

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

### **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций**

**Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27**

**телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54**

**e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)**

**<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>**

**Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н**

## Некоммутативная геометрия и томография многообразий.

М.И. Белишев<sup>1</sup>, М.Н. Демченко<sup>2</sup>, А.Н. Попов<sup>3</sup>

*К столетию со дня рождения Бориса Моисеевича Левитана*

Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В.А. Стеклова РАН; Санкт-Петербургский государственный  
университет; belishev@pdmi.ras.ru

Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В.А. Стеклова РАН; Санкт-Петербургский государственный  
университет; demchenko@pdmi.ras.ru

Санкт-Петербургский государственный университет

Март 2014

### Аннотация

В работе с единых позиций рассматриваются задачи импедансной, акустической и электромагнитной томографии. Они состоят в восстановлении риманова многообразия по его граничным данным. Подход использует идею из некоммутативной геометрии - характеризацию топологического пространства в терминах связанной с ним алгебры. По граничным данным определяется адекватная алгебра, ее спектр оказывается идентичным многообразию, подлежащему восстановлению.

*Ключевые слова:* некоммутативная геометрия, восстановление многообразий, обратные задачи.

---

<sup>1</sup>Поддержан грантами РФФИ 14-01-00535А, НШ-1771.2014.1.

<sup>2</sup>Поддержан грантами 14-01-31388 мол-а, НШ-1771.2014.1.

<sup>3</sup>Поддержан грантами СПбГУ 6.38.670.2013 и НШ-1292.2014.1

## **ПРЕПРИНТЫ**

Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В.А. Стеклова  
РАН

## **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

С.В. Кисляков

## **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

В.М. Бабич, Н.А. Вавилов, А.М. Вершик, М.А. Всемиров,  
А.И. Генералов, И.А. Ибрагимов, Л.Ю. Колотилина, Г.В. Кузьмина,  
П.П. Кулиш, Б.Б. Лурье, Ю.В. Матиясевич, Н.Ю. Нецветаев,  
С.И. Репин, Г.А. Серегин, В.Н. Судаков, О.М. Фоменко.

## 0 Введение

Статья является расширенной версией доклада на конференции, посвященной 100-летию Бориса Моисеевича Левитана.

В обратных задачах на многообразиях требуется восстановить риманово многообразие с краем по его граничным данным. Вот примеры из приложений, мотивирующие такие постановки.

**Импедансная томография (ИТ).** Имеется тонкая оболочка сложной формы (риманова поверхность с краем), проводящая ток. К ее границе прикладывается потенциал, индуцирующий стационарный ток через оболочку. Внешний наблюдатель, оперирующий на границе, имеет возможность варьировать потенциал и всякий раз измерять ток, текущий через границу. Измерения формализуются заданием *оператора реакции*, переводящего граничные “данные Дирихле”, связанные с эллиптической задачей на поверхности, в соответствующие “данные Неймана”. Это так называемый DN-оператор; он определяется оболочкой: ее топологией, проводимостью и т.п. Предположим, что оболочка недоступна (невидима) для наблюдателя и, зондируя ее токами с границы, он пытается определить ее форму и параметры. Иными словами, ставится *обратная задача*: в какой мере DN-оператор определяет оболочку и, если определяет, как ее восстановить?

**Акустическая томография (АТ).** Пусть оболочка (мембрана) выполнена из упругого материала и смещение точек ее границы приводит к появлению волны, распространяющейся по оболочке с конечной скоростью. Она рассеивается на неоднородностях, появляются вторичные волны, возвращающиеся к границе и взаимодействующие с последней. Возникающие при взаимодействии усилия регистрируются внешним наблюдателем. Измерения формализуются заданием оператора реакции, переводящего смещения границы (функции точки границы и времени) в силы на границе (функции тех же переменных). Обратная задача состоит в восстановлении оболочки по оператору реакции. Такая постановка осмысленна и в многомерном случае, а в размерности 3 имеет содержательные приложения (дефектоскопия, геофизика, ультразвуковая диагностика в медицине и др.).

**Электромагнитная томография (ЭМТ).** Область в искривленном пространстве (трехмерное риманово многообразие с краем) просвечивается электромагнитными волнами, инициированными граничными источниками. Волны взаимодействуют с внутренней структурой и выносят на границу информацию о последней. Наблюдатель ставит целью восстановить структуру: топологию и метрику.

Принципиальное отличие подобных постановок от традиционных коэффицентных обратных задач состоит в следующем. В последних носитель искомым коэффицентом (область пространства или многообразие, в ИТ – оболочка) предполагается известным: есть возможность фиксировать точку носителя и обсуждать, как восстановить в ней искомую функцию (проводимость оболочки, плотность среды, скорость волн и т.п.). В наших же постановках определению подлежит *сам носитель*. Дополнительным осложнением является неинъективность соответствия “многообразие  $\mapsto$  оператор реакции”: два изометричных многообразия с общим краем имеют идентичные операторы реакции. Для наблюдателя такие многообразия одинаково реагируют на внешнее воздействие; они в принципе неразличимы и не понятно, которое из них восстанавливать.

В этой ситуации единственно адекватное понимание термина “восстановить” таково. Пусть задан оператор реакции некоторого многообразия (*оригинала*); по нему требуется построить риманово многообразие, оператор реакции которого совпадает с данным. Такое многообразие явилось бы *копией*, реагирующей на внешние воздействия так же, как оригинал и, в этом смысле, от него неотличимой. В этой связи возникает вопрос: из какого “материала” внешний наблюдатель может построить такую копию?

**Подход.** По одному из основных тезисов некоммутативной геометрии, топологическим пространствам отвечают алгебры, эти пространства характеризующие. Применительно к обратным задачам, выразительнее было бы сказать, что пространство можно кодировать адекватной алгеброй. Если внешний наблюдатель сумеет извлечь *модель* (представление) этой алгебры из оператора реакции, то, раскодировав модель, он восстановит пространство. Механизм “кодирования-декодирования” состоит в следующем.

По Гельфанду, у любой равномерной коммутативной банаховой алгебры имеется каноническая модель, в которой элементы алгебры реализуются как функции на ее *спектре* – компакте, состоящем из ее характеров. О переходе к этой модели говорят как о геометризации исходной алгебры.

Пусть  $(\Omega, g)$  есть подлежаще восстановлению многообразие, а алгебра  $\mathfrak{A}$  такова, что ее спектр  $\widehat{\mathfrak{A}}$  идентичен (гомеоморфен)  $\Omega$ : именно в этом смысле она кодирует  $\Omega$ . Пусть оператор реакции определяет некоторую модель  $\mathfrak{A}^{\text{mod}}$ , изометрически изоморфную  $\mathfrak{A}$ . Тогда наблюдатель может построить эту модель и провести ее геометризацию. Определив спектр модели  $\widehat{\mathfrak{A}^{\text{mod}}} =: \tilde{\Omega}$ , наблюдатель получит *гомеоморфную* копию оригинала  $\Omega$ . Этим он декодирует модельную алгебру и получает “матери-

ал” , вопрос о котором был задан выше. Помимо этого, геометризация позволяет выделить семейство функций на  $\tilde{\Omega}$ , которое задает риманову структуру, превращающую  $\tilde{\Omega}$  в *изометрическую* копию  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$  оригинала  $(\Omega, g)$ . Риманово многообразие  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$  доставляет решение задачи томографии в адекватном ее понимании.

По этой схеме будут решены все три поставленные выше задачи. В АТ и ЭМТ, которые можно объединить общим названием “волновая томография”, путь от оператора реакции к модельной алгебре длиннее и сложнее, чем в ИТ. В ИТ модель есть алгебра функциональная, а в волновых задачах  $\mathfrak{A}^{\text{mod}}$  суть алгебры операторные <sup>4</sup>, а их построение использует специфические физические свойства соответствующих динамических систем. Ключевую роль играет *локальная полнота волн*.

Подход является алгебраической версией *метода граничного управления* (ВС-метода, [1], [3]), использующего связи обратных задач с теорией систем.

## 1 Импедансная томография

### 1.1 Постановки

**Прямая задача.** Пусть  $\Omega$  есть компактное гладкое *двумерное* ориентированное многообразие с краем  $\Gamma$ ,  $g$  – метрический тензор,  $d\Omega$  – 2-форма риманова объема,  $\Delta_g$  – оператор Бельтрами-Лапласа на функциях.

Рассмотрим граничную задачу

$$\Delta_g u = 0 \quad \text{в } \Omega \setminus \Gamma \quad (1.1)$$

$$u|_{\Gamma} = f \quad (1.2)$$

с вещественной гладкой<sup>5</sup> функцией  $f \in L_2(\Gamma)$ , пусть  $u = u^f(x)$  есть ее решение. Она является формализацией (прямой) задачи ЭИТ:  $\Omega$  играет роль токопроводящей оболочки,  $f$  – приложенный к границе потенциал,  $u^f$  – потенциал, наведенный в  $\Omega$ . Реакция оболочки на воздействие описывается *оператором Кальдерона*<sup>6</sup>  $\Lambda : C^\infty(\Gamma) \rightarrow C^\infty(\Gamma)$ ,

$$\Lambda f := u_\nu^f,$$

---

<sup>4</sup>впрочем, и ИТ-модель можно реализовать как операторную алгебру: см. [4]

<sup>5</sup>Всюду в работе “гладкие” означает  $C^\infty$ -гладкие.

<sup>6</sup>другое название – DN-оператор; по принятой нами терминологии это оператор реакции

где  $(\cdot)_\nu$  – производная по внешней нормали  $\nu$  к  $\Gamma$ . С физической точки зрения  $\Lambda f$  есть ток, текущий через границу и измеряемый внешним наблюдателем.

**Обратная задача** состоит в восстановлении оболочки по ее оператору Кальдерона. В точном смысле, описанном во Введении, требуется по  $\Lambda$  построить копию оболочки – риманово многообразие  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$  с краем  $\tilde{\Gamma} = \Gamma$  и оператором  $\tilde{\Lambda}$ , такое, что  $\tilde{\Lambda} = \Lambda$ .

## 1.2 Операторы

**Оператор**  $\Lambda$ , играющий роль данных обратной задачи, обладает следующими известными свойствами.

- Пусть  $d\Gamma = d\Omega(\nu, \cdot)$  есть 1-форма длины на  $\Gamma$ , а  $|d\Gamma|$  – (неориентированный) элемент длины. Пусть  $\theta, |\theta(\cdot)| = 1$  есть гладкое поле касательных векторов на границе, понимаемое как дифференцирование функций из  $C^\infty(\Gamma)$ . Выбрать  $\theta$  значит ориентировать  $\Gamma$ . Обозначим  $\dot{C}^\infty(\Gamma) := \theta C^\infty(\Gamma)$ . Справедливы соотношения

$$\text{Ker } \Lambda = \{\text{const}\}, \quad \text{Ran } \Lambda = \dot{C}^\infty(\Gamma). \quad (1.3)$$

Вложение  $\text{Ran } \Lambda \subset \dot{C}^\infty(\Gamma)$  следует из соотношения  $\int_\Gamma u_\nu^f |d\Gamma| = 0$ , обратное вложение – из корректности краевой задачи с граничным условием Неймана  $\Delta_g u = 0$ ,  $u_\nu^f = h \in \dot{C}^\infty(\Gamma)$ .

- Пусть  $(\Omega, g)$  и  $(\Omega', g')$  суть два многообразия с общим краем  $\Gamma$ , связанные диффеоморфизмом  $j : \Omega' \rightarrow \Omega$ , таким, что  $g' = \rho j^* g$ , где  $\rho$  – гладкая положительная функция<sup>7</sup>. Тогда  $\Lambda' = \rho^{-\frac{1}{2}} \Lambda$ , а дополнительное условие  $\rho|_\Gamma = 1$  ведет к равенству  $\Lambda' = \Lambda$ .

**Преобразование Гильберта.** В линеале  $\dot{C}^\infty(\Gamma) := \theta C^\infty(\Gamma)$  действует преобразование Гильберта  $\dot{C}^\infty(\Gamma) \xrightarrow{H} \dot{C}^\infty(\Gamma)$ ,  $H := \Lambda J$ , где  $J$  – интегрирование:  $J\theta f = f \pmod{\text{const}}$ . Определение  $H$  корректно в силу (1.3).

## 1.3 Алгебры

Пусть  $d$  есть внешняя производная,  $\star$  – оператор Ходжа, отвечающий форме  $d\Omega$ . Через  $C(\Omega)$  и  $C_c(\Omega)$  обозначаем пространства непрерывных вещественных и комплекснозначных функций соответственно.  $C_c(\Omega)$  есть коммутативная банахова алгебра с нормой  $\|w\| := \sup_\Omega |w(\cdot)|$ .

Напомним, что *характером* коммутативной банаховой алгебры  $\mathfrak{A}$  называется гомоморфизм  $\mathfrak{A}$  в  $\mathbb{C}$ . *Спектр* алгебры есть множество  $\hat{\mathfrak{A}}$  ее

---

<sup>7</sup>т.е.  $(\Omega, g)$  и  $(\Omega', g')$  конформно-эквивалентны

характеров, снабженное  $*$ -слабой топологией сопряженного пространства  $C'_c(\Omega)$ . Спектр является компактом. Геометризация  $\mathfrak{A}$  реализуется преобразованием Гельфанда  $\mathfrak{A} \xrightarrow{G} C(\widehat{\mathfrak{A}})$ ,  $(Ga)(\chi) := \chi(a)$  [12]. Всюду ниже, говоря об *изометрии* алгебр, мы имеем виду связывающий их изометрический изоморфизм.

На  $\Omega$  определена комплексная аналитическая структура, совместная с римановой метрикой и превращающая  $\Omega$  в *риманову поверхность* [10]. На последней определена алгебра аналитических функций

$$\mathcal{A}(\Omega) := \{a = u + u_*i \mid a \in C_c(\Omega), du_* = \star du\}. \quad (1.4)$$

При решении обратной задачи она сыграет роль основной алгебры  $\mathfrak{A}$  из Введения. Перечислим ее известные свойства.

- Гладкая подалгебра  $\mathcal{A}^\infty(\Omega) := \mathcal{A}(\Omega) \cap C_c^\infty(\Omega)$  плотна в  $\mathcal{A}(\Omega)$ .
- Спектр  $\widehat{\mathcal{A}(\Omega)}$  алгебры  $\mathcal{A}(\Omega)$  исчерпывается мерами Дирака  $\delta_x \in C'_c(\Omega) : \delta_x(a) = a(x)$ . Соответствие  $\Omega \ni x \xrightarrow{s} \delta_x \in \widehat{\mathcal{A}(\Omega)}$  есть гомеоморфизм топологических пространств<sup>8</sup>.
- Справедливо равенство  $Ga = a \circ s^{-1}$ , устанавливающее изометрию между алгеброй  $\mathcal{A}(\Omega)$  и ее образом  $G\mathcal{A}(\Omega)$  при преобразовании Гельфанда  $\mathcal{A}(\Omega) \xrightarrow{G} C_c(\widehat{\mathcal{A}(\Omega)})$ .

В силу теоремы единственности и принципа максимума для аналитических функций, соответствие  $a \mapsto a|_\Gamma$  есть изометрия между  $\mathcal{A}(\Omega)$  и алгеброй *граничных значений*

$$\mathcal{A}(\Gamma) := \{a|_\Gamma \mid a \in \mathcal{A}(\Omega)\} \subset C_c(\Gamma).$$

Этой алгебре предстоит сыграть роль модели  $\mathfrak{A}^{\text{mod}}$ , о которой говорилось во Введении. Соответствие  $t^{-1}$  есть аналитическое продолжение с  $\Gamma$  в  $\Omega$ . Подалгебра

$$\mathcal{A}^\infty(\Gamma) := t\mathcal{A}^\infty(\Omega) = \mathcal{A}(\Gamma) \cap C_c^\infty(\Gamma)$$

плотна в  $\mathcal{A}(\Gamma)$ . Изометрии алгебр  $\mathcal{A}(\Omega) \xrightarrow{t} \mathcal{A}(\Gamma)$  отвечает сопряженная изометрия (банаховых пространств)  $\mathcal{A}'(\Gamma) \xrightarrow{t^*} \mathcal{A}'(\Omega)$ , связывающая их спектры:  $t^*\widehat{\mathcal{A}(\Gamma)} = \widehat{\mathcal{A}(\Omega)} = s\Omega$ .

- Алгебры  $\mathcal{A}(\Omega)$  и  $G\mathcal{A}(\Gamma)$  изометричны, а для  $b = a|_\Gamma \in \mathcal{A}(\Gamma)$  имеем:

$$(Gb)(p) = (t^{-1}b)(x) = a(x), \quad \text{где } x = s^{-1}t^*p.$$

---

<sup>8</sup>В терминах Введения, это и означает, что алгебра  $\mathcal{A}(\Omega)$  кодирует  $\Omega$ .



Следовательно, находя спектр  $\widehat{\mathcal{A}(\Gamma)} =: \tilde{\Omega}$  и функции из  $G\mathcal{A}(\Gamma) := \mathcal{A}(\tilde{\Omega})$  на нем, мы получаем *гомеоморфную копию* многообразия  $\Omega$  и *изометрическую копию* алгебры  $\mathcal{A}(\Omega)$  соответственно. Копии и оригиналы связаны отображениями

$$\tilde{\Omega} \xrightarrow{j} \Omega, \quad \mathcal{A}(\Omega) \ni a \mapsto \tilde{a} = a \circ j \in \mathcal{A}(\tilde{\Omega}), \quad (1.5)$$

где  $j := s^{-1}t^*$  – гомеоморфизм, а  $a \mapsto \tilde{a}$  – изометрия алгебр. Копии  $\tilde{\gamma} = j^{-1}\gamma$  граничных точек  $\gamma \in \Gamma$  допускают следующую характеристику:

$$\left\{ \tilde{\Omega} \ni \tilde{\gamma} \xrightarrow{j} \gamma \in \Gamma \right\} \Leftrightarrow \left\{ (Gb)(\xi) = b(\gamma), \quad \forall b \in \mathcal{A}(\Gamma) \right\}. \quad (1.6)$$

Рассмотрения иллюстрирует Рис 1; в квадратах находятся объекты, используемые ниже при решении обратной задачи. Волнистые стрелки – переход от алгебры к ее спектру. В двойной рамке – объекты, определяющие копию  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$ .

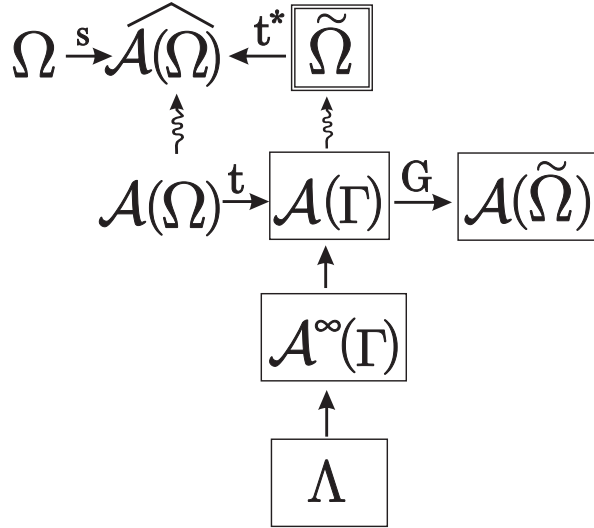


Рис. 1: Реконструкция в ИТ

- Анализ условий Коши-Римана  $du_* = \star du$  из (1.4) в точках  $\Gamma$  приводит к следующей характеристике граничных значений аналитических функций (см. [2]):

$$\mathcal{A}^\infty(\Gamma) = \left\{ f + f_* i \in C_c^\infty(\Gamma) \mid \theta f, \theta f_* \in \text{Ker}(\mathbb{I} + H^2), \quad \theta f_* = H\theta f \right\}, \quad (1.7)$$

где  $\mathbb{I}$  – тождественный оператор. Множество пар  $\{f, f_*\}$ , выделяемых условиями в правой части, одно и то же для  $\theta$  и  $-\theta$ , т.е. не зависит от ориентации границы.

## 1.4 Реконструкция $\Omega$

В результате измерений на границе внешний наблюдатель получает в распоряжение оператор  $\Lambda$ . Для простоты будем считать известным элемент длины  $|d\Gamma|$ . По этим данным наблюдатель может восстановить  $\Omega$  по следующей схеме.

1. Найдем  $H = \Lambda J$  и выберем поле  $\theta$ . Используя характеризацию (1.7), восстановим гладкую алгебру  $\mathcal{A}^\infty(\Gamma)$ . Замыкая ее в  $C_c(\Gamma)$ , получим  $\mathcal{A}(\Gamma)$ .

2. Найдем спектр  $\widehat{\mathcal{A}(\Gamma)} =: \tilde{\Omega}$  и определим алгебру  $\mathcal{A}(\tilde{\Omega}) = G\mathcal{A}(\Gamma) \subset C_c(\tilde{\Omega})$ . Последняя индуцирует на  $\tilde{\Omega}$  аналитическую структуру римановой поверхности<sup>9</sup>. Структура определяет семейство совместных с ней конформно-эквивалентных метрик<sup>10</sup>. Выберем одну из них  $g'$ . В результате имеем риманово многообразие  $(\tilde{\Omega}, g')$  с краем  $\tilde{\Gamma}$ .

3. Отождествим  $\tilde{\Gamma}$  с  $\Gamma$  по правилу (1.6). Теперь  $(\tilde{\Omega}, g')$  и (неизвестный) оригинал  $(\Omega, g)$  суть два римановых многообразия с общей границей  $\Gamma$ , связанные (неизвестным) диффеоморфизмом  $j := s^{-1}t^*$ : см. (1.5). При этом метрики связаны соотношением  $g' = \rho j^* g$  с (неизвестной) гладкой функцией  $\rho > 0$ .

4. Найдем оператор  $\Lambda'$  многообразия  $(\tilde{\Omega}, g')$ . Он связан с исходным  $\Lambda$  соотношением  $\Lambda' = \rho^{-\frac{1}{2}}\Lambda$  (см. п. 1.2). Сравнивая эти операторы, определим  $\rho|_\Gamma$ . Затем “подправим” метрику  $g'$  множителем  $\tilde{\rho}^{\frac{1}{2}}$ , где  $\tilde{\rho} > 0$  – какое-либо гладкое продолжение  $\rho|_\Gamma$  с  $\Gamma$  на  $\tilde{\Omega}$ . Многообразие  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$  с метрикой  $\tilde{g} := \tilde{\rho}^{\frac{1}{2}}g'$  имеет DN-оператор  $\tilde{\Lambda}$ , совпадающий с  $\Lambda$  по построению. Оно и решает задачу.

По оператору  $\Lambda$ , не проводя восстановления по полной схеме 1–4, можно определять некоторые топологические инварианты  $\Omega$ , – числа Бетти и др: см. [2], [7].

Задача ИТ в размерностях  $n \geq 3$  до сих пор надлежащим образом не решена: см. обсуждение в [4]. Проблема в отсутствии адекватного аналога  $\mathcal{A}(\Omega)$ : вероятно, и в высших размерностях  $\Omega$  идентично какому-то спектру, но вопрос “спектру чего?” остается открытым.

<sup>9</sup>роль локальных комплексных координат играют функции из  $\mathcal{A}(\tilde{\Omega})$

<sup>10</sup>Это те метрики, в которых вещественные и мнимые части функций из  $\mathcal{A}(\tilde{\Omega})$  суть гармонические функции. Поэтому для нахождения таких метрик, – определения компонент  $g_{ij}$  метрического тензора, – можно использовать уравнение  $\Delta_g u = 0$  в локальных координатах. При этом компоненты определяются с точностью до произвольного множителя – положительной функции: см. [2].

## 2 Акустическая томография

В разделе 2 многообразие  $\Omega$ , все функции на  $\Omega$ , пространства и алгебры суть *вещественные*. Само  $\Omega$  – гладкое компактное риманово многообразие размерности  $n \geq 2$  с краем  $\Gamma$ ,  $g$  – метрический тензор. Ориентируемость  $\Omega$  не требуется. Через  $\Omega^r[A] := \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, A) < r\}$  обозначается метрическая окрестность множества  $A \subset \Omega$ . По компактности  $\Omega$  имеем:

$$\Omega^r[A] = \Omega, \quad r > \text{diam } \Omega \quad (2.1)$$

для любого  $A$ .

### 2.1 Постановки

**Прямая задача.** Распространение звука в  $\Omega$  описывается начально-краевой задачей

$$u_{tt} - \Delta_g u = 0 \quad \text{в } (\Omega \setminus \Gamma) \times (0, T) \quad (2.2)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (2.3)$$

$$u|_{\Gamma \times [0, T]} = f, \quad (2.4)$$

в которой  $t = T > 0$  есть финальный момент времени,  $f$  – *граничное управление*,  $u = u^f(x, t)$  – решение. С физической точки зрения,  $u^f(x, t)$  есть давление в точке  $x$  в момент  $t$ , а  $u^f$  – звуковая *волна*, инициированная граничным источником  $f$  и распространяющаяся в области  $\Omega$ , заполненной неоднородной средой.

Отклик среды на воздействие управления описывается *оператором реакции*, действующим по правилу

$$R^T f := u_\nu^f|_{\Gamma \times [0, T]},$$

где  $(\cdot)_\nu$  – производная по внешней нормали к  $\Gamma$ . Величина  $u_\nu^f$  описывает силы, возникающие на границе за счет воздействия волны и измеряемые внешним наблюдателем на  $\Gamma$  при временах  $0 \leq t \leq T$ .

**Обратная задача** состоит в восстановлении многообразия  $(\Omega, g)$  по его оператору реакции. Точная постановка такова: по оператору  $R^{2T}$ , заданному при фиксированном  $T > \text{diam } \Omega$ , требуется построить риманово многообразие  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$  с краем  $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ , такое, что для его оператора реакции  $\tilde{R}^{2T}$  выполнено  $\tilde{R}^{2T} = R^{2T}$ .

Поясним смысл условия на  $T$  и удвоения времени наблюдений. Многообразие зондируется волнами, инициированными на границе. Волны распространяются с конечной (единичной) скоростью. Поэтому время наб-

людения должно быть достаточно большим для того, чтобы они заполнили *все*  $\Omega$  и успели вернуться обратно к границе, вынося информацию о внутренней структуре.

## 2.2 Эйконалы

**Скалярные эйконалы.** Будем говорить, что подмножество  $\sigma \subset \Gamma$  *регулярно* (и писать  $\sigma \in \mathcal{R}$ ), если оно диффеоморфно  $n - 1$ -мерному шару  $\{p \in \mathbb{R}^{n-1} \mid |p| \leq 1\}$ . Функции на  $\Omega$  вида

$$\tau_\sigma(x) := \text{dist}(x, \sigma), \quad \sigma \in \mathcal{R}$$

называются *эйконалами*. Приведем их свойства, используемые при решении обратных задач.

1. Эйконалы непрерывны:  $\tau_\sigma \in C(\Omega)$ , являются гладкими почти всюду в  $\Omega$  и выполнены равенства

$$|\nabla_g \tau_\sigma(x)| = 1 \quad \text{п.в. } x \in \Omega. \quad (2.5)$$

2. Эйконалы можно использовать в качестве локальных координат: для любого  $x \in \Omega$  можно указать окрестность  $\Omega^\varepsilon[x]$  и набор  $\sigma_1, \dots, \sigma_n \in \mathcal{R}$  такие, что  $\tau_{\sigma_1}, \dots, \tau_{\sigma_n}$  составляют карту на  $\Omega^\varepsilon[x]$ .

3. В терминах эйконалов точки края характеризуются эквивалентностью

$$\{\gamma \in \Gamma\} \iff \{\exists \sigma \in \mathcal{R} : \tau_\sigma(\gamma) = 0\}. \quad (2.6)$$

**Копия**  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$ . Эйконалы задают риманову структуру в  $\Omega$  в следующем смысле. Пусть имеется топологическое пространство  $\tilde{\Omega}$ , связанное с  $\Omega$  гомеоморфизмом  $\Omega \xrightarrow{s} \tilde{\Omega}$  и пусть  $\tilde{\tau}_\sigma := \tau_\sigma \circ s^{-1}$ . Предположим, что сам гомеоморфизм не известен, но задано отображение

$$\mathcal{R} \ni \sigma \mapsto \tilde{\tau}_\sigma \in C(\tilde{\Omega}). \quad (2.7)$$

Этого достаточно, чтобы оснастить пространство  $\tilde{\Omega}$  метрикой, превращающей его в риманово многообразие, *изометричное*  $\Omega$ . Коротко говоря, способ состоит в следующем<sup>11</sup>. Берется точка  $p \in \tilde{\Omega}$ ; в ее окрестности выбираются координаты  $\tilde{\tau}_{\sigma_1}, \dots, \tilde{\tau}_{\sigma_n}$ . Записанные в этих координатах, уравнения (2.5) содержат компоненты  $\tilde{g}^{ij}$  метрического тензора и могут

---

<sup>11</sup>подробности см. в [5]

использоваться для нахождения последних. В дополнение к этому, располагая отображением (2.7), в  $\tilde{\Omega}$  можно выделить образ границы  $\tilde{\Gamma} := s\Gamma$ , используя характеристику

$$\left\{ \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma} \right\} \stackrel{(2.6)}{\Longleftrightarrow} \left\{ \exists \sigma \in \mathcal{R}(\Gamma) : \tilde{\tau}_\sigma(\tilde{\gamma}) = 0 \right\} .$$

Более того, семейство  $\{\tilde{\tau}_\sigma\}$  задает естественный способ отождествления границ:

$$\left\{ \Gamma \ni \gamma \equiv \tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma} \right\} \Longleftrightarrow \left\{ \tilde{\tau}_\sigma(\tilde{\gamma}) = 0, \quad \forall \sigma \ni \gamma \right\} .$$

Резюмируя приведенные соображения, можно сказать, что отображение (2.7) позволяет построить *изометрическую копию*  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$  исходного многообразия  $(\Omega, g)$ , имеющую общий край  $\tilde{\Gamma} = \Gamma$  с оригиналом.

**Операторные эйконалы.** На  $\Omega$  определено пространство  $\mathcal{H} := L_2(\Omega)$  со скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} u(x)v(x) |d\Omega|$$

( $|d\Omega|$  – элемент риманова объема). Пусть  $A \subset \Omega$  есть измеримое множество,  $\chi_A(\cdot)$  – его индикатор (характеристическая функция). Через

$$\mathcal{H}\langle A \rangle := \{ \chi_A u \mid u \in \mathcal{H} \} \tag{2.8}$$

обозначим подпространство функций с носителями в  $A$ . Проектор  $X_A$  в  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{H}\langle A \rangle$  срезает функции на  $A$ , что равносильно умножению на  $\chi_A$ .

Пусть  $\mathfrak{B}(\mathcal{H})$  есть нормированная алгебра ограниченных операторов в  $\mathcal{H}$ . Каждому скалярному эйконалу  $\tau_\sigma$  сопоставим оператор умножения  $\check{\tau}_\sigma \in \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ , действующий в  $\mathcal{H}$  по правилу

$$(\check{\tau}_\sigma y)(x) := \tau_\sigma(x) y(x), \quad x \in \Omega .$$

В силу компактности  $\Omega$  он ограничен и выполнены соотношения

$$\|\check{\tau}_\sigma\|_{\mathfrak{B}(\mathcal{H})} = \max_{x \in \Omega} \tau_\sigma(x) = \|\tau_\sigma\|_{C(\Omega)} \leq \text{diam } \Omega . \tag{2.9}$$

Для  $\check{\tau}_\sigma$  мы используем тот же термин *эйконал*.

Каждый эйконал есть самосопряженный положительный оператор и справедливо известное представление в терминах Спектральной Теоремы:

$$\check{\tau}_\sigma = \int_0^\infty r dX_\sigma^r, \tag{2.10}$$

в котором проекторы  $X_\sigma^r := X_{\Omega^r[\sigma]}$  срезают функции на окрестности множеств  $\sigma$ . Интервал интегрирования фактически конечен, поскольку при  $r > \max_{x \in \Omega} \tau_\sigma(x)$  окрестность  $\Omega^r[\sigma]$  исчерпывает все  $\Omega$  и проекторы  $X_\sigma^r$  равны единичному оператору.

Эйконалы, отвечающие различным  $\sigma$ , коммутируют. Это следует из коммутации  $X_\sigma^r$  с  $X_{\sigma'}^{r'}$  при всех  $\sigma, \sigma'$  и  $r, r'$ .

## 2.3 Алгебры

1. Пространство  $C(\Omega)$  со стандартной  $\sup$ -нормой является коммутативной банаховой алгеброй. Она является каноническим примером алгебры, кодирующей пространство: ее спектр  $\widehat{C(\Omega)}$  исчерпывается мерами Дирака  $\{\delta_x \mid x \in \Omega\}$ ; он гомеоморфен  $\Omega$  [12]. Традиционно  $\Omega$  и  $\widehat{C(\Omega)}$  отождествляются по правилу  $\Omega \ni x \equiv \delta_x \in \widehat{C(\Omega)}$ . При этом алгебра  $C(\Omega)$  оказывается тождественной своему преобразованию Гельфанда.

2. Для подмножества  $S$  банаховой алгебры через  $\vee S$  обозначаем минимальную замкнутую по норме подалгебру, которая содержит  $S$ .

Определим *алгебру эйконалов*

$$\mathfrak{T} := \vee \{\tau_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{R}\} \subset C(\Omega).$$

Из свойства 2 п. 2.2 очевидно, что эйконалы разделяют точки  $\Omega$  и не имеют нулей, общих для всех  $\tau_\sigma$ . Как следствие, из теоремы Стоуна-Вейерштрасса [12] вытекает равенство  $\mathfrak{T} = C(\Omega)$ . Из него имеем:  $\widehat{\mathfrak{T}} = \Omega$ . Следовательно, алгебра эйконалов кодирует  $\Omega$  и подходит на роль основной алгебры  $\mathfrak{A}$  из Введения.

3. Определим *алгебру операторных эйконалов*

$$\mathfrak{T}_{\text{op}} := \vee \{\check{\tau}_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{R}\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}).$$

Как видно из (2.9), соответствие  $\tau_\sigma \mapsto \check{\tau}_\sigma$  между образующими алгебр  $\mathfrak{T}$  и  $\mathfrak{T}_{\text{op}}$  каноническим образом продолжается до изометрического изоморфизма  $\mathfrak{T} \xrightarrow{i} \mathfrak{T}_{\text{op}}$ .

4. Пусть  $\mathcal{H}^{\text{mod}}$  есть некоторое гильбертово пространство<sup>12</sup>,  $U : \mathcal{H}^{\text{mod}} \rightarrow \mathcal{H}$  – унитарный оператор,  $\mathfrak{B}(\mathcal{H}) \ni a \xrightarrow{u} U^* a U \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\text{mod}})$  – соответствующая изометрия алгебр. Алгебру

$$\mathfrak{T}_{\text{op}}^{\text{mod}} := u \mathfrak{T}_{\text{op}}$$

---

<sup>12</sup>ниже, в разделе 2.5 выбор  $\mathcal{H}^{\text{mod}}$  будет конкретизирован

мы называем *моделью* алгебры  $\mathfrak{T}_{\text{op}}$ , а операторы  $\tilde{\tau}_{\sigma}^{\text{mod}} := u\tau_{\sigma}$  – модельными эйконалами. Композиция отображений  $ui$  устанавливает изометрический изоморфизм между алгебрами  $\mathfrak{T} = C(\Omega)$  и  $\mathfrak{T}_{\text{op}}^{\text{mod}}$ . Из изометричности алгебр следует, что существует гомеоморфизм  $s$ , связывающий их спектры и функции на спектрах:

$$\Omega \xrightarrow{s} \tilde{\Omega} := \widehat{\mathfrak{T}_{\text{op}}^{\text{mod}}}, \quad G\mathfrak{T}_{\text{op}}^{\text{mod}} = C(\tilde{\Omega}) \ni G\tilde{\tau}_{\sigma}^{\text{mod}} =: \tilde{\tau}_{\sigma} = \tau_{\sigma} \circ s^{-1} = Gui\tau_{\sigma}.$$

Рассмотрения иллюстрирует рис 2. Двойные стрелки – определение алгебры по ее образующим.

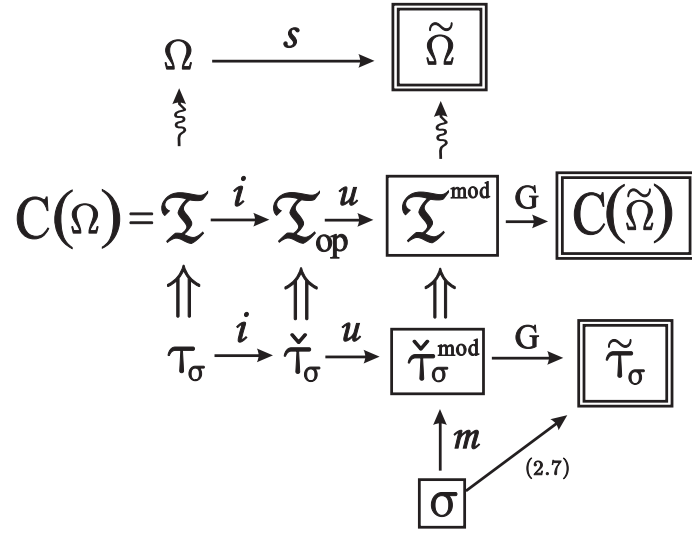


Рис. 2: Реконструкция в АТ

**5.** Пусть по измерениям на границе внешний наблюдатель сумел определить пару  $\{\mathcal{H}^{\text{mod}}, m\}$ , где  $m$  – отображение

$$\mathcal{R} \ni \sigma \xrightarrow{m} \tilde{\tau}_{\sigma}^{\text{mod}} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\text{mod}}).$$

Этого достаточно для восстановления многообразия. В самом деле, наблюдатель может:

- построить алгебру  $\mathfrak{T}_{\text{op}}^{\text{mod}} = \vee \{\tilde{\tau}_{\sigma}^{\text{mod}} \mid \sigma \in \mathcal{R}\} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\text{mod}})$ ;
- найти ее спектр  $\tilde{\Omega}$  и каноническую реализацию по Гельфанду – алгебру  $G\mathfrak{T}_{\text{op}}^{\text{mod}} = C(\tilde{\Omega})$ ;
- определить отображение  $\sigma \xrightarrow{Gm} \tilde{\tau}_{\sigma}$ , являющееся версией (2.7). Оно определяет копию  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$ .

Позже мы покажем, что данные обратной задачи определяют адекватную пару  $\{\mathcal{H}^{\text{mod}}, m\}$ .

## 2.4 Система $\alpha^T$

### Атрибуты

Сопоставим задаче (2.2)–(2.4) динамическую систему  $\alpha^T$  и снабдим ее соответствующими атрибутами – пространствами и операторами.

- Пространство управлений (входов)  $\mathcal{F}^T := L_2([0, T]; L_2(\Gamma))$  называется *внешним* пространством системы  $\alpha^T$ . Класс гладких управлений

$$\mathcal{M}^T := \{f \in C^\infty([0, T]; C^\infty(\Gamma)) \mid \text{supp } f \subset (0, T]\}$$

плотен в  $\mathcal{F}^T$ . При  $f \in \mathcal{M}^T$  задача имеет единственное гладкое классическое решение. Обозначим  $L_2(\sigma) := \{y \in L_2(\Gamma) \mid \text{supp } y \subseteq \sigma\}$ . Внешнее пространство содержит попространства

$$\mathcal{F}_\sigma^{T,r} := \{f \in L_2([0, T]; L_2(\sigma)) \mid \text{supp } f \subseteq [T - r, T]\}, \quad 0 < r \leq T, \quad \sigma \in \mathcal{R},$$

образованные управлениями, действующими с  $\sigma$  с задержкой  $T - r$  ( $r$  есть время действия).

- *Внутренним* пространством является пространство  $\mathcal{H} = L_2(\Omega)$ . Волны (состояния)  $u^f(\cdot, t)$  суть элементы  $\mathcal{H}$ , зависящие от времени.
- Соответствие “вход  $\mapsto$  состояние” реализуется *оператором управления*  $W^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $\text{Dom } W^T = \mathcal{M}^T$ ,

$$W^T f := u^f(\cdot, T).$$

Специфика акустической системы состоит в том, что оператор  $W^T$  является ограниченным. Поэтому он расширяется с  $\mathcal{M}^T$  на все  $\mathcal{F}^T$  по непрерывности и далее такое расширение предполагается выполненным. Образы управлений при действии расширенного  $W^T$  по определению суть обобщенные решения задачи (2.2)–(2.4).

- Отображение “вход  $\mapsto$  выход” реализуется *оператором реакции*  $R^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ ,  $\text{Dom } R^T = \mathcal{M}^T$ ,

$$R^T f := u_\nu^f|_{\Gamma \times [0, T]},$$

где  $(\cdot)_\nu$  есть производная по внешней нормали. Здесь напомним, что операторы реакции многообразия  $(\Omega, g)$  и его изометрической копии  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$  совпадают:  $R^T = \tilde{R}^T$  при любом  $T > 0$ .

- *Связывающий оператор*  $C^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$  вводится определением

$$C^T := (W^T)^* W^T. \tag{2.11}$$



Из определения следует

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}} = (u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T))_{\mathcal{H}},$$

т.е.  $C^T$  связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. Важно, что связывающий оператор явно и просто выражается через оператор реакции. Именно, справедливо соотношение

$$C^T = 2^{-1}(S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T, \quad (2.12)$$

в котором  $S^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$  есть продолжение управлений по времени  $t$  с  $\Gamma \times [0, T]$  на  $\Gamma \times [0, 2T]$  по нечетности относительно  $t = T$ ;  $J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$  – интегрирование:  $(J^{2T} f)(\cdot, t) = \int_0^t f(\cdot, s) ds$  (см. [1], [3]).

• Оператор  $\Delta_g$ , определяющий эволюцию системы  $\alpha^T$ , не зависит от времени, т.е. система является *стационарной*. Как следствие, запаздывание управления вызывает такое же запаздывание волны, что выражается соотношением

$$u^{f_{T-r}}(\cdot, T) = u^f(\cdot, r), \quad 0 < r \leq T, \quad (2.13)$$

в котором

$$f_{T-r}(\cdot, t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t < T - r \\ f(\cdot, t - (T - r)), & T - r \leq t < T \end{cases}$$

есть задержанное управление.

### Локальная полнота волн

Множество волн

$$\mathcal{U}_\sigma^r := \{u^f(\cdot, r) \mid f \in \mathcal{F}_\sigma^T\} \subset \mathcal{H}$$

называется *достижимым* (с части границы  $\sigma$ , к моменту  $t = r$ ). Из (2.13) имеем:

$$\mathcal{U}_\sigma^r = W^T \mathcal{F}_\sigma^{T,r}, \quad 0 < r \leq T. \quad (2.14)$$

Задача (2.2)–(2.4) является гиперболической и, как таковая, обладает свойством *конечности области влияния*. Следствием этого свойства и одной из форм его записи является соотношение

$$\text{supp } u^f(\cdot, r) \subset \overline{\Omega^r[\sigma]}, \quad f \in \mathcal{F}_\sigma^T.$$

Оно означает, что акустические волны распространяются в  $\Omega$  с конечной (единичной) скоростью и к моменту  $t = r$  заполняют подобласть в

$\Omega$ , состоящую из точек,  $r$ -близких к  $\sigma$ . Как результат, выполнено вложение  $\mathcal{U}_\sigma^r \subset \mathcal{H}\langle\Omega^r[\sigma]\rangle$ <sup>13</sup>. Для дальнейшего принципиально важен характер этого вложения: оно оказывается плотным, так что выполнены равенства

$$\overline{\mathcal{U}_\sigma^r} \stackrel{(2.14)}{=} \overline{W^T \mathcal{F}_\sigma^{T,r}} = \mathcal{H}\langle\Omega^r[\sigma]\rangle, \quad 0 < r \leq T \quad (2.15)$$

(замыкание в  $\mathcal{H}$ ). В частности, если  $\text{diam } \Omega < r \leq T$ , то для любого  $\sigma \in \mathcal{R}$  имеем  $\overline{\mathcal{U}_\sigma^r} = \mathcal{H}\langle\Omega\rangle = \mathcal{H}$ : см. (2.1). Отсюда, в силу очевидного  $\mathcal{U}_\sigma^r \subset W^T \mathcal{F}^T =: \text{Ran } W^T$ , получаем

$$\overline{\mathcal{U}_\sigma^r} = \overline{\text{Ran } W^T} = \mathcal{H}, \quad r > \text{diam } \Omega. \quad (2.16)$$

Свойство (2.15), – полнота волн в заполняемой ими области, – выводится из фундаментальной теоремы единственности Хольмгрена-Йона-Татару: см. [1], [3]. В теории управления оно интерпретируется как *локальная граничная управляемость* системы  $\alpha^T$ . Оно показывает, что достижимые множества достаточно богаты: любую функцию с носителем в  $\Omega^r[\sigma]$  можно аппроксимировать (в  $\mathcal{H}$ -метрике) волной  $u^f(\cdot, T)$  при надлежащем выборе управления  $f \in \mathcal{F}_\sigma^{T,r}$ . С точки зрения обратных задач, управляемость – факт позитивного характера. Согласно общим принципам теории систем [11], чем богаче множество состояний, которые внешний наблюдатель может создать в системе, тем разнообразней информация о ее внутренних свойствах, которую он может извлечь из отображения “вход  $\mapsto$  выход”.

## 2.5 Волновая модель

Алгебра  $\mathfrak{T}_{\text{op}}^{\text{mod}}$ , вводимая ниже, в задаче акустической томографии играет роль модели  $\mathfrak{A}^{\text{mod}}$  из Введения.

• Проектор  $P_\sigma^r$  в  $\mathcal{H}$  на достижимое подпространство  $\overline{\mathcal{U}_\sigma^r}$  назовем *волновым*. Напомним, что  $X_\sigma^r$  есть проектор в  $\mathcal{H}$  на  $\mathcal{H}\langle\Omega^r[\sigma]\rangle$ , срезающий функции на окрестность  $\Omega^r[\sigma]$ . В силу полноты волн (2.15), имеем равенство

$$P_\sigma^r = X_\sigma^r, \quad r > 0, \quad \sigma \in \mathcal{R}. \quad (2.17)$$

Из него, при  $T > \text{diam } \Omega$ , в силу (2.10) следует *волновое представление* эйконала

$$\check{\tau}_\sigma \stackrel{(2.16),(2.17)}{=} \int_0^\infty r dP_\sigma^r = \int_0^T r dP_\sigma^r, \quad \sigma \in \mathcal{R}. \quad (2.18)$$

---

<sup>13</sup>определение  $\mathcal{H}\langle A \rangle$  см. в (2.8)

- Пусть

$$W^T = U^T |W^T|, \quad (2.19)$$

есть *полярное разложение* оператора управления, в котором

$$|W^T| := [(W^T)^* W^T]^{\frac{1}{2}} \stackrel{(2.11)}{=} [C^T]^{\frac{1}{2}} \quad (2.20)$$

есть оператор, действующий в  $\mathcal{F}^T$ , а  $\mathcal{F}^T \xrightarrow{U^T} \mathcal{H}$  – изометрия из  $\text{Ran } |W^T|$  на  $\text{Ran } W^T$ .

Дальнейшие рассмотрения проводятся в предположении  $T > \text{diam } \Omega$ , гарантирующем выполнение (2.16).

- Подпространство

$$\mathcal{H}^{\text{mod}} := \overline{\text{Ran } |W^T|} \stackrel{(2.20)}{=} \overline{\text{Ran } [C^T]^{\frac{1}{2}}} \subset \mathcal{F}^T \quad (2.21)$$

назовем *модельным внутренним пространством* системы  $\alpha^T$ . В силу (2.16) оператор  $U^T$  оказывается изометрией из  $\mathcal{H}^{\text{mod}}$  на  $\mathcal{H}$  и может играть роль унитарного оператора  $U$  из конструкции п.3 раздела 2.3.

В  $\mathcal{H}^{\text{mod}}$  выделим *модельные достижимые множества*

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_\sigma^{r \text{ mod}} &:= |W^T| \mathcal{F}_\sigma^{T,r} \stackrel{(2.19)}{=} (U^T)^* W^T \mathcal{F}_\sigma^{T,r} = \\ &\stackrel{(2.14)}{=} (U^T)^* \mathcal{U}_\sigma^r = [C^T]^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}_\sigma^{T,r}, \quad 0 < r \leq T. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Пусть  $P_\sigma^{r \text{ mod}}$  есть проектор в  $\mathcal{H}^{\text{mod}}$  на  $\overline{\mathcal{U}_\sigma^{r \text{ mod}}}$ . Из соотношения  $\mathcal{U}_\sigma^{r \text{ mod}} = (U^T)^* \mathcal{U}_\sigma^r$  следует связь проекторов  $P_\sigma^{r \text{ mod}} = (U^T)^* P_\sigma^r U^T$ . Она ведет к представлению

$$\begin{aligned} \check{\tau}_\sigma^{\text{mod}} &:= (U^T)^* \check{\tau}_\sigma U^T \stackrel{(2.18)}{=} (U^T)^* \left[ \int_0^T r dP_\sigma^r \right] U^T = \\ &= \int_0^T r d[(U^T)^* P_\sigma^r U^T] = \int_0^T r dP_\sigma^{r \text{ mod}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

для *модельных эйконолов*  $\check{\tau}_\sigma^{\text{mod}} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\text{mod}})$ .

- Алгебру

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{\text{op}}^{\text{mod}} &:= \vee \{ \check{\tau}_\sigma^{\text{mod}} \mid \sigma \in \mathcal{R} \} = \vee \{ (U^T)^* \check{\tau}_\sigma U^T \mid \sigma \in \mathcal{R} \} = \\ &= (U^T)^* [\vee \{ \check{\tau}_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{R} \}] U^T = (U^T)^* \mathfrak{T}_{\text{op}} U^T \subset \mathfrak{B}(\mathcal{H}^{\text{mod}}) \end{aligned}$$

мы называем *волновой моделью* алгебры  $\mathfrak{T}_{\text{op}}$ . Как видно из хода ее построения, волновая модель есть имманентный объект системы  $\alpha^T$ , ее атрибут. Именно она оказывается той реализацией общей конструкции пп. 4, 5 раздела 2.3, которая адекватна обратной задаче.

## 2.6 Реконструкция $\Omega$

Пусть внешний наблюдатель располагает оператором реакции  $R^{2T}$ , заданным для фиксированного  $T > \text{diam } \Omega$ . Он может восстановить многообразие  $\Omega$  по следующей схеме.

1. По  $R^{2T}$  определим оператор  $C^T$  согласно (2.12) и найдем положительный квадратный корень  $[C^T]^{\frac{1}{2}}$ .
2. Образует пространство  $\mathcal{H}^{\text{mod}}$  (см. (2.21)). В нем по (2.22) определим множества  $\{\mathcal{U}_\sigma^{r \text{ mod}}\}_{\sigma \in \mathcal{R}}$  и найдем соответствующие проекторы  $P_\sigma^{r \text{ mod}}$ . По проекторам найдем модельные эйконалы  $\tilde{\tau}_\sigma^{\text{mod}}$  согласно (2.23). Тем самым, получим отображение  $m : \sigma \mapsto \tilde{\tau}_\sigma^{\text{mod}}$ .
3. Располагая парой  $\{\mathcal{H}^{\text{mod}}, m\}$ , найдем копию  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$  по схеме п.5 раздела 2.3. Она решает поставленную задачу.

## 3 Электромагнитная томография

### 3.1 Постановки

Пусть теперь, в дополнение к условиям в 2.1,  $(\Omega, g)$  есть *ориентированное* многообразие и  $\dim \Omega = 3$ . На нем определены операции векторного анализа: скалярное произведение  $g(\cdot, \cdot)$ , векторное произведение  $\wedge$ , ротор  $\text{rot}$  и дивергенция  $\text{div}$  (см., например, [13]).

**Прямая задача.** Распространение электромагнитных волн в  $\Omega$  описывается системой Максвелла

$$e_t = \text{rot } h, \quad h_t = -\text{rot } e \quad \text{в } (\Omega \setminus \Gamma) \times (0, T), \quad (3.1)$$

$$e|_{t=0} = 0, \quad h|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (3.2)$$

$$e_\theta = f \quad 0 \leq t \leq T, \quad (3.3)$$

где  $e_\theta := e - g(e, \nu) \nu$  есть касательная компонента вектора  $e$  на границе,  $f$  — *граничное управление* (зависящее от времени касательное поле на  $\Gamma$ ),  $e = e^f(x, t)$  и  $h = h^f(x, t)$  суть электрическое и магнитное поля.

Отклик системы на воздействие управления описывается *оператором реакции*, действующим по правилу

$$R^T f := \nu \wedge h^f|_{\Gamma \times [0, T]}.$$

**Обратная задача** состоит в восстановлении многообразия  $(\Omega, g)$  по его оператору реакции. В точной постановке: по оператору  $R^{2T}$ , заданному

при фиксированном  $T > \text{diam } \Omega$ , требуется построить риманово многообразие  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$  с краем  $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ , такое, что для его оператора реакции  $\tilde{R}^{2T}$  выполнено  $\tilde{R}^{2T} = R^{2T}$ .

Смысл условия на  $T$  и удвоения времени наблюдений тот же, что и в обратной задаче АТ.

### 3.2 Алгебра эйконалов

**Пространство  $\mathcal{C}$ .** Пространство полей  $\mathcal{H} := \vec{L}_2(\Omega)$  со скалярным произведением

$$(a, b)_{\mathcal{C}} := \int_{\Omega} a \cdot b \, |d\Omega|$$

содержит *пространство роторов*

$$\mathcal{C} := \{ \text{rot } h \mid h, \text{rot } h \in \mathcal{H} \},$$

играющее в дальнейшем главную роль. Его элементы суть *соленоидальные поля*:  $y \in \mathcal{C}$  влечет  $\text{div } y = 0$ . Гладкие поля из  $\mathcal{C} \cap \vec{C}^\infty(\Omega)$  плотны в  $\mathcal{C}$ . В  $\mathcal{C}$  содержатся подпространства

$$\mathcal{C}\langle \Omega^r[\sigma] \rangle := \overline{\{ \text{rot } h \mid h \in \vec{C}^\infty(\Omega), \text{supp } h \subset \Omega^r[\sigma] \}}, \quad r > 0, \sigma \in \mathcal{R}.$$

Через  $Y_\sigma^r$  обозначим проектор в  $\mathcal{C}$  на  $\mathcal{C}\langle \Omega^r[\sigma] \rangle$ . В отличие от его скалярного аналога, – проектора  $X_\sigma^r$  из (2.10), – действие  $Y_\sigma^r$  не сводится к срезке полей на подобласть  $\Omega^r[\sigma]$ . Более того,  $Y_\sigma^r$  не является локальным оператором<sup>14</sup>. Как следствие, проекторы  $Y_\sigma^r$ , отвечающие различным  $\sigma$  в общем случае не перестановочны.

**Эйконалы.** Следующее определение инспирировано представлением (2.10): *эйконалами* мы называем операторы вида

$$\varepsilon_\sigma := \int_0^\infty r \, dY_\sigma^r \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}). \quad (3.4)$$

Они ограничены в силу компактности  $\Omega$ , а интегрирование в (3.4) фактически проводится по промежутку  $0 \leq r \leq \text{diam } \Omega$ , поскольку для любого  $\sigma$  при  $r > \text{diam } \Omega$  проектор  $Y_\sigma^r$  равен единичному оператору. Эйконалы  $\varepsilon_\sigma$  суть самосопряженные положительные операторы в  $\mathcal{C}$ . Поскольку проекторы  $Y_\sigma^r$ , отвечающие разным  $\sigma$ , вообще говоря, не перестановочны, соответствующие эйконалы  $\varepsilon_\sigma$  также могут не коммутировать.

---

<sup>14</sup>Оператор  $L$  *локален*, если  $\text{supp } Ly \subset \text{supp } y$ . Проекторы  $Y_\sigma^r$  этим свойством не обладают: см. [6]

Ключевым для использования эйконалов в обратной задаче является следующий результат [6]. Справедливо представление

$$\varepsilon_\sigma y = \tau_\sigma y + Ky, \quad (3.5)$$

в котором  $\tau_\sigma$  понимается как оператор из  $\mathcal{C}$  в  $\mathcal{H}$ , поточечно умножающий поля на функцию  $\tau_\sigma := \text{dist}(\cdot, \sigma)$ , а оператор  $K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{H}$  является компактным. Заметим, что слагаемые в правой части по-отдельности могут не входить в  $\mathcal{C}$ .

**Алгебра  $\mathfrak{E}$ .** Эйконалы порождают алгебру

$$\mathfrak{E} := \vee \{ \varepsilon_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{R} \} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{C}).$$

Она, в отличие от алгебры акустических эйконалов, уже не является коммутативной. С точки зрения обратной задачи, некоммутативность является осложнением<sup>15</sup>. Его, однако, удастся обойти благодаря следующему результату.

Пусть  $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{C})$  есть идеал компактных операторов. Пусть

$$\dot{\mathfrak{E}} := \mathfrak{E} / [\mathfrak{K} \cap \mathfrak{E}] = \vee \{ \pi \varepsilon_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{R} \}, \quad (3.6)$$

есть фактор-алгебра, снабженная канонической нормой и алгебраическими операциями,  $\pi$  – каноническая проекция  $\mathfrak{E}$  на  $\dot{\mathfrak{E}}$ , сопоставляющая эйконалу  $\varepsilon_\sigma$  соответствующий класс эквивалентности. Как показано в [6],  $\dot{\mathfrak{E}}$  является *коммутативной* банаховой алгеброй, изометрически изоморфной алгебре скалярных эйконалов  $\mathfrak{T}$ . Изометрия  $\dot{\mathfrak{E}} \xrightarrow{D} \mathfrak{T}$  задается связью образующих

$$\dot{\mathfrak{E}} \ni \pi \varepsilon_\sigma \xrightarrow{D} \tau_\sigma \in \mathfrak{T}, \quad \sigma \in \mathcal{R},$$

где  $\varepsilon_\sigma$  и  $\tau_\sigma$  связаны соотношением (3.5). Из изометричности алгебр вытекает гомеоморфность спектров  $\hat{\dot{\mathfrak{E}}}$  и  $\hat{\mathfrak{T}} = \Omega$ . Следовательно, алгебра  $\dot{\mathfrak{E}}$  кодирует  $\Omega$  и подходит на роль основной алгебры  $\mathfrak{A}$  из Введения.

**Модель.** Пусть  $\mathcal{C}^{\text{mod}}$  – некоторое гильбертово пространство,  $U : \mathcal{C}^{\text{mod}} \rightarrow \mathcal{C}$  – унитарный оператор,  $\mathfrak{B}(\mathcal{C}) \ni a \xrightarrow{u} U^* a U \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}^{\text{mod}})$  – соответствующая изометрия алгебр. Алгебру

$$\mathfrak{E}^{\text{mod}} := u \mathfrak{E}$$

мы называем *моделью* алгебры  $\mathfrak{E}$ , а операторы  $\varepsilon_\sigma^{\text{mod}} := u \varepsilon_\sigma$  – модельными эйконалами.

---

<sup>15</sup>Из-за него не решена задача реконструкции графа: см. [8].

Пусть  $\mathfrak{K}^{\text{mod}} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{C}^{\text{mod}})$  есть идеал компактных операторов; введем фактор-алгебру

$$\dot{\mathfrak{E}}^{\text{mod}} := \mathfrak{E}^{\text{mod}} / [\mathfrak{K}^{\text{mod}} \cap \mathfrak{E}^{\text{mod}}] = \vee \{ \pi \varepsilon_{\sigma}^{\text{mod}} \mid \sigma \in \mathcal{R} \}. \quad (3.7)$$

Как видно из определений (3.7) и (3.6), алгебры  $\dot{\mathfrak{E}}^{\text{mod}}$  и  $\dot{\mathfrak{E}}$  изометричны. Последняя изометрична алгебре эйконолов  $\mathfrak{T} = D\dot{\mathfrak{E}}$ . Следовательно, алгебры  $\dot{\mathfrak{E}}^{\text{mod}}$  и  $\mathfrak{T}$  изометричны, и существует гомеоморфизм  $s$ , связывающий их спектры и функции на спектрах:

$$\widehat{\mathfrak{T}} = \Omega \xrightarrow{s} \tilde{\Omega} := \widehat{\dot{\mathfrak{E}}^{\text{mod}}}, \quad G\dot{\mathfrak{E}}^{\text{mod}} = C(\tilde{\Omega}) \ni G\pi \varepsilon_{\sigma}^{\text{mod}} =: \tilde{\tau}_{\sigma} = \tau_{\sigma} \circ s^{-1}, \quad (3.8)$$

где  $G$  – преобразование Гельфанда. Рассмотрения иллюстрирует диаграмма на рис 3.

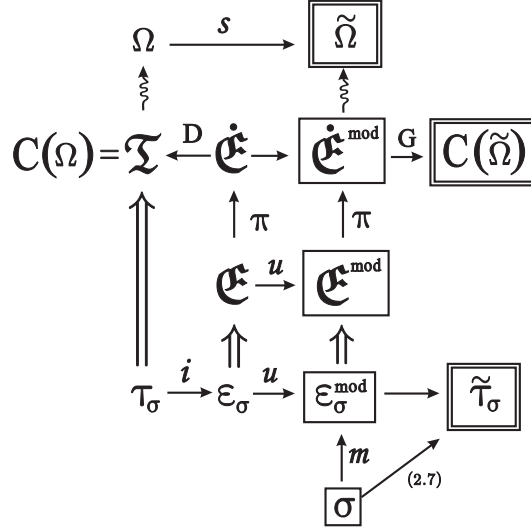


Рис. 3: Реконструкция в ЭМТ

**Схема реконструкции.** Пусть по измерениям на границе внешний наблюдатель определил пару  $\{\mathcal{C}^{\text{mod}}, m\}$ , где  $m$  – отображение

$$\mathcal{R} \ni \sigma \xrightarrow{m} \varepsilon_{\sigma}^{\text{mod}} \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}^{\text{mod}}).$$

Тогда он может восстановить многообразие по следующей схеме:

- построить алгебру  $\mathfrak{E}^{\text{mod}} = \vee \{ \varepsilon_{\sigma}^{\text{mod}} \mid \sigma \in \mathcal{R} \} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{C}^{\text{mod}})$ , затем перейти к фактор алгебре  $\dot{\mathfrak{E}}^{\text{mod}}$  согласно (3.7);
- найти ее спектр  $\tilde{\Omega} := \widehat{\dot{\mathfrak{E}}^{\text{mod}}}$  и каноническую реализацию по Гельфанду – алгебру  $G\dot{\mathfrak{E}}^{\text{mod}} = C(\tilde{\Omega})$ ;

- определить по (3.8) отображение  $\sigma \xrightarrow{G\pi m} \tilde{\tau}_\sigma$ , являющееся версией (2.7). Оно определяет копию  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$ .

Остается показать, что оператор реакции системы Максвелла задает адекватную пару  $\{\mathcal{C}^{\text{mod}}, m\}$ .

### 3.3 Система $\mu^T$

Задаче (3.1)–(3.3) сопоставим динамическую систему  $\mu^T$  и снабдим ее соответствующими атрибутами.

- Пространство управлений  $\mathcal{F}^T := L_2([0, T]; \vec{L}_2(\Gamma))$  есть *внешнее пространство* системы  $\mu^T$ . Гладкий класс

$$\mathcal{M}^T := \{f \in C^\infty([0, T]; \vec{C}^\infty(\Gamma)) \mid \text{supp } f \subset (0, T]\}$$

плотен в  $\mathcal{F}^T$ . При  $f \in \mathcal{F}^T$  задача (3.1)–(3.3) имеет единственное классическое гладкое решение. Обозначим  $\vec{L}_2(\sigma) := \{b \in \vec{L}_2(\Gamma) \mid \text{supp } b \subseteq \sigma\}$ . Внешнее пространство содержит попространства

$$\mathcal{F}_\sigma^{T,r} := \{f \in L_2([0, T]; \vec{L}_2(\sigma)) \mid \text{supp } f \subseteq [T-r, T]\}, \quad 0 < r \leq T, \quad \sigma \in \mathcal{R},$$

образованные управлениями, действующими с  $\sigma$  с задержкой  $T-r$  ( $r$  есть время действия).

- *Внешним пространством* является пространство  $\mathcal{C} \oplus \mathcal{C}$ ; решения задачи  $\{e^f(\cdot, t), h^f(\cdot, t)\}$  суть его элементы, зависящие от времени. В нем выделена *электрическая часть*  $\mathcal{C} \oplus \{0\} \ni e^f(\cdot, t)$ <sup>16</sup>.
- Соответствие “вход  $\mapsto$  состояние” реализуется *оператором управления*  $W_\mu^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{C} \oplus \mathcal{C}$ ,  $\text{Dom } W_\mu^T = \mathcal{M}^T$ ,  $W_\mu^T f := \{e^f(\cdot, T), h^f(\cdot, T)\}$ . Электрической подсистеме отвечает оператор  $W^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{C}$ ,

$$W^T f := e^f(\cdot, T),$$

также определенный на  $\mathcal{M}^T$ . В отличие от акустической системы, операторы  $W_\mu^T$  и  $W^T$  не являются ограниченными, но допускают замыкание.

- Отображение “вход  $\mapsto$  выход” реализуется *оператором реакции*  $R^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ ,  $\text{Dom } R^T = \mathcal{M}^T$ ,  $R^T f = \nu \wedge h^f|_{\Gamma \times [0, T]}$ .
- Связывающий оператор электрической части  $C^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$  вводится через *связывающую форму*  $c^T$ ,  $\text{Dom } c^T = \mathcal{M}^T \times \mathcal{M}^T$ ,

$$c^T[f, g] := (e^f(\cdot, T), e^g(\cdot, T))_{\mathcal{C}} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{C}},$$

<sup>16</sup>Выделение электрической части мотивировано характером управления: см. (3.3).



являющуюся неотрицательной билинейной формой. Как таковая, она замыкаема, причем замыкание  $\bar{c}^T$  определено на  $\mathcal{N}^T \times \mathcal{N}^T$ , где  $\mathcal{N}^T$  – линейал в  $\mathcal{F}^T$ ,  $\mathcal{N}^T \supset \mathcal{M}^T$ . С формой  $\bar{c}^T$  ассоциирован самосопряженный оператор  $C^T$ , определяемый соотношением

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = \bar{c}^T[f, g], \quad f \in \text{Dom } C^T, g \in \mathcal{N}^T$$

(см. [9]). Замыкание формы  $c^T$  равносильно замыканию  $W^T$ ; при этом  $\mathcal{N}^T = \text{Dom } \bar{W}^T = \text{Dom } (C^T)^{\frac{1}{2}}$ . Следовательно, располагая формой  $c^T$ , можно расширить  $W^T$  с  $\mathcal{M}^T$  на  $\mathcal{N}^T$ . В дальнейшем это расширение считается выполненным и мы полагаем  $\text{Dom } W^T = \mathcal{N}^T$ .

Как результат, имеем соотношение

$$\bar{c}^T[f, g] = ([C^T]^{\frac{1}{2}} f, [C^T]^{\frac{1}{2}} g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_c, \quad f, g \in \mathcal{N}^T. \quad (3.9)$$

Ключевой факт состоит в том, что связывающая форма явным и простым образом выражается через оператор рекции. Справедливо представление

$$c^T[f, g] = 2^{-1} ((S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T f, g)_{\mathcal{F}^T}, \quad f, g \in \mathcal{M}^T, \quad (3.10)$$

в котором оператор  $S^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$  продолжает управления (по времени) с  $\Gamma \times [0, T]$  на  $\Gamma \times [0, 2T]$  по нечетности относительно  $t = T$ ;  $J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$  есть интегрирование:  $(J^{2T} f)(\cdot, t) = \int_0^t f(\cdot, s) ds$  (см. [3]).

### Локальная полнота волн

Множество

$$\mathcal{E}_\sigma^r := \{e^f(\cdot, r) \mid f \in \mathcal{F}_\sigma^T \cap \mathcal{N}^T\} = W^T [\mathcal{F}_\sigma^{T,r} \cap \mathcal{N}^T] \quad (3.11)$$

называется *достижимым* (с части границы  $\sigma$ , в момент  $t = s$ ). Равенство в (3.11) есть следствие стационарности системы  $\mu^T$ .

Для системы Максвелла справедлив принцип конечности области влияния и волны в ней распространяются с единичной скоростью. Как следствие, выполнено соотношение

$$\text{supp } e^f(\cdot, r) \subset \overline{\Omega^r[\sigma]}, \quad f \in \mathcal{F}_\sigma^T \cap \mathcal{N}^T,$$

приводящее к вложению  $\mathcal{E}_\sigma^r \subset \mathcal{C}\langle \Omega^r[\sigma] \rangle$ . Это вложение оказывается плотным: справедливы равенства

$$\overline{\mathcal{E}_\sigma^r} \stackrel{(3.11)}{=} \overline{W^T [\mathcal{F}_\sigma^{T,r} \cap \mathcal{N}^T]} = \mathcal{C}\langle \Omega^r[\sigma] \rangle, \quad 0 < r \leq T. \quad (3.12)$$

В частности, если  $\text{diam } \Omega < r \leq T$ , то для любого  $\sigma \in \mathcal{R}$  имеем  $\overline{\mathcal{E}}_\sigma^r = \mathcal{C}\langle\Omega\rangle = \mathcal{C}$ : см. (2.1). Отсюда, в силу очевидного  $\mathcal{E}_\sigma^r \subset W^T \mathcal{F}^T =: \text{Ran } W^T$ , получаем

$$\overline{\mathcal{E}}_\sigma^r = \overline{\text{Ran } W^T} = \mathcal{C}, \quad \text{diam } \Omega < r \leq T. \quad (3.13)$$

Равенство (3.12) выводится из векторного варианта теоремы единственности Хольмгрена-Йона-Татару: см. [3]. Оно показывает, что ключевое для нашего подхода свойство, – *полнота волн в заполняемой ими области*, – имеет место и в системе  $\mu^T$ .

### 3.4 Волновая модель

Здесь предъявляется пара  $\{\mathcal{C}^{\text{mod}}, m\}$ , о которой говорилось в конце раздела 3.2.

- Проектор  $P_\sigma^r$  в  $\mathcal{C}$  на достижимое подпространство  $\overline{\mathcal{E}}_\sigma^r$  назовем *волновым*. Напомним, что  $Y_\sigma^r$  есть проектор в  $\mathcal{C}$  на  $\mathcal{C}\langle\Omega^r[\sigma]\rangle$ . В силу полноты волн (3.12), имеем равенство

$$P_\sigma^r = Y_\sigma^r, \quad r > 0, \quad \sigma \in \mathcal{R}. \quad (3.14)$$

В частности, в силу (3.13) при  $\text{diam } \Omega < r \leq T$  выполнено  $P_\sigma^r = \mathbb{I}$ , а из определения (3.4) следует *волновое представление* эйконала

$$\check{\varepsilon}_\sigma \stackrel{(3.14)}{=} \int_0^\infty r dP_\sigma^r = \int_0^T r dP_\sigma^r, \quad \sigma \in \mathcal{R}. \quad (3.15)$$

- Пусть

$$W^T = U^T |W^T|, \quad (3.16)$$

есть полярное разложение оператора управления, в котором

$$|W^T| := [(W^T)^* W^T]^{\frac{1}{2}} \stackrel{(3.9)}{=} [C^T]^{\frac{1}{2}}$$

есть оператор, действующий в  $\mathcal{F}^T$  на области определения  $\text{Dom } |W^T| = \mathcal{N}^T$ , а  $\mathcal{F}^T \xrightarrow{U^T} \mathcal{C}$  – изометрия из  $\text{Ran } |W^T|$  на  $\text{Ran } W^T$ .

Дальнейшие рассуждения проводятся для  $T > \text{diam } \Omega$ . В этом предположении имеем  $\overline{\text{Ran } |W^T|} \stackrel{(3.13)}{=} \mathcal{C}$ .

- Подпространство

$$\mathcal{C}^{\text{mod}} := \overline{\text{Ran } |W^T|} = \overline{\text{Ran } [C^T]^{\frac{1}{2}}} \subset \mathcal{F}^T \quad (3.17)$$

есть модельное внутреннее пространство системы  $\alpha_\mu^T$ . В силу (3.13) оператор  $U^T$  оказывается изометрией из  $\mathcal{C}^{\text{mod}}$  на  $\mathcal{C}$ .

В  $\mathcal{C}^{\text{mod}}$  выделим модельные достижимые множества

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\sigma^{r \text{ mod}} &:= |W^T|[\mathcal{F}_\sigma^{T,r} \cap \mathcal{N}^T] \stackrel{(3.16)}{=} (U^T)^* W^T[\mathcal{F}_\sigma^{T,r} \cap \mathcal{N}^T] = \\ &= (U^T)^* \mathcal{E}_\sigma^r = [C^T]^{\frac{1}{2}}[\mathcal{F}_\sigma^{T,r} \cap \mathcal{N}^T], \quad 0 < r \leq T.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Пусть  $P_\sigma^{r \text{ mod}}$  есть проектор в  $\mathcal{C}^{\text{mod}}$  на  $\overline{\mathcal{E}_\sigma^{r \text{ mod}}}$ . Из соотношения  $\mathcal{E}_\sigma^{r \text{ mod}} = (U^T)^* \mathcal{E}_\sigma^r$  следует связь проекторов  $P_\sigma^{r \text{ mod}} = (U^T)^* P_\sigma^r U^T$ . Она ведет к представлению

$$\begin{aligned}\varepsilon_\sigma^{\text{mod}} &:= (U^T)^* \varepsilon_\sigma U^T \stackrel{(3.15)}{=} (U^T)^* \left[ \int_0^T r dP_\sigma^r \right] U^T = \\ &= \int_0^T r d[(U^T)^* P_\sigma^r U^T] = \int_0^T r dP_\sigma^{r \text{ mod}}.\end{aligned}\quad (3.19)$$

для модельных эйконолов  $\varepsilon_\sigma^{\text{mod}} \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}^{\text{mod}})$ .

• Пусть  $\mathfrak{B}(\mathcal{C}) \ni a \xrightarrow{u} (U^T)^* a U^T \in \mathfrak{B}(\mathcal{C}^{\text{mod}})$  есть изометрия алгебр, индуцированная оператором  $U^T$ . Алгебра

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}^{\text{mod}} &:= \vee \{ \varepsilon_\sigma^{\text{mod}} \mid \sigma \in \mathcal{R} \} = \vee \{ u \varepsilon_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{R} \} = \\ &= u \vee \{ \varepsilon_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{R} \} = u \mathfrak{E} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{C}^{\text{mod}})\end{aligned}$$

есть *волновая моделью* алгебры  $\mathfrak{E}$ .

### 3.5 Реконструкция $\Omega$

Пусть для фиксированного  $T > \text{diam } \Omega$  задан оператор реакции  $R^{2T}$  системы  $\mu^T$ . Следующая процедура восстанавливает многообразие  $\Omega$ .

1. По  $R^{2T}$ , через связывающую форму (3.10), определим оператор  $C^T$  и найдем  $[C^T]^{\frac{1}{2}}$ .
2. Образует пространство  $\mathcal{C}^{\text{mod}}$  (см. (3.17)). В нем по (3.18) определим множества  $\{\mathcal{E}_\sigma^{r \text{ mod}}\}_{\sigma \in \mathcal{R}}$  и найдем соответствующие проекторы  $P_\sigma^{r \text{ mod}}$ . По проекторам найдем модельные эйконы  $\varepsilon_\sigma^{\text{mod}}$  согласно (3.19). Таким образом, получено отображение  $\sigma \xrightarrow{m} \varepsilon_\sigma^{\text{mod}}$ ; вместе с ним определена пара  $\{\mathcal{C}^{\text{mod}}, m\}$ .
3. По схеме, описанной в конце раздела 3.2, пара  $\{\mathcal{C}^{\text{mod}}, m\}$  определяет копию  $(\tilde{\Omega}, \tilde{g})$ , решающую поставленную задачу.

## Список литературы

- [1] M.I.Belishev. Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method). *Inverse Problems*, 13(5): R1–R45, 1997.

- [2] M.I.Belishev. The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method. *SIAM J.Math.Anal.*, 35 (1): 172–182, 2003.
- [3] M.I.Belishev. Recent progress in the boundary control method. *Inverse Problems*, 23 (2007), No 5, R1–R67.
- [4] M.I.Belishev. Geometrization of Rings as a Method for Solving Inverse Problems. *Sobolev Spaces in Mathematics III. Applications in Mathematical Physics*, Ed. V.Isakov., Springer, 2008, 5–24.
- [5] M.I.Belishev and M.N.Demchenko. Time-optimal reconstruction of Riemannian manifold via boundary electromagnetic measurements. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, 19 (2011), no 2, 167–188.
- [6] M.I.Belishev and M.N.Demchenko. Elements of noncommutative geometry in inverse problems on manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, Volume 78, April 2014, 29–47.
- [7] M.I.Belishev, V.A.Sharafutdinov. Dirichlet to Neumann operator on differential forms. *Bulletin de Sciences Mathématiques*, 132 (2008), No 2, 128–145.
- [8] M.I.Belishev and N.Wada. A  $C^*$ -algebra associated with dynamics on a graph of strings. <http://mathsoc.jp/publication/JMSJ/inpress.html>.
- [9] M.S.Birman, M.Z.Solomyak. Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space. *D.Reidel Publishing Comp.*, 1987.
- [10] O.Forster. Lectures on Riemann surfaces. *Springer–Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin*, 1981.
- [11] R.Kalman, P.Falb, M.Arbib. Topics in Mathematical System Theory. *New-York: McGraw-Hill*, 1969.
- [12] М.А. Наймарк. Нормированные кольца. М.: Наука, 1968.  
English translation:  
M.A.Naimark. Normed Rings. *WN Publishing, Gronnongen, The Netherlands*, 1970.
- [13] G.Schwarz. Hodge decomposition - a method for solving boundary value problems. *Lecture notes in Math.*, 1607. *Springer–Verlag, Berlin*, 1995.