

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: Эл №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

**КОГОМОЛОГИИ В НЕУНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ
ПОЛУПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ (ГРУППА $U(2, 2)$).**

А. М. Вершик¹, М. И. Граев²

К столетию со дня рождения Израиля Моисеевича Гельфанда

Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Фонтанка 27, С.-Петербург, 191023;
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
мат-мех ф-т. Ст.Петергоф, 198504, Университетская площадь 2
vershik@pdmi.ras.ru

НИИСИ РАН, Нахимовский просп. 36, кор. 1, Москва 117218
graev_36@mtu-net.ru

Январь, 2014

АННОТАЦИЯ

Предлагается метод построения особых представлений групп Ли со значениями в неунитарных представлениях разрешимых подгрупп Ивасава. В качестве характерного примера изучается группа $U(2, 2)$.

Ключевые слова. Полупростые группы, особые представления, подгруппа Ивасава, неунитарные представления

¹Поддержан грантами РФФИ 11-01-00677-а, 13-01-00190а, ОФИ_м 13-01-1242200.

²Поддержан грантами РФФИ 13-01-00190а

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В.А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М. Бабич, Н.А. Вавилов, А.М. Вершик, М.А. Всемиров,
А.И. Генералов, И.А. Ибрагимов, Л.Ю. Колотилина,
Г.В. Кузьмина, П.П. Кулиш, Б.Б. Лурье, Ю.В. Матиясевич,
Н.Ю. Нецветаев, С.И. Репин, Г.А. Серегин, В.Н. Судаков, О.М. Фоменко.

1 ВВЕДЕНИЕ: ОБЗОР ТЕОРИИ ОСОБЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

1.1 Группы токов и особые представления

Группой токов G^X , где X – топологическое пространство с вероятностной, борелевской мерой m , а G — произвольная локально-компактная группа, называется группа непрерывных отображений $X \rightarrow G$ с поточечным умножением, и с тем, или иным условием интегрируемости по мере. Изучение их представлений инициировано как самой теорией представлений, так приложениями к математической физике. Хорошо известная модель неприводимых представлений групп токов G^X — фоковская или гауссовская, в которой существенную роль играют ненулевые 1-когомологии группы коэффициентов (группы G) со значениями в неприводимых унитарных представлениях этой группы. Такое неприводимое представление T группы G в гильбертовом пространстве H , обладает нетривиальным 1-коциклом, то есть непрерывным отображением $b : G \rightarrow H$, удовлетворяющим условию:

$$b(g_1 g_2) = T(g_1)b(g_2) + b(g_1) \quad \text{для любых } g_1, g_2 \in G$$

и условию нетривиальности: не существует вектора $\xi \in H$, такого что $b(g) = T(g)\xi - \xi$ для любого $g \in G$. Такие представления называются *особыми*. Единичное представление является особым для всех групп, с нетривиальным, аддитивным характером, который и является коциклом. В других терминах, особое представление характеризуется существованием *почти инвариантных векторов*; последнее означает, что для всякого $\epsilon > 0$ и компакта K в группе, существует такой вектор h в пространстве представления, что $\|U_k h - h\| < \epsilon$ для всех $k \in K$, U_k -оператор представления, отвечающий элементу k .

По теореме [1] всякое особое представление компактно порожденной группы обязано быть неотделимым по Хаусдорфу от единичного представления в топологии Фелла. Топология Фелла на пространстве унитарных представлений локально компактной группы G задается следующим образом: открытая окрестность представления π в гильбертовом пространстве H определяется числом ϵ и конечным набором h_1, \dots, h_k элементов пространства H , и компактом K группы G , и состоит из всех унитарных представлений ρ группы G , в пространстве которых найдутся такие элементы f_1, \dots, f_k , что

$$\sup_{i=1 \dots k; g \in K} \{ | \langle \pi(g)h_i, h_i \rangle - \langle \rho(g)f_i, f_i \rangle | < \epsilon \}.$$

Обратное утверждение неверно: не всякое представление, неотделимое от единичного является особым, т.е имеет нетривиальные первые коомологии.

В работе [2] Е.Шалом доказал гипотезу, высказанную в [1]: если у локально-компактной группы единичное представление изолировано в множестве всех неприводимых унитарных представлений (т.е. группа не имеет свойства Каждана T), то хотя бы одно особое представление существует. Доказательство основной теоремы в [2](см.также [3], Theorem 3.2.1) неконструктивно, и поэтому не дает прямого способа нахождения особого представления: мы очень мало знаем, как выделить особые

представления из множества всех представлений, неотделимых (или “приклеенных”) к единичному представлению.

Принята следующая терминология: *корой (Core) данного представления π* называется множество таких представлений ρ , что произвольные открытые окрестности π и ρ имеют непустое пересечение. В кору регулярного представления аменабельной группы входят все неприводимые представления, и это характеристика аменабельности. Особенно важно использование этого понятия для неприводимых представлений и в частности, для единичного представления. Если не оговорено противное, то *корой группы* называется кора единичного одномерного представления.³

Ненулевые когомологии со значениями в представлении называются редуцированными ([2]), если соответствующий коцикл не является пределом тривиальных коциклов. Редуцированные когомологии существуют только в представлениях, лежащих в коре, но не лежащих в подкорке. Для полупростых групп $O(n, 1), U(n, 1)$ нетривиальные когомологии редуцированы. Существуют ли разрешимые группы с этим условием авторам неизвестно. Наконец, упомянем для полноты еще одно любопытное понятие - групп со свойством Хагерупа ([3, 4]): это группы с неизолированным единичным представлением (т.е. не обладающие свойством Каждана), но, у которых коциклы в особом представлении удовлетворяют специальному свойству невырожденности: коцикл, как отображение группы в гильбертово пространство

$$\beta : G \rightarrow H$$

является собственным, т.е. прообраз ограниченного множества гильбертова пространства предкомпактен в группе. Этому свойству удовлетворяют все аменабельные группы, свободные группы ([4]), группы $O(n, 1), U(n, 1)$ и др. (см. [5]). Примеры групп не удовлетворяющих ни свойству Каждана, ни свойству Хагерупа, имеются, но пока малоинтересны.

1.2 Особые представления групп ранга 1 и их разрешимых подгрупп

Из наиболее важных групп Ли -полупростых — только группы $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$, имеющие ранг 1, обладают особыми представлениями. Остальные полупростые группы, (включая даже группы ранга 1 — $Sp(n, 1)$, как доказал Костант [6]), имеют свойство Каждана их единичное представление изолировано и фоковская модель построения

³Более детальная терминология: представления лежащие в коре единичного представления называются *бесконечно малыми* (в смысле, аналогичном лейбницеvскому, -см [1]), *подкоркой данного представления π* называется множество всех представлений ρ , в замыкании которых лежит представление π (соотв. единичное представление). В других терминах это означает, что ρ слабо содержит π (в частности, единичное представление). Подкорка есть, очевидно, подмножество коры. Интерпретация введенных понятий в терминах *хаудорфовых аксиом отделимости* единичного и некоторого представления ρ такова: единичное представление лежит в коре ρ , если не выполнена аксиома отделимости T_2 , для точек подкорки не выполнена даже аксиома отделимости T_1 , аксиома T_0 выполнена всегда, так как единичное представление замкнуто.

групп токов — неприменима. Заметим, что до сих пор теорема Костанта о $Sp(n, 1)$ не имеет геометрического доказательства.

Можно сказать, что анализ представлений групп токов для групп $O(n, 1)$ и $U(n, 1)$ достаточно хорошо развит. Работы в этом направлении начались с пионерских работ И.М.Гельфанда и авторов этой статьи см [7, 8, 9]. Общая схема фоковской модели, независимо от конкретной группы, была ранее рассмотрена Араки [14], см. [15], однако примеров полупростых групп до работы [7] не было. В этих работах, а также в работах [10, 12, 11, 13] были найдены условия неприводимости представлений групп токов и другие их свойства. Принципиальное значение имели идеи работы [9], в которой для групп ранга 1 был предложен метод сведения задачи к разрешимой подгруппе полупростой группы на примере $SL(2, R)$. Развитие этой идеи в работах авторов данной статьи последних 10 лет привело к новым моделям представлений групп токов, эквивалентных фоковской, но построенных по другим (негауссовским) мерам Леви (см.[16, 17]). Это привело к построению интегральной, а затем пуассоновой и квазипуассоновой моделей представлений групп токов ([18, 19]). Возникла, также так называемая, бесконечномерная мера Лебега [22, 23, 24], являющаяся наиболее точным континуальным аналогом лебеговой меры на конечномерном положительном октанте. Эта мера тесно связана с гамма-процессом Леви и имеет большой самостоятельный интерес.

1.3 Разрешимые подгруппы полупростых групп и уточнение разложения Ивасава

Известно, что для коммутативных и нильпотентных групп особые представления исчерпывается единичным представлением (См. [11, 12]). Но уже для разрешимых групп эта проблема исследована недостаточно. Нас интересует конкретный класс разрешимых групп, в основном $O(p, q), U(p, q)$ и, в качестве первого примера, — группы $U(2, 2)$ — мы используем её разрешимую подгруппу, которую можно назвать *группой Ивасава*. Такая подгруппа может быть определена в произвольной связной полупростой вещественной группы Ли см [25], где она названа “максимальная связная треугольная подгруппа”. Разложение Ивасава для групп состоит в том, что эта подгруппа является “дополнительной” к максимальной компактной подгруппе.

Разрешимая подгруппа (как и всякая аменабельная группа), обладает особым представлением, и поэтому возможна следующая стратегия построения групп токов полупростой группы: сначала найти особое, унитарное или неунитарное, представление этой разрешимой подгруппы и построить представление ее группы токов, а затем пытаться продолжить особое представление на всю полупростую группу и конструировать продолжение представления на ее группы токов. Для групп ранга 1 этот приём, как отмечено выше, впервые использован для $SL(2, R)$ в [9] и позднее исследован подробно в цикле работ авторов последних лет ([18, 19]). При переходе от групп ранга 1 к группам большего ранга эта идея построения попрежнему остается рабочей.

Мы рассматриваем здесь этот вопрос на конкретном примере группы $U(2, 2)$, и имея в виду более общую ситуацию, которая будет изложена в другом месте. Мы подробно описываем здесь подгруппу Ивасава (группа P далее) для этого случая. Пер-

вый вопрос, – каковы ее особые представления? Но здесь мы сталкиваемся с новой проблемой: для реализации нашего плана необходимо, чтобы это особое представление подгруппы Ивасава было бы точным.⁴ Авторам неизвестно, для каких групп это имеет место. Например для нильпотентных групп точного особого представления не существует. Этот факт представляет интерес уже для группы Гейзенберга, и он эквивалентен одной из форм принципа неопределённости⁵ Для афинной группы $\text{Aff}(\mathbb{R})$ бесконечномерное представление (квазиэквивалентное регулярному) является точным особым представлением. Но уже для самых простых 3-мерных разрешимых групп (в частности, группы S — см. далее), вопрос нетривиален.

Проблема. Для каких групп существует точное неприводимое унитарное особое представление, и в частности, для каких разрешимых групп? Более конкретно: когда существует такое представление для группы Ивасава полупростой вещественной группы Ли?

Таким образом, главная трудность лежит в построении точного особого представления группы Ивасава унитарного или нет. *Построение неунитарного точного особого представления для группы $U(2, 2)$ - есть основной результат этой работы, и авторы не сомневаются, что такое построение можно провести для любой вещественной полупростой группы.* Продолжение коцикла на всю полупростую группу и построение группы токов становится возможным, потому что, как показывают результаты упоминавшихся выше работ, имеются модели (например, пуассонова модель — в отличие от фоковской модели) представления групп токов, которые никак не используют унитарность исходного представления. Вопрос о том, можно ли это сделать в унитарном представлении подгруппы Ивасава пока остается открытым.

В заключении этого обзора укажем на несколько иной путь, который ближе к первоначальным работам по группам токов, и к классическим работам по теории представлений полупростых групп. Он состоит в следующем. Хорошо известно, что особые представления полупростых групп ранга 1 лежат “в хвосте” дополнительных серий, а дополнительные серии есть у любой полупростой группы. Однако, для групп ранга, большего 1, унитарные представления “не доходят” до единичного представления; более точно, унитарность теряется при деформации единичного представления. С другой стороны, известно, что в некоторых случаях для этих неунитарных представлений можно указать незнакоопределённую билинейную форму, инвариантную относительно действия группы, . Свойства соответствующего пространства с индефинитной метрикой в этом случае плохо изучены, и вопрос об особом представлении, пусть и неунитарном, повидимому, ранее не ставился. Наш альтернативный план состоит в аналитическом продолжении унитарных представлений подгруппы Ивасава и в частности в построении неунитарного особого представления на этой основе. Возможно, что указанные два подхода к теории представлений групп токов для полупростых групп ранга, большего 1, приведут к различным классам представлений.

⁴точное (или невырожденное) представление — это представление, ядро которого тривиально.

⁵Беседы первого автора с В.П.Хавиным на эту тему показали, что упомянутый факт о группе Гейзенберга, как будто, не имеет пока чисто аналитического (не представленного) доказательства.

2 Группа $U(2, 2)$ и её подгруппа Ивасавы

2.1 Описание группы $U(2, 2)$

В качестве первоначального примера мы рассматриваем группу $U(2, 2)$ — линейных преобразований \mathbb{C}^4 , сохраняющих фиксированную эрмитову форму с сигнатурой $(2, 2)$; здесь выбрана эрмитова форма вида

$$x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_3 + x_2\bar{x}_4 + \bar{x}_2x_4.$$

Группа $U(2, 2)$ является одним из самых простых примеров полупростой группы Ли, вещественный ранг которой больше единицы (равен двум). Группы вида $U(p, q)$ называют псевдоунитарными. В настоящем параграфе мы уточняем разложения Ивасавы для этой группы и изучаем структуру главного объекта — разрешимой подгруппы Ивасавы — P .

Мы будем представлять элементы группы $U(2, 2)$ в форме блочных 2×2 матриц с блоками из матриц второго порядка:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

здесь g_{ij} — комплексные матрицы порядка 2, удовлетворяющих соотношению:

$$g\sigma g^* = \sigma, \quad \text{где } \sigma = \begin{pmatrix} 0 & e_2 \\ e_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь e_2 — единичная 2-матрица, а символ $*$ обозначает в комплексном случае матричное транспонирование совместно с сопряжением, а в вещественном — только транспонирование.

Эти соотношения эквивалентны следующим соотношениям между блоками матрицы g :

$$g_{12}g_{21}^* + g_{11}g_{22}^* = e_2,$$

$$g_{11}g_{12}^* + g_{12}g_{11}^* = 0,$$

$$g_{22}g_{21}^* + g_{21}g_{22}^* = 0.$$

Вещественная размерность группы $U(2, 2)$ равна 16. Главную роль в дальнейшем будет играть *разрешимая подгруппа P группы $U(2, 2)$, порожденная следующими двумя подгруппами N и S :*

1) аддитивной (коммутативной) группой N — косоэрмитовых блок-матриц вида

$$\begin{pmatrix} e_2 & 0 \\ n & e_2 \end{pmatrix}$$

где n — косоэрмитова матрица второго порядка: $n + n^* = 0$;

и

2) разрешимой подгруппой S степени разрешимости 2, блок-матриц вида

$$\begin{pmatrix} s^{*-1} & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix},$$

где

s — нижнетреугольная комплексная матрица с положительными элементами на диагонали:

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ r & r_2 \end{pmatrix}$$

$r_1, r_2 > 0, r \in \mathbb{C}$.

Группы S и N имеют вещественную размерность 4, а группы P размерность 8.

Общий вид элемента группы P , (пара (s, X)) таков:

$$\begin{pmatrix} s^{*-1} & 0 \\ X & s \end{pmatrix},$$

где X — матрица второго порядка, удовлетворяющая условию, которое можно было назвать *относительной косоэрмитовостью* (относительно матрицы s):

$$sX^* + Xs^* = 0.$$

Непосредственно проверется следующее утверждение:

Предложение 1. *Группа $U(2, 2)$ алгебраически порождена элементами группы P и инволюцией σ ; группы N и S пересекаются только по единичному элементу.*

Однородное пространство $U(2, 2)/K$, где K - максимальная компактная подгруппа группы $U(2, 2)$ и есть в точности пространство подгруппы P , чем и оправдано название – подгруппа Ивасава. (Это дает в дальнейшем возможность продолжения коцикла с подгруппы P на всю группу $U(2, 2)$.)

Поскольку группа S , очевидно, действует на аддитивной группе N косоэрмитовых матриц по правилу:

$$n \mapsto sns^*, s \in S, n \in N,$$

то можно определить групповое полупрямое произведение $Q = S \ltimes N$ групп S и N . Непосредственно проверяется следующее важное утверждение:

Теорема 1. *Группы P и Q канонически изоморфны; Изоморфизм $I : P \rightarrow Q$ задается формулой:*

$$I : (s, X) \rightarrow (s, Xs^*),$$

(левая часть есть элемент подгруппы $P \subset U(2, 2)$, а правая - элемент полупрямого произведения Q (матрица Xs^* , очевидно, эрмитова).

Proof. Проверка гоморфности умножения:

$$\begin{aligned} I((s_1, X_1) \circ (s_2, X_2)) &= I(s_1 s_2, X_1 s_2^* - 1 + s_1 X_2) = \\ &= (s_1 s_2, X_1 s_1^* + s_1 X_2 s_2^* s_1^*) = I(s_1, X_1) I(s_2, X_2) \end{aligned}$$

□

Отображение I переводит группу P , заданную в матричной реализации, в которой элементы P есть пары (s, X) , удовлетворяющие соотношению в обычную форму полупрямого произведения подгрупп S и N , иначе говоря, структура полупрямого произведения не соответствует матричной реализации группы P . В дальнейшем мы рассматриваем группу P как абстрактную группу и считаем ее полупрямым произведением $S \ltimes N$. Любопытно сравнить ситуацию со случаем группы ранга 1, например, для группы $U(2,1)$ подгруппа, аналогичная подгруппе P имеет структуру полупрямым произведением своих подгрупп, согласованную с обычным матричным представлением.⁶

Общий вид элемента коммутанта группы S в обозначениях, принятых выше таков:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ r & 1 \end{pmatrix}.$$

где r - комплексное число. Ранг разрешимости группы S равен 2. Таким образом, коммутант группы P есть полупрямое произведение \mathbb{C} и коммутативной группы кососимметрических матриц (с нетривиальным действием \mathbb{C}).

Следствие 1. *Группа P имеют степень разрешимости равный трем.*

2.2 Представления подгруппы Ивасава и почти инвариантные меры.

Наша цель в изучении особого представления подгруппы P и последующего продолжения его на всю группу $U(2,2)$. Мы будем изучать представления группы P как полупрямого произведения.

Группа N изоморфна группе всех своих непрерывных характеров \hat{N} , а группа S действует сопряженными автоморфизмами на группе характеров \hat{N} , при этом прямое и сопряженные действия на отождествленной группе N — совпадают:

$$n \rightarrow sn s^*; \chi \rightarrow \chi_s, \quad \text{где} \quad \chi_s(n) = \chi(s n s^*).$$

Предложение 2. *Имеется четыре орбиты положительной меры действия группы S автоморфизмами на группе \hat{N} (и на группе N): они параметризуются знаками мнимой части диагональных элементов, т.е. являются соответственно орбитами элементов*

$$\begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}$$

⁶Первый автор благодарит Э. Винберга за полезные замечания по поводу задания группы P .

На каждой орбите действие группы S является свободным и точным, поэтому каждую из орбит можно отождествить с группой S . а действие совпадает с действием правыми сдвигами группы на себе.

Заметим, что имеются также орбиты меньшей размерности, имеющие меру нуль, но они нам не понадобятся.

Очевидно, что все четыре действия группы S на невырожденных орбитах топологически изоморфны, а соответствующие представления полупрямого произведения отличаются лишь коциклом со значениями в \mathbb{Z}_2 , на который умножаются мультипликаторах, поэтому достаточно рассмотреть лишь одну (любую) орбиту.

Унитарное представления полупрямого произведения группы на коммутативную группу (у нас $P = S \ltimes N$) канонически реализуется следующим образом; рассмотрим вероятностную меру μ на группе характеров (т.е. на группе \hat{N}), квазиинвариантную относительно действия (группы S). Все эти меры эквивалентны поскольку группа S локально компактна и действует транзитивно. Поэтому в гильбертовом пространстве $L^2_\mu(\hat{N})$ можно определить унитарные представления группы S , индуцированное действием S , и представление группы N мультипликаторами т.е. операторами умножения (на характеры группы \hat{N} , совпадающей с исходной группой N). Общие представления реализуются в векторно-значном пространстве $L^2_\mu(\hat{N})$, но мы их не рассматриваем.

Неприводимость приведенного представления полупрямого произведения равносильна эргодичности меры μ , и в силу сказанного выше, можно было бы считать, что орбита есть сама группа S , т.е. можно рассматривать представление группы S в пространстве $L^2_\mu(S)$, по некоторой квазиинвариантной мере μ относительно правого действия группы.

Эти представления принадлежат коре группы P — это следует из того, что эти представления в совокупности квазиэквивалентны регулярному представлению группы, которое по аменабельности группы слабо содержит единичное представление. Кроме того коре принадлежит единичное представление, а также особые представления группы S , которые можно рассматривать как представления P , поскольку $S = P/N$. Исчерпывается ли кора этим списком — неизвестно, как неизвестно являются ли построенные четыре представления особыми для группы P , иначе говоря, есть ли в них почти инвариантный вектор. Но сначала выясним структуру особых представлений группы S .

Лемма 1. *Группа S имеет континуум особых унитарных представлений, параметризуемых характерами группы R^2 , лежащими на единичной окружности. Точных особых представлений у группы S нет.*

Proof. Аффинная группа ($\text{Aff}(\mathbb{R})$), т.е. группа матриц

$$\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ b & e^{-a} \end{pmatrix}$$

где $a, b \in \mathbb{R}$ является группой Ивасава для $SL(2, \mathbb{R})$ и играет ту же роль, что и группа P для группы $U(2, 2)$. Заметим, что, как подгруппа группы $SL(2, \mathbb{R})$, она есть полупрямое произведение \mathbb{R}_+ и \mathbb{R} согласованное с матричным представлением, как сказано

выше у нас это не так. Её особые унитарные точные представления существует (их два), и продолжается до особого представления группы $SL(2, R)$.

Рассмотрим группу S :

$$\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ r & r_1 \end{pmatrix},$$

и в $r_1 > 0, r_2 > 0$ заметим, что при фиксированном детерминанте матрицы ($= r_1 \cdot r_2$) и фиксации характера на группе $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ лежащего на окружности, группа изоморфно отображается на группу $\text{Aff}(\mathbb{R})$ и поэтому все особые представления группы $\text{Aff}(\mathbb{R})$ поднимаются до особых представлений группы S ; все они неточны, а других особых представлений у этой группы нет. \square

Однако, нас интересует не столько группа S , сколько группа P . Гипотетически, особые унитарные представления группы P можно построить, используя особые (неточные) представления группы S вместе с представлениями группы P , построенными выше. Пока вопрос об их существовании открыт. Для полноты картины опишем модель гильбертова пространства особого унитарного представления для группы $SL(2, R)$ и ее треугольной подгруппы (P). Рассмотрим пространство $L_m^2(\mathbb{R}_+)$ (m -мера Лебега на полупрямой). Удобнее перейти к преобразованию Фурье и тогда нужные представления треугольной подгруппы будут реализовываться в $L_m^2(\mathbb{R})$ (на прямой) следующим образом:

$$(U_{a,b}F)(z) = \exp\{ie^z b\}F(z + a).$$

Почти инвариантный вектор в этой модели есть произвольная функция f , удовлетворяющая для любых заданных $t, a, b \in \mathbb{R}$ условиям:

$$f(x) = 0, \text{ if } x > t \in \mathbb{R}; f \in L^2 \quad (1 - \exp\{ie^z b\})f \in L^2, \quad [f(\cdot) - f(\cdot + a)] \in L^2.$$

Другое более распространенное описание особого представления (см. [7]) в пространстве аналитических функций связано пределом представлений дополнительной серии при стремлении к единичному представлению.

2.3 Почти инвариантные меры и неунитарные особые представления

Назовем меру ν на группе S *почти инвариантной (справа)*, если она бесконечна, абсолютно непрерывна относительно правой меры Хаара на группе S (и тем самым квазиинвариантна относительно правых сдвигов $s \mapsto ss_0$), и все ее производные $\frac{d\nu(ss_0)}{d\nu(s)}$ определены и ограничены для любого $s_0 \in S$. (В силу указанного изоморфизма $S \rightarrow H$, где H – произвольная невырожденная S -орбита на группе характеров \hat{N} , это определение переносится на меры, сосредоточенные на любой из невырожденных орбит группы \hat{N}).

Условию почти инвариантности удовлетворяет, конечно, и мера Лебега на S т.е.

$$ds = ds_{11}ds_{22}ds_{21}d\bar{s}_{21},$$

поскольку $d(ss_0) = \pi(s)ds$, где $\pi(s) = s_{11}^3 s_{22}$. Отсюда следует, что этому условию удовлетворяет любая мера вида $d\nu(s) = u(s)ds$, где $u(s)$ – произвольная функция, такая что отношение $\frac{u(ss_0)}{u(s)}$ – ограниченная функция при любом $s_0 \in S$. В частности ему удовлетворяет мера μ , инвариантная относительно правых сдвигов (мера Хаара):

$$d\mu(s) = \pi^{-1}(s)ds, \quad \pi(s) = s_{11}^3 s_{22}$$

Однако, нам будет удобнее рассмотреть иную меру.

Рассмотрим вопрос о том, как зависит когомологии от замены меры. Пусть на пространстве X действует группа G и на X заданы две эквивалентные квазиинвариантные относительно действия группы G меры μ и ν . Предположим, что плотность одной меры по другой отделена от бесконечности и от нуля. Рассмотрим в пространствах $L_\mu^2(X)$ и $L_\nu^2(X)$ представления группы G подстановкой переменной $(U_g f)(\cdot) = f(g \cdot)$ и группы мультипликаторов по модулю равных единице. Хорошо известная изометрия между пространствами, состоящая в умножении функции на квадратный корень из плотности одной меры по другой коммутирует с мультипликаторами, но не коммутирует вообще говоря с действием группы. Эта изометрия широко используется для того, чтобы подправить действие; например, если одна из мер инвариантна и, тем самым, определяет унитарное представление скрещенного произведения, то и подправленное действие тоже становится унитарным. Но это “подправленное” представление, вообще говоря, неэквивалентно исходному, а изометрия не переводит коцикл группы со значениями в одном пространстве в коцикл со значениями в другом. Иначе говоря, эта изометрия не индуцирует изоморфизм групп когомологий $H^1(G, \pi_\mu)$ и $H^1(G, \pi_\nu)$ где π_μ, π_ν — представления, соответствующие мерам μ и ν . Поэтому нетривиальные коциклы зависят от почти инвариантной меры.

Пусть ν – почти инвариантная мера на H , рассмотрим неунитарное представление группы P в гильбертовом пространстве $L^2(S, \nu)$, то есть пространстве функций F на S с нормой $\|F\|^2 = \int_S |F(s)|^2 d\nu(s) < \infty$. По определению, операторы представления подгрупп N и S задаются следующими формулами:

$$(T(n)F)(s) = \chi_k(n, s)F(s) \text{ при } n \in N; \quad (1)$$

$$(T(s_0)F)(s) = F(ss_0) \text{ при } s_0 \in S. \quad (2)$$

Здесь $\chi_k(n, s)$ есть образ характера $\chi(\cdot) \in \hat{N}$ как функции на S при (единственном) изоморфизме орбиты S в \hat{N} с номером $k = 1, 2, 3, 4$ и S , сохраняющем действие S , различие между четырьмя орбитами сводится к умножению образа на $\pm i$ по каждой из переменных. Из определения следует, что операторы $T(n)$ унитарны, а операторы $T(s_0)$ ограничены в силу почти инвариантности меры ν . Можно переписать формулы более компактно:

$$(T(n)f)(s) = \chi(sn s^*)f(s) \text{ при } n \in N; \quad (3)$$

$$(T(s_0)f)(s) = f(ss_0) \text{ при } s_0 \in S, \quad (4)$$

где χ – некоторый фиксированный характер S -орбиты H на группе характеров \hat{N} .

Нетрудно убедиться, что операторы представления подгрупп N и S порождают в совокупности представление всей группы P в пространстве $L^2(S, \nu)$. В частности, если $\nu = \mu$ – мера Хаара на S , это представление унитарно. Обозначим эти представления группы P через $\pi_k, k = 1, 2, 3, 4$; поскольку все четыре представления в существенном не отличаются между собой лишь выбором характера на орбитах, мы опускаем индекс k .

Теорема 2. *Неунитарные представления π группы P , определенные выше, операторно и пространственно неприводимы. При этом представления, отвечающие разным мерам и разным индексам k эквивалентны тогда и только тогда, когда меры ν отличаются множителем ($\nu' = c\nu$), а индексы k совпадают.*

2.4 Точное неунитарное особое неприводимое представления группы Ивасава

Будем далее предполагать, что неунитарное представление реализовано в гильбертовом пространстве $L^2(S, \nu)$. Тогда условие, что оно особое, означает существование вектора $f(s)$, такого что $f \notin L^2(S, \nu)$ и $T(g)F - F \in L^2(S, \nu)$ для любого $g \in P$. Подробнее это означает, что

$$\int_S |f(s)|^2 d\nu(s) = \infty; \quad (5)$$

$$\int_S |f(ss_0) - f(s)|^2 d\nu(s) < \infty \text{ для любого } s_0 \in S; \quad (6)$$

$$\int_S |(\chi(sns^*) - 1)f(s)|^2 d\nu(s) < \infty \text{ для любого } n \in N. \quad (7)$$

С каждым вектором f , удовлетворяющим приведенным трем условиям, ассоциирован нетривиальный 1-цикл представления T вида

$$b(g) = T(g)f - f.$$

В дальнейшем фиксируется почти инвариантная мера ν следующего вида:

$$d\nu(s) = |s|^{-4} ds, \text{ где } |s|^2 = \text{tr}(s^*s) = s_{11}^2 + s_{22}^2 + |s_{21}|^2.$$

Удобно представлять эту меру в полярных координатах на S . Для этого заметим, что многообразие элементов $\omega \in S$ с нормой $|\omega| = 1$ эквивалентно области на единичной сфере в \mathbb{R}^4 . Назовем сферическими координатами матрицы $s \in S$ число $r = |s|$ и матрицу $\omega = |s|^{-1}s$. Тогда $s = r\omega$ и выражение меры ν в полярных координатах имеет вид

$$d\nu(s) = r^{-1} dr d\omega,$$

где $d\omega$ – инвариантная мера на сфере.

неосредственно проверяется следующее утверждение:

Теорема 3. . Представление π группы P в гильбертовом пространстве $L^2(S, \nu)$, где $d\nu(s) = |s|^{-4}ds$ является особым и обладает нетривиальным коциклом вида

$$b(g) = T(g)f - f, \quad \text{где } f(s) = e^{-\frac{1}{2}|s|}. \quad (8)$$

2.5 Продолжение особого неунитарного представления подгруппы P на всю группу $U(2, 2)$

Остается проверить, что особое представление продолжается до неунитарного представления всей группы $U(2, 2)$. Конструкция искомого продолжения основана на следующем свойстве группы $U(2, 2)$. Любой элемент $g \in U(2, 2)$ представим, и притом однозначно, в виде произведения $g = pk, p \in P, k \in K$, где K – максимальная компактная подгруппа элементов $k \in U(2, 2)$, удовлетворяющих соотношению $kk^* = e$, то есть подгруппы блочных матриц вида

$$k = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

где $\alpha\alpha^* + \beta\beta^* = e_p$ и $\alpha\beta^* + \beta\alpha^* = 0$ (разложение Ивасавы).

Пусть T – особое представление подгруппы P в гильбертовом пространстве $H = L^2S\nu$, определенное в теореме 2, и b – его нетривиальный коцикл, заданный формулой (8). Обозначим через H_0 линейное инвариантное подпространство в H , натянутое на векторы коцикла b .

Лемма 2. 1. Подпространство H_0 всюду плотно в H .

2. Векторы $b(p), p \neq e$ линейно независимы (свойство невырожденности).

Определим действия операторов $T(k), k \in K$ на множестве векторов $b(p), p \in P$ по формуле

$$T(k)b(p) = b(p'),$$

где $p' \in P$ определяется из соотношения $kp = p'k', k' \in K$.

3. Операторы $T(k)$ удовлетворяют групповому соотношению $T(k_1k_2)b(p) = T(k_1)T(k_2)b(p)$ для любых $k_1, k_2 \in K$ и $p \in P$, а потому порождают представление подгруппы K в подпространстве H_0 .

Теорема 4. Операторы $T(k), k \in K$ совместно с операторами $T(p), p \in P$ порождают представление всей группы $U(2, 2)$ в подпространстве H_0 , в котором оператор инволюции $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & e_p \\ e_p & 0 \end{pmatrix}$ задается на множестве векторов $b(p)$ следующей формулой:

$$T(\sigma)b(p) = b(\hat{p}), \hat{p} \in P, \quad (9)$$

где \hat{p} однозначно определяется соотношением $\hat{p}\hat{p}^* = \sigma p p^* \sigma$. В этом продолжении операторы подгруппы P унитарны, операторы подгруппы K ограничены, а оператор

инволюции неограничен и не продолжается на все пространство H . Продолжение 1-коцикла b с группы P на группу $U(2, 2)$ задается формулой:

$$b(pq) = b(p) \text{ для любых } p \in P \text{ и } q \in Q. \quad (10)$$

Приложения описанной конструкции к представлениям группы токов будет описан в другом месте. Ограничение группой $U(2, 2)$ в этой работе обусловлено лишь методическими целями: дать простой пример общей теории, которая, как полагают авторы, распространяется на широкий класс полупростых групп Ли и их группы токов.

References

- [1] А. М. Вершик, С. И. Карпушев. Когомологии групп в унитарных представлениях, окрестность единицы и условно положительно определенные функции. Матем. сб. **119**: в.4, 521-533 (1982).
- [2] Y. Shalom. Rigidity of commensurators and irreducible lattices. Inventiones Math. **141**:1-54.2000.
- [3] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette. Kazdan's property (T). CUP 2007.
- [4] U. Haagerup. An example of nonnuclear C^* -algebra, which has the metric approximation property/ Inventiones Math. **50**:279-293,1978.
- [5] P-A. Cherix, et al. Groups With the Haagerup Property: Gromov's A-T-Menability. Springer 2001.
- [6] B. Kostant. On existence and irreducibility of certain series of representations. Dull Amer. Math Soc. **75**: 627-242, 1969.
- [7] А. М. Вершик, И.М.Гельфанд М.И.Граев. Представления группы $SL(2, R)$, где R есть кольцо функций. Усп.Мат.наук **28**, в.5(173), 83-128 (1973).
- [8] А. М. Вершик, И.М.Гельфанд М.И.Граев. Неприводимые представления группы G^X и когомологии. Функ.анал. **8**, в.2, 67-69 (1974).
- [9] I. M. Gelfand, M. I. Graev, A. M. Vershik. Models of representations of current groups (with . In "Representations of Lie groups and Lie algebras" (Budapest, 1971), 121-179. Akad. Kiado, Budapest, 1985.
- [10] R. S. Ismagilov, Representations of infinite dimensional groups, Transl. Math. Monogr., 152, Providence, RI, AMS, 1996
- [11] A. Guichardet. Sur la cohomologie des groupe topologiques II. Bull.Soc.Math., **96**:305-332,1972.

- [12] P. Delorm. 1-cohomologie des representations unitaires des groupes de Lie semi-simples et resolubles. Produits tensoriels continus et representations. Bull.Soc.Math.France, **105**:281-336,1977.
- [13] Ф. А. Березин. Представления непрерывного прямого произведения универсальных накрывающих группы движений комплексного шара. Труды Моск.Мат.Об-ва **36** (1978),275-293.
- [14] H. Araki. Factorisable representations of current algebra, Publications of RIMS, Kyoto University, Ser. A, **5** n3 (1970), 361Ц422.
- [15] K. Parthasarathi, K. Schmidt. Positive Definite Kernels, Continuous Tensor Products, and Central Limit Theorems of Probability Theory. Springer. 1972.
- [16] A. M. Vershik, M.I.Graev. The basic representation of the current group $O(n, 1)^X$ in the L^2 space over the generalized Lebesgue measure. Indag. Math. 16, No. 3/4, 499-529 (2005).
- [17] А. М. Вершик, М.И.Граев. Особые представления групп $SO(n, 1)$ и $SU(n, 1)$. Усп.Мат. наук **61**, в.5, 3-88 (2006).
- [18] А. М. Вершик, М.И.Граев. Интеграл представлений групп токов. Функ. Ан.**42**, в.1, 22-32 (2008).
- [19] А. М. Вершик, М.И.Граев. Интегральная модель унитарных представлений групп токов со значениями в полупростых группах Ли. Усп.мат наук.**64**, в.2 (686), 5-72 (2009).
- [20] А. М. Вершик, М.И.Граев. Пуассонова модель model пространства Фока и представления групп токов. Алгебра и Анализ **23**, в.3, 63-136 (2011).
- [21] А. М. Вершик, М.И.Граев. Особые представления групп $U(n, 1)$ и $O(n, 1)$ и связанные представления and related representations of the current groups $U(n, 1)$ and $O(n, 1)$ in a quasi-Poisson space (with M.I.Graev). Funct. Anal. Appl. **46**, No. 1, 1-10 (2012).
- [22] А. М. Вершик Существует ли лебегова мера в бесконечномерном пространстве? Труды Математического Института им.В.А.Стеклова. 259, 256-281 (2007).
- [23] A. M. Vershik, Invariant measures for the continual Cartan subgroup J. Funct. Anal. **255**, No. 9, 2661-2682 (2008).
- [24] A. M. Vershik, The behavior of the Laplace transform of the invariant measure on the hypersphere of high dimension. J. Fixed Point Theory Appl. **3**, No. 2, 317-329 (2008).
- [25] Э. Б. Винберг, А. Л.Онищик. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. М. "Наука" .1988.