

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

### **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций**

**Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27**

**телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54**

**e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)**

**<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>**

**Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н**

# Алгебра обобщенного двумерного осциллятора Чебышева — Коорнвиндера <sup>1</sup>

В.В.Борзов <sup>\* 2</sup>, Е.В.Дамаскинский <sup>† 3</sup>

<sup>\*</sup> Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций

<sup>†</sup> Военный институт (инженерно технический) в составе  
Военной академии материально технического обслуживания

05 декабря 2013

## Аннотация

В предыдущих работах авторов [46, 47] была построена осцилляторо подобная система связанная с полиномами Чебышева-Коорнвиндера от двух переменных, названная обобщенным осциллятором Чебышева-Коорнвиндера. В данной работе изучаются свойства бесконечномерной алгебры Ли, являющейся аналогом алгебры Гейзенберга для этого осциллятора. Построено точное неприводимое представление этой алгебры в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  функций, заданных на области ограниченной гипоциклоидой Стейнера и квадратично - суммируемых по мере ортогональности полиномов Чебышева - Коорнвиндера. Полиномы Чебышева - Коорнвиндера образуют ортонормированный базис в пространстве  $\mathcal{H}$ . Изучаемый в работе обобщенный осциллятор можно рассматривать как простейший нетривиальный пример квантовой системы, составленной из трех взаимодействующих осцилляторов.

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 12-01-00207a

<sup>2</sup>borzov.vadim@yandex.ru

<sup>3</sup>evd@pdmi.ras.ru

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

PREPRINTS

of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров, А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, А. А. Иванов, Л. Ю. Колотилина, В. Н. Кублановская, Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье, Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин, В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

# 1 Введение

Понятие квантового гармонического осциллятора - краеугольный камень квантовой физики. С этим понятием неразрывно связаны:

1) Гильбертово пространство фазовых состояний, базисом которого являются классические полиномы Эрмита, ортогональные по гауссовой мере на вещественной оси; основные квантово-механические операторы в этом пространстве — операторы координаты и импульса, а также квадратичный гамильтониан.

2) Фоковское пространство и основные операторы — лестничные операторы, оператор числа частиц и тождественный оператор, которые являются генераторами алгебры Гейзенберга (алгебры динамических симметрий квантовой системы).

Развитие квантовой физики в конце прошлого столетия, в особенности возникновение квантовых алгебр [1]-[4], привело к появлению различных обобщений понятия квантового гармонического осциллятора. Повидимому, первым содержательным обобщением было понятие  $q$ -осциллятора [5]-[9], основанное на  $q$ -деформации канонических перестановочных соотношений алгебры Гейзенберга. Следующим шагом в обобщении понятия квантово-механического осциллятора было построение лестничных операторов, удовлетворяющих определенным перестановочным соотношениям (т.е. конструкция осцилляторной алгебры, обобщающей алгебру Гейзенберга) [10]-[12] для некоторых полиномов схемы Аски - Вилсона [13]-[16]. Анализ построенных примеров осцилляторных алгебр для известных (в основном классических) ортогональных полиномов позволил разработать общую схему конструкции обобщенного осциллятора (т.е. построения осцилляторной алгебры, являющейся обобщением алгебры Гейзенберга) для произвольной системы полиномов ортогональных на вещественной оси [17]. Все вышесказанное относилось к понятию обобщенного осциллятора для ортогональных полиномов, зависящих от одной переменной.

Перейдем к интересующему нас случаю полиномов нескольких переменных (для общих результатов см. монографии [18, 19]).

В последние годы возрос интерес к применению ортогональных многочленов от нескольких переменных. Отметим недавние работы [20, 21]), а также более ранние работы по двумерным полиномам Кралла-Шеффера [22]), связанные с интегрируемыми системами на пространствах постоянной кривизны (см. также [23, 24]). В связи с вышесказанным возникает вопрос о расширении конструкции одномерного обобщенного осциллятора на случай полиномов от нескольких переменных. При этом естественно начинать с рассмотрения простых (но нетривиальных) обобщений классических полиномов на случай нескольких переменных. Широкий класс таких полиномов связан с корневыми диаграммами алгебр Ли [25]-[28].

Одной из первых работ в этом направлении была работа Т.Коорнвиндера [29], основные результаты которой были изложены в [18] (см. также дополнительные детали в [30, 31, 32]). В основополагающей работе Коорнвиндера [29] были введены ортогональные полиномы, которые являются естественным обобщением классических полиномов Чебышева и связаны с корневой системой алгебры Ли  $sl(3)$ . В [32, 28, 33, 34] эти идеи были распространены на случай аналогов других классических полиномов (см. также [35]). Дополнительные результаты имеются в [36]-[38]. Отметим также работы, связанные с построением и изучением обобщений на случай нескольких переменных многочленов Чебышева [39]-[45].

Целью настоящей работы является построение и изучение алгебры обобщенного осциллятора Чебышева - Коорнвиндера. Эта осцилляторно-подобная система, связанная с

полиномами Чебышева - Коорнвиндера (далее ЧК-полиномами), введенными в [29], была построена авторами в [46, 47] на основе схемы, предложенной в [17]. Осциллятор Чебышева-Коорнвиндера (далее ЧК-осциллятор) рассматривался в работе [46] как объединение трех осцилляторов: секториального, радиального и граничного. Отметим, что в работе [46] основное внимание было уделено построению квантово-механической схемы ЧК-осциллятора, в то время как детали построения, явные формулы для лестничных операторов и исследование соответствующих осцилляторных алгебр были опущены из-за ограничения объема. В [47] были получены дифференциальные выражения для лестничных операторов ЧК-осциллятора, а также приведено некоторое расширение алгебры дифференциальных операторов Коорнвиндера [29] на абелеву подалгебру алгебры ЧК-осциллятора. В настоящей работе мы даем полное описание алгебр секториального, радиального и граничного осцилляторов, а также построение и исследование алгебры двумерного ЧК-осциллятора.

Структура работы имеет следующий вид. В разделе 2 будут кратко приведены необходимые для дальнейшего сведения о полиномах Чебышева-Коорнвиндера 2-го рода и о построении осцилляторных алгебр. Целесообразно сделать несколько замечаний относительно содержания раздела 2.

Во-первых, отметим что выбор "операторов положений"  $Z$  и  $\bar{Z}$  для секториального осциллятора в п.2.2.1 (см. формулы (2.3a)-(2.3b)) с использованием рекуррентных соотношений (2.1) является естественным обобщением соответствующих формул для одномерного оператора "координаты" (см. [14, 15, 17]).

Построение соответствующих "операторов импульса"  $P_Z = Z^\dagger$  и  $P_{\bar{Z}} = \bar{Z}^\dagger$ , как сопряженных относительно базиса, а именно, с помощью ядра Пуассона (2.4) для ЧК-полиномов, использует идею работы [17]. Лестничные операторы и квадратичный гамильтониан строятся по операторам  $Z, \bar{Z}, Z^\dagger, \bar{Z}^\dagger$  стандартным образом.

В целях экономии места мы опускаем неиспользуемое в работе естественное обобщение преобразования Фурье (аналогичное преобразованию из работы [17]), опирающееся на ядро Пуассона. Далее, заметим, что правильный выбор в п.2.2.2 "оператора координаты"  $X$  для радиального осциллятора (см. (2.11)) является не таким простым как для секториального осциллятора. Упомянутый выбор требует предварительного получения рекуррентных соотношений для ЧК-полиномов в "радиальном направлении". Оператор импульса  $X^\dagger$  строится с помощью соответствующего ядра Пуассона (2.12). В результате формулы для лестничных операторов (2.16) и гамильтониана (2.18) радиального осциллятора имеют нестандартную форму. Дополнительное слагаемое в (2.18) можно рассматривать как "энергию взаимодействия" секториального и радиального осцилляторов.

Во-вторых, введение в п.2.2.3 еще одного "граничного" осциллятора вызвано тем обстоятельством, что в соответствие с (2.2) алгебра  $\mathfrak{A}_{s,r}$ , являющаяся объединением алгебр секториального и радиального осцилляторов разлагается в прямую сумму  $\mathfrak{A}_{s,r} = \mathfrak{A}_{s,r}^{even} \oplus \mathfrak{A}_{s,r}^{odd}$ . Отсюда ясно,

что  $\mathfrak{A}_{s,r}$  является подалгеброй искомой алгебры двумерного ЧК-осциллятора. Таким образом требуется ввести дополнительный осциллятор в п.2.2.3, который мы называем "граничным" осциллятором, т.к. генераторы соответствующей осцилляторной алгебры действуют нетривиальным образом лишь в "граничных подпространствах"  $\mathcal{H}_{\bullet,0}$  и  $\mathcal{H}_{0,\bullet}$  (см. (2.21)).

Далее отметим, что все построенные в разделе 2.2 алгебры секториального, радиального и граничного осцилляторов являются ассоциативными алгебрами, которые можно (минимально) расширить до некоторой (бесконечномерной) алгебры Ли. Построение таких

расширений требует введения необходимых дополнительных генераторов, удовлетворяющих перестановочным соотношениям, индуцированных перестановочными соотношениями соответствующих ассоциативных алгебр. Именно эти построения составляют основное содержание разделов 3—5. Отметим, что более естественно называть осцилляторной алгеброй не ассоциативную алгебру, а ее минимальное расширение, которое является алгеброй Ли, учитывая что эта алгебра должна быть обобщением алгебры Гейзенберга-Ли для квантово-механического осциллятора. В разделе 6 будет построена искомая алгебра Ли двумерного ЧК-осциллятора, свойства которой исследуются в разделе 7.

## 2 Предварительные сведения

### 2.1 Полиномы Чебышева — Коорнвиндера (ЧК-полиномы)

Полиномы Чебышева — Коорнвиндера (ЧК-полиномы) [29] могут быть определены рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} z U_{k,l}(z, \bar{z}) &= U_{k+1,l}(z, \bar{z}) + U_{k,l-1}(z, \bar{z}) + U_{k-1,l+1}(z, \bar{z}); \\ \bar{z} U_{k,l}(z, \bar{z}) &= U_{k,l+1}(z, \bar{z}) + U_{k-1,l}(z, \bar{z}) + U_{k+1,l-1}(z, \bar{z}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

и условиями

$$U_{0,-1} = U_{-1,0} = 0, \quad U_{0,0} = 1, \quad \overline{U_{k,l}}(z, \bar{z}) = U_{l,k}(z, \bar{z}) = U_{k,l}(\bar{z}, z).$$

Известно [29], что ЧК-полиномы образуют ортонормированный базис в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H} = L^2(S; \mu(dx dy))$ , где  $S$  — область ограниченная гипоциклоидой Стейнера (см. Fig.1), а  $\mu$  — вероятностная мера на  $S$ , определяемая равенством

$$\mu(dx, dy) = \frac{1}{2\pi^2} \sqrt{27 - 18z\bar{z} + 4z^3 + 4\bar{z}^3 - \bar{z}^2 z^2} dx dy; \quad (z = x + iy).$$

Нормировочная постоянная в этой формуле была вычислена в [47] (см. также [45, 25]).

### 2.2 Осциллятор Чебышева — Коорнвиндера (ЧК-осциллятор)

В работе [46] мы перенесли конструкцию [17] обобщенного осциллятора, связанного с системой ортогональных полиномов на вещественной оси на случай ЧК-полиномов от двух переменных. Осциллятор Чебышева — Коорнвиндера (ЧК-осциллятор) рассматривался в работе [46] как объединение трех осцилляторов: секториального, радиального и граничного. Для их описания удобно использовать следующие разложения пространства  $\mathcal{H}$ , которое мы будем рассматривать как пространство Фока, в прямые суммы подпространств:

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{H}^{(N)}, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_{even} \oplus \mathcal{H}_{odd}, \quad (2.2)$$

где  $N$ -частичный сектор  $\mathcal{H}^{(N)}$  есть замыкание в  $\mathcal{H}$  линейной оболочки множества базисных элементов  $\{U_{k,l}(z, \bar{z}) \mid k + l = N\}$ , а

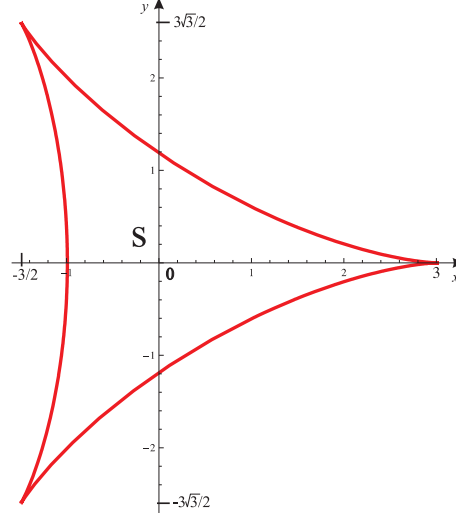


Figure 1: Гипоциклоида Штейнера

подпространства  $\mathcal{H}_{even}$  и  $\mathcal{H}_{odd}$  являются замыканиями линейных оболочек множеств

$$\{U_{k,l}(z, \bar{z}) \mid k+l=2n\}_{n=0}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{U_{k,l}(z, \bar{z}) \mid k+l=2n+1\}_{n=0}^{\infty},$$

соответственно. Пусть далее  $\mathcal{H}_{\bullet,0}$  и  $\mathcal{H}_{0,\bullet}$  обозначают подпространства являющиеся замыканием линейных оболочек множеств

$$\{U_{k,0}(z, \bar{z})\}_{k=0}^{\infty} \quad \text{и} \quad \{U_{0,l}(z, \bar{z})\}_{l=0}^{\infty}.$$

Нам также потребуются в дальнейшем обозначения  $\mathcal{H}^{\bullet,0} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{\bullet,0}$  и  $\mathcal{H}^{0,\bullet} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_{0,\bullet}$ .

Как и в случае стандартного квантового гармонического осциллятора, алгебра ЧК-осциллятора определяется с помощью лестничных операторов. Лестничные операторы  $a_{sect}^{\pm}$  секториального осциллятора оставляют инвариантными подпространства  $\mathcal{H}^{(N)}$ , а лестничные операторы  $a_{rad}^{\pm}$  радиального осциллятора переводят подпространства  $\mathcal{H}^{(N)}$  в подпространства  $\mathcal{H}^{(N\pm 2)}$ . Кроме того, операторы  $a_{sect}^{\pm}$  и  $a_{rad}^{\pm}$  оставляют инвариантными подпространства  $\mathcal{H}_{even}$  и  $\mathcal{H}_{odd}$ . Наконец, в случае граничных

осцилляторов лестничные операторы  $a_{\bullet,0}^{\pm}$  переводят подпространство  $\mathcal{H}^{(N)} \cap \mathcal{H}_{\bullet,0}$  в подпространство  $\mathcal{H}^{(N\pm 1)} \cap \mathcal{H}_{\bullet,0}$  и равны нулю на  $\mathcal{H}^{\bullet,0}$ , а лестничные операторы  $a_{0,\bullet}^{\pm}$  переводят подпространство  $\mathcal{H}^{(N)} \cap \mathcal{H}_{0,\bullet}$  в подпространство  $\mathcal{H}^{(N\pm 1)} \cap \mathcal{H}_{0,\bullet}$  и равны нулю на  $\mathcal{H}^{0,\bullet}$ . Действие всех этих операторов схематически проиллюстрированы на Fig.2, на котором базисные элементы  $\{U_{k,l}(z, \bar{z})\}_{k,l}^{\infty}$  изображены точками прямоугольной решетки.

Для удобства читателя кратко приведем основные сведения из работ [46, 47] необходимые для дальнейшего изложения.

### 2.2.1 Обобщенный секториальный осциллятор

Учитывая рекуррентные соотношения (2.1) определим "операторы положения"  $Z$  и  $\bar{Z}$  соотношениями

$$Z U_{k,l}(z, \bar{z}) = U_{k+1,l}(z, \bar{z}) + U_{k,l-1}(z, \bar{z}) + U_{k-1,l+1}(z, \bar{z}); \quad (2.3a)$$

$$\bar{Z} U_{k,l}(z, \bar{z}) = U_{k,l+1}(z, \bar{z}) + U_{k-1,l}(z, \bar{z}) + U_{k+1,l-1}(z, \bar{z}). \quad (2.3b)$$

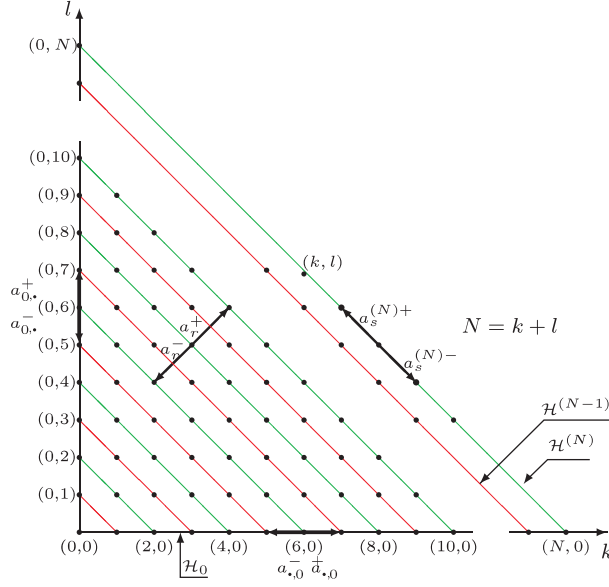


Figure 2: Action of ladder operators

Эти соотношения задают операторы  $Z$  и  $\bar{Z}$  на плотном в  $\mathcal{H}$  множестве всех линейных комбинаций ЧК-полиномов  $U_{k,l}(z, \bar{z})$ . После замыкания они становятся ограниченными операторами, обладающие свойством  $Z^* = \bar{Z}$ ,  $\bar{Z}^* = Z$  на всем пространстве  $\mathcal{H}$ . Мы будем обозначать эти операторы теми же символами.

Следуя работе [17], определим операторы "импульса", сопряженные с введенными выше операторами положения. С этой целью рассмотрим интегральный оператор  $\mathbb{K}$  с ядром Пуассона

$$K_s(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{k,l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} \overline{U_{k,l}(z, \bar{z})} U_{k,l}(\zeta, \bar{\zeta}). \quad (2.4)$$

Оператор  $\mathbb{K}$  действует из гильбертова пространства  $\mathcal{H} = L^2(S, \mu(dx, dy))$  ( $z = x + iy$ ) в гильбертово пространство  $\mathcal{H}_1 = L^2(S, \mu(d\zeta, d\bar{\zeta}))$  ( $\zeta = \xi + i\eta$ ). В пространстве  $\mathcal{H}_1$  определим операторы "положения"  $\zeta$  и  $\bar{\zeta}$  формулами аналогичными (2.3a) и (2.3b). Существует обратный оператор  $\mathbb{K}^{-1} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}$ , причем  $\mathbb{K}^{-1} = \mathbb{K}^*$ , где  $\mathbb{K}^*$  интегральный оператор сопряженный к  $\mathbb{K}$ . Следовательно,  $\mathbb{K}$  унитарный оператор.

С помощью оператора  $\mathbb{K}$  определим операторы "импульса"  $P_Z = Z^\dagger$  и  $P_{\bar{Z}} = \bar{Z}^\dagger$ , как операторы, "сопряженные к  $Z$  и  $\bar{Z}$  относительно выбранного базиса" пространства  $\mathcal{H}$ :

$$Z^\dagger = \mathbb{K}^{-1} \zeta \mathbb{K}, \quad \bar{Z}^\dagger = \mathbb{K}^{-1} \bar{\zeta} \mathbb{K}. \quad (2.5)$$

Поскольку  $\mathbb{K}$  унитарный оператор, то так определенные операторы  $P_Z = Z^\dagger$  и  $P_{\bar{Z}} = \bar{Z}^\dagger$  ограничены в  $\mathcal{H}$  и сопряжены друг другу

$$(Z^\dagger)^* = \bar{Z}^\dagger, \quad (\bar{Z}^\dagger)^* = Z^\dagger.$$

Операторы  $Z^\dagger$  и  $\bar{Z}^\dagger$  действуют на базисные элементы пространства  $\mathcal{H}$  по формулам

$$Z^\dagger U_{k,l}(z, \bar{z}) = -U_{k+1,l}(z, \bar{z}) - U_{k,l-1}(z, \bar{z}) + U_{k-1,l+1}(z, \bar{z}); \quad (2.6a)$$

$$\bar{Z}^\dagger U_{k,l}(z, \bar{z}) = -U_{k,l+1}(z, \bar{z}) - U_{k-1,l}(z, \bar{z}) + U_{k+1,l-1}(z, \bar{z}). \quad (2.6b)$$



Определим квадратичный "гамильтониан" секториального осциллятора, положив

$$H_s = H_s^{(1)} + H_s^{(2)},$$

где

$$H_s^{(1)} = \frac{1}{40} \left( Z\bar{Z} + Z\bar{Z}^\dagger + Z^\dagger\bar{Z} + Z^\dagger\bar{Z}^\dagger \right); \quad H_s^{(2)} = \frac{1}{40} \left( \bar{Z}Z + \bar{Z}Z^\dagger + \bar{Z}^\dagger Z + \bar{Z}^\dagger Z^\dagger \right).$$

Гамильтониан  $H_s$  — самосопряженный оператор в  $\mathcal{H}$ . ЧК-полиномы  $U_{k,l}(z, \bar{z})$  являются его собственными функциями, соответствующими собственным значениям

$$\lambda_{0,0} = 0; \quad \lambda_{N,0} = \lambda_{0,N} = \frac{1}{10}, \quad (N \geq 1); \quad \lambda_{k,l} = \frac{1}{5}, \quad (k, l \geq 1).$$

Мы будем рассматривать  $\mathcal{H}$  как пространство Фока и определим лестничные операторы  $a_{sect}^\pm$  равенствами

$$a_{sect}^+ = \frac{1}{\sqrt{40}} (Z + Z^\dagger), \quad a_{sect}^- = \frac{1}{\sqrt{40}} (\bar{Z} + \bar{Z}^\dagger).$$

Действие этих операторов в " $N$ -частичных" подпространствах  $\mathcal{H}^{(N)}$  ( $N = k+l$ ) описывается формулами

$$a_{sect}^\pm U_{k,l}(z, \bar{z}) = \frac{1}{\sqrt{10}} U_{k\mp 1, l\pm 1}(z, \bar{z}), \quad a_{sect}^+ U_{0,N}(z, \bar{z}) = 0, \quad a_{sect}^- U_{N,0}(z, \bar{z}) = 0. \quad (2.7)$$

Для этих лестничных операторов с учетом разложения (2.2) в работе [47] было получено следующее представление дифференциальными операторами:

$$a_{sect}^\pm = \frac{1}{\sqrt{10}} \bigoplus_{N=1}^{\infty} \sum_{m=0}^N U_{m\mp 1, N-(m\mp 1)} \frac{\mathbf{D}_{m, N-m}}{m!(N-m)!},$$

где

$$\mathbf{D}_{m, N-m} = \frac{\partial^N}{\partial z^m \partial \bar{z}^{N-m}}.$$

Лестничные операторы сопряжены друг другу  $(a_{sect}^\pm)^* = a_{sect}^\mp$ , а гамильтониан принимает вид

$$H_s = H_s^{(1)} + H_s^{(2)}, \quad H_s^{(1)} = a_{sect}^+ a_{sect}^-, \quad H_s^{(2)} = a_{sect}^- a_{sect}^+.$$

Самосопряженные в  $\mathcal{H}$  операторы "числа частиц"  $N_1, N_2$  определим соотношениями

$$N_1 U_{k,l} = k U_{k,l}, \quad N_2 U_{k,l} = l U_{k,l}.$$

Далее нам потребуются два вспомогательных оператора

$$\mathbb{P}_1 = \bigoplus_{N=0}^{\infty} P_{N,0}, \quad \mathbb{P}_2 = \bigoplus_{N=0}^{\infty} P_{0,N}, \quad (2.8)$$

где

$$P_{N,0} U_{k,l}(z, \bar{z}) = \delta_{k,N} \delta_{l,0} U_{k,l}(z, \bar{z}), \quad P_{0,N} U_{k,l}(z, \bar{z}) = \delta_{k,0} \delta_{l,N} U_{k,l}(z, \bar{z}).$$

В работе [46] алгебра  $\mathfrak{A}_s$  обобщенного секториального оператора определялась, как некоторое замыкание ассоциативной алгебры, порождаемой генераторами

$$\mathbb{I}, a_{sect}^{\pm}, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \quad (2.9)$$

удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [a_{sect}^+, a_{sect}^-] &= \frac{1}{10} (\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2); \quad [\mathbb{N}_1, a_{sect}^{\pm}] = \mp a_{sect}^{\pm}; \quad [\mathbb{N}_2, a_{sect}^{\pm}] = \pm a_{sect}^{\pm}; \\ [\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2] &= 0, \quad [\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2] = 0, \quad [\mathbb{N}_i, \mathbb{P}_j] = 0, \quad (i, j = 1, 2); \\ \mathbb{P}_1 a_{sect}^+ &= 0, \quad a_{sect}^- \mathbb{P}_1 = 0, \quad a_{sect}^+ \mathbb{P}_2 = 0, \quad \mathbb{P}_2 a_{sect}^- = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

### 2.2.2 Обобщенный радиальный осциллятор

Как и в случае секториального осциллятора, начнем с определения оператора "координаты"

$$X := -5H_s - \frac{1}{4} \left( Z\bar{Z}^* + Z^*\bar{Z} + \bar{Z}Z^* + \bar{Z}^*Z \right), \quad \text{Dom}[X] = \mathcal{H}. \quad (2.11)$$

По аналогии с (2.5), используя ядро Пуассона

$$K_r(z, \bar{z}; \zeta, \bar{\zeta}) = \sum_{k,l=0}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{4}(k+l)} \overline{U_{k,l}(z, \bar{z})} U_{k,l}(\zeta, \bar{\zeta}), \quad (2.12)$$

определим оператор "импульса"  $P_X = X^\dagger$ , сопряженный с оператором координаты относительно базиса в  $\mathcal{H}$ .

Определим квадратичный "гамильтониан" радиального осциллятора

$$H_r = \frac{1}{4} (X^2 + (X^*)^2), \quad \text{Dom}[H_r] = \mathcal{H}. \quad (2.13)$$

$H$  ограниченный самосопряженный оператором в  $\mathcal{H}$ . ЧК-полиномы являются его собственными функциями, соответствующими собственным значениям

$$\nu_{00} = \frac{4}{5}, \quad \nu_{N0} = \nu_{0N} = \frac{1}{2} \text{ (for } N \geq 1), \quad \nu_{mn} = \frac{1}{5} \text{ (for } n, m \geq 1). \quad (2.14)$$

Для определения лестничных операторов введем вспомогательный оператор  $I(\alpha, \beta)$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ), задав его действие на элементах базиса  $U_{k,l}(z, \bar{z})$

$$I_B(\alpha; \beta) U_{k,l}(z, \bar{z}) = \{ \alpha (\delta_{k,N} \delta_{l,0} + \delta_{k,0} \delta_{l,N}) (1 - \delta_{k,0} \delta_{l,0}) + \beta \delta_{k,0} \delta_{l,0} \} U_{k,l}(z, \bar{z}). \quad (2.15)$$

Определим теперь лестничные операторы радиального осциллятора соотношениями

$$a_{rad}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{10}} (X + iX^\dagger) - \frac{2}{\sqrt{5}} I_B \left( \frac{1}{4} e^{\pm i\frac{\pi}{4}}, \frac{1}{2} e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \right). \quad (2.16)$$

Из (2.11), (2.15), (2.16) следует

$$a_{rad}^{\pm} U_{k,l}(z, \bar{z}) = \sqrt{\frac{2}{5}} U_{k\pm 1, l\pm 1}(z, \bar{z}). \quad (2.17)$$

Для лестничных операторов  $a_{rad}^\pm$  радиального осциллятора в [47] было получено следующее представление дифференциальными операторами

$$a_{rad}^\pm \Big|_{\mathcal{H}^{(N)}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \sum_{m=0}^N U_{m\pm 1, N-m\pm 1} \frac{\mathbf{D}_{m, N-m}}{m!(N-m)!},$$

а для оператора координаты

$$a_{rad}^- + a_{rad}^+ = \sqrt{\frac{2}{5}} \left\{ (z\bar{z} - 3)I - \bigoplus_{N=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^N \frac{\alpha_1}{m!(N-m)!} - \sum_{m=0}^{N-1} \frac{\alpha_2}{m!(N-m)!} \right] \right\},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= U_{m-1, N-m+1} \mathbf{D}_{m, N-m} \bar{Z} + U_{m+1, N-m-1} \mathbf{D}_{m, N-m} Z; \\ \alpha_2 &= U_{m, N-m} \mathbf{D}_{m, N-m} + U_{N-m, m} \mathbf{D}_{N-m, m}, \end{aligned}$$

а  $Z$  и  $\bar{Z}$  являются операторами умножения на  $z$  и  $\bar{z}$ , соответственно.

Из соотношений (2.11)-(2.13), (2.15)-(2.17) получаем следующее выражение для гамильтониана  $H_r$  через лестничные операторы

$$H_r = a_{rad}^+ a_{rad}^- + a_{rad}^- a_{rad}^+ + I_B \left( \frac{1}{8}; \frac{1}{2} \right). \quad (2.18)$$

Заметим, что в отличие от гамильтониана  $H_s$  секториального осциллятора,  $H_r$  содержит, помимо стандартного члена, дополнительное слагаемое.

В работе [46] алгебра радиального осциллятора  $\mathfrak{A}_r$  была определена как некоторое замыкание ассоциативной алгебры, порождаемой генераторами

$$a_{rad}^\pm, \quad \mathbb{N}_1, \quad \mathbb{N}_2, \quad I_B \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), \quad \mathbb{I}, \quad (2.19)$$

удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} [a_{rad}^-, a_{rad}^+] &= \frac{4}{5} I_B \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right); \quad a_{rad}^- I_B \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) = 0; \quad I_B \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) a_{rad}^+ = 0; \\ [\mathbb{N}_1, a_{rad}^\pm] &= \pm a_{rad}^\pm; \quad [\mathbb{N}_2, a_{rad}^\pm] = \pm a_{rad}^\pm; \quad [\mathbb{N}_1, I_B \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)] = 0, \quad [\mathbb{N}_2, I_B \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)] = 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 2.2.3 Обобщенный граничный осциллятор

Напомним, что  $\mathcal{H}_{\bullet, 0}$  и  $\mathcal{H}_{0, \bullet}$  обозначают замыкания линейных оболочек множеств  $\{U_{k, 0}\}_{k=0}^\infty$  и  $\{U_{0, l}\}_{l=0}^\infty$ . При определении граничного осциллятора в работе [46] использовались следующие ортогональные разложения гильбертовых пространств  $\mathcal{H}_{\bullet, 0}$  и  $\mathcal{H}_{0, \bullet}$ .

$$\mathcal{H}_{\bullet, 0} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} (\mathcal{H}^{(N)} \cap \mathcal{H}_{\bullet, 0}), \quad \mathcal{H}_{0, \bullet} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} (\mathcal{H}^{(N)} \cap \mathcal{H}_{0, \bullet}), \quad (2.21)$$

и операторы  $P_{s, t}^{m, n} \circ P_{s, t}^{m, n} U_{k, l} = \delta_{k, m} \delta_{l, n} U_{s, t}$ . Определим лестничные операторы

$$a_{\bullet, 0}^\pm = \bigoplus_{m=0}^{\infty} P_{m\pm 1, 0}^{m, 0}, \quad a_{0, \bullet}^\pm = \bigoplus_{m=0}^{\infty} P_{0, m\pm 1}^{0, m}, \quad (2.22)$$

(см. Fig.1.). Для этих операторов в работе [47] была получена следующая реализация дифференциальными операторами

$$a_{\bullet,0}^{\pm} \Big|_{\mathcal{H}^{(N)}} = U_{N\pm 1,0} \frac{\mathbf{D}_{N,0}}{N!}; \quad a_{0,\bullet}^{\pm} \Big|_{\mathcal{H}^{(N)}} = U_{0,N\pm 1} \frac{\mathbf{D}_{0,N}}{N!}.$$

Тогда для операторов "координат"

$$\begin{aligned} a_{\bullet,0}^+ + a_{\bullet,0}^- &= (Z + \bar{Z} - a_{sect} s^+ - a_{sect}^+ Z + (a_{sect}^+)^2) \mathbb{P}_1, \\ a_{0,\bullet}^+ + a_{0,\bullet}^- &= (Z + \bar{Z} - a_{sect}^- - a_{sect}^- Z + (a_{sect}^-)^2) \mathbb{P}_2, \end{aligned}$$

получаем [47]

$$\begin{aligned} a_{\bullet,0}^+ + a_{\bullet,0}^- &= Z + \bar{Z} - \frac{1}{\sqrt{10}} \times \left\{ \bigoplus_{N=1}^{\infty} \left[ \left( \sum_{m=0}^N \frac{U_{m-1,N-m+1} \mathbf{D}_{m,N-m}}{m!(N-m)!} \right) (\mathbb{I} + Z) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \sum_{m=0}^{N-2} \frac{U_{m,N-m} \mathbf{D}_{m+2,N-m-2}}{(m+2)!(N-m-2)!} \right) \right] \right\} \mathbb{P}_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{0,\bullet}^+ + a_{0,\bullet}^- &= Z + \bar{Z} - \frac{1}{\sqrt{10}} \times \left\{ \bigoplus_{N=1}^{\infty} \left[ \left( \sum_{m=0}^N \frac{U_{m+1,N-m-1} \mathbf{D}_{m,N-m}}{m!(N-m)!} \right) (\mathbb{I} + \bar{Z}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \sum_{m=0}^{N-2} \frac{U_{m+2,N-m-2} \mathbf{D}_{m,N-m}}{m!(N-m)!} \right) \right] \right\} \mathbb{P}_2. \end{aligned}$$

Квадратичный гамильтониан граничного осциллятора имеет вид

$$H_0 = \frac{1}{5} (H_{\bullet,0} + H_{0,\bullet} - P_{0,0}^{0,0}),$$

где

$$\begin{aligned} H_{\bullet,0} &= (a_{\bullet,0}^+ a_{\bullet,0}^- + a_{\bullet,0}^- a_{\bullet,0}^+), \\ H_{0,\bullet} &= (a_{0,\bullet}^+ a_{0,\bullet}^- + a_{0,\bullet}^- a_{0,\bullet}^+), \end{aligned}$$

Гамильтониан  $H_0$  является ограниченным оператором в  $\mathcal{H}$ . Его собственные функции — ЧК-полиномы  $U_{k,l}$  имеют собственные значения

$$\mu_{0,0} = \frac{1}{5}; \quad \mu_{0,N} = \mu_{N,0} = \frac{2}{5}, \quad (\text{for } N \geq 1), \quad \mu_{k,l} = 0, \quad (\text{for } k, l \geq 1).$$

Определим алгебру  $\mathfrak{A}_0$  граничного осциллятора [46] как некоторое замыкание ассоциативной алгебры, порождаемой генераторами

$$\mathbb{I}, \quad \mathbb{N}_1, \quad \mathbb{N}_2, \quad P_{m,0}^{s,0}, \quad P_{0,m}^{0,s}, \quad P_{0,m}^{k,0}, \quad P_{m,0}^{0,k}, \quad (2.23)$$

удовлетворяющими следующим перестановочным соотношениям

$$\begin{cases} [\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2] = 0, & [\mathbb{N}_1, P_{m,0}^{k,0}] = (m-k)P_{m,0}^{k,0}, & [\mathbb{N}_1, P_{0,m}^{0,k}] = 0, \\ & [\mathbb{N}_1, P_{0,n}^{k,0}] = -kP_{0,n}^{k,0}, & [\mathbb{N}_1, P_{m,0}^{0,l}] = mP_{m,0}^{0,l}; \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{cases} [\mathbb{N}_2, P_{m,0}^{k,0}] = 0, & [\mathbb{N}_2, P_{0,m}^{0,k}] = (m-k)P_{0,m}^{0,k}, \\ [\mathbb{N}_2, P_{0,n}^{k,0}] = nP_{0,n}^{k,0}, & [\mathbb{N}_2, P_{m,0}^{0,l}] = -lP_{m,0}^{0,l}; \end{cases} \quad (2.25)$$

$$\begin{cases} [P_{m,0}^{k,0}, P_{n,0}^{l,0}] = \delta_{k,n}P_{m,0}^{l,0} - \delta_{m,l}P_{n,0}^{k,0}, \\ [P_{m,0}^{k,0}, P_{0,n}^{0,l}] = \delta_{k,0}\delta_{n,0}P_{m,0}^{0,l} - \delta_{m,0}\delta_{l,0}P_{0,n}^{k,0}; \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\begin{cases} [P_{m,0}^{k,0}, P_{0,n}^{l,0}] = \delta_{k,0}\delta_{n,0}P_{m,0}^{l,0} - \delta_{l,m}P_{0,n}^{k,0}, \\ [P_{m,0}^{k,0}, P_{n,0}^{0,l}] = \delta_{k,n}P_{m,0}^{0,l} - \delta_{m,0}\delta_{l,0}P_{n,0}^{k,0}; \end{cases} \quad (2.27)$$

$$\begin{cases} [P_{0,m}^{0,k}, P_{0,n}^{0,l}] = \delta_{k,n}P_{0,m}^{0,l} - \delta_{m,l}P_{0,n}^{0,k}, \\ [P_{0,m}^{0,k}, P_{0,n}^{l,0}] = \delta_{k,n}P_{0,m}^{l,0} - \delta_{m,0}\delta_{l,0}P_{0,n}^{0,k}, \\ [P_{0,m}^{0,k}, P_{n,0}^{0,l}] = \delta_{k,0}\delta_{n,0}P_{0,m}^{0,l} - \delta_{l,m}P_{n,0}^{0,k}; \end{cases} \quad (2.28)$$

$$\begin{cases} [P_{0,n}^{k,0}, P_{m,0}^{0,l}] = \delta_{k,m}P_{0,n}^{0,l} - \delta_{l,n}P_{m,0}^{k,0}, \\ [P_{0,n}^{k,0}, P_{0,m}^{l,0}] = \delta_{k,0}\delta_{m,0}P_{0,n}^{l,0} - \delta_{l,0}\delta_{n,0}P_{0,m}^{k,0}, \\ [P_{n,0}^{0,k}, P_{m,0}^{0,l}] = \delta_{k,0}\delta_{m,0}P_{n,0}^{0,l} - \delta_{l,0}\delta_{k,0}P_{m,0}^{0,k}; \end{cases} \quad (2.29)$$

### 3 Алгебра обобщенного секториального осциллятора

Построим замыкание алгебры секториального осциллятора, т.е. опишем (минимальное) расширение ассоциативной алгебры определяемой (2.9) (2.10) до бесконечномерной алгебры Ли  $\mathfrak{A}_s$ . Для этого нам понадобятся следующие вспомогательные операторы. Напомним, что операторы  $P_{s,t}^{m,n}$  при  $m, n, s, t, k, l \geq 0$  равны

$$P_{s,t}^{m,n}U_{k,l}(z, \bar{z}) = \delta_{k,m}\delta_{l,n}U_{s,t}(z, \bar{z}), \quad (3.1)$$

и будем считать, что

$$P_{s,t}^{m,n}U_{k,l}(z, \bar{z}) = 0,$$

если хотя бы один из индексов отрицателен.

Используя (3.1), (2.7) и разложение (2.2), имеем

$$a_{sect}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{10}} \bigoplus_{m,n=0}^{\infty} P_{m \mp 1, n \pm 1}^{m,n}. \quad (3.2)$$

Определим также операторы

$$P_{\bullet,k}^{(n)} = \bigoplus_{m=k}^{\infty} P_{m-n,n}^{m-k,k}, \quad P_{p,\bullet}^{(q)} = \bigoplus_{l=p}^{\infty} P_{q,l-q}^{p,l-p}, \quad k, n, q, p \geq 0. \quad (3.3)$$

Из сравнения (2.8) и (3.3) следует, что

$$P_1 = \bigoplus_{N=0}^{\infty} P_{N,0}^{N,0} = P_{\bullet,0}^{(0)}, \quad P_2 = \bigoplus_{N=0}^{\infty} P_{0,N}^{0,N} = P_{0,\bullet}^{(0)}.$$

Действия определенных выше операторов проиллюстрированы на следующей схеме

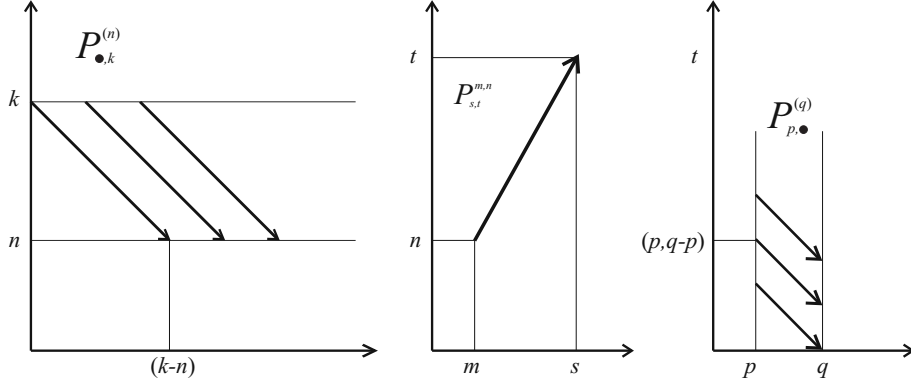


Figure 3: Действие операторов (3.1), (3.3)

Начнем построение алгебры  $\mathfrak{A}_s$  секториального оператора с построения алгебр  $\mathfrak{A}_s^{(N)}$ , при  $N \geq 0$ , как ассоциативных алгебр, порождаемых генераторами

$$\mathbb{I}, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, P_{k\mp 1, l\pm 1}^{k,l}, P_{k,l}^{k,l}, \quad (k+l=N, k, l \geq 0), \quad (3.4)$$

удовлетворяющими следующим перестановочным соотношениям

$$\begin{aligned} [\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2] &= 0, \quad [\mathbb{N}_1, P_{k,l}^{k,l}] = [\mathbb{N}_2, P_{k,l}^{k,l}] = 0, \quad [P_{k,l}^{k,l}, P_{m,n}^{m,n}] = 0, \\ [\mathbb{N}_1, P_{k\mp 1, l\pm 1}^{k,l}] &= \mp P_{k\mp 1, l\pm 1}^{k,l}, \quad [\mathbb{N}_2, P_{k\mp 1, l\pm 1}^{k,l}] = \pm P_{k\mp 1, l\pm 1}^{k,l}, \\ [P_{m\mp 1, n\pm 1}^{m,n}, P_{k,l}^{k,l}] &= \delta_{m,k} \delta_{n,l} P_{m\mp 1, n\pm 1}^{k,l} - \delta_{k, m\mp 1} \delta_{l, n\pm 1} P_{k,l}^{m,n}, \\ [P_{m-1, n+1}^{m,n}, P_{k+1, l-1}^{k,l}] &= \delta_{m, k+1} \delta_{n, l-1} (P_{k,l}^{k,l} - P_{k+1, l-1}^{k+1, l-1}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нетрудно проверить справедливость тождеств Якоби. Следовательно, алгебры  $\mathfrak{A}_s^{(N)}$ ,  $N \geq 0$ , порождаемые генераторами (3.4) и соотношениями (3.5), являются алгебрами Ли размерности  $3(N+2)$ .

В соответствии с разложением (2.2) рассмотрим бесконечномерную алгебру Ли  $\tilde{\mathfrak{A}}_s$

$$\tilde{\mathfrak{A}}_s = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathfrak{A}_s^{(N)},$$

и определим бесконечномерную алгебру Ли  $\hat{\mathfrak{A}}_s$  как алгебру, полученную из  $\tilde{\mathfrak{A}}_s$  добавлением к генераторам (3.4) всех формальных рядов по этим генераторам в том числе операторов (3.2) и (3.3) с перестановочными соотношениями, индуцированными соотношениями (3.5). Рассмотрим идеал  $I_s$  алгебры  $\hat{\mathfrak{A}}_s$ , порождаемый перестановочными соотношениями:

$$[a_{sect}^-, a_{sect}^+] = \frac{1}{10} (P_{\bullet,0}^{(0)} - P_{0,\bullet}^{(0)}); \quad (3.6)$$

$$[\mathbb{N}_1, a_{sect}^\pm] = \mp a_{sect}^\pm, \quad [\mathbb{N}_2, a_{sect}^\pm] = \pm a_{sect}^\pm, \quad [\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2] = 0; \quad (3.7)$$

$$[a_{sect}^\pm, P_{\bullet, k}^{(n)}] = \frac{1}{\sqrt{10}} \left( P_{\bullet, k}^{(n\pm 1)} - P_{\bullet, k\pm 1}^{(n)} \right); \quad (3.8)$$

$$[a_{sect}^\pm, P_{k, \bullet}^{(n)}] = \frac{1}{\sqrt{10}} \left( P_{k, \bullet}^{(n\mp 1)} - P_{k\pm 1, \bullet}^{(n)} \right); \quad (3.9)$$

$$[a_{sect}^\mp, P_{k-t, l+t}^{k, l}] = \frac{1}{\sqrt{10}} \left( P_{k-t\pm 1, l+t\mp 1}^{k, l} - P_{k-t, l+t}^{k\mp 1, l\pm 1} \right); \quad (3.10)$$

$$[a_{sect}^\mp, P_{k+t, l-t}^{k, l}] = \frac{1}{\sqrt{10}} \left( P_{k+t\pm 1, l-t\mp 1}^{k, l} - P_{k+t, l-t}^{k\mp 1, l\pm 1} \right); \quad (3.11)$$

$$[P_{\bullet, k}^{(n)}, P_{l, \bullet}^{(m)}] = \left( P_{m+k-n, n}^{l, m+k-l} - P_{m, n+l-m}^{n+k-l, k} \right); \quad (3.12)$$

$$[P_{\bullet, k}^{(n)}, P_{\bullet, l}^{(m)}] = P_{\bullet, l}^{(n)} - P_{\bullet, k}^{(m)}; \quad (3.13)$$

$$[P_{k, \bullet}^{(n)}, P_{l, \bullet}^{(m)}] = P_{l, \bullet}^{(n)} - P_{k, \bullet}^{(m)}; \quad (3.14)$$

$$[\mathbb{N}_1, P_{\bullet, k}^{(n)}] = (k-n)P_{\bullet, k}^{(n)}, \quad [\mathbb{N}_2, P_{\bullet, k}^{(n)}] = (n-k)P_{\bullet, k}^{(n)}; \quad (3.15)$$

$$[\mathbb{N}_1, P_{k, \bullet}^{(n)}] = (n-k)P_{k, \bullet}^{(n)}, \quad [\mathbb{N}_2, P_{k, \bullet}^{(n)}] = (k-n)P_{k, \bullet}^{(n)}; \quad (3.16)$$

$$[P_{k-t, l+t}^{k, l}, P_{\bullet, m}^{(n)}] = P_{k-t, n+t}^{k+n-m, m} - P_{k+l-n, n}^{k, l}; \quad (3.17)$$

$$[P_{k+t, l-t}^{k, l}, P_{\bullet, m}^{(n)}] = P_{k+t, l-t}^{k+l-m, m} - P_{k+l-n, n}^{k, l}; \quad (3.18)$$

$$[P_{k+t, l-t}^{k, l}, P_{m, \bullet}^{(n)}] = P_{k+t, l-t}^{m, k+l-m} - P_{n, k+l-n}^{k, l}; \quad (3.19)$$

$$[P_{k-t, l+t}^{k, l}, P_{m, \bullet}^{(n)}] = P_{k-t, l+t}^{m, k+l-m} - P_{n, k+l-n}^{k, l}; \quad (3.20)$$

$$[P_{k\mp t, l\pm t}^{k, l}, P_{m\mp s, n\pm s}^{m, n}] = \delta_{k, m\mp s} \delta_{l, n\pm s} P_{k\mp t, l\pm t}^{m, n} - \delta_{m, k\mp t} \delta_{n, l\pm t} P_{m\mp s, n\pm s}^{k, l}; \quad (3.21)$$

$$[P_{k-t, l+t}^{k, l}, P_{m+s, n-s}^{m, n}] = \delta_{k, m+s} \delta_{l, n-s} P_{k-t, l+t}^{m, n} - \delta_{m, k-t} \delta_{n, l+t} P_{m+s, n-s}^{k, l}; \quad (3.22)$$

$$[\mathbb{N}_1, P_{k\mp t, l\pm t}^{k, l}] = \mp t P_{k\mp t, l\pm t}^{k, l}, \quad [\mathbb{N}_2, P_{k\mp t, l\pm t}^{k, l}] = \pm t P_{k\mp t, l\pm t}^{k, l}. \quad (3.23)$$

Окончательно, определим алгебру  $\mathfrak{A}_s$  секториального осциллятора как фактор-алгебру

$$\mathfrak{A}_s = \widehat{\mathfrak{A}}_s / I_s. \quad (3.24)$$

Другими словами, алгебра  $\mathfrak{A}_s$  — алгебра Ли, порождаемая генераторами (3.2), (3.3), (3.4), удовлетворяющими перестановочным соотношениям (3.6)-(3.23). Ясно, что  $\mathfrak{A}_s$  является замыканием ассоциативной алгебры, порождаемой генераторами (2.9), удовлетворяющими соотношениям (2.10).

## 4 Алгебра обобщенного радиального осциллятора

Построим замыкание алгебры обобщенного радиального осциллятора, т.е. опишем минимальное расширение ассоциативной алгебры, определяемой соотношениями (2.19) и (2.20) до бесконечномерной алгебры Ли  $\mathfrak{A}_r$ . Используя соотношения (3.1) и (2.17), получаем

$$a_{rad}^{\pm} = \sqrt{\frac{2}{5}} \bigoplus_{k,l \geq 0} P_{k \pm 1, l \pm 1}^{k,l}. \quad (4.1)$$

Из (3.1) (3.3) (2.15) следует соотношение

$$I_B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \left( P_{\bullet,0}^{(0)} + P_{0,\bullet}^{(0)} - P_{0,0}^{0,0} \right). \quad (4.2)$$

Начнем построение алгебры  $\mathfrak{A}_r$  с определения алгебр  $\tilde{\mathfrak{A}}_r^{(even)}$  и  $\tilde{\mathfrak{A}}_r^{(odd)}$  как ассоциативных алгебр, порождаемых генераторами

$$\mathbb{I}, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, P_{k \pm t, l \pm t}^{k,l}, \quad k, l, t \geq 0, \quad (4.3)$$

(где  $k = 2n, l = 2m$  и  $k = 2n + 1, l = 2m + 1$ , соответственно) удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$[P_{k \pm t, l \pm t}^{k,l}, P_{m \pm s, n \pm s}^{m,n}] = \delta_{k,m \pm s} \delta_{l,n \pm s} P_{k \pm t, l \pm t}^{m,n} - \delta_{m,k \pm t} \delta_{n,l \pm t} P_{m \pm s, n \pm s}^{k,l}; \quad (4.4)$$

$$[P_{k+t, l+t}^{k,l}, P_{m-s, n-s}^{m,n}] = \delta_{k,m-s} \delta_{l,n-s} P_{k+t, l+t}^{m,n} - \delta_{m,k+t} \delta_{n,l+t} P_{m-s, n-s}^{k,l}; \quad (4.5)$$

$$[\mathbb{N}_1, P_{k \pm t, l \pm t}^{k,l}] = \pm t P_{k \pm t, l \pm t}^{k,l}, \quad [\mathbb{N}_2, P_{k \pm t, l \pm t}^{k,l}] = \pm t P_{k \pm t, l \pm t}^{k,l}, \quad [\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2] = 0. \quad (4.6)$$

Так как для генераторов (4.3), удовлетворяющих соотношениям (4.4)-(4.6) выполнены тождества Якоби, то справедлива следующая лемма:

**Лемма 4.1.** *Алгебры  $\tilde{\mathfrak{A}}_r^{(even)}$  и  $\tilde{\mathfrak{A}}_r^{(odd)}$  являются (бесконечномерными) алгебрами Ли.*

В соответствии с разложением (2.2), введем алгебру  $\tilde{\mathfrak{A}}_r$

$$\tilde{\mathfrak{A}}_r = \tilde{\mathfrak{A}}_r^{(even)} \bigoplus \tilde{\mathfrak{A}}_r^{(odd)},$$

и определим алгебру Ли  $\hat{\mathfrak{A}}_r$ , как алгебру, полученную из  $\tilde{\mathfrak{A}}_r$  добавлением всех формальных рядов по генераторам (4.3), в том числе операторов (4.1), (4.2), а также операторов

$$P_{\pm, l}^k = \bigoplus_{m \geq 0} P_{m \pm l, l}^{m \pm k, k}, \quad P_{l, \pm}^k = \bigoplus_{m \geq 0} P_{l, m \pm l}^{k, m \pm k}, \quad (4.7)$$

с перестановочными соотношениями, индуцированными соотношениями (4.4)-(4.6).

Из (3.3) и (4.7) следует, что

$$P_{-, l}^k = P_{\bullet, k}^{(l)}, \quad P_{l, -}^k = P_{k, \bullet}^{(l)}.$$

Рассмотрим идеал  $I_r$  алгебры  $\hat{\mathfrak{A}}_r$ , порождаемый перестановочными соотношениями

$$[\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2] = 0, \quad [\mathbb{N}_j, P_{k \pm t, l \pm t}^{k,l}] = \pm t P_{k \pm t, l \pm t}^{k,l}, \quad [\mathbb{N}_j, a_{rad}^{\pm}] = \pm a_{rad}^{\pm}, \quad j = 1, 2; \quad (4.8)$$



$$\begin{aligned} [\mathbb{N}_1, P_{+,l}^k] &= (l-k)P_{+,l}^k, & [\mathbb{N}_2, P_{l,+}^k] &= (l-k)P_{l,+}^k, \\ [\mathbb{N}_1, P_{l,+}^k] &= (l-k)P_{k,+}^l, & [\mathbb{N}_2, P_{+,l}^k] &= (l-k)P_{+,l}^k; \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$[P_{k\pm t, l\pm t}^{k,l}, P_{m\pm s, n\pm s}^{m,n}] = \delta_{k,m\pm s} \delta_{l,n\pm s} P_{k\pm t, l\pm t}^{m,n} - \delta_{m,k\pm t} \delta_{n,l\pm t} P_{m\pm s, n\pm s}^{k,l}; \quad (4.10)$$

$$[P_{k\pm t, l\pm t}^{k,l}, a_{rad}^\pm] = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( P_{k\pm t, l\pm t}^{k\mp 1, l\mp 1} - P_{k\pm t\pm 1, l\pm t\pm 1}^{k,l} \right); \quad (4.11)$$

$$[P_{k\pm t, l\pm t}^{k,l}, P_{+,n}^m] = P_{k\pm t, n\pm t}^{k-n+m, m} - P_{k\pm t-m+n, n}^{k, m\mp t}; \quad (4.12)$$

$$[P_{k\pm t, l\pm t}^{k,l}, P_{n,+}^m] = P_{k\pm t, l\pm t}^{m, l-n+m} - P_{n, l\pm t-m+n}^{m\mp t, l}; \quad (4.13)$$

$$[a_{rad}^-, a_{rad}^+] = \frac{2}{5} \left( P_{\bullet,0}^{(0)} - P_{0,\bullet}^{(0)} - P_{0,0}^{0,0} \right); \quad (4.14)$$

$$[a_{rad}^\pm, P_{+,n}^m] = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( P_{+,n\pm 1}^m - P_{+,n}^{m\mp 1} \right); \quad (4.15)$$

$$[a_{rad}^\pm, P_{n,+}^m] = \sqrt{\frac{2}{5}} \left( P_{n\pm 1,+}^m - P_{n,+}^{m\mp 1} \right); \quad (4.16)$$

$$[P_{+,l}^k, P_{+,n}^m] = P_{+,l}^m - P_{+,n}^k; \quad (4.17)$$

$$[P_{+,l}^k, P_{n,+}^m] = P_{n-k+l, l}^{m, k-n+m} - P_{n, l-m+n}^{m-l+k, k}; \quad (4.18)$$

$$[P_{l,+}^k, P_{n,+}^m] = P_{l,+}^m - P_{n,+}^k. \quad (4.19)$$

Окончательно определим алгебру Ли  $\mathfrak{A}_r$  радиального осциллятора как фактор-алгебру

$$\mathfrak{A}_r = \widehat{\mathfrak{A}}_r / I_r.$$

Алгебра  $\mathfrak{A}_r$  является ассоциативной алгеброй Ли, порождаемой генераторами (4.1)-(4.3), (4.7), удовлетворяющими перестановочным соотношениям (4.8)-(4.19). Алгебру  $\mathfrak{A}_r$  можно рассматривать как замыкание ассоциативной алгебры, порожденной генераторами (2.19), удовлетворяющими перестановочным соотношениям (2.20).

## 5 Алгебра обобщенного граничного осциллятора

Построим расширение ассоциативной алгебры определенной в (2.23)-(2.29) до некоторой бесконечномерной алгебры Ли  $\mathfrak{A}_0$ , т.е. построим замыкание алгебры граничного осциллятора. Сперва рассмотрим алгебру  $\widehat{\mathfrak{A}}_0$ , как ассоциативную алгебру, порождаемую генераторами (2.23), удовлетворяющими перестановочным соотношениям (2.24) - (2.29). Определим далее бесконечномерную алгебру Ли  $\widehat{\mathfrak{A}}_0$  как алгебру, получаемую из  $\widehat{\mathfrak{A}}_0$  добавлением всех формальных рядов по генераторам (2.23), в том числе и операторов (2.22) с перестановочными соотношениями, индуцированными соотношениями (2.24) - (2.29). Наконец, рассмотрим идеал  $I_0$  алгебры  $\widehat{\mathfrak{A}}_0$ , порождаемый соотношениями (2.24) - (2.29), а также

$$\begin{aligned} [\mathbb{N}_1, a_{\bullet,0}^\pm] &= \pm a_{\bullet,0}^\pm, & [\mathbb{N}_2, a_{\bullet,0}^\pm] &= 0, & [a_{\bullet,0}^+, a_{\bullet,0}^-] &= -P_{0,0}^{0,0}, \\ [P_{m,0}^{k,0}, a_{\bullet,0}^\pm] &= P_{m,0}^{k\mp 1,0} - P_{m\pm 1,0}^{k,0}, & [P_{0,m}^{0,k}, a_{\bullet,0}^\pm] &= \delta_{k,0} P_{0,m}^{\mp 1,0} - \delta_{m,0} P_{\pm 1,0}^{0,k}, \\ [P_{0,m}^{k,0}, a_{\bullet,0}^\pm] &= P_{0,m}^{k\mp 1,0} - \delta_{m,0} P_{\pm 1,0}^{k,0}, & [P_{n,0}^{0,l}, a_{\bullet,0}^\pm] &= \delta_{l,0} P_{n,0}^{\mp 1,0} - P_{n\pm 1,0}^{0,l}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned}
[\mathbb{N}_1, a_{0,\bullet}^\pm] &= 0, \quad [\mathbb{N}_2, a_{0,\bullet}^\pm] = \pm a_{0,\bullet}^\pm, \quad [a_{0,\bullet}^+, a_{0,\bullet}^-] = P_{0,0}^{0,0}, \\
[P_{m,0}^{k,0}, a_{0,\bullet}^\pm] &= \delta_{k,0} P_{m,0}^{0,\mp 1} - \delta_{m,0} P_{0,\pm 1}^{k,0}, \quad [P_{0,m}^{0,k}, a_{0,\bullet}^\pm] = P_{0,m}^{0,k\mp 1} - P_{0,m\pm 1}^{0,k}, \\
[P_{0,m}^{k,0}, a_{0,\bullet}^\pm] &= \delta_{k,0} P_{0,m}^{0,\mp 1} - P_{0,m\pm 1}^{k,0}, \quad [P_{n,0}^{0,l}, a_{0,\bullet}^\pm] = P_{n,0}^{0,l\mp 1} - \delta_{n,0} P_{0,\pm 1}^{0,l},
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$[a_{\bullet,0}^\pm, a_{0,\bullet}^\pm] = P_{\mp 1,0}^{0,1}, \quad [a_{\bullet,0}^\pm, a_{0,\bullet}^\mp] = -P_{0,1}^{\pm 1,0}. \tag{5.3}$$

Определим алгебру Ли  $\mathfrak{A}_0$  как фактор-алгебру

$$\mathfrak{A}_0 = \widehat{\mathfrak{A}}_0 / I_0.$$

Алгебра  $\mathfrak{A}_0$  — это алгебра Ли, порождаемая генераторами (2.22)-(2.23), удовлетворяющими перестановочным соотношениям (2.24)-(2.29), (5.1)-(5.3). Эта алгебра является замыканием ассоциативной алгебры, порождаемой генераторами (2.23) удовлетворяющими перестановочным соотношениям (2.24)-(2.29).

## 6 Алгебра обобщенного осциллятора Чебышева - Коорнвиндера

В [46] алгебра двумерного обобщенного осциллятора Чебышева - Коорнвиндера была определена как некоторое замыкание ассоциативной алгебры  $\tilde{\mathfrak{A}}$ , порожденной генераторами

$$\mathbb{I}, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, a_{sect}^\pm, a_{rad}^\pm, a_{\bullet,0}^\pm, a_{0,\bullet}^\pm, P_{\pm,l}^k, P_{l,\pm}^k, P_{m,n}^{k,l}, \tag{6.1}$$

где индексы  $k, l, m, n \geq 0$  удовлетворяют одному из следующих условий

$$\begin{aligned}
1) \quad & m + n = k + l, \quad m - n = k - l \pm 2t; \\
2) \quad & m - n = k - l, \quad m + n = k + l \pm 2t; \\
3) \quad & kl = 0, \quad mn = 0;
\end{aligned} \tag{6.2}$$

и предполагается, что генераторы (6.1) подчиняются перестановочным соотношениям (3.6) - (3.23), (4.8) - (4.19), (2.24) - (2.29), (5.1) - (5.3).

Опишем это замыкание, т.е. минимальное расширение алгебры двумерного ЧК-осциллятора до некоторой бесконечномерной алгебры Ли. Для этого рассмотрим алгебру  $\widehat{\mathfrak{A}}$ , полученную из  $\tilde{\mathfrak{A}}$  добавлением всех формальных рядов по генераторам (6.1) с перестановочными соотношениями, индуцированными перестановочными соотношениями (3.6) - (3.23), (4.8) - (4.19), (2.24) - (2.29), (5.1) - (5.3).

Введем следующие обозначения для некоторых из таких рядов

$$\widehat{P}_{[m],n}^{[k],l} = \bigoplus_s P_{s+m,n}^{s+k,l}, \quad \widehat{P}_{m,[n]}^{k,[l]} = \bigoplus_s P_{m,s+n}^{k,s+l}. \tag{6.3}$$

**Замечания** 1) Напомним, что  $P_{k,l}^{m,n} = 0$  если хотя бы один из индексов отрицателен;

2) Операторы (3.3), (4.7) и (2.22) можно записать через операторы (6.3) следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_{\bullet, k}^{(n)} &= \widehat{P}_{[k], n}^{[n], k}, \\
P_{k, \bullet}^{(n)} &= \widehat{P}_{n, [k]}^{k, [n]}, \\
P_{+, l}^k &= \widehat{P}_{[l], l}^{[k], k}, \\
P_{-, l}^k &= P_{\bullet, l}^{((k))} = \widehat{P}_{[l], k}^{[k], l}, \\
P_{l, +}^k &= \widehat{P}_{l, [l]}^{k, [k]}, \\
P_{l, -}^k &= \widehat{P}_{k, [l]}^{l, [k]}, \\
a_{\bullet, 0}^{\pm} &= \widehat{P}_{[\pm 1], 0}^{[0], 0}, \\
a_{\bullet, 0}^{\pm} &= \widehat{P}_{0, [\pm 1]}^{0, [0]}.
\end{aligned}$$

Определим в алгебре  $\widehat{\mathfrak{A}}$  идеал  $I$ , порождаемый следующими перестановочными соотношениями:

$$\left\{ \begin{aligned}
[\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2] &= 0, \quad [\mathbb{N}_1, a_{sect}^{\pm}] = \mp a_{sect}^{\pm}, \quad [\mathbb{N}_1, a_{rad}^{\pm}] = \pm a_{rad}^{\pm}; \\
[\mathbb{N}_1, \widehat{P}_{[m], n}^{[k], l}] &= (m - k) \widehat{P}_{[m], n}^{[k], l}; \\
[\mathbb{N}_1, \widehat{P}_{m, [n]}^{k, [l]}] &= (m - k) \widehat{P}_{m, [n]}^{k, [l]}; \\
[\mathbb{N}_1, P_{n, m}^{k, l}] &= (n - k) P_{n, m}^{k, l};
\end{aligned} \right. \quad (6.4)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
[\mathbb{N}_2, a_{sect}^{\pm}] &= \pm a_{sect}^{\pm}, \quad [\mathbb{N}_2, a_{rad}^{\pm}] = \pm a_{rad}^{\pm}, \quad [\mathbb{N}_2, P_{n, m}^{k, l}] = (m - l) P_{n, m}^{k, l}; \\
[\mathbb{N}_2, \widehat{P}_{[m], n}^{[k], l}] &= (n - l) \widehat{P}_{[m], n}^{[k], l}; \\
[\mathbb{N}_2, \widehat{P}_{m, [n]}^{k, [l]}] &= (n - l) \widehat{P}_{m, [n]}^{k, [l]};
\end{aligned} \right. \quad (6.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
[a_{sect}^-, a_{sect}^+] &= \frac{1}{10} \left( \widehat{P}_{[0], 0}^{[0], 0} - \widehat{P}_{0, [0]}^{0, [0]} \right), \\
[a_{sect}^{\pm}, a_{rad}^{\pm}] &= \pm \frac{1}{5} \widehat{P}_{0, [\pm 1]}^{0, [\mp 1]}, \\
[a_{sect}^{\mp}, a_{rad}^{\pm}] &= \pm \frac{1}{5} \widehat{P}_{[\pm 1], 0}^{[\mp 1], 0}, \\
[a_{sect}^{\pm}, \widehat{P}_{[m], n}^{[k], l}] &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \widehat{P}_{[m \mp 1], n \pm 1}^{[k], l} - \widehat{P}_{[m], n}^{[k \pm 1], l \mp 1} \right), \\
[a_{sect}^{\pm}, \widehat{P}_{m, [n]}^{k, [l]}] &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left( \widehat{P}_{m \mp 1, [n \pm 1]}^{k, [l]} - \widehat{P}_{m, [n]}^{k \pm 1, [l \mp 1]} \right), \\
[a_{sect}^{\mp}, P_{m, n}^{k, l}] &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left( P_{m \pm 1, n \mp 1}^{k, l} - P_{m, n}^{k \mp 1, l \pm 1} \right).
\end{aligned} \right. \quad (6.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} [a_{rad}^-, a_{rad}^+] &= \frac{2}{5} \left( \widehat{P}_{[0],0}^{[0],0} - \widehat{P}_{0,[0]}^{0,[0]} - P_{0,0}^{0,0} \right); \\ [a_{rad}^\pm, \widehat{P}_{[m],n}^{[k],l}] &= \sqrt{\frac{2}{5}} \left( \widehat{P}_{[m\pm 1],n\pm 1}^{[k],l} - \widehat{P}_{[m],n}^{[k\mp 1],l\mp 1} \right) \\ [a_{rad}^\pm, \widehat{P}_{m,[n]}^{k,[l]}] &= \sqrt{\frac{2}{5}} \left( \widehat{P}_{m\pm 1,[n\pm 1]}^{k,[l]} - \widehat{P}_{m,[n]}^{k\mp 1,[l\mp 1]} \right) \\ [a_{rad}^\mp, P_{m,n}^{k,l}] &= \sqrt{\frac{2}{5}} \left( P_{m\mp 1,n\mp 1}^{k,l} - P_{m,n}^{k\pm 1,l\pm 1} \right). \end{aligned} \right. \quad (6.7)$$

$$\left\{ \begin{aligned} [\widehat{P}_{[m],n}^{[k],l}, \widehat{P}_{[u],v}^{[q],s}] &= \left( \widehat{P}_{[m],n}^{[u+v-k-l-q],s} - \widehat{P}_{[u],v}^{[m+n-q-s-k],l} \right) \\ [\widehat{P}_{[m],n}^{[k],l}, \widehat{P}_{u,[v]}^{q,[s]}] &= \left( P_{u-k+m,n}^{q,l-v+s} - P_{u,n-s+v}^{q-m+k,l} \right) \\ [\widehat{P}_{m,[n]}^{k,[l]}, \widehat{P}_{u,[v]}^{q,[s]}] &= \left( \widehat{P}_{m,[n]}^{q,[-s-k-l+u+v]} - \widehat{P}_{u,[v]}^{k,[-l+m+n-q-s]} \right) \end{aligned} \right. \quad (6.8)$$

$$\left\{ \begin{aligned} [\widehat{P}_{[m],n}^{[k],l}, P_{u,v}^{q,s}] &= \left( P_{u+v+m-k-l,n}^{q,s} - P_{u,v}^{q+s+k-m-n,l} \right); \\ [\widehat{P}_{m,[n]}^{k,[l]}, P_{u,v}^{q,s}] &= \left( P_{m,u+v+n-k-l}^{q,s} - P_{u,v}^{k,q+s+l-m-n} \right). \end{aligned} \right. \quad (6.9)$$

$$[P_{m,n}^{k,l}, P_{u,v}^{s,t}] = \delta_{k,u} \delta_{l,v} P_{m,n}^{s,t} - \delta_{m,s} \delta_{n,t} P_{u,v}^{k,l}. \quad (6.10)$$

Определим алгебру  $\mathfrak{A}$  как фактор-алгебру

$$\mathfrak{A} = \widehat{\mathfrak{A}}/I.$$

Алгебра  $\mathfrak{A}$ , таким образом, является бесконечномерной ассоциативной алгеброй порожденной генераторами

$$\mathbb{I}, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, a_{sect}^\pm, a_{rad}^\pm, \widehat{P}_{m,[n]}^{k,[l]}, \widehat{P}_{[m],n}^{k,l}, P_{m,n}^{k,l}. \quad (6.11)$$

удовлетворяющими перестановочным соотношениям (6.4)-(6.10). (Напомним, что предполагается, что индексы  $k, l, m, n \geq 0$ , причем, если хотя бы один из индексов операторов  $P$  и  $\widehat{P}$  отрицателен, то соответствующий оператор равен нулю).

Можно проверить, что для операторов (6.11) выполнено тождество Якоби, так что алгебры  $\widehat{\mathfrak{A}}$  и  $\mathfrak{A}$  являются алгебрами Ли.

## 7 Исследование алгебры $\mathfrak{A}$

### 7.1 Перестановочные соотношения генераторов алгебры $\mathfrak{A}$

Для дальнейшего рассмотрения удобно разбить генераторы (6.11) на четыре типа

тип	генераторы	усл. обозначение
$I$	$\mathbb{I}, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2$	$A_I = A$
$II$	$a_{sect}^{\pm}, a_{rad}^{\pm}$	$A_{II} = B$
$III_{left}$	$\widehat{P}_{[m],n}^{[k],l}$	$A_{III}^{left} = C^l$
$III_{right}$	$\widehat{P}_{m,[n]}^{k,[l]}$	$A_{III}^{right} = C^r$
$IV$	$P_{m,n}^{k,l}$	$A_{IV} = D$

Из соотношений (6.4) - (6.10) следует, что

$$[A_1, A_2] = 0, \quad [A, B_1] = B_2, \quad [A, C_1^l] = C_2^l, \quad [A, C_1^r] = C_2^r, \quad [A, D_1] = D_2; \quad (7.1)$$

$$[B_1, B_2] = C^l + C^r + D, \quad [B, C_1^l] = C_2^l + C_3^l, \quad [B, C_1^r] = C_2^r + C_3^r, \quad [B, D_1] = D_2 + D_3; \quad (7.2)$$

$$\begin{cases} [C_1^l, C_2^l] = C_3^l + C_4^l, & [C_1^r, C_2^r] = C_3^r + C_4^r, & [C^l, C^r] = D_1 + D_2, \\ [C^l, D_1] = D_2 + D_3, & [C^r, D_1] = D_2 + D_3; \end{cases} \quad (7.3)$$

$$[D_1, D_2] = D_3 + D_4. \quad (7.4)$$

## 7.2 Центр алгебры $\mathfrak{A}$

Построим центр  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A})$  алгебры  $\mathfrak{A}$ . Элемент  $z$  принадлежит центру тогда и только тогда, когда он коммутирует со всеми генераторами  $X$  (6.11)

$$[z, X] = 0. \quad (7.5)$$

Запишем элемент  $z$  в виде

$$\begin{aligned} z = & d_0 I + d_1 \mathbb{N}_1 + d_2 \mathbb{N}_2 + d_s^+ a_{sect}^+ + d_s^- a_{sect}^- + d_r^+ a_{rad}^+ + d_r^- a_{rad}^- + \\ & \sum_{k,l,m,n \geq 0} \left( d_{k,l;m,n}^{(L)} \widehat{P}_{[m],n}^{[k],l} + d_{k,l;m,n}^{(R)} \widehat{P}_{m,[n]}^{k,[l]} \right) + \\ & \sum_{k,l,m,n \geq 0} d_{k,l;m,n}^{(D)} P_{m,n}^{k,l}. \end{aligned} \quad (7.6)$$

Выберем  $X = P_{s,t}^{s,t}$  в (7.5). Учитывая перестановочные соотношения (6.4)-(6.10) получаем

$$[I, P_{s,t}^{s,t}] = 0, \quad [\mathbb{N}_1, P_{s,t}^{s,t}] = 0, \quad [\mathbb{N}_2, P_{s,t}^{s,t}] = 0; \quad (7.7a)$$

$$[a_{sect}^{\pm}, P_{s,t}^{s,t}] = \frac{1}{\sqrt{10}} (P_{s\mp 1, t\pm 1}^{s,t} - P_{s,t}^{s\pm 1, t\mp 1}) \neq 0; \quad (7.7b)$$

$$[a_{rad}^{\pm}, P_{s,t}^{s,t}] = \sqrt{\frac{2}{5}} (P_{s\pm 1, t\pm 1}^{s,t} - P_{s,t}^{s\mp 1, t\mp 1}) \neq 0; \quad (7.7c)$$

$$[\hat{P}_{[m],n}^{[k],l}, P_{s,t}^{s,t}] = (P_{s+t+m-k-l,n}^{s,t} - P_{s,t}^{s+t-m+k-n,l}) = \begin{cases} = 0, & \text{при } m = k, n = l = t \\ \neq 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (7.7d)$$

$$[\hat{P}_{m,[n]}^{k,[l]}, P_{s,t}^{s,t}] = (P_{m,s+t+n-k-l}^{s,t} - P_{s,t}^{k,s+t-m+l-n}) = \begin{cases} = 0, & \text{при } n = l, m = k = s \\ \neq 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (7.7e)$$

$$[P_{m,n}^{k,l}, P_{s,t}^{s,t}] = \begin{cases} P_{m,n}^{s,t}, & \text{при } (k,l) = (s,t) \neq (m,n) \\ -P_{s,t}^{k,l}, & \text{при } (m,n) = (s,t) \neq (k,l) \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases} \quad (7.7f)$$

Из (7.5) и линейной независимости генераторов (6.11) следует, что все коэффициенты при отличных от нуля коммутаторах должны быть нулевыми. Это позволяет упростить (7.6)

$$\begin{aligned} z = d_0 I + d_1 \mathbb{N}_1 + d_2 \mathbb{N}_2 + \sum_{k \geq 0} d_{k,t;k,t}^{(L)} \hat{P}_{[k],t}^{[k],t} - \sum_{l \geq 0} d_{s,l;s,l}^{(R)} \hat{P}_{s,[l]}^{s,[l]} + \\ \sum_{\substack{(k,l) \neq (s,t) \neq (m,n) \\ (k,l) \neq (m,n)}} d_{k,l;m,n}^{(D)} P_{m,n}^{k,l} + \sum_{k,l \geq 0} d_{k,l;k,l}^{(D)} P_{k,l}^{k,l}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Поскольку  $s, t$  произвольные натуральные числа, то подбирая  $(s, t) = (k, l)$  или  $(s, t) = (m, n)$ , можно добиться того, что все коэффициенты  $d^{(D)}$  в предпоследней сумме в (7.8) равны нулю. В итоге (7.8) упроститься и примет вид

$$z = d_0 I + d_1 \mathbb{N}_1 + d_2 \mathbb{N}_2 + \sum_{k \geq 0} d_{k,t;k,t}^{(L)} \hat{P}_{[k],t}^{[k],t} + \sum_{l \geq 0} d_{s,l;s,l}^{(R)} \hat{P}_{s,[l]}^{s,[l]} + \sum_{k,l \geq 0} d_{k,l;k,l}^{(D)} P_{k,l}^{k,l}. \quad (7.9)$$

Выберем теперь в качестве  $X$  один из лестничных операторов, например,  $a_{sect}^+$ . Тогда, учитывая (7.7b), (6.6) и

$$[\mathbb{N}_1, a_{sect}^+] = -a_{sect}^+ \neq 0, \quad [\mathbb{N}_2, a_{sect}^+] = a_{sect}^+ \neq 0.$$

получим, что все коэффициенты кроме  $d_0$  в соотношении (7.9) равны нулю. Следовательно, имеем  $z = d_0 I$ , так что

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) = d_0 I,$$

т.е. центр алгебры  $\mathfrak{A}$  одномерен.

### 7.3 Максимальная абелева подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$

Рассмотрим теперь коммутативную подалгебру  $\mathfrak{L}$  алгебры Ли  $\mathfrak{A}$ , порождаемую генераторами  $\{P_{m,n}^{m,n}\}_{m,n \geq 0}$ . Обозначим далее  $\mathfrak{M}$  абелеву подалгебру в  $\mathfrak{A}$ , полученную из  $\mathfrak{L}$  добавлением к генераторам  $P_{m,n}^{m,n}$  всех формальных рядов по этим генераторам. Заметим, что

$$\mathbb{N}_1 = \bigoplus_{m,n \geq 0} m P_{m,n}^{m,n}, \quad \mathbb{N}_2 = \bigoplus_{m,n \geq 0} n P_{m,n}^{m,n}, \quad I = \bigoplus_{m,n \geq 0} P_{m,n}^{m,n}, \quad (7.10)$$

т.е. произвольный элемент  $u \in \mathfrak{M}$  можно записать в виде

$$u = \bigoplus_{k,l \geq 0} c_{k,l} P_{k,l}^{k,l}. \quad (7.11)$$

Покажем, что  $\mathfrak{M}$  — максимальная абелева подалгебра в алгебре Ли  $\mathfrak{A}$ . Действительно, пусть  $z$  некоторый элемент из  $\mathfrak{A}$  такой, что

$$[z, X] = 0,$$

при всех  $X \in \mathfrak{M}$ . Выбирая  $X = P_{s,t}^{s,t}$  (см. приведенное выше рассуждение) получаем, что для  $z$  выполняется равенство (7.9), т.е.

$$z = d_0 I + d_1 \mathbb{N}_1 + d_2 \mathbb{N}_2 + \sum_{k \geq 0} d_{k,t;k,t}^{(L)} \hat{P}_{[k],t}^{[k],t} + \sum_{l \geq 0} d_{s,l;s,l}^{(R)} \hat{P}_{s,[l]}^{s,[l]} + \sum_{k,l \geq 0} d_{k,l;k,l}^{(D)} P_{k,l}^{k,l}. \quad (7.12)$$

Учитывая (6.3) и (7.10) мы можем переписать (7.12) в виде

$$z = \bigoplus_{k,l \geq 0} \left( k + l + d_{k,l;k,l}^{(D)} \right) P_{k,l}^{k,l} \bigoplus_{k \geq 0} \left( \sum_{s=0}^k d_{s,t;s,t}^{(L)} \right) P_{k,t}^{k,t} \bigoplus_{l \geq 0} \left( \sum_{t=0}^l d_{s,t;s,t}^{(R)} \right) P_{s,l}^{s,l}.$$

С учетом (7.11), это означает, что  $z \in \mathfrak{M}$ . Так как это справедливо для любого  $z$ , коммутирующего со всеми элементами из  $\mathfrak{M}$ , то  $\mathfrak{M}$  — максимальная абелева подалгебра в алгебре Ли  $\mathfrak{A}$ .

Заметим, что  $\mathfrak{M}$  содержит коммутативную подалгебру, построенную в работе [47], которая является расширением алгебры Коорнвиндера [29], состоящей из всех дифференциальных операторов относительно переменных  $z, \bar{z}$ , для которых полиномы Чебышева - Коорнвиндера являются собственными функциями.

### 7.4 Подалгебры и идеалы в $\mathfrak{A}$ . Представление $\mathfrak{A}$ в виде полупрямой суммы

Рассмотрим векторные подпространства алгебры  $\mathfrak{A}$ :

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= \overline{\text{Span}}\{\mathbb{I}, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2\}; \\ \mathfrak{A}_2 &= \overline{\text{Span}}\{a_{sect}^{\pm}, a_{rad}^{\pm}\}; \\ \mathfrak{A}_3^L &= \overline{\text{Span}}\{\hat{P}_{m,[n]}^{k,[l]}\}, \quad \mathfrak{A}_3^R = \overline{\text{Span}}\{\hat{P}_{[m],n}^{[k],l}\}, \quad k, l, m, n \geq 0; \\ \mathfrak{A}_3 &= \mathfrak{A}_3^L \dot{+} \mathfrak{A}_3^R, \\ \mathfrak{A}_4 &= \overline{\text{Span}}\{P_{m,n}^{k,l}\}, \quad k, l, m, n \geq 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_1^L &= \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3^L, & \mathfrak{B}_1^R &= \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3^R, \\
\mathfrak{B}_1 &= \mathfrak{B}_1^L + \mathfrak{B}_1^R, \\
\mathfrak{B}_2^L &= \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3^L + \mathfrak{A}_4, & \mathfrak{B}_2^R &= \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_3^R + \mathfrak{A}_4, \\
\mathfrak{B}_2 &= \mathfrak{B}_2^L + \mathfrak{B}_2^R, \\
\mathfrak{B}_3^L &= \mathfrak{A}_3^L + \mathfrak{A}_4, & \mathfrak{B}_3^R &= \mathfrak{A}_3^R + \mathfrak{A}_4, \\
\mathfrak{B}_3 &= \mathfrak{B}_3^L + \mathfrak{B}_3^R,
\end{aligned}$$

Из перестановочных соотношений (7.1)-(7.4) следует, что

- $\mathfrak{A}_1$  — абелева подалгебра бесконечномерной алгебры  $\mathfrak{A}$ ;
- $\mathfrak{B}_2^L$ ,  $\mathfrak{B}_2^R$ ,  $\mathfrak{B}_2^L \oplus \mathfrak{B}_2^R$  — двусторонние идеалы в  $\mathfrak{A}$ , где  $\oplus$  — прямая сумма идеалов;
- $\mathfrak{B}_3^L$  — двусторонний идеал в  $\mathfrak{A}$  и, следовательно, в  $\mathfrak{B}_2$  и  $\mathfrak{B}_2^L$ ;
- $\mathfrak{B}_3^R$  — двусторонний идеал в  $\mathfrak{A}$  и, следовательно, в  $\mathfrak{B}_2$  и  $\mathfrak{B}_2^R$ ;
- $\mathfrak{A}_4$  — двусторонний идеал в  $\mathfrak{A}$  и, следовательно, двусторонний идеал в  $\mathfrak{B}_2$ ;

Тогда  $\mathfrak{A}_4$  является двусторонним идеалом в  $\mathfrak{B}_2^L$  и  $\mathfrak{B}_2^R$ , а также в  $\mathfrak{B}_3$ ,  $\mathfrak{B}_3^L$  и  $\mathfrak{B}_3^R$

Построим производный ряд для алгебры  $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}^{(0)} = \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}^{(1)} = [\mathfrak{A}^{(0)}, \mathfrak{A}^{(0)}], \quad \mathfrak{A}^{(2)} = [\mathfrak{A}^{(1)}, \mathfrak{A}^{(1)}], \quad \dots$$

Можно проверить, что

$$\mathfrak{A}^{(1)} = \mathfrak{B}_2, \quad \mathfrak{A}^{(n)} = \mathfrak{A}^{(2)} = \mathfrak{B}_3, \quad \forall n \geq 2. \quad (7.13)$$

Из (7.13) следует, что  $\mathfrak{A}$  не является разрешимой алгеброй Ли, а значит не является и нильпотентной алгеброй. Обозначим  $\mathbb{N}$  радикал (максимальный разрешимый идеал) алгебры  $\mathfrak{A}$ . Известно, что  $\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathbb{N}$ . Тогда, учитывая (7.13), имеем

$$\mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathbb{N} \subset \mathfrak{A}.$$

Для того, чтобы проверить справедливо ли для алгебры  $\mathfrak{A}$  обобщение теоремы Леви-Мальцева [48] необходимо построить радикал  $\mathbb{N}$ .

**Замечание.** При нахождении  $\mathbb{N}$  первый шаг состоит в построении разрешимого идеала  $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{N}$ , такого что

$$[\mathbb{L}, \mathbb{L}] = \mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \Rightarrow \mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \subseteq \mathbb{L}. \quad (7.14)$$

При этом возможны два альтернативных варианта

$$\mathbb{L} \text{ не существует} \Rightarrow \mathbb{N} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \quad (7.15a)$$

$$\mathbb{L} \text{ существует} \Rightarrow \mathfrak{Z}(\mathfrak{A}) \subset \mathbb{N} \quad (7.15b)$$

Наша гипотеза состоит в том, что (7.15a) справедливо, т.е. алгебра  $\mathfrak{A}$  редуцируема [49]. Однако в настоящее время авторы не имеют доказательства этой гипотезы.



Напомним, что алгебра Ли  $\mathfrak{L}$  является полупрямой суммой подалгебр Ли  $\mathfrak{T}$  и  $\mathfrak{M}$  ( $\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \ltimes \mathfrak{T}$ ) если

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} \dot{+} \mathfrak{T}, \quad (7.16)$$

$$[\mathfrak{T}, \mathfrak{T}] \subset \mathfrak{T}, \quad [\mathfrak{M}, \mathfrak{M}] \subset \mathfrak{M}, \quad [\mathfrak{M}, \mathfrak{T}] \subset \mathfrak{T}. \quad (7.17)$$

Как видно из (7.17)  $\mathfrak{T}$  — идеал в  $\mathfrak{L}$ .

Так как  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \dot{+} \mathfrak{B}_2$ , где  $\mathfrak{A}_1$  — подалгебра в  $\mathfrak{A}$  а  $\mathfrak{B}_2$  — идеал в  $\mathfrak{A}$ , то из (7.16), (7.17) имеем

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \ltimes \mathfrak{B}_2.$$

Обозначим

$$\mathfrak{A}^L = \mathfrak{A}_1 \dot{+} \mathfrak{B}_2^L, \quad \mathfrak{A}^R = \mathfrak{A}_1 \dot{+} \mathfrak{B}_2^R,$$

где  $\mathfrak{A}_1$  — подалгебра в  $\mathfrak{A}^L$  и в  $\mathfrak{A}^R$ ,  $\mathfrak{B}_2^L$  — идеал в  $\mathfrak{A}^L$ ,  $\mathfrak{B}_2^R$  — идеал в  $\mathfrak{A}^R$ . Тогда из (7.16), (7.17) следует

$$\mathfrak{A}^L = \mathfrak{A}_1 \ltimes \mathfrak{B}_2^L, \quad \mathfrak{A}^R = \mathfrak{A}_1 \ltimes \mathfrak{B}_2^R.$$

Кроме того так как

$$\mathfrak{B}_2^L = \mathfrak{B}_1^L \dot{+} \mathfrak{A}_4, \quad \mathfrak{B}_2^R = \mathfrak{B}_1^R \dot{+} \mathfrak{A}_4,$$

где  $\mathfrak{B}_1^L$  — подалгебра в  $\mathfrak{B}_2^L$ ,  $\mathfrak{B}_1^R$  — подалгебра в  $\mathfrak{B}_2^R$ ,  $\mathfrak{A}_4$  — идеал в  $\mathfrak{B}_2^L$  и в  $\mathfrak{B}_2^R$ , то

$$\mathfrak{B}_2^L = \mathfrak{B}_1^L \ltimes \mathfrak{A}_4, \quad \mathfrak{B}_2^R = \mathfrak{B}_1^R \ltimes \mathfrak{A}_4.$$

Заметим, что тем не менее  $\mathfrak{B}_2 \neq \mathfrak{B}_1 \ltimes \mathfrak{A}_4$ , поскольку  $\mathfrak{B}_1^L + \mathfrak{B}_1^R = \mathfrak{B}_1$  не является подалгеброй в  $\mathfrak{B}_2$ .

## 7.5 Доказательство простоты идеала $\mathfrak{A}_4$

Докажем, что  $\mathfrak{A}_4$  — простой идеал. Для этого предположим, что существует ненулевой двусторонний идеал  $I \subset \mathfrak{A}_4$  и покажем, что

$$I = \mathfrak{A}_4. \quad (7.18)$$

Начнем с того, что выберем в  $\mathfrak{A}_4$  стандартный базис

$$\{P_{m,n}^{k,l}, (k, l) \neq (m, n); h_{m,0}, h_{0,n}, h_{m,n}\},$$

где  $h_{m,0} = P_{m,0}^{m,0}$ ,  $h_{0,n} = P_{0,n}^{0,n}$ ,

$h_{m,n} = P_{m+1,n+1}^{m+1,n+1} - P_{m,n}^{m,n}$ . Чтобы убедиться в том, что мы действительно выбрали базис в  $\mathfrak{A}_4$  достаточно проверить, что любой элемент  $P_{m,n}^{m,n}$  ( $m \geq 0, n \geq 0$ ) можно разложить по этому базису, что следует из очевидного равенства

$$P_{m,n}^{m,n} = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} h_{m-k,n-k}.$$

Далее, если  $I$  — идеал отличный от нуля, то существует ненулевой элемент  $z \in I$ . Разложим его по выбранному базису

$$z = \sum_{\substack{k,l,m,n \geq 0 \\ (k,l) \neq (m,n)}} \alpha_{m,n}^{k,l} P_{m,n}^{k,l} + \sum_{m,n \geq 0} \beta_{m,n} h_{m,n}. \quad (7.19)$$

Пусть  $X = P_{u,v}^{s,t}$ ,  $((u, v) \neq (s, t))$  — элемент из  $\mathbb{D}$ . Тогда

$$(\text{ad}_X^2)z = -2\alpha_{s,t}^{u,v}X$$

Поскольку  $z \in I$ , то из (7.19) следует, что  $\alpha_{s,t}^{u,v}X \in I$  и, если  $\alpha_{s,t}^{u,v} \neq 0$ , то  $X = P_{u,v}^{s,t} \in I$ . Перебирая всевозможные элементы  $P_{u,v}^{s,t}$  с  $(u, v) \neq (s, t)$  получим два взаимоисключающих варианта

1. Существует ненулевой элемент  $P_{u,v}^{s,t} \in I$ .
2. Все коэффициенты  $\alpha_{m,n}^{k,l}$  в разложении (7.19) равны нулю и тогда

$$z = \sum_{m,n \geq 0} \beta_{m,n} h_{m,n} \in I.$$

Осталось показать, что и в первом и во втором случае выполняется равенство (7.18) т.е.  $I = \mathfrak{A}_4$ .

Начнем рассмотрение с первого варианта. Для проверки справедливости равенства (7.18) достаточно показать, что при  $(s, t) \neq (u, v)$  если  $X = P_{u,v}^{s,t} \in I$ , то любой базисный элемент  $P_{m,n}^{k,l}$  (с  $(k, l) \neq (m, n)$ ) и любой базисный элемент  $h_{m,n}$  принадлежат  $I$ .

Используя перестановочные соотношения

$$[P_{u,v}^{s,t}, P_{s,t}^{k,l}] = P_{u,v}^{k,l} \in I, \quad (k, l) \neq (u, v);$$

получаем

$$[P_{u,v}^{k,l}, P_{m,n}^{u,v}] = -P_{m,n}^{k,l} \in I.$$

Если  $(k, l) = (u, v)$ , то имеем

$$[P_{k,l}^{s,t}, P_{s,t}^{m,n}] = P_{k,l}^{m,n} \in I, \quad (k, l) \neq (m, n);$$

Далее несложно показать, что при  $(k, l) \neq (m, n)$ , из  $P_{k,l}^{m,n} \in I$  следует  $P_{m,n}^{k,l} \in I$ .

Осталось показать, что любой элемент  $h_{m,n} \in I$ . Поскольку, при  $(s, t) \neq (u, v)$ ,

$$P_{u,v}^{s,t} \in I \Rightarrow P_{s,t}^{u,v} \in I,$$

то

$$[P_{u,v}^{s,t}, P_{s,t}^{u,v}] = (P_{u,v}^{u,v} - P_{s,t}^{s,t}) \in I. \quad (7.20)$$

При  $u = m + 1, v = n + 1, s = m, t = n$  из (7.20) следует

$$h_{m,n} = (P_{m+1,n+1}^{m+1,n+1} - P_{m,n}^{m,n}) \in I. \quad (7.21)$$

Отметим, что (7.21) остается справедливым и для  $h_{m,0}$  и  $h_{0,n}$ . Итак, первый вариант полностью разобран.

Перейдем ко второму варианту. В этом случае найдется хотя бы один ненулевой элемент  $h_{m,n} \in I$ . Тогда, при  $(s, t) \neq (m, n)$  и  $(s, t) \neq (m + 1, n + 1)$ , для любого

$P_{m,n}^{s,t}$  имеем

$$[h_{m,n}, P_{m,n}^{s,t}] = [(P_{m+1,n+1}^{m+1,n+1} - P_{m,n}^{m,n}), P_{m,n}^{s,t}] = -P_{m,n}^{s,t} \in I.$$

Тогда с учетом доказанного при рассмотрении первого варианта получаем  $I = \mathfrak{A}_4$

Итак соотношение (7.18) доказано и поскольку  $\mathfrak{A}_4$  не имеет ненулевых идеалов отличных от  $\mathfrak{A}_4$ , то  $\mathfrak{A}_4$  — простая алгебра.

## 8 Заключение

1. Рассмотренный в работе осциллятор для системы ортогональных ЧК-полиномов можно рассматривать как простейший нетривиальный пример квантовой системы, составленной из трех взаимодействующих одномерных осцилляторов. Заметим, что во всех известных авторам работах по многомерным осцилляторам, связанным с ортогональными полиномами от нескольких переменных, эти осцилляторы образуют систему независимых одномерных осцилляторов, т.к. алгебра осциллятора распадается в прямую сумму классических алгебр Ли.

2. Интересен вопрос об условиях, при которых алгебра осциллятора конечномерна. В работе [50] был получен ответ на этот вопрос для одномерного обобщенного осциллятора, отвечающего системе полиномов на вещественной оси, ортогональных по симметричной мере. Кроме того в указанной работе приводились некоторые соображения относительно осцилляторных алгебр, связанных с мультибозонными системами. Следует заметить, что результаты настоящей работы дают основание предположить, что в нетривиальном случае, т.е. когда многомерный осциллятор описывает систему взаимодействующих частиц, соответствующая осцилляторная алгебра бесконечномерна.

3. В заключение отметим, что в данной работе сделан лишь первый шаг в исследовании структуры алгебры Ли двумерного ЧК-осциллятора. В частности, требуется исследовать возможность построения корневой системы для рассматриваемой бесконечномерной алгебры Ли. Для этого необходимо построить радикал осцилляторной алгебры и проверить справедливость для нее разложения Леви-Мальцева. Авторы намерены исследовать этот вопрос в дальнейшем.

## References

- [1] П.П. Кулиш, Н.Ю. Решетихин, *Квантовая линейная задача для уравнения синус - Гордон и высшие представления*, Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. **2**, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **101**, 101–110 (1981).
- [2] L.D. Faddeev and L.A. Takhtajan, *Liouville model on the lattice*. pp.166-179 In: Field theory, quantum gravity and strings, Lecture notes in physics **246** Springer 1986.
- [3] Н.Ю. Решетихин, Л.А. Тахтаджян, Л.Д. Фаддеев, *Квантование групп Ли и алгебр Ли*, Алгебра и анализ, **1**, No.1, 178–206 (1989).
- [4] V.G. Drinfeld, *Quantum groups*, Proc. ICM-86 (Berkeley) **1**, 798-820 (1987).
- [5] M. Arik, D.D. Coon, *Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states* J. Math. Phys. **17**, No.4, 524-527 (1976).
- [6] L.C. Biedenharn, *The quantum group  $SU_q(2)$  and a  $q$ -analogue of the boson operators*, J. Phys. A: Math. Gen. **22**, No.18, L873-L878 (1989).
- [7] A.J. Macfarlane, *On  $q$ -analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group  $SU_q(2)$* , J. Phys. A: Math. Gen. **22**, No.21, 4581-4588 (1989).
- [8] P.P. Kulish, E.V. Damaskinsky, *On the  $q$ -oscillator and the quantum algebra  $su_q(1,1)$* , J. Phys. A: Math. Gen. **23**, No.9, L415-L419 (1990).

- [9] Е.В. Дамаскинский, П.П. Кулиш, *Деформированные осцилляторы и их приложения*, Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. **10**, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **189**, 37–74 (1991).
- [10] Carl M. Bender, Lawrence R. Mead, and Stephen S. Pinsky, *Continuous Hahn polynomials and the Heisenberg algebra*. J. Math. Phys. **28**, 509 (1987).
- [11] T.H. Koornwinder, *Meixner-Pollaczek polynomials and the Heisenberg algebra*. J.Math.Phys. **30**, No.4, 767-769 (1989).
- [12] E.D. Kagramanov, R.M. MirKasimov, and Sh.M. Nagiyev, *The covariant linear oscillator and generalized realization of the dynamical  $SU(1,1)$  symmetry algebra*. J. Math. Phys. **31**, 1733 (1990).
- [13] Н.М.Атакишиев, С.К. Суслов, *Разностные аналоги гармонического осциллятора*. ТМФ **85**, No.1, 64-73, (1990).
- [14] Won-Sang Chung and Anatoli U. Klimyk, *On position and momentum operators in the  $q$ -oscillator algebra*. J. Math. Phys. **37**, 917 (1996).
- [15] I.M.Burban, *Unified  $(p, q; \alpha, \gamma, l)$ -deformation of oscillator algebra and two-dimensional conformal field theory*. arXiv:1309.3499 [math-ph].
- [16] Natig M. Atakishiyev, Elchin I. Jafarov, Shakir M. Nagiev, Kurt B. Wolf. *Meixner Oscillators*. Rev.Mex.Fis. **44**, No.3, 235-244 (1998).
- [17] V.V.Borzov, *Orthogonal polynomials and generalized oscillator algebras*. Integral Transf. and Special Functions, **12**:2 (2001), 115-138.
- [18] Суетин П.К. Ортогональные многочлены по двум переменным, ФМ 1988.
- [19] C.F. Dunkl, Y. Xu, *Orthogonal polynomials of several variables*, in: Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 81, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [20] П.П. Кулиш, В.Д.Ляховский, О.В. Постнова, *Функция кратностей для тензорных степеней модулей алгебры  $A_n$* . ТМФ **171:2** (2012) 283-293.
- [21] P.P. Kulish, *Integrable spin chains and representation theory*. Proc. of the XXIX International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, (Chern institute of Math., Tianjin, China, August 2012) pp487-492 In: Symetries and groups in contemporary phisics. Wold Scientific 2013.
- [22] L. Krall and I. M. Sheffer, *Orthogonal polynomials in two variables*, Ann. Mat. Pura ed Appl. **76**, No.4, 325–376 (1967).
- [23] John Harnad1, Luc Vinet, Oksana Yermolayeva and Alexei Zhedanov, *Two-dimensional Krall–Sheffer polynomials and integrable systems*. J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 10619–10625 (2001).
- [24] L. Vinet, A. Zhedanov, *Two-dimensional Krall–Sheffer polynomials and quantum systems on spaces with constant curvature*. Letters in Mathematical Physics **65**, 83–94 (2003).

- [25] H. Bacry, *Generalized Chebyshev polynomials and characters of  $GL(N, C)$  and  $SL(N, C)$* , Group Theoretical Methods in Physics, Lecture Notes in Phys., vol. 201, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [26] H. Bacry, *An application of Laguerre's emanent to generalized Chebyshev polynomials*, Polynomes Orthogonaux et Applications, Lecture Notes in Math., vol. **1171**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [27] H. Bacry, *Zeros of polynomials and generalized Chebyshev polynomials*, Group Theoretical Methods in Physics, Nauka, Moscow, 1986.
- [28] R.J. Beerends, *Chebyshev polynomials in several variables and the radial part of the Laplace-Beltrami operator*, Trans. AMS, **328**, No. 2, 779–814 (1991).
- [29] T.H. Koornwinder, *Orthogonal polynomials in two variables which are eigenfunctions of two algebraically independent partial differential operators*, I - IV, Indag. math. **36**, No.1, 48-66, **36**, No.4, 357-381 (1974).
- [30] Tom Koornwinder and Ida Sprinkhuizen-Kuyper, *Generalized power series expansions for a class of orthogonal polynomials in two variables*, SIAM J. Math. Anal. **9**, 457-483 (1978).
- [31] I.G. Sprinkhuizen-Kuyper, *Orthogonal polynomials in two variables: A further analysis of the polynomials orthogonal over a region bounded by two lines and a parabola*, SIAM J. Math. Anal. **7**, 501-518 (1976).
- [32] T.H. Koornwinder, *Two-variable analogues of the classical orthogonal polynomials*, in: Theory and application of special functions, R.A. Askey (ed.), Academic Press, 1975, pp. 435-495.
- [33] A. Debiard, *Polynomes de Tchebychev et de Jacobi dans un espace euclidien de dimension*. C.R. Acad. Sci. Paris **296**, 529-532 (1983).
- [34] A. Debiard and B. Gaveau, *Analysis on root systems*, Canad. J. Math. **39**, No.6, 1281-1314 (1987).
- [35] Г.К. Энгелис, *О двумерных аналогах классических ортогональных многочленов*. Латвийский математический ежегодник. Вып. **15**, 169-202 (1974).
- [36] M.E. Hoffman, W.D. Withers, *Generalized Chebyshev polynomials associated with affine Weyl group*. Trans. AMS **308**, No.1, 91-104 (1988).
- [37] Lidia Fernandez, Teresa E. Perez, Miguel A. Pinar, *On Koornwinder classical orthogonal polynomials in two variables*. Journal of Computational and Applied Mathematics ....(2011).
- [38] Brett N. Ryland and Hans Z. Munthe-Kaas, *On Multivariate Chebyshev Polynomials and Spectral Approximations on Triangles*, In: J.S. Hesthaven and E.M. Rønquist (eds.), Spectral and High Order Methods for Partial Differential Equations, Lecture Notes in Computational Science and Engineering vol.76, 19-41 Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011.

- [39] K. B. Dunn and R. Lidl, Multi-dimensional generalizations of the Chebyshev polynomials. I, II, Proc. Japan Acad. **56**, No.4, 154-159, 160-165 (1980).
- [40] R. Eier, R. Lidl, and K. B. Dunn, Differential equations for generalized Chebyshev polynomials, Rend. Math. **14**, 633-646 (1981).
- [41] K. B. Dunn and R. Lidl, Generalizations of the classical Chebyshev polynomials to polynomials in two variables, Czechoslovak Math. J. **32**, No.4, 516-528 (1982).
- [42] Macdonald I.G., Orthogonal polynomials associated with root systems, Seminaire Lotharingien de Combinatoire, Actes **B45a**, Strasbourg, 2000.
- [43] M. Nesterenko, J. Patera, and A. Tereszkievich, "Orbit functions of  $SU(n)$  and Chebyshev polynomials," in Proceedings of the 5th Workshop "Group Analysis of Differential Equations & Integrable Systems", pp. 133–151, 2010. arXiv:0905.2925.
- [44] В.Д. Ляховский, Многочлены Чебышева от многих переменных в терминах сингулярных элементов. Теорет. Математ. Физика **175**, № 3, 419–428 (2013).
- [45] V.D. Lyakhovsky, Ph. V. Uvarov, *Multivariate Chebyshev polynomials*. J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 125201 (2013) (22pp).
- [46] В.В. Борзов, Е.В. Дамаскинский, *Осциллятор Чебышева - Коорнвиндера*, Теорет. Математ. Физика **175**, № 3, 373–380 (2013).
- [47] V.V. Borzov, E.V. Damaskinsky *Ladder operators for Chebyshev - Koornwinder oscillator*. Proceedings of the International Conference DAYS on DIFFRACTION 2013, pp. 23-27.
- [48] А. Барут, Р. Рончка. Теория представлений групп и ее приложения. т.1-2, МИР 1980.
- [49] Д. Хамфрис, Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. МИР 2003
- [50] G. Honnouvo, K. Thirulogasanthar, On the dimensions of the oscillator algebras induced by orthogonal polynomials. arXiv:1305.2509 [math-ph].