, \quad f_0|_{(V \setminus U) \times V} = 1.$$

И определим $f = f_0 \cdot (1 - t) + (X - Y)^n \cdot t$, тогда

$$f|_{(z \cup D) \times V \times \mathbb{A}^1} = (X - Y)^n, \quad f|_{\mathbb{A}^1 \times V \times 0} = f_0, \quad f|_{\mathbb{A}^1 \times V \times 1} = (X - Y)^n.$$

Положим модули P и H равными $K[U \times V]/(f_0)$ и $K[V \times \mathbb{A}^1 \times V]/(f)$ соответственно.

Прежде чем определять структуры квадратичных пространств, проверим выполнение условия 3. Поскольку $f_0|_{z \times V} = (X - Y)^n$ — обратим на $z \times (V - z)$, то

$$\begin{aligned} P \otimes_{K[V]} K[V - z] &= K[U \times (V - z)]/(f_0) = \\ &= K[(U - z) \times (V - z)]/(f_0) = K[U - z] \otimes_{K[U]} P \otimes_{K[V]} K[V - z]. \end{aligned}$$

Аналогично, поскольку $f|_{z \times V \times \mathbb{A}^1} = (X - Y)^n$ — обратим на $z \times (V - z) \times \mathbb{A}^1$,

$$\begin{aligned} H \otimes_{K[V]} K[V - z] &= K[V \times (V - z) \times \mathbb{A}^1]/(f) = \\ &= K[(V - z) \times (V - z) \times \mathbb{A}^1]/(f) = K[V - z] \otimes_{K[V]} H \otimes_{K[V]} K[V - z]. \end{aligned}$$

Теперь убедимся, что P и H — свободные модули над $K[V]$ и $K[\mathbb{A}^1 \times V]$ соответственно. Поскольку старшие коэффициенты f_0 и f по Y равны 1, то $K[\mathbb{A}^1 \times V]/(f_0)$ и $K[\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1]/(f)$ — свободные модули ранга n над $K[V]$ и $K[\mathbb{A}^1 \times V]$ соответственно. А поскольку f_0 обратим на $D' \times V$, то $K[\mathbb{A}^1 \times V]/(f_0)$ является $K[U \times V]$ -модулем и изоморфен P , и аналогично, поскольку $f|_{D \times V \times \mathbb{A}^1}$ равен $(X - Y)^n$ и обратим, то $K[\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1]/(f) \simeq H$.

Чтобы определить структуры квадратичных пространств на P и H , сначала определим некоторые $K[S]$ -линейный и $K[S_0]$ -линейный изоморфизмы

$$\begin{aligned} q_S: K[S] &\simeq \text{Hom}(K[S], K[V \times \mathbb{A}^1]), \\ q_{S_0}: K[S_0] &\simeq \text{Hom}(K[S_0], K[V]), \end{aligned}$$

где $S = \text{div}_0 f$ — замкнутая подсхема $V \times V \times \mathbb{A}^1$ и $S_0 = \text{div}_0 f_0$ — замкнутая подсхема $U \times V$. После чего ограничениями скаляров вдоль вложений $i_S: S \hookrightarrow V \times V \times \mathbb{A}^1$ и $i_{S_0}: S_0 \hookrightarrow U \times V$ получим искомые изоморфизмы $q_H: H \simeq \text{Hom}(H, K[V \times \mathbb{A}^1])$ и $q_P: P \simeq \text{Hom}(P, K[V])$.

Рассмотрим отображение $F = (f, \text{pr}_{V \times \mathbb{A}^1}): \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1$, и обозначим через A кольцо $K[\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1]$, и $B = K[\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1]$, рассматриваемое с помощью F как A -алгебру. Поскольку старший коэффициент f по X равен 1, то B является свободным A -модулем ранга n . Значит, F — конечный сюръективный морфизм гладких неприводимых многообразий, и по утверждению 2.1 из [3] существует B -линейный изоморфизм $\omega(B/A) \simeq \text{Hom}(B, A)$. Поскольку,

канонический класс $\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1$ тривиален, то тривиален и относительный канонический класс $\omega(F) = \omega(B/A)$, и выбрав некоторую тривиализацию, получим B -линейный изоморфизм $q_B: B \simeq \text{Hom}(B, A)$. Поскольку, как уже отмечалось, $f|_{D \times V \times \mathbb{A}^1}$ — обратим, то

$$K[S] = K[V \times V \times \mathbb{A}^1]/(f) \simeq K[\mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1]/(f) = B \otimes_A K[0 \times V \times \mathbb{A}^1],$$

поскольку $f_0|_{D \times V}$ — обратим и $f_{\mathbb{A}^1 \times V \times 0} = f_0$, то

$$K[S_0] = K[U \times V]/(f_0) \simeq K[\mathbb{A}^1 \times V]/(f_0) \simeq K[S] \otimes_{K[V \times \mathbb{A}^1]} K[V \times 0].$$

Таким образом, имеет место коммутативная диаграмма, состоящая из декартовых квадратов

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{\quad} & S & \xleftarrow{\quad} & S_0 \\ \downarrow F & & \downarrow pr_{V \times \mathbb{A}^1} & & \downarrow pr_V \\ \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{0 \times id_{V \times \mathbb{A}^1}} & V \times \mathbb{A}^1 & \xleftarrow{j_0} & V. \end{array}$$

Теперь получим изоморфизм q_S из q_B заменой базы вдоль $0 \times id_{V \times \mathbb{A}^1}$, и последующей заменой базы вдоль j_0 получим изоморфизм q_{S_0} .

Для проверки первого равенства из 3.3 рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccc} & & S_0 & \longrightarrow & S \\ & \swarrow i_{S_0} & \downarrow & & \downarrow i_S \\ U \times V & \xrightarrow{i \times id_V} & V \times V & \xrightarrow{id_V \times j_0} & V \times V \times \mathbb{A}^1 \\ & & \downarrow pr_V & & \downarrow pr_{V \times \mathbb{A}^1} \\ & & V & \xrightarrow{j_0} & V \times \mathbb{A}^1, \end{array}$$

в которой квадраты декартовы. Квадратичная форма на модуле $K[V] \otimes_{K[U]} P$ получается из q_P ограничением скаляров вдоль $i \times id_V$, и, пользуясь определением q_P и q_{S_0} , получаем, что она получается из q_S последовательным применением замены базы $id_V \times 0$ и ограничения скаляров вдоль вложения i_{S_0} . Квадратичная форма на $H \otimes_{K[V \times \mathbb{A}^1]} K[V \times 0]$ получается из q_H заменой базы вдоль $id_V \times 0$, и значит, она получается из q_S последовательным ограничением скаляров вдоль вложения i_S и заменой базы вдоль $id_V \times 0$. Таким образом, поскольку ограничение скаляров коммутирует с заменой базы, эти квадратичные формы совпадают.

Осталось добиться выполнения второго равенства из 3.3, т.е. того, чтобы класс квадратичного пространства $L = K[V \times 1] \otimes_{K[V \times \mathbb{A}^1]} H$ совпадал с классом пространства $E_{K[V]}$. $L \simeq K[V \times V]/(f|_{\mathbb{A}^1 \times V \times 1}) \simeq K[V \times V]/(X - Y)^n$. Поскольку полученная квадратичная форма q_L на $L = K[V \times V]$ -линейна, то она $K[V \times V]/(X - Y)^n$ -линейна. Пусть $n = 2m + 1$, и рассмотрим идеалы $I = (X - Y)^m, J = (X - Y)^{m+1} \subset K[V \times V]/(X - Y)^n$ как подпространства в L . По приведённой ниже подлемме, $I = J^\perp$. Значит, J — подлагранжево подпространство L , и по редукции по подлагранжевому подпространству (теорема 32 [2]), класс $[L]$ в группе Витта совпадает с классом пространства J/I . J/I — свободный модуль ранга 1 над $K[V]$, и квадратичная форма на нём определяется некоторой обратимой функцией $l \in K[V]^*$. Тогда домножим квадратичные формы, определённые на P и H , на l^{-1} , и класс $K[V \times 0] \otimes_{K[V \times \mathbb{A}^1]} H$ станет равен классу $E_{K[V]}$.

Подлемма 3.1.1. Пусть B — A -алгебра, и $q: B \simeq \text{Hom}_A(B, A)$ — B -линейная невырожденная квадратичная форма на B . Тогда для любого идеала I в B ортогонал I в B по отношению к q совпадает с аннулятором I в B .

Доказательство. Поскольку q — B -линейна, $q(I \cdot I^\perp, B) = q(I, I^\perp) = 0$, следовательно $I \cdot I^\perp \subset L^\perp$, но q — не вырождена, и следовательно $I \cdot I^\perp = 0$. Таким образом, $I^\perp \subset \text{Ann } I$. С другой стороны $q(I, \text{Ann } I) = q(I \cdot \text{Ann } I, B) = 0$, и следовательно $\text{Ann } I \subset I^\perp$. \square

b) Для построения левого обратного нужно найти квадратичные пространства P и H , соответствующие элементам Ψ и Ξ , а именно:

1. $P \in K[U \times V] - \text{mod}$ — конечно порождённый, проективный над $K[V]$ и $K[U \times V]$ -линейный изоморфизм $P \simeq \text{Hom}(P, K[V])$,
2. $H \in K[U \times U \times \mathbb{A}^1] - \text{mod}$ — конечно порождённый, проективный над $K[U \times \mathbb{A}^1]$ и $K[U \times U \times \mathbb{A}^1]$ -линейный изоморфизм $H \simeq \text{Hom}(H, K[U \times \mathbb{A}^1])$,
- такие, что:
3. канонические отображения:

$$\begin{aligned} P \otimes_{K[V]} K[V - z] &\rightarrow K[U - z] \otimes_{K[U]} P \otimes_{K[V]} K[V - z], \\ H \otimes_{K[U]} K[U - z] &\rightarrow K[U - z] \otimes_{K[U]} H \otimes_{K[U]} K[U - z] \end{aligned}$$

являются изоморфизмами (здесь одна из структур $K[U]$ -модуля на H подразумевается правой, а другая — левой), что означает, что P и H задают морфизмы пар,

4. и существуют изоморфизмы квадратичных пространств

$$(3.4) \quad \begin{aligned} H \otimes_{K[U \times \mathbb{A}^1]} K[U \times 0] &\simeq P \otimes_{K[V]} K[U] \\ H \otimes_{K[U \times \mathbb{A}^1]} K[U \times 1] &\simeq E_{K[U]} \oplus G, \end{aligned}$$

где G — $K[U \times U]$ -модуль, конечно порождённый проективный над второй компонентой $K[U]$, и такой что $K[U - z] \otimes_{K[U]} G = G$ (здесь произведение берётся над первой компонентой), что обеспечивает выполнение тождеств (3.2).

Обозначим Δ — график вложения $U \hookrightarrow \mathbb{A}^1$, т.е. $\text{Spec } K[\mathbb{A}^1 \times U]/(X - Y)$. Для некоторого достаточно большого n по интерполяционной теореме найдём многочлены $f_0 \in K[\mathbb{A}^1 \times V]$, $g \in K[\mathbb{A}^1 \times U]$, по X имеющие степень n и $n - 1$ соответственно и старший коэффициент 1, такие, что

$$\begin{aligned} f_0|_{D' \times V} &= 1, & f_0|_{z \times V} &= X - Y, \\ g|_{D' \times U} &= (X - Y)^{-1}, & g|_{z \times U} &= 1, & g|_\Delta &= 1, \end{aligned}$$

поскольку $D' \cap U = \emptyset$ и $X - Y$ обратим на $D' \times U$.

Определим $f_1 = g \cdot (X - Y) \in K[X][U] = K[\mathbb{A}^1 \times U]$ и $f = f_0 \cdot (1 - t) + f_1 \cdot t \in K[X][U][t] = K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]$, тогда

$$f|_{z \times U \times \mathbb{A}^1} = (X - Y), \quad f|_{D' \times U \times \mathbb{A}^1} = 1, \quad f|_{\mathbb{A}^1 \times U \times 0} = f_0|_{\mathbb{A}^1 \times U}, \quad f|_{\mathbb{A}^1 \times U \times 1} = f_1.$$

Положим P и H равными $K[U \times V]/(f_0)$ и $K[U \times \mathbb{A}^1 \times U]/(f)$ соответственно.

Поскольку $f_0|_{D' \times V} = 1$, $K[U \times V]/(f_0) \simeq K[\mathbb{A}^1 \times V]/(f_0)$, а поскольку старший коэффициент f_0 по X равен 1, то $K[\mathbb{A}^1 \times V]/(f_0)$ — свободный модуль ранга n над $K[V]$. Значит, P — свободный модуль ранга n над $K[V]$. Аналогично, поскольку $f|_{D' \times V \times \mathbb{A}^1} = 1$, и старший коэффициент f по X равен 1, то H — свободный модуль ранга n над $K[U \times \mathbb{A}^1]$.

Рассмотрим модули $P \otimes_{K[V]} K[V - z]$ и $H \otimes_{K[V]} K[V - z]$. Поскольку $f_0|_{z \times V} = X - Y$ — обратим на $z \times (V - z)$,

$$\begin{aligned} P \otimes_{K[V]} K[V - z] &= K[U \times (V - z)]/(f_0) = \\ &= K[(U - z) \times (V - z)]/(f_0) = K[U - z] \otimes_{K[U]} P \otimes_{K[V]} K[V - z]. \end{aligned}$$

И аналогично, поскольку $f|_{z \times U \times \mathbb{A}^1} = X - Y$ — обратим на $z \times (U - z) \times \mathbb{A}^1$,

$$\begin{aligned} H \otimes_{K[U]} K[U - z] &= K[u \times (U - z) \times \mathbb{A}^1]/(f) = \\ &= K[(U - z) \times (U - z) \times \mathbb{A}^1]/(f) = K[U - z] \otimes_{K[U]} H \otimes_{K[U]} K[U - z]. \end{aligned}$$

Нужно определить структуры квадратичных пространств на P и H , совпадающие после замен баз $U \hookrightarrow V$ и $V \times 0 \rightarrow V \times \mathbb{A}^1$ соответственно, в соответствии с первым изоморфизмом из (3.4). Сделаем это с помощью отображений $F_0 = (f_0, pr_V): \mathbb{A}^1 \times V \rightarrow \mathbb{A}^1 \times V$ и $F = (f, pr_{U \times \mathbb{A}^1}): \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$. Обозначим $f'_0 = f_0|_{\mathbb{A}^1 \times U}$, тогда, поскольку $f_0|_{\mathbb{A}^1 \times U} = f'|_{\mathbb{A}^1 \times U \times 0}$, имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} & div_0 f_0 & & div_0 f'_0 & & div_0 f \\ & \searrow & & \swarrow & & \downarrow \\ \mathbb{A}^1 \times V & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{A}^1 \times U & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 \\ \downarrow F_0 & & \downarrow & & \downarrow id_U \times 0 \\ \mathbb{A}^1 \times V & \xleftarrow{\quad} & \mathbb{A}^1 \times U & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 \\ & \searrow & & \swarrow & & \downarrow \\ & & V & & U & \\ & & \downarrow & & \downarrow id_U \times 0 & \\ & & \mathbb{A}^1 \times V & \xleftarrow{id_{\mathbb{A}^1 \times U} \times 0} & \mathbb{A}^1 \times V \times \mathbb{A}^1 & . \end{array}$$

Поскольку старшие коэффициенты по X многочленов f_0 и f равны 1, то F_0 и F — конечные сюръектиые морфизмы относительных аффинных прямых \mathbb{A}^1_V и $\mathbb{A}^1_{U \times \mathbb{A}^1}$ соответственно. Пусть $A_0 = K[\mathbb{A}^1 \times V]$, $A = K[\mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1]$, B_0 — A_0 -алгебра, соответствующая отображению F_0 , и B — A -алгебра, соответствующая отображению F . Поскольку изоморфизм из утверждения 2.1 из [3] согласован с заменой базы, существуют согласованные B_0 -линейный и B -линейный, соответственно, изоморфизмы

$$\begin{aligned} \omega(\mathbb{A}^1_U)F_0^*(\omega(\mathbb{A}^1_U))^{-1} &\simeq \omega(F_0) \simeq \text{Hom}(B_0, A_0) \\ \omega(\mathbb{A}^1_{U \times \mathbb{A}^1})F^*(\omega(\mathbb{A}^1_{U \times \mathbb{A}^1}))^{-1} &\simeq \omega(F) \simeq \text{Hom}(B, A). \end{aligned}$$

Выбрав некоторую тривиализацию канонического класса \mathbb{A}^1 , получим согласованные тривиализации \mathbb{A}^1_V и $\mathbb{A}^1_{U \times \mathbb{A}^1}$, и в результате согласованные B_0 -линейный и B -линейный соответственно изоморфизмы

$$\begin{aligned} q_{B_0}: B_0 &\simeq \text{Hom}_{A_0}(B_0, A_0) \\ q_B: B &\simeq \text{Hom}_A(B, A). \end{aligned}$$

Заменами баз вдоль $0 \times id_V: V \rightarrow \mathbb{A}^1 \times V$ и $0 \times id_{U \times \mathbb{A}^1}: U \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1 \times U \times \mathbb{A}^1$ и последующими ограничениями скаляров вдоль $K[U \times V] \rightarrow K[U \times V]/(f_0)$ и $K[U \times U \times \mathbb{A}^1] \rightarrow K[U \times U \times \mathbb{A}^1]/(f)$ соответственно из q_{B_0} и q_B получим согласованные $q_P: P \simeq \text{Hom}(P, K[V])$ и $q_H: H \simeq \text{Hom}(H, K[U \times \mathbb{A}^1])$.

Для завершения доказательства, нужно добиться выполнение второго равенства из (3.4). Поскольку $g \equiv 1(\text{mod}(X - Y))$, кольцо $K[U \times U]/(f_1)$ раскладывается в произведение $K[U] \simeq K[U \times U]/(X - Y)$ и $G = K[U \times U]/(g)$, и поскольку

$q_H = K[U \times U \times \mathbb{A}^1]$ -линейный, то имеет место разложение в прямую сумму для квадратичного пространства

$$K[U \times 1] \otimes_{K[U \times \mathbb{A}^1]} H \simeq K[U \times U]/(f_1) \simeq K[U] \oplus G,$$

и поскольку $g|_{z \times U}$ — обратима, то $K[U - z] \otimes_{K[U]} G \simeq G$. Квадратичная форма, получающаяся из квадратичной формы на $K[U \times 1] \otimes_{K[U \times \mathbb{A}^1]} H$ ограничением на слагаемое $K[U]$ может оказаться не единичной. Как квадратичная форма на свободном $K[U]$ -модуле ранга 1, она определяется обратимой функцией ε . Поскольку на $K[U \times V]$ -модуле P и на $K[U \times U \times \mathbb{A}^1]$ -модуле H есть согласованные структуры $K[U]$ -модулей (по координате X), можно домножить квадратичные формы на ε^{-1} . И тогда квадратичное пространство $K[U \times 1] \otimes_{K[U \times \mathbb{A}^1]} H$ будет суммой единичного пространства $K[U]$ и G , задающего морфизм из U в $U - z$. \square

4. ГОМОТОПИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ АССОЦИИРОВАННОГО ПУЧКА.

Теорема 2. Для гомотопически инвариантного предпучка \mathcal{F} с Witt-трансферами, ассоциированный пучок в топологии Зарисского \mathcal{F}_{Nis} гомотопически инвариантен.

Выведем её из следующей леммы:

Лемма 4.1. Пусть \mathcal{F} — гомотопически инвариантный пучок с Witt-трансферами. Тогда каноническое отображение $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_{Zar}(U)$ сюръективно для любого открытого по Зарисскому подмножества $U \subset \mathbb{A}^1_K$, для произвольного поля K , являющегося полем частных некоторого гладкого многообразия.

Доказательство леммы 4.1. Пусть $s \in F_{Zar}(U)$. Пусть $c: \mathfrak{U} \rightarrow U$ — покрытие по Зарисскому, для которого существует $s_{\mathfrak{U}}$, такое что $c^*(s) = \varepsilon(s_{\mathfrak{U}})$, где ε — естественное преобразование $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{Zar}$. Обозначим V одно открытое подмножество U входящее в \mathfrak{U} , и для каждой точки $z \in U \setminus V$ U_z — открытое подмножество входящее в \mathfrak{U} и содержащее z .

Выберем некоторую точку $z \in U \setminus V$. Обозначим через V_1 наименьшее открытое подмножество \mathbb{A}^1_K , содержащее V и z . Рассмотрим элемент $s_V \in \mathcal{F}(V)$ — ограничение $s_{\mathfrak{U}}$ на V , и его образ $r_z \in \frac{\mathcal{F}(V)}{\mathcal{F}(V_1)}$. По теореме 1

$$\frac{\mathcal{F}(V)}{\mathcal{F}(V_1)} \simeq \lim_{z \in W \subset \mathbb{A}^1_K} \frac{\mathcal{F}(W - z)}{\mathcal{F}(W)}.$$

Поскольку существует $s_z \in \mathcal{F}(V_z)$ (ограничение $s_{\mathfrak{U}}$ на V_z), согласованное с s_V на $V_z - z$, то $r_z = 0$, и значит, существует $s_{V_1} \in \mathcal{F}(V_1)$, совпадающее с s_V при ограничении на V . По индукции, присоединяя точки $U \setminus V$, найдём элемент $s_U \in \mathcal{F}(U)$, совпадающий с s_V в общей точке, и по инъективности для предпучков с Witt-трансферами² он будет соглашен с s и в других точках. \square

Доказательство теоремы 2.

По определению гомотопическая инвариантность некоторого предпучка \mathcal{N} , означает что $\mathcal{N}(pr_X): \mathcal{N}(X) \rightarrow \mathcal{N}(\mathbb{A}^1_X)$ — изоморфизм, для проекции $pr_X: \mathbb{A}^1_X \rightarrow X$ над произвольным X . Поскольку нулевое сечение $i_X: X \rightarrow \mathbb{A}^1_X$ предоставляет отображение $\mathcal{N}(i_X)$ — левое обратное к $\mathcal{N}(pr_X)$, то имеют место эквивалентности: $\mathcal{N}(i_X)$ — инъективно $\Leftrightarrow \mathcal{N}$ — гомотопически инвариантен $\Leftrightarrow \mathcal{N}(pr_X)$ — сюръективно.

²инъективность для предпучков с Witt-трансферами доказана в дипломной работе К. Чепуркина.

Пусть $\eta - j: \eta \hookrightarrow X$ — вложение общей точки в X , а $\varepsilon: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_{Zar}$ — естественное преобразование между предпучком и ассоциированным пучком. Левый и правый квадраты следующей диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{F}(\mathbb{A}^1_\eta) & \xrightarrow{\varepsilon(\mathbb{A}^1_\eta)} & \mathcal{F}_{Zar}(\mathbb{A}^1_\eta) & \xleftarrow{\mathcal{F}_{Zar}(j_{\mathbb{A}^1})} & \mathcal{F}_{Zar}(\mathbb{A}^1_X) \\ \mathcal{F}(pr_\eta) \uparrow & & \mathcal{F}_{Zar}(pr_\eta) \uparrow & \downarrow \mathcal{F}_{Zar}(i_\eta) & \downarrow \mathcal{F}_{Zar}(i_X) \\ \mathcal{F}(\eta) & \xrightarrow{\varepsilon(\eta)} & \mathcal{F}_{Zar}(\eta) & \xleftarrow{\mathcal{F}_{Zar}(j)} & \mathcal{F}_{Zar}(X). \end{array}$$

$\varepsilon(\mathbb{A}^1_\eta)$ — сюръективно, в силу леммы 4.1. $\mathcal{F}_{Zar}(pr_\eta)$ — изоморфизм, в силу гомотопической инвариантности \mathcal{F} . Тогда из коммутативности левого квадрата следует, что $\mathcal{F}_{Zar}(pr_\eta)$ — сюръективно, и по приведённому выше замечанию, $\mathcal{F}_{Zar}(i_\eta)$ — инъективно. $\mathcal{F}_{Zar}(j_{\mathbb{A}^1})$ — инъективно вследствие инъективности для предпучков с *Witt*-трансферами, и из коммутативности правого квадрата, следует, что $\mathcal{F}_{Zar}(i_X)$ — инъективно. \square

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В работе обоснована гомотопическая инвариантность пучков, ассоциированных в топологии Зарисского с гомотопически инвариантными предпучками с *Witt*-трансферами. Следующим шагом построения категории *Witt*-мотивов является доказательство гомотопической инвариантности пучков ассоциированных в топологии Нисневича.

Автор благодарен своему научному руководителю чл.-корр. РАН И.А. Панину за постановку задачи и оказанную помощь в её решении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Voevodsky V. Triangulated Category of Motives over a field, Cycles, Transfers and Motivic Homology Theories (V. Voevodsky, A. Suslin and E. Friedlander, eds.), Annals of Math. Studies, 1999.
- [2] Balmer P. Witt groups Handbook of K-theory, vol. 2, Springer, Berlin (2005), 539–576.
- [3] Ojanguren M.; Panin I. A purity theorem for the Witt group. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 32 (1999), no. 1, 71–86.