

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

**ОРИЕНТАЦИЯ И МЕРА НА МНОГООБРАЗИИ
СИММЕТРИЧЕСКИХ ПОЛОЖИТЕЛЬНО ПОЛУОПРЕДЕЛЕННЫХ МАТРИЦ
ФИКСИРОВАННОГО РАНГА**

Е.Е. ПЕТРОВ

7petrov7@mail.ru

Государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский государственный областной
социально-гуманитарный институт"
РОССИЯ, 140410, Московская область
Коломна, ул. Зеленая, 30

Июнь, 2013

АННОТАЦИЯ

Изучен вопрос о $GL(n)(SL(n))$ -инвариантной мере на многообразии вещественных симметрических положительно полуопределенных $n \times n$ -матриц фиксированного ранга.

Ключевые слова: многообразие вещественных симметрических матриц фиксированного ранга, ориентация, инвариантная мера, относительно инвариантная мера.

ПРЕПРИНТЫ

Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В.А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М. Бабич, Н.А. Вавилов, А.М. Вершик, М.А. Всемиров,
А.И. Генералов, И.А. Ибрагимов, Л.Ю. Колотилина, В.Н. Кублановская,
Г.В. Кузьмина, П.П. Кулиш, Б.Б. Лурье, Ю.В. Матиясевич,
Н.Ю. Нецветаев, С.И. Репин, Г.А. Серегин, В.Н. Судаков, О.М. Фоменко.

1 Введение

Пусть $SM(n)$ — векторное пространство вещественных симметрических $n \times n$ -матриц $x = (x_{i,j})$, $1 \leq i, j \leq n$, изоморфное $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$; $dx = \prod_{i \leq j} dx_{ij}$ — аддитивная мера на $SM(n)$. Через $SM_+^*(n)$ обозначим открытый выпуклый конус в $SM(n)$ *положительно определенных* матриц. Как обычно, будем писать $x > 0$ для $x \in SM_+^*(n)$. На пространстве $\mathcal{S}(SM(n))$ бесконечно дифференцируемых функций $f(x)$ с быстро убывающими производными обобщенная функция Φ_+^λ с комплексным параметром λ определяется интегралом

$$(\Phi_+^\lambda, f) = \frac{1}{\Gamma_n(\lambda)} \int_{x>0} (\det x)^{\lambda - \frac{n+1}{2}} f(x) dx$$

в области $\operatorname{Re} \lambda > -1$ его абсолютной сходимости. Здесь

$$\Gamma_n(\lambda) = \pi^{n(n-1)/4} \prod_{k=1}^n \Gamma\left(\lambda - \frac{k-1}{2}\right)$$

— гамма-функция, связанная с конусом $SM_+^*(n)$, Γ — гамма-функция Эйлера, мера $(\det x)^{-(n+1)/2} dx$ инвариантна относительно действий $x \rightarrow {}^t g x g$ на конусе группы $GL(n)$ всех невырожденных $n \times n$ -матриц g (${}^t g$ — транспонированная матрица).

Как известно [1], [2], Φ_+^λ аналитична по λ и продолжается на всю плоскость комплексного параметра в виде целой функции. Возникает вопрос о явном виде значений Φ_+^λ в точках $\lambda = (n-k)/2$, $k = 1, 2, \dots$, где $\Gamma_n(\lambda)$ имеет полюсы. В работе [1] эти значения выражены интегралами Римана-Лиувилля на пространстве симметрических матриц. Оставалась задача о записи значений в терминах обобщенных функций. Значение $\Phi_+^0 = \delta_0$, где δ_0 — дельта-функция Дирака, установлено в [2]. Остальные предложены в недавней работе [3]:

$$\begin{aligned} \Phi_+^{-k} &= L^k \delta_0, & k &= 1, 2, \dots \\ \Phi_+^{-k+1/2} &= L^k \delta_1, & k &= 0, 1, 2, \dots \\ \Phi_+^{r/2} &= \delta_r, & r &= 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned}$$

где $L = \det(\partial_{ij})$ — дифференциальный оператор Кэли ($\partial_{ii} = \partial/\partial x_{ii}$, $\partial_{ij} = \frac{1}{2} \partial/\partial x_{ij}$ для $i \neq j$), δ_r — обобщенная функция, определяемая интегралом

$$(\delta_r, f) = \int_{SM_+^r(n)} f(x) d_r x \tag{1.1}$$

по подмногообразию $SM_+^r(n)$ в $SM(n)$ *положительно полуопределенных* матриц ранга r .

Однако в [3], понятие не общеизвестного многообразия $SM_+^r(n)$ не сформулировано, а интеграл (1.1) определен некорректным образом.

Более подробно. То, что алгебраическое подмножество $SM_+^r(n)$ в $SM(n)$ положительно полуопределенных матриц ранга r оказывается многообразием без особенностей,

требует обоснований. Далее, в $SM_+^r(n)$ рассматривается подмножество U матриц, у которых первые r столбцов линейно независимы. Без доказательства утверждается, что U почти полностью покрывает $SM_+^r(n)$. Каждая матрица $x \in U$ однозначно записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x_{(r)} & x_{(r)}y \\ {}^t y x_{(r)} & {}^t y x_{(r)}y \end{pmatrix},$$

где $y = (y_{ps}) - r \times (n-r)$ -матрица коэффициентов линейной зависимости дополнительных столбцов. На U вводится мера

$$\begin{aligned} d_r x &= \frac{\sqrt{\pi}^{r(n-r)}}{\Gamma_r(r/2)} (\det x_{(r)})^{\frac{n-r-1}{2}} dx_{(r)} dy \\ dx_{(r)} &= \prod_{1 \leq i \leq j \leq r} dx_{ij}, \quad dy = \prod_{p,s} dy_{ps}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Утверждается, что $d_r x$ является *квазиинвариантной* мерой:

$$d_r({}^t g x g) = |\det g|^r d_r x, \quad g \in GL(n).$$

Интеграл (1.1) определяется [3, Определение 4] формулой

$$\int_{SM_+^r(n)} f(x) d_r x \equiv \int_U f(x) d_r x. \tag{1.3}$$

Такое определение некорректно по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, оно зависит от выбора множества U . Во-вторых, мера $d_r x$ не может быть квазиинвариантной, поскольку область U не выдерживает всех преобразований группы $GL(n)$.

Настоящая заметка фактически является уточнением раздела 4 работы [3]. В ней устанавливается, что $d_r x$ есть локальная запись существующей *инвариантной* меры $d\mu_r(x)$ на однородном многообразии $SM_+^r(n)$ с группой $SL(n) = \{g \in GL(n) \mid \det g = 1\}$ преобразований $x \rightarrow {}^t g x g$. Таким образом, соотношение (1.3) становится равенством на множестве U , а не определением. Кроме того, доказывается, что $d\mu_r(x)$ является единственной с точностью до постоянного множителя *относительно инвариантной* относительно группы $GL(n)$ мерой с мультипликатором $\chi(g) = |\det g|^r$.

Для локальных выражений меры $d\mu_r(x)$ на многообразии $SM_+^r(n)$ рассматривается естественный гладкий атлас. В качестве следствия появляется (по-видимому, ранее неизвестный) критерий ориентируемости: *для $r = 1, 2, \dots, n-1$ многообразие $SM_+^r(n)$ ориентируемо, если и только если $n-r$ нечетное.*

2 Многообразие $SM_+^r(n)$

Из общей теории стратификации многообразий, включая алгебраические (см., например, [5], [6] и цитируемую в них литературу), можно установить, что подмножество

$SM_+^r(n)$ является гладким подмногообразием в пространстве $SM(n)$. Однако, в связи с интегрированием функций необходим конкретный атлас на $SM_+^r(n)$. При помощи атласа и установим структуру гладкого многообразия.

Примем дополнительные обозначения. Пусть $x \geq 0$ — знак положительной полуопределенности матрицы x и

$$SM_+(n) = \{x \in SM(n) \mid x \geq 0\}.$$

Для $r = 0, 1, \dots, n$ по определению

$$SM_+^r(n) = \{x \in SM_+(n) \mid \text{rank}(x) = r\}$$

— множество положительно полуопределенных матриц ранга r . В частности, $SM_+^0(n)$ есть точка $x = 0$ и $SM_+^n(n) = SM_+^*(n)$ — открытый выпуклый конус положительно определенных матриц. Введем наборы $J(k) = \{j_1, \dots, j_k\}$ номеров $1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n$ для $k = 1, 2, \dots, n$. Через $x_{J(k)}$ обозначим главную подматрицу в x с элементами, расположенными на пересечении $J(k)$ -х строк и столбцов:

$$x_{J(k)} = \begin{pmatrix} x_{j_1 j_1} & \dots & x_{j_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{j_k j_1} & \dots & x_{j_k j_k} \end{pmatrix}.$$

В терминах главных подматриц напомним условия положительной полуопределенности (положительной определенности) матрицы и условия её принадлежности к множеству $SM_+^r(n)$.

У1 ([7, 4.12.5]). $x \in SM_+(n)$, если и только если $x_{J(k)} \geq 0$ для всех $J(k)$ и $k = 1, 2, \dots, n$.

У2 ([8]). $x \in SM_+^*(n)$, если и только если $x_{J(k)} > 0$ для всех $J(k)$ и $k = 1, 2, \dots, n$.

Условие У2 есть критерий Сильвестра положительной определенности матрицы и следствия из него для всех главных миноров.

У3 ([7, 4.12.4]). $x \in SM_+^r(n)$, если и только если существует подматрица $x_{J(r)} > 0$.

Подмножество $SM_+^r(n) \subset SM(n)$ рассмотрим как топологическое пространство с индуцированной топологией. Для $k = r$ обозначение набора $J(r)$ упростим до символа J . Для каждого $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ введем подмножество

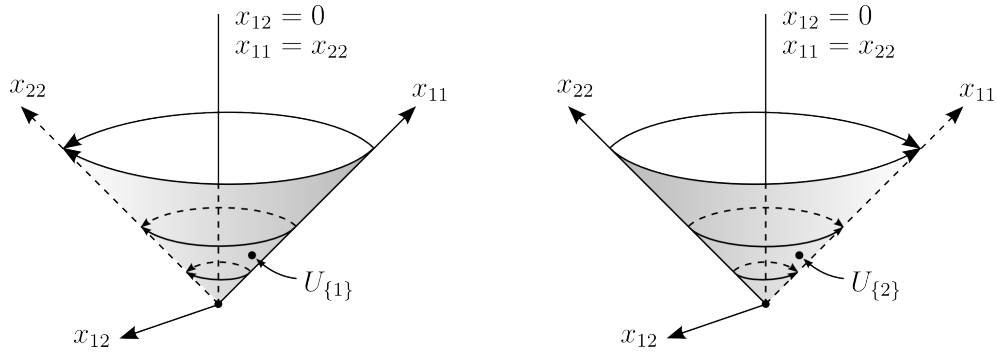
$$U_J = \{x \in SM_+^r(n) \mid x_J > 0\}.$$

Из условия У3 следует, что $\{U_J\}$ — покрытие топологического пространства $SM_+^r(n)$.

Предложение 2.1. U_J — открытое подмножество, почти полностью покрывающее $SM_+^r(n)$.

Доказательство. Из определения следует, что $\det x_J > 0$. Дополнение $SM_+^r(n) \setminus U_J$ состоит из матриц $x \geq 0$, в которых для подматрицы $x_J \geq 0$ не выполняется хотя бы одно из условий критерия Сильвестра. Все они характеризуются уравнением $\det x_J = 0$. Таким образом, дополнение — замкнутое подмножество меньшей размерности. \square

Для иллюстрации предложения 2.1 приведем простейший пример. Подмножество в $SM(2)$ симметрических 2×2 -матриц ранга ≤ 1 определяется уравнением $f(x) \equiv x_{11}x_{22} - x_{12}^2 = 0$. Это конус в пространстве $SM(2) \simeq \mathbb{R}^3$ с точечной вершиной $x = 0$. Условие $\text{rank}(x) = 1$ удаляет вершину, превращая конус в открытое (в индуцированной топологии) подмножество из двух компонент связности. Условие положительной определенности $x_{11} > 0$ и, следовательно, $x_{22} \geq 0$ (или $x_{22} > 0$ и, следовательно, $x_{11} \geq 0$) выделяет одну компоненту $SM_+^1(2)$. Подмножества $U_{\{1\}}$ и $U_{\{2\}}$ равны $SM_+^1(2) \setminus \{\text{полуось } x_{22}\}$ и $SM_+^1(2) \setminus \{\text{полуось } x_{11}\}$ соответственно:



Матрица Якоби $(\partial f / \partial x_{ij}) = (x_{22}, -2x_{12}, x_{11})$ имеет на $SM_+^1(2)$ ранг 1.

Вернемся к общему случаю. Из построения следует, что в матрице $x \in U_J$ столбцы x_{j_1}, \dots, x_{j_r} линейно независимы, а дополнительные линейно выражаются через x_{j_1}, \dots, x_{j_r} . Соответствующие коэффициенты составляют $r \times (n - r)$ -матрицу $y = (y_{ps})$, $1 \leq p \leq r$, $1 \leq s \leq n - r$. Если через $x_{J\bar{J}}$ обозначить подматрицу в x из элементов, стоящих на пересечениях J -х строк и $\bar{J} = \{1, 2, \dots, n\} \setminus J$ -х столбцов, то $y = x_J^{-1} x_{J\bar{J}}$. В результате каждая матрица $x \in U_J$ однозначно записывается в блочном виде

$$x = \begin{pmatrix} x_J & x_J y \\ {}^t y x_J & {}^t y x_J y \end{pmatrix},$$

где по умолчанию подразумевается, что подматрица x_J занимает свое место на пересечении J -х строк и столбцов, $x_J y$ — соответствующее место на пересечении J -х строк и \bar{J} -х столбцов, остальные блоки располагаются в соответствии с симметричностью матрицы.

Возникающее отображение $\varphi_J(x) = (x_J, y)$ является гомеоморфизмом подмножества U_J на открытое подмножество $SM_+^*(r) \times \mathbb{R}^{r(n-r)}$ в пространстве $SM(r) \times \mathbb{R}^{r(n-r)}$. Получается атлас из C_n^r карт (U_J, φ_J) на топологическом пространстве $SM_+^r(n)$ размерности $nr - r(r-1)/2$. Локальными координатами в U_J фактически являются элементы $x_{j_k j_p}$, $1 \leq k \leq p \leq r$, матрицы x_J , удовлетворяющие критерию Сильвестра положительной определенности, и элементы y_{ps} матрицы y .

Для характеристики гладкости функций перехода $\varphi_{J'} \circ \varphi_J^{-1}$ локальных координат в пересечениях $U_J \cap U_{J'}$ воспользуемся понятием *смежных* карт [9, гл. 3, л2, п.2]. Карты (U_J, φ_J) и $(U_{J'}, \varphi_{J'})$ называются смежными, если для соответствующих наборов $J = \{j_1, \dots, j_r\}$ и $J' = \{j'_1, \dots, j'_r\}$ существует позиция $l \in \{1, 2, \dots, r\}$ такая, что $j'_l = j_l \pm 1$ и $j'_p = j_p$ для $p \neq l$. Ясно, что существуют смежные и несмежные карты и что любые две карты атласа соединяются цепочкой из смежных карт. Для $n = 5$ и $r = 3$, например, в схеме

$$\begin{array}{ccccccc} U_{123} & \circ & U_{124} & \circ & U_{134} & \circ & U_{234} \\ & & \circ & & \circ & & \circ \\ & & U_{125} & \circ & U_{135} & \circ & U_{235} \\ & & & & \circ & & \circ \\ & & & & U_{145} & \circ & U_{245} \\ & & & & & & \circ \\ & & & & & & U_{345} \end{array}$$

(\circ — знак смежности, скобки и запятые в наборах опущены) карты U_{123} и U_{124} смежные в позиции $l = 3$, карты U_{124} и U_{134} — в позиции $l = 2$, карты U_{145} и U_{245} — в позиции $l = 1$, карты U_{123} и U_{125} , U_{145} и U_{235} — несмежные.

Предложение 2.2. *Карты атласа $\{(U_J, \varphi_J)\}$ гладко согласованы.*

Доказательство. В силу цепного правила преобразования локальных координат и наличия соединяющих цепочек из смежных карт достаточно показать гладкость функций перехода $\varphi_{J'} \circ \varphi_J^{-1}$ для смежных карт. В пересечении $U_J \cap U_{J'}$ имеем локальные координаты

$$\varphi_J(x) = \begin{pmatrix} x_{j_1 j_1} & \dots & x_{j_1 j_r} & y_{11} & \dots & y_{1n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & x_{j_r j_r} & y_{r1} & \dots & y_{rn-r} \end{pmatrix}$$

и

$$\varphi_{J'}(x) = \begin{pmatrix} x'_{j'_1 j'_1} & \dots & x'_{j'_1 j'_r} & y'_{11} & \dots & y'_{1n-r} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \dots & x'_{j'_r j'_r} & y'_{r1} & \dots & y'_{rn-r} \end{pmatrix}.$$

Смежность карт в позиции l (для определенности положительной) означает, что

$$J' = (j'_1, \dots, j'_{l-1}, j'_l, j'_{l+1}, \dots, j'_r) = (j_1, \dots, j_{l-1}, j_l + 1, j_{l+1}, \dots, j_r).$$

Из равенства

$$x = \begin{pmatrix} x_{J'} & x_{J'} y' \\ {}^t y' x_{J'} & {}^t y' x_{J'} y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_J & x_J y \\ {}^t y x_J & {}^t y x_J y \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

следует, что

$$\begin{aligned} x_{j'_p} &= x_{j_p}, \quad p \neq l, \\ x_{j'_l} &\equiv x_{j_l+1} = x_{j_l y_{1q}} + \dots + x_{j_l y_{lq}} + \dots + x_{j_r y_{rq}}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где по нумерации столбцов $q = j_l + 1 - l$. При этом $y_{lq} \neq 0$, так как в противном случае получаем линейную зависимость столбцов $x_{j_1}, \dots, x_{j_{l-1}}, x_{j_l}, x_{j_{l+1}}, \dots, x_{j_r}$ матрицы $x \in U_{J'}$. Более подробно равенства (2.2) означают

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{j'_k j'_p} = x_{j_k j_p}, \quad p \neq l, \quad 1 \leq k \leq r, \\ x_{j'_1 j'_l} = x_{j_1 j_1} y_{1q} + \dots + x_{j_1 j_l} y_{lq} + \dots + x_{j_1 j_r} y_{rq}, \\ \vdots \\ x_{j'_{l-1} j'_l} = x_{j_{l-1} j_1} y_{1q} + \dots + x_{j_{l-1} j_l} y_{lq} + \dots + x_{j_{l-1} j_r} y_{rq}, \\ x_{j'_{l+1} j'_l} = x_{j_{l+1} j_1} y_{1q} + \dots + x_{j_{l+1} j_l} y_{lq} + \dots + x_{j_{l+1} j_r} y_{rq}, \\ \vdots \\ x_{j'_r j'_l} = x_{j_r j_1} y_{1q} + \dots + x_{j_r j_l} y_{lq} + \dots + x_{j_r j_r} y_{rq}, \\ x_{j'_l j'_l} = (y_{1q}, \dots, y_{rq}) x_J^t (y_{1q}, \dots, y_{rq}), \end{array} \right. \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} x_{j'_l j'_l} &= x_{j_1 j_1} y_{1q}^2 + 2x_{j_1 j_2} y_{1q} y_{2q} + \dots + 2x_{j_1 j_r} y_{1q} y_{rq} \\ &+ x_{j_2 j_2} y_{2q}^2 + 2x_{j_2 j_3} y_{2q} y_{3q} + \dots + 2x_{j_2 j_r} y_{2q} y_{rq} \\ &\vdots \\ &+ x_{j_{r-1} j_{r-1}} y_{r-1q}^2 + 2x_{j_{r-1} j_r} y_{r-1q} y_{rq} \\ &+ x_{j_r j_r} y_{rq}^2. \end{aligned}$$

Зависимость $x_{J'} = x_{J'}(x_J, y)$ найдена. Для нахождения функций $y' = y'(x_J, y)$ воспользуемся равенствами соответствующих дополнительных столбцов в (2.1). С учетом (2.2) для первых зависимых столбцов имеем

$$\begin{aligned} &x_{j_1} y'_{11} + \dots + x_{j_{l-1}} y'_{l-11} + \left(\sum_{k=1}^r x_{j_k} y_{kq} \right) y'_{q1} + x_{j_{l+1}} y'_{l+11} + \dots + x_{j_r} y'_{r1} \\ &= x_{j_1} y_{11} + \dots + x_{j_{l-1}} y_{l-11} + x_{j_l} y_{l1} + x_{j_{l+1}} y_{l+11} + \dots + x_{j_r} y_{r1}. \end{aligned}$$

Откуда из линейной независимости столбцов x_{j_1}, \dots, x_{j_r} следует

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_{11} = y_{11} - y_{1q} y_{l1} y_{lq}^{-1}, \\ \vdots \\ y'_{l-11} = y_{l-11} - y_{l-1q} y_{l1} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{l1} = y_{l1} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{l+11} = y_{l+11} - y_{l+1q} y_{l1} y_{lq}^{-1}, \\ \vdots \\ y'_{r1} = y_{r1} - y_{rq} y_{l1} y_{lq}^{-1}. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Аналогичным образом равенства последующих столбцов дают

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'_{l2} & = & y_{l2} - y_{1q} y_{l2} y_{lq}^{-1}, \\ & \vdots & \\ y'_{l-12} & = & y_{l-12} - y_{l-1q} y_{l2} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{l2} & = & y_{l2} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{l+12} & = & y_{l+12} - y_{l+1q} y_{l2} y_{lq}^{-1}, \\ & \vdots & \\ y'_{r2} & = & y_{r2} - y_{rq} y_{l2} y_{lq}^{-1}, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} & \vdots & \\ y'_{1q-1} & = & y_{1q-1} - y_{1q} y_{lq-1} y_{lq}^{-1}, \\ & \vdots & \\ y'_{l-1q-1} & = & y_{l-1q-1} - y_{l-1q} y_{lq-1} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{lq-1} & = & y_{lq-1} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{l+1q-1} & = & y_{l+1q-1} - y_{l+1q} y_{lq-1} y_{lq}^{-1}, \\ & \vdots & \\ y'_{rq-1} & = & y_{rq-1} - y_{rq} y_{lq-1} y_{lq}^{-1}, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'_{1q} & = & -y_{1q} y_{lq}^{-1}, \\ & \vdots & \\ y'_{l-1q} & = & -y_{l-1q} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{lq} & = & y_{lq}^{-1}, \\ y'_{l+1q} & = & -y_{l+1q} y_{lq}^{-1}, \\ & \vdots & \\ y'_{rq} & = & -y_{rq} y_{lq}^{-1}, \end{array} \right. \quad (2.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'_{1q+1} & = & y_{1q+1} - y_{1q} y_{lq+1} y_{lq}^{-1}, \\ & \vdots & \\ y'_{l-1q+1} & = & y_{l-1q+1} - y_{l-1q} y_{lq+1} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{lq+1} & = & y_{lq+1} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{l+1q+1} & = & y_{l+1q+1} - y_{l+1q} y_{lq+1} y_{lq}^{-1}, \\ & \vdots & \\ y'_{rq+1} & = & y_{rq+1} - y_{rq} y_{lq+1} y_{lq}^{-1}, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

⋮

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y'_{1n-r} & = & y_{1n-r} - y_{1q} y_{ln-r} y_{lq}^{-1}, \\ & \vdots & \\ y'_{l-1n-r} & = & y_{l-1n-r} - y_{l-1q} y_{ln-r} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{ln-r} & = & y_{ln-r} y_{lq}^{-1}, \\ y'_{l+1n-r} & = & y_{l+1n-r} - y_{l+1q} y_{ln-r} y_{lq}^{-1}, \\ & \vdots & \\ y'_{rn-r} & = & y_{rn-r} - y_{rq} y_{ln-r} y_{lq}^{-1}. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Как видим, формулы (2.3)–(2.9) показывают гладкую зависимость локальных координат в пересечении $U_J \cap U_{J'}$. \square

Следствие 2.3. В пересечении карт (U_J, φ_J) и $(U_{J'}, \varphi_{J'})$, смежных в позиции l , имеет место равенство

$$\det x_{J'} = y_{lq}^2 \det x_J.$$

Доказательство. В определителе $\det x_J$ умножим l -й столбец и l -ю строку на y_{lq} :

$$y_{lq}^2 \det x_J = \begin{vmatrix} x_{j_1 j_1} & \dots & x_{j_1 j_l} y_{lq} & \dots & x_{j_1 j_r} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{j_l j_l} y_{lq} & \dots & x_{j_l j_l} y_{lq}^2 & \dots & x_{j_l j_r} y_{lq} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{j_1 j_r} & \dots & x_{j_l j_r} y_{lq} & \dots & x_{j_r j_r} \end{vmatrix}.$$

Прибавим к l -му столбцу линейную комбинацию

$$x_{j_1} y_{1q} + \dots + x_{j_{l-1}} y_{l-1q} + x_{j_{l+1}} y_{l+1q} + \dots + x_{j_r} y_{rq}$$

остальных столбцов. Аналогичную операцию совершим с l -й строкой. Определитель не изменится, а формулы (2.3) показывают, что получается $\det x_{J'}$. \square

Следствие 2.4. Якобиан функций перехода $\varphi_{J'} \circ \varphi_J^{-1}$ в картах, смежных в позиции l , равен $(-1)^r / y_{lq}^{n-r-1}$, где $q = j_l + 1 - l$.

Доказательство. Локальные координаты упорядочим следующим образом

$$(x_{j_1 j_1}; x_{j_1 j_2}, x_{j_2 j_2}; \dots; x_{j_1 j_r}, \dots, x_{j_r j_r}; \\ y_{11}, \dots, y_{r1}; \dots; y_{1n-r}, \dots, y_{rn-r}).$$

Поскольку координаты y' не зависят от x_J , то якобиан имеет блочно треугольный вид

$$\det \frac{\partial(x_{J'}, y')}{\partial(x_J, y)} = \det \frac{\partial x_{J'}}{\partial x_J} \cdot \det \frac{\partial y'}{\partial y}.$$

Подстраиваясь под формулы (2.3), произведём в матрице $x_{J'}$ одновременно перестановку l -й строки и l -го столбца на последние места. Матрица $x_{J'}$ переходит в матрицу

$$\tilde{x}_{J'} = \begin{pmatrix} x_{j'_1 j'_1} & \dots & x_{j'_1 j'_{l-1}} & x_{j'_1 j'_{l+1}} & \dots & x_{j'_1 j'_r} & x_{j'_1 j'_l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & x_{j'_{l-1} j'_{l-1}} & x_{j'_{l-1} j'_{l+1}} & \dots & x_{j'_{l-1} j'_r} & x_{j'_{l-1} j'_l} \\ * & \dots & * & x_{j'_{l+1} j'_{l+1}} & \dots & x_{j'_{l+1} j'_r} & x_{j'_{l+1} j'_l} \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & \dots & & * & x_{j'_r j'_r} & x_{j'_r j'_l} \\ * & \dots & \dots & \dots & & * & x_{j'_l j'_l} \end{pmatrix}$$

Аналогичную запись получает матрица \tilde{x}_J . Дифференцируя равенства (2.3), получаем

$$\det \frac{\partial x_{J'}}{\partial x_J} = \det \frac{\partial \tilde{x}_{J'}}{\partial \tilde{x}_J}$$

$$= \begin{vmatrix} 1_m & 0 & . & . & . & . & 0 \\ * & y_{lq} & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ * & . & . & . & * & y_{lq} & 0 \\ * & . & . & . & . & * & y_{lq}^2 \end{vmatrix} = y_{lq}^{r+1},$$

здесь 1_m — единичная матрица порядка $m = r(r-1)/2$.

Непосредственным дифференцированием зависимостей (2.4)–(2.9) убеждаемся, что матрица Якоби $\partial y'/\partial y$ имеет следующее строение: по диагонали стоят $r \times r$ -блоки

$$\left(\frac{\partial y'_{ks}}{\partial y_{ps}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & y_{lq}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad k, p = 1, 2, \dots, r, \quad s \neq q;$$

в количестве $n - r - 1$ и один центральный блок

$$\left(\frac{\partial y'_{kq}}{\partial y_{pq}} \right) = -y_{lq}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & y_{lq}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad k, p = 1, 2, \dots, r; \quad (2.10)$$

через центральный блок (2.10) диагонали проходит вертикальная полоса из $r \times r$ -блоков

$$\left(\frac{\partial y'_{ks}}{\partial y_{pq}} \right) = \begin{pmatrix} * & \dots & 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & * & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * & * & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & * & 0 & \dots & * \end{pmatrix}, \quad k, p = 1, 2, \dots, r, \quad s \neq q;$$

все остальные блоки в $(\partial y' / \partial y)$ нулевые.

Вычисление якобиана $\det(\partial y' / \partial y)$ начинается с вычкркивания «центральной» строки $\partial y'_{lq} / \partial y$, содержащей единственный ненулевой элемент $\partial y'_{lq} / \partial y_{lq} = -1/y_{lq}^2$, и «центрального» столбца $\partial y_{ks} / \partial y_{lq}$. Процесс заканчивается значением $(-1)^r / y_{lq}^n$. \square

Следствие 2.5. *Гладкое многообразие $SM_+^r(n)$ ориентируемо, если и только если $n - r$ нечетное.*

Доказательство. При нечетном $n - r$ знак якобиана $(-1)^r / y_{lq}^{n-r-1}$ в пересечениях смежных карт не меняется при переходе из области $y_{lq} < 0$ в область $y_{lq} > 0$. По цепочкам смежных карт знак сохраняется в пересечениях произвольных карт. При четном $n - r$ знак меняется. \square

3 Инвариантная мера

Из закона инерции квадратичных форм следует, что действие $x \rightarrow {}^t g x g$ группы $GL(n)$ на пространстве $SM(n)$ сохраняет ранги и положительную полуопределенность. Тем самым, все многообразия $SM_+^r(n)$ являются орбитами действия группы $GL(n)$.

Подгруппа $SL(n)$, в отличие от $GL(n)$, действует на конусе $SM_+^*(n)$ не транзитивно. Орбитами являются поверхности $\det x = t$, $t > 0$. Однако, для $r = 1, 2, \dots, n - 1$ имеет место

Предложение 3.1. *Многообразия $SM_+^r(n)$, $r = 1, 2, \dots, n - 1$, являются орбитами действия группы $SL(n)$.*

Доказательство. Для транзитивного действия группы достаточно показать, что произвольную матрицу $x \in SM_+^r(n)$ можно перевести в матрицу $e(r) = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Подматрицу x_J в x переставим на первые места $\{1, 2, \dots, r\}$ строк и столбцов. Если соответствующая перестановка σ чётная, то $\sigma \in SL(n)$ и промежуточная цель ${}^t\sigma x \sigma \in U_{\{1, 2, \dots, r\}}$ достигнута. Если σ — нечётная, то перестановка τ строк и столбцов матрицы x_J на места с номерами $\{1, 2, \dots, r-1, r+1\}$ чётная. К τ следует добавить преобразование с матрицей Вейля [10]

$$\begin{pmatrix} 1_{r-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_{n-r-1} \end{pmatrix} \in SL(n).$$

Пусть теперь подматрица x_J расположена в первых строках и столбцах. По односторонней записи $x_J = {}^t\alpha\alpha$ с верхней треугольной $r \times r$ -матрицей α обнаруживается преобразование с матрицей

$$g = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & -y\delta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \det \delta = \det \alpha,$$

такое, что ${}^tgxg = e(r)$. □

Поставим вопрос об инвариантной мере на однородном пространстве $SM_+^r(n)$ с группой $SL(n)$ преобразований $x \rightarrow {}^tgxg$. Напомним, что локально компактная группа называется *унимодулярной*, если левоинвариантная мера Хаара на группе совпадает с правоинвариантной. Эквивалентное определение состоит в том, что *модулярная функция* $\Delta_G(g)$ группы G (т.е. непрерывное представление группы G в группу \mathbb{R}_+^* положительных вещественных чисел) тождественно равна 1 [4]. Первым примером всегда служит унимодулярная группа $GL(n)$ с мерой Хаара $dx/|\det x|^n$. Коммутативные и компактные группы унимодулярны. Прямое произведение унимодулярных групп унимодулярно, полупрямое — не всегда. Замкнутая нормальная подгруппа унимодулярной группы унимодулярна, в частности, группа $SL(n) \subset GL(n)$ унимодулярна.

Предложение 3.2. *На однородном пространстве $SM_+^r(n)$, $r = 1, 2, \dots, n-1$, с группой $SL(n)$ преобразований $x \rightarrow {}^tgxg$ существует положительная инвариантная мера, единственная с точностью до постоянного множителя.*

Доказательство. Пусть $O(k)$ — группа ортогональных $k \times k$ -матриц, $M(n, k)$ — векторное пространство вещественных $n \times k$ -матриц. Стационарная подгруппа однородного пространства $(SM_+^r(n), SL(n))$ изоморфна стабилизатору

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} \alpha \in O(r), \gamma \in M(n-r, r), \\ \delta \in GL(n-r), \det \delta \det \alpha = 1 \end{array} \right\}$$

точки $e(r)$. Непосредственно проверяется, что H является полупрямым произведением подгрупп

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ \gamma & 1_{n-r} \end{pmatrix} \mid \gamma \in M(n-r, r) \right\},$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha \in O(r), \delta \in GL(n-r), \det \delta \det \alpha = 1 \right\}$$

относительно автоморфизма $i_k(n) \equiv i_{\alpha, \delta}(\gamma) = \delta \gamma \alpha^{-1}$ нормальной подгруппы N элементом $k \in K$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ \gamma & 1_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ \gamma' & 1_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ \gamma & 1_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \delta \gamma' & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \delta^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \alpha' & 0 \\ 0 & \delta \delta' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ \gamma & 1_{n-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ \delta \gamma' \alpha^{-1} & 1_{n-r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & \delta' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обе подгруппы унимодулярны. Первая как коммутативная, вторая как замкнутая (выделяемая условием $\det \delta \cdot \det \alpha = 1$) нормальная подгруппа в прямом произведении $O(r) \times GL(n-r)$ унимодулярных групп. Как известно [4, гл. VII, л2, п.9, Предложение 14 в)], в таком случае модулярная функция группы H имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta_H(h) &= \Delta_N(n) \Delta_K(k) \bmod (i_k(n)) \\ &= |\det \delta|^r |\det \alpha^{-1}|^{n-r} \equiv 1. \end{aligned}$$

Значит, подгруппа H унимодулярна и имеет место совпадение $\Delta_{SL(n)}(h) = \Delta_H(h)$ на H . По критерию [4, гл. VII, л2, п.7, Следствие 2] на однородном пространстве $SM_+^r(n) \cong SL(n)/H$ существует инвариантная положительная мера, единственная с точностью до постоянного множителя. \square

Инвариантную меру обозначим символом $d\mu_r(x)$.

Предложение 3.3. *В локальных координатах (x_J, y) произвольной карты (U_J, φ_J) атласа мера $d\mu_r(x)$ имеет запись*

$$d\mu_r \circ \varphi_J^{-1}(x_J, y) = \text{const} (\det x_J)^{\frac{n-r-1}{2}} dx_J dy, \quad (3.1)$$

где

$$dx_J = \prod_{1 \leq p \leq k \leq r} dx_{j_p j_k}, \quad dy = \prod_{p, s} dy_{ps},$$

а константа не зависит от J .

Доказательство. В силу размерности

$$d\mu_r \circ \varphi_J^{-1}(x_J, y) = f_J(x_J, y) dx_J dy,$$

где плотность $f_J \geq 0$ предстоит найти. Пусть вначале $J = \{1, 2, \dots, r\}$. Подгруппа в $SL(n)$ матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha \in GL(r), \beta \in M(r, n-r), \\ \delta \in GL(n-r), \det \delta \det \alpha = 1,$$

сохраняет карту $U_{\{1,2,\dots,r\}}$. При этом локальные координаты преобразуются по формулам

$$x_J \rightarrow \tilde{x}_J = {}^t \alpha x_J \alpha, \\ y \rightarrow \tilde{y} = \alpha^{-1} y \delta + \alpha^{-1} \beta.$$

При преобразованиях с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1_r & \beta \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$$

в силу инвариантности меры получаем равенство

$$f_J(x_J, y + \beta) dx_J d(y + \beta) = f_J(x_J, y) dx_J dy.$$

Поскольку $d(y + \beta) = dy$ для аддитивной меры, то функция f_J постоянна по аргументу y . В результате

$$d\mu_r \circ \varphi_J^{-1}(x_J, y) = f_J(x_J) dx_J dy.$$

Далее учтем инвариантность меры при преобразованиях $x \rightarrow {}^t g x g$ с матрицей $g = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$. Имеем равенство

$$f_J({}^t \alpha x_J \alpha) d({}^t \alpha x_J \alpha) d(\alpha^{-1} y \delta) = f_J(x_J) dx_J dy.$$

Учитывая $GL(r)$ -инвариантную меру $(\det x_J)^{-(r+1)/2} dx_J$ на конусе $SM_+^*(r)$, получаем

$$f_J({}^t \alpha x_J \alpha) = |\det \alpha|^{n-r-1} f_J(x_J).$$

В таком случае однозначная запись $x_J = {}^t a a$ положительно определенной матрицы через верхнюю треугольную матрицу a с положительными диагональными элементами приводит к равенству

$$\begin{aligned} f_J(x_J) &= f_J({}^t a a) \\ &= |\det a|^{n-r-1} f_J(1_r) \\ &= c_0 (\det x_J)^{(n-r-1)/2} \end{aligned}$$

с положительной константой $c_0 = f_J(1_r)$. Равенство (3.1) доказано для $J = \{1, 2, \dots, r\}$.

С картой $U_{\{1,2,\dots,r\}}$ смежна только одна карта $U_{J'}$ с набором $J' = \{1, 2, \dots, r-1, r+1\}$. Смежность наблюдается в позиции $l = r$. Тем самым, $j_l = r$, $q = 1$, $y_{r1} \neq 0$. По следствиям 2.3 и 2.4

$$(\det x_J)^{\frac{n-r-1}{2}} = |y_{r1}|^{-n+r+1} (\det x_{J'})^{\frac{n-r-1}{2}},$$

$$dx_J dy = |y_{r1}|^{n-r-1} dx_{J'} dy'.$$

Значит, на пересечении $U_J \cap U_{J'}$ имеет место равенство

$$c_0(\det x_J)^{\frac{n-r-1}{2}} dx_J dy = c_0(\det x_{J'})^{\frac{n-r-1}{2}} dx_{J'} dy'.$$

В силу единственности меры (с принятой константой c_0) получаем запись

$$c_0(\det x_{J'})^{\frac{n-r-1}{2}} dx_{J'} dy'$$

меры $d\mu_r(x)$ на всей карте $U_{J'}$. Индукция по звеньям цепочки из смежных карт, соединяющей первую карту $U_{\{1,2,\dots,r\}}$ с любой другой (при использовании следствий 2.3 и 2.4), дадут окончательный результат (3.1). \square

Как уже отмечалось, многообразия $SM_+^r(n)$ являются орбитами действия группы $GL(n)$.

Предложение 3.4. *Инвариантная мера $d\mu_r(x)$ на однородном пространстве $(SM_+^r(n), SL(n))$, $r = 1, 2, \dots, n-1$, является относительно инвариантной относительно группы $GL(n)$ мерой с мультипликатором $\chi(g) = |\det g|^r$:*

$$d\mu_r({}^t g x g) = |\det g|^r d\mu_r(x), \quad g \in GL(n). \quad (3.2)$$

Доказательство. Матрицу $g \in GL(n)$ преобразования $x \rightarrow {}^t g x g$ запишем в виде

$$g = s g_1, \quad s \in SL(n), \quad g_1 = \begin{pmatrix} \det g & 0 \\ 0 & 1_{n-1} \end{pmatrix}.$$

В силу $SL(n)$ -инвариантности достаточно установить равенство (3.2) для матрицы g_1 . Покажем, что в каждой карте атласа имеет место равенство (3.2).

Ясно, что преобразование $x \rightarrow {}^t g_1 x g_1$ сохраняет все карты атласа. Фиксируем карту (U_J, φ_J) . Если $j_1 = 1$, то преобразование локальных координат происходит по формулам

$$\begin{aligned} x_J &\rightarrow \begin{pmatrix} \det g & 0 \\ 0 & 1_{r-1} \end{pmatrix} x_J \begin{pmatrix} \det g & 0 \\ 0 & 1_{r-1} \end{pmatrix} \equiv {}^t \alpha x_J \alpha, \\ y &\rightarrow \begin{pmatrix} \det g^{-1} & 0 \\ 0 & 1_{r-1} \end{pmatrix} y \equiv \alpha^{-1} y. \end{aligned}$$

По предложению 3.3

$$\begin{aligned} d\mu_r \circ \varphi_J^{-1}({}^t \alpha x_J \alpha, \alpha^{-1} y) &= \\ &= c_0 [\det({}^t \alpha x_J \alpha)]^{\frac{n-r-1}{2}} d({}^t \alpha x_J \alpha) d(\alpha^{-1} y) \\ &= |\det g|^r d\mu_r \circ \varphi_J^{-1}(x_J, y). \end{aligned}$$

Если $j_1 \neq 1$ для карты U_J , то под действием преобразования с матрицей g_1 локальные координаты изменяются по формулам

$$\begin{aligned} x_J &\rightarrow x_J, \\ y &\rightarrow y \begin{pmatrix} \det g & 0 \\ 0 & 1_{n-r-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

поскольку $x_1 = x_{j_1} y_{11} + \dots + x_{j_r} y_{r1} \equiv x_J y_1 \rightarrow x_1 \det g = x_J y_1 \det g$.

В результате

$$\begin{aligned} d\mu_r \circ \varphi_J^{-1} \left(x_J, y \begin{pmatrix} \det g & 0 \\ 0 & 1_{n-r-1} \end{pmatrix} \right) \\ = |\det g|^r d\mu_r \circ \varphi_J^{-1}(x_J, y). \end{aligned}$$

□

4 Относительно инвариантная мера

Как уже знаем, группа $GL(n)$ действует транзитивно на каждом многообразии $SM_+^r(n)$, включая случай $r = n$. Естественно встает вопрос об инвариантной мере на однородном пространстве $(SM_+^r(n), GL(n))$. Стационарная подгруппа точки $e(r)$ имеет вид

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} \alpha \in O(r), \delta \in GL(n-r) \\ \gamma \in M(n-r, r) \end{array} \right\}. \quad (4.1)$$

Как следствие получаем подтверждение размерности

$$\begin{aligned} \dim SM_+^r(n) &= \dim (GL(n)/H') \\ &= nr - r(r-1)/2. \end{aligned}$$

Ситуация с мерой распадается на два случая $r = n$ и $r < n$.

Для $r = n$ стационарная подгруппа (4.1) совпадает с $O(n)$. Как компактная она унимодулярна. Следовательно, модулярные функции $\Delta_{GL(n)}(g)$ и $\Delta_{H'}(h)$ групп $GL(n)$ и H' , тождественно равные единице, совпадают на подгруппе H' . По критерию [4] на однородном пространстве $(SM_+^*(n), GL(n))$ существует инвариантная положительная мера $d\mu'_n(x)$, единственная с точностью до постоянного множителя. Многообразие $SM_+^*(n)$ покрывается одной картой с координатами $\varphi_{\{1,2,\dots,r\}}(x) = (x_{ij})$, $i \leq j$. Установлено (см., например, [4, гл. VII, л3, п.3, Пример 8]), что

$$d\mu'_n(x) = (\det x)^{-(n+1)/2} dx.$$

Как упоминалось, эта мера присутствует в интеграле (Φ_+^λ, f) , $\operatorname{Re} \lambda > -1$.

Для $r = 1, 2, \dots, n-1$ имеет место

Предложение 4.1. На однородном многообразии $SM_+^r(n)$ симметрических положительно полуопределенных $n \times n$ -матриц ранга $r = 1, 2, \dots, n-1$ с группой $GL(n)$ преобразований $x \rightarrow {}^t g x g$ инвариантной меры не существует. С точностью до постоянного множителя существует единственная относительно инвариантная относительно группы $GL(n)$ мера $d\mu'_r(n)$ с мультипликатором $\chi(g) = |\det g|^r$:

$$d\mu'_r({}^t g x g) = |\det g|^r d\mu'_r(x), \quad g \in GL(n).$$

Доказательство. При $r < n$ стационарная подгруппа (4.1), как легко проверить, является полупрямым произведением подгрупп

$$N' = \left\{ \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ \gamma & 1_{n-r} \end{pmatrix} \mid \gamma \in M(n-r, r) \right\},$$

$$K' = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha \in O(r), \delta \in GL(n-r) \right\}$$

относительно автоморфизмов $i_k(n) \equiv i_{\alpha, \delta}(\gamma) = \delta \gamma \alpha^{-1}$ нормальной подгруппы N' . Очевидно, что обе подгруппы унимодулярны. Однако,

$$\begin{aligned} \Delta_{H'}(h) &= \Delta_{N'}(n) \Delta_{K'}(k) \bmod (i_k(n)) \\ &= |\det \delta|^r |\det \alpha^{-1}|^{n-r} \\ &= |\det h|^r \neq 1. \end{aligned}$$

Необходимое для наличия инвариантной меры условие унимодулярности подгруппы H' не выполняется. Поэтому $GL(n)$ -инвариантной меры не существует.

Но представление

$$h \rightarrow \frac{\Delta_{H'}(h)}{\Delta_{GL(n)}(h)} = \Delta_{H'}(h) = |\det h|^r$$

группы H' в группу \mathbb{R}_+^* продолжается до непрерывного представления $g \rightarrow |\det g|^r$ группы $GL(n)$. Согласно [4, гл. VII, л2, п.6, Следствие 1] существует утверждаемая в предложении 4.1 относительно инвариантная мера. \square

Следствие 4.2. С точностью до постоянного множителя меры $d\mu_r(x)$ и $d\mu'_r(x)$ совпадают ($r = 1, 2, \dots, n-1$).

Совпадение мер можно установить, непосредственно выписав локальные выражения меры $d\mu'_r(x)$, как в доказательстве предложения 3.3.

5 Заключение

В отличие от (1.2) пронормируем меру $d\mu_r(x)$, положив константу в равенстве (3.1) равной единице. Возникающий интеграл по гладкому многообразию $SM_+^r(n)$, $r = 1, 2, \dots, n-$

1, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}
\int_{SM_+^r(n)} f(x) d\mu_r(x) &= \int_{U_J} f(x) d\mu_r(x) \\
&= \int_{\varphi_J(U_J)} f \circ \varphi_J^{-1}(x_J, y) d\mu_r \circ \varphi_J^{-1}(x_J, y) \\
&= \int_{SM_+^*(r) \times M(r, n-r)} (\det x_J)^{\frac{n-r-1}{2}} f \left(\begin{array}{cc} x_J & x_J y \\ {}^t y x_J & {}^t y x_J y \end{array} \right) dx_J dy
\end{aligned}$$

в любой карте (U_J, φ_J) атласа.

Сходимость интеграла для функции $f \in \mathcal{S}(SM(n))$ обнаруживается при переходе к координатам $x_J = {}^t a a$, где $a \in T_+(r)$ — верхняя треугольная $r \times r$ -матрица с положительными диагональными элементами:

$$\begin{aligned}
\int_{SM_+^r(n)} f(x) d\mu_r(x) &= \\
&= 2^r \int_{T_+(r) \times M(r, n-r)} \prod_{i=1}^r a_{ii}^{r-i} f \left(\begin{array}{cc} {}^t a a & {}^t a z \\ {}^t z a & {}^t z z \end{array} \right) dz da,
\end{aligned}$$

где из-за блоков ${}^t a a$ и ${}^t z z$ функция

$$\psi(a, z) = f \left(\begin{array}{cc} {}^t a a & {}^t a z \\ {}^t z a & {}^t z z \end{array} \right)$$

бесконечно дифференцируема и быстро убывает.

Как отмечено в [2, с. 35, Замечание], интеграл сходится для любой функции f на конусе $SM_+^*(n)$ такой, что функция $\psi(a) = f({}^t a a)$ быстро убывающая на пространстве всех треугольных матриц. В частности, таковой является функция $f(x) = e^{-tr(x)}$, где $tr(x)$ — след матрицы x . Интеграл

$$\begin{aligned}
\int_{SM_+^r(n)} e^{-tr(x)} d\mu_r(x) &= \int_{U_J} e^{-tr(x)} d\mu_r(x) \\
&= \int_{x_J > 0} e^{-tr(x_J)} (\det x_J)^{\frac{n-r-1}{2}} dx_J \int_{M(r, n-r)} e^{-tr({}^t y x_J y)} dy \\
&= 2^r \int_{T_+(r)} e^{-tr({}^t a a)} \prod_{i=1}^r a_{ii}^{r-i} da \int_{M(r, n-r)} e^{-tr({}^t z z)} dz \\
&= \sqrt{\pi}^{r(n-r)} \Gamma_r(r/2)
\end{aligned}$$

позволил ввести нестандартный нормирующий множитель в равенство (1.2).

Список литературы

- [1] L. Garding. The solution of Cauchy's problem for two totally hyperbolic differential equations by means of Riesz integrals, *Ann. Math.* 19:4 (1947), P. 785–826.
- [2] С. Г. Гиндикин. Анализ в однородных областях, *УМН* 19:4 (1964), 3–92.
- [3] С. П. Хэкало. Изогюйгенсовы деформации оператора Кэли обобщенными потенциалами Лагнеше-Штельмахера, *Изв. РАН, сер. матем.* 67:4 (2003), с. 189–212.
- [4] Н. Бурбаки. Интегрирование. Векторное интегрирование. Мера Хаара. Свчртка и представление. М.: Наука, 1970.
- [5] В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.
- [6] В. И. Арнольд. Лекции о бифуркациях и версальных семействах. *УМН*, 27:5 (1972), 119–184.
- [7] М. Маркус, Х. Минк. Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М.: Наука, 1972.
- [8] Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [9] В. А. Рохлин, Д. Б. Фукс. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.
- [10] С. Ленг. $SL_2(\mathbb{R})$. М.: Мир, 1974.