

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

### **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций**

**Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27**

**телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54**

**e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)**

**<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>**

**Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н**

## Фильтрации векторных расслоений на $\mathbb{P}_{\mathbb{Z}}^1$

А. Л. Смирнов

Санкт-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
smirnov@pdmi.ras.ru

Январь, 2013

### Аннотация

Изучаются векторные расслоения на проективной прямой над кольцом целых чисел. Получена полная классификация расслоений ранга два с тривиальным общим слоем и простыми подскоками. Дан критерий того, что глобальные ограничения на минимальную фильтрацию расслоения с линейными факторами сводятся к локальным. Приведены примеры, когда знания локальных ограничений недостаточно.

Ключевые слова и фразы: векторное расслоение, проективная прямая, подскок, фильтрация, линейное расслоение, схема, арифметическая поверхность.

ПРЕПРИНТЫ  
Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

PREPRINTS  
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, А. А. Иванов, Л. Ю. Колотилина,  
В. Н. Кублановская, Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье,  
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин,  
В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

# Введение

Классическая теория положительно-определенных решеток, вообще говоря не обязательно целочисленных, может рассматриваться как теория векторных расслоений на арифметической кривой  $X$ , где  $X$  – некоторая компактификация  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ . При этом первому классу Чженя  $c_1(E)$  соответствует число  $[-1/2 \log \mathrm{disc} \Gamma]$ , а короткие векторы соответствуют глобальным сечениям.

С другой стороны, имеется развитая теория векторных расслоений на алгебраических поверхностях над полем, например над  $\mathbb{C}$ . В частности, речь может идти о классификации, то есть об изучении дискретных инвариантов и пространств модулей таких расслоений. Другое направление связано с теорией исключительных наборов расслоений на таких поверхностях.

Синтез этих двух направлений, то есть изучение векторных расслоений на арифметических поверхностях, например на  $\mathbf{P}^1/\mathbb{Z}$ , выглядит весьма интересным направлением исследований. Конечно, "правильная" постановка задачи состоит в изучении расслоений на компактифицированных, например по Аракелову, арифметических поверхностях. Однако изучение векторных расслоений на классической схеме  $\mathbf{P}^1/\mathbb{Z}$  также представляет интерес в качестве одного из подходов к этой задаче. В данной работе представлены некоторые шаги в этом направлении.

Основные результаты работы представлены в теоремах 2.1.10, 2.1.12 и 3.5.9. Первые две теоремы полностью классифицируют расслоения ранга два с тривиальным общим слоем и простыми подскоками. Последний результат дает критерий того, что глобальные ограничения на минимальную фильтрацию расслоения с линейными факторами сводятся к локальным. Приведены примеры, когда знания локальных ограничений недостаточно.

## 1 Общие сведения

Мы собираемся изучать векторные расслоения на схеме  $\mathbf{P}_A^1$  для дедекиндовых колец  $A$ , и особенно для  $A = \mathbb{Z}$ . Однако некоторые результаты полезно и более естественно формулировать в большей общности. Поэтому ниже  $A$  – коммутативное нетерово кольцо.

Вместо  $\mathcal{O}_X$  и  $\mathcal{O}_X(d)$  для подходящей схемы  $X$  обычно будем писать просто  $\mathcal{O}$  и  $\mathcal{O}(d)$ , особенно если из контекста ясно, о какой схеме идет речь. Как обычно,

$$\mathbf{P}_A^1 = \mathrm{Proj} A[t_0, t_1], \quad (\deg t_0 = \deg t_1 = 1).$$

Кроме того,  $\mathcal{O}(U_0) = \mathbb{Z}[x]$ ,  $\mathcal{O}(U_1) = \mathbb{Z}[x^{-1}]$  и  $\mathcal{O}(U_{01}) = \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ , где  $x = t_1/t_0$ ,  $U_i$  – дополнение к нулям  $t_i$  и  $U_{01} = U_0 \cap U_1$ .

Для построения векторных расслоений на  $X = \mathbf{P}_A^1$  полезна операция склейки.

---

<sup>0</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10–01–00551), EPSRC Responsive Mode (грант EP/G032556/1).

## 1.1 Склеивка

С произвольной матрицей  $\sigma \in \mathrm{GL}_n A[x, x^{-1}]$  связано некоторое векторное расслоение  $E$  ранга  $n$  на  $\mathbf{P}_A^1$ . А именно,  $E|_{U_0} = \mathcal{O}e_1 + \cdots + \mathcal{O}e_n$ ,  $E|_{U_1} = \mathcal{O}f_1 + \cdots + \mathcal{O}f_n$  и

$$[e_1, \dots, e_n]\sigma = [f_1, \dots, f_n]$$

на  $U_{01}$ . Иными словами,  $j$ -тый столбец  $\sigma$  представляет собой запись  $f_j$  в  $e$ -базисе.

Если над  $A$  все проективные модули свободны, то, по теореме Квиллена и Суслина, так получаются все векторные расслоения на  $\mathbf{P}_A^1$ . В этом случае множество классов изоморфизма векторных расслоений ранга  $n$  представляется как двойной фактор

$$\mathrm{Vect}_n(\mathbf{P}_A^1) = \mathrm{GL}_n A[x] \backslash \mathrm{GL}_n A[x, x^{-1}] / \mathrm{GL}_n A[x^{-1}]. \quad (1)$$

Рассмотрим примеры.

**1.1.1.** Линейное расслоение  $\mathcal{O}(d)$  задано матрицей  $\sigma = [x^d] \in \mathrm{GL}_1 \mathbb{Z}[x, x^{-1}]$ .

**1.1.2.** Пусть  $A = \mathbb{Z}_p$ , а  $E$  задано матрицей

$$\sigma = \begin{bmatrix} x^{-1} & p \\ 0 & x \end{bmatrix}.$$

Это расслоение интересно тем, что оно не изоморфно сумме линейных расслоений (см. 1.3 ниже).

## 1.2 Подскоки

При изучении векторных расслоений над  $\mathbf{P}_A^1$  важную роль играет явление подскоков. Для его описания потребуются следующие результаты, интересные и сами по себе.

**1.2.1 Теорема (Биркгоф-Гротендик).** *Всякое векторное расслоение на  $\mathbf{P}_F^1$ , где  $F$  – поле, может быть представлено суммой линейных расслоений, причем слагаемые определены однозначно.*

Линейные расслоения на  $\mathbf{P}_F^1$  также хорошо известны.

**1.2.2 Теорема (Серр, [2]).** *Всякое линейное расслоение на  $\mathbf{P}_A^n$  изоморфно расслоению вида  $p^*L \otimes \mathcal{O}(d)$ , где  $L$  – линейное расслоение на  $\mathrm{Spec} A$ , а  $p$  – структурная проекция  $\mathbf{P}_A^n \rightarrow \mathrm{Spec} A$ .*

В частности, любое расслоение на  $\mathbf{P}_F^1$  изоморфно расслоению  $\mathcal{O}(d)$  для некоторого однозначно определенного  $d \in \mathbb{Z}$ .

**1.2.3. Тип расщепления.** Пусть  $E$  – векторное расслоение на  $\mathbf{P}_A^1$ ,  $r = \mathrm{rk} E$  и  $y \in \mathrm{Spec} A$ . Ввиду теорем 1.2.1 и 1.2.2 ограничение  $E_y$  на  $\mathbf{P}_F^1$ , где  $F$  – поле вычетов в  $y$ , изоморфно сумме

$$E_y = \mathcal{O}(d_1) + \cdots + \mathcal{O}(d_r),$$

где  $d_1 \leq \cdots \leq d_r$  однозначно определенный набор целых чисел. Этот набор и будем называть типом расщепления  $E$  над  $y$ .

**1.2.4. Пример.** Для иллюстрации типа разложения воспользуемся расслоением  $E$  из примера (1.1.2). Пусть  $y$  – замкнутая точка  $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}_p$  и  $\eta$  – общая точка. В этом примере  $E_y$  может быть получено с помощью склейки из матрицы

$$\sigma_y = \begin{bmatrix} x^{-1} & p \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2 \mathbb{F}_p[x, x^{-1}].$$

Матрица  $\sigma_y$  представима в виде прямой суммы двух одномерных матриц  $[x^{-1}]$  и  $[x]$ . Поэтому расслоение  $E_y$  представимо в виде прямой суммы соответствующих линейных расслоений. Таким образом  $E_y \cong \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$ .

С другой стороны, поле вычетов в точке  $\eta$  совпадает с  $\mathbb{Q}_p$  и  $p$  обратимо в этом поле. Поэтому корректны тождества

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x/p & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{-1} & p \\ 0 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -p \\ 1/p & 1/x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ввиду (1) это показывает, что  $E_\eta \cong \mathcal{O}^2$ .

**1.2.5. Зависимость типа расщепления от точки базы.** Для аккуратной формулировки характера этой зависимости нам потребуется функция типа расщепления и некоторый порядок на ее области значений.

Для фиксированного векторного расслоения  $E$  ранга  $r$  на  $\mathbf{P}_A^1$  рассмотрим функцию  $s(E, y)$  со значениями в  $\mathbb{Z}^r$ . Эта функция переводит точку  $y \in \mathrm{Spec} A$  в тип расщепления расслоения  $E_y$ . Пусть

$$s(E, y) = (d_1(E, y), \dots, d_r(E, y)).$$

На множестве неубывающих наборов целых чисел  $(d_1, \dots, d_r)$  рассмотрим лексикографический порядок. Точнее говоря, будем говорить, что  $(d_1, \dots, d_r) < (e_1, \dots, e_r)$ , если  $d_r < e_r$  или  $d_r = e_r$  и  $d_{r-1} < e_{r-1}$  и т. д. Иными словами, в рассматриваемом лексикографическом порядке то, что справа, важнее того, что слева.

Утверждается, что при фиксированных  $E$  и  $(d_1, \dots, d_r) \in \mathbb{Z}^r$  множество

$$\{y \in \mathrm{Spec} A \mid s(E, y) \geq (d_1, \dots, d_r)\}$$

замкнуто по Зарисскому. Это утверждение означает, что тип расщепления может подсказывать (но не падать!) при специализации.

Кроме того утверждается, что при фиксированном расслоении  $E$  функция  $y \mapsto d_1(E, y) + \dots + d_r(E, y)$  постоянна.

Эти утверждения легко вытекают из теоремы о замене базы [1, III, 12].

**1.2.6. Теорема о замене базы и ее следствия.** Нам потребуются некоторые следствия этой теоремы. Сформулируем необходимые результаты. Пусть  $f : X \rightarrow Y$  собственный морфизм нетеровых схем,  $\mathcal{F}$  – когерентный  $\mathcal{O}$ -модуль, плоский над  $Y$ . Как обычно,  $X_y$  – слой  $f$  над  $y \in Y$ , а  $\mathcal{F}_y = \mathcal{F}|_{X_y}$ . Тогда функция  $y \mapsto \chi(\mathcal{F}_y)$  локально постоянна на  $Y$ , а функция  $y \mapsto \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$  (из  $Y$  в  $\mathbb{Z}$ ) полунепрерывна сверху на  $Y$ . Кроме того, если  $Y$  – приведена и связна, то

1. функция  $y \mapsto \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$  постоянна на  $Y$  тогда и только тогда, когда  $\mathcal{O}_Y$ -модуль  $\mathcal{E} = R^p f_* \mathcal{F}$  – локально свободен (то есть является расслоением) и естественный морфизм  $\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \rightarrow H^p(X_y, \mathcal{F}_y)$  – изоморфизм для всех  $y \in Y$ ;

2. если выполнены (равносильные) условия предыдущего пункта, то естественный морфизм  $R^{p-1}f_*\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_Y} k(y) \rightarrow H^{p-1}(X_y, \mathcal{F}_y)$  – изоморфизм для всех  $y \in Y$ .

**1.2.7. Пример.** В примере 1.2.4 топологическое пространство  $\text{Spec } A$  представлено множеством  $\{y, \eta\}$ . При этом

$$s(E, y) = (-1, 1) \text{ и } s(E, \eta) = (0, 0).$$

Таким образом, тип расщепления  $E$  в замкнутой точке  $y$  "подскакивает" относительно типа расщепления в общей точке  $\eta$ .

### 1.3 Линейная фильтруемость расслоений

В отличие от случая проективной прямой над полем на  $\mathbf{P}_A^1$  для дедекиндова кольца  $A$  не всякое расслоение представимо суммой линейных. Действительно, тип расщепления суммы линейных расслоений очевидно постоянен, а в примерах 1.1.2, 1.2.4 и 1.2.7 предъявлено векторное расслоение, для которого это не так.

Возникает естественный вопрос: верно ли, что всякое векторное расслоение на  $\mathbf{P}_A^1$  для дедекиндова кольца  $A$  допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения? По-видимому, ответ на этот вопрос не известен.

Ниже приведены известные мне результаты, касающиеся этого вопроса. Для локального  $A$  вопрос полностью решен следующим результатом.

**1.3.1 Теорема** (Hogrocks, [6]). *Всякое векторное расслоение на  $\mathbf{P}_A^1$ , где  $A$  – локальное кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения.*

Для произвольного дедекиндова  $A$  имеет место следующий результат.

**1.3.2 Теорема** (Hanna, [5]). *Всякое векторное расслоение на  $\mathbf{P}_A^1$ , где  $A$  – дедекиндово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой либо линейные расслоения, либо расслоения ранга два.*

Полностью вопрос решен для евклидовых колец.

**1.3.3 Теорема** (Hanna, [5]). *Всякое векторное расслоение на  $\mathbf{P}_A^1$ , где  $A$  – евклидово кольцо, допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения.*

В частности, всякое векторное расслоение на  $\mathbf{P}_{\mathbb{Z}}^1$  допускает фильтрацию, все факторы которой линейные расслоения.

### 1.4 Спектральная последовательность Бейлинсона

Некоторые методы, используемые в [3] для построения интересных векторных расслоений на  $\mathbf{P}_{\mathbb{C}}^n$ , можно применить и в случае  $\mathbf{P}_A^1$ . Например, это относится к двум спектральным последовательностям Бейлинсона.

**1.4.1 Теорема (Бейлинсон).** Пусть  $F$  – векторное расслоение на  $\mathbf{P}_A^1$ , а  $p : \mathbf{P}_A^1 \rightarrow \text{Спес } A$  – структурная проекция. Существует спектральная последовательность с первым членом  $E_1^{pq} = R p_*^q(F(p)) \otimes \Omega^{-p}(p)$ , сходящаяся к

$$F^i = \begin{cases} F, & \text{если } i = 0; \\ 0, & \text{если } i \neq 0. \end{cases}$$

В частности,  $E_1$ -член этой последовательности расположен во втором квадранте, а его ненулевая часть расположена в нулевой и первой строках и имеет вид

$$H^1(F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d^1} H^1(F) \otimes \mathcal{O}.$$

$$H^0(F(-1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \xrightarrow{d^1} H^0(F) \otimes \mathcal{O}$$

**1.4.2. Нормализация расслоений на  $\mathbf{P}^1$ .** Особенно удобно пользоваться спектральной последовательностью (1.4.1) в том случае, когда  $H^1(F(-1)) = H^1(F) = 0$ , а  $H^0(F(-1))$  и  $H^0(F)$  не слишком велики.

Расслоение  $F$  назовем нормализованным, если  $H^1(F(-1)) = 0$ , а  $H^1(F(-2)) \neq 0$ . С помощью следствия теоремы Гротендика о замене базы (см. 1.2.6) легко видеть, что для дедекиндова  $A$  среди всех расслоений вида  $F(d)$  существует единственное нормализованное. Соответствующее  $d$  обозначим  $\delta(F)$ . Например,  $\delta(\mathcal{O}) = 0$ .

## 2 Расслоения ранга два с простыми подскоками

Пусть  $A$  – дедекиндово кольцо. Мы собираемся изучать расслоения  $E$  ранга два с тривиальным общим слоем и простыми подскоками. Это означает, что  $E_\eta \cong \mathcal{O}^2$  для общей точки  $\eta \in \text{Спес } A$  и  $E_y \cong \mathcal{O}^2$  или  $E_y \cong \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$  для каждой замкнутой точки  $y \in \text{Спес } A$ . Отсюда вытекает, что точки подскока, то есть те замкнутые точки  $y$ , для которых  $E_y \cong \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$ , образуют конечное множество (см. 1.2.5).

### 2.1 Классификация расслоений с простыми подскоками

Начнем с конструкции некоторого запаса расслоений ранга два с простыми подскоками. Такое расслоение будет построено по тройке  $(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in A^3$  и будет обозначаться

$$F^{\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2}.$$

Единственное условие, которому должна удовлетворять тройка  $(\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , состоит в том, что  $\nu$  и  $\varepsilon_1$  взаимно просты или, что то же самое, что строка  $[\nu, \varepsilon_1]$  унимодулярна.

Окажется, что каждое расслоение ранга два с простыми подскоками имеет такой вид. Более того, в случае факториального дедекиндова кольца  $A$  достаточно рассмотреть тройки с  $\varepsilon_2 = 0$  (см. 2.1.10). Для полной классификации после этого останется понять, какие тройки дают изоморфные расслоения. Это сделано в теореме 2.1.12.

**2.1.1.** Ниже расслоение  $F^{\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2}$  будет построено как коядро стрелки вида

$$\phi : \mathcal{O}^2(-2) \longrightarrow \mathcal{O}^4(-1), \quad (2)$$



Для вычислений зафиксируем  $\mathcal{O}$ -базисы  $e_1, e_2$  и  $f_1, \dots, f_4$  расслоений  $\mathcal{O}^2$  и  $\mathcal{O}^4$ . Выбор базисов фиксирует отождествление

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}^2(-2), \mathcal{O}^4(-1)) \simeq M_{4,2}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1))).$$

Так как  $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)) = At_0 + At_1$ , то

$$\phi = t_0\phi_0 + t_1\phi_1, \quad \text{где } \phi_0, \phi_1 \in M_{4,2}(A).$$

**2.1.2.** Особенно нам будет интересен частный случай стрелки  $\phi$  из (2), а именно

$$\phi_0 = \begin{bmatrix} M \\ N(\nu) \end{bmatrix}, \quad \phi_1 = \begin{bmatrix} 1_2 \\ 0_2 \end{bmatrix}, \quad N(\nu) = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где  $1_2, 0_2 \in M_{2,2}(A)$  – единичная и нулевая матрицы,  $M \in M_{2,2}(A)$ ,  $\nu \in A$ . Отметим, что в рассматриваемом случае  $\mathrm{Coker} \phi$  по существу не зависит от второго столбца  $M$ . Это легко увидеть, подправляя первые две строки матрицы  $\phi$  с помощью четвертой. Поэтому будем считать, что

$$M = M(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

**2.1.3.** Стрелку  $\phi$  из (2) назовем невырожденной, если ее коядро  $F = \mathrm{Coker} \phi$  является расслоением ранга два. Невырожденность  $\phi$  равносильна локальной расщепимости этой стрелки. Для невырожденной стрелки  $\phi$  имеется точная последовательность  $\mathcal{O}$ -модулей

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^2(-2) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}^4(-1) \longrightarrow F \longrightarrow 0. \quad (5)$$

В частности, для невырожденной  $\phi$  имеется канонический изоморфизм

$$H^0(X, F) \rightarrow H^1(X, \mathcal{O}(-2))^2 \simeq A^2,$$

происходящий из кохомологической последовательности, связанной с (5), и стандартного отождествления  $\mathcal{O}(-2))$  с дуализирующим пучком.

**2.1.4 Предложение.** *Стрелка  $\phi$  из (2.1.2) невырождена тогда и только тогда, когда строка  $[\nu, \varepsilon_1]$  унимодулярна.*

*Доказательство.* Невырожденность  $\phi$  равносильна невырожденности ограничений  $\phi$  на  $U_0$  и  $U_1$ . Легко видеть, что невырожденность ограничения  $\phi$  на  $U_0$  равносильна инъективности морфизма  $A[x] \rightarrow A[x]^3$ ,  $1 \mapsto (\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2 + x)$  и проективности его коядра. Расщепимость проекции на коядро равносильна расщепимости вложения  $A[x] \rightarrow A[x]^3$ , то есть унимодулярности строки  $[\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2 + x]$ . Полагая  $x = -\varepsilon_2$ , видим, что это равносильно унимодулярности  $[\nu, \varepsilon_1]$ .

Наоборот, пусть строка  $[\nu, \varepsilon_1]$  унимодулярна и  $\alpha\nu + \beta\varepsilon_1 = 1$ . Легко видеть, что проективность ограничения  $F$  на  $U_1$  равносильна унимодулярности строки  $[\nu y, \varepsilon_1 y^2, 1 + \varepsilon_2 y]$  кольца  $A[y]$ , где  $y = t_0/t_1$ . Унимодулярность этой строки вытекает из унимодулярности  $[\nu, \varepsilon_1]$ : в качестве линейной комбинации  $\nu y$ ,  $\varepsilon_1 y^2$  и  $1 + \varepsilon_2 y$  последовательно находим  $y^2 = (\alpha y) \cdot (\gamma y) + \beta \cdot (\varepsilon_1 y^2)$ ,  $y = y \cdot (1 + \varepsilon_2 y^2) - \varepsilon_2 \cdot y^2$ ,  $1 = 1 \cdot (1 + \varepsilon_2 y) - \varepsilon_2 \cdot y$ .  $\square$

Таким образом, с любой унимодулярной строкой  $[\nu, \varepsilon_1]$  и элементом  $\varepsilon_2 \in A$  связано векторное 2-расслоение

$$F^{\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2} = \text{Coker } \phi, \quad (6)$$

где стрелка  $\phi$  из (5) указана в (2.1.2).

**2.1.5 Предложение.** *Если  $A$  – поле, то*

$$F^{\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2} \simeq \begin{cases} \mathcal{O}^2, & \text{при } \nu \neq 0; \\ \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1), & \text{при } \nu = 0. \end{cases}$$

*Доказательство.* Точность (5) показывает, что  $\text{Det } F \simeq \mathcal{O}$  и  $F \simeq \mathcal{O}(-d) + \mathcal{O}(d)$  для некоторого  $d \geq 0$ . Длинная точная последовательность когомологий, связанная с (5), показывает, что  $h^0(X, F) = 2$  и  $d \leq 1$ . Чтобы различить случаи  $d = 0$  и  $d = 1$ , рассмотрим точную последовательность когомологий, связанную с подкрученной на  $\mathcal{O}(-1)$  последовательностью (5), то есть

$$0 \rightarrow H^0(F(-1)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}(-3))^2 \rightarrow H^1(\mathcal{O}(-2))^4 \rightarrow H^1(F(-1)) \rightarrow 0,$$

где в обозначениях когомологий пропущена схема  $X$ .

Нам нужна средняя стрелка  $H^1(\phi(-1))$ . Удобнее вычислить сопряженную стрелку  $H^0([\phi(-1)]^\vee \otimes K_X) : H^0(X, \mathcal{O})^4 \rightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(1))^2$ , где  $K_X \simeq \mathcal{O}(-2)$  – канонический класс. Для этого нужна лишь функториальность двойственности:  $H^1(\psi)^\vee = H^0(\psi^\vee)$ . Ввиду такой естественности стрелка  $H^0([\phi(-1)]^\vee \otimes K_X)$  задана умножением на сопряженную матрицу  $\phi^* \in M_{2,4}(\text{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)))$ . Непосредственное вычисление показывает, что в базисах  $f_1^*, \dots, f_4^*$  и  $t_1 e_1^*, t_1 e_2^*, t_0 e_1^*, t_0 e_2^*$  матрица  $\phi^*$  выглядит так:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

В частности,  $H^0(X, F(-1)) = H^1(X, F(-1)) = A/\nu$ . □

**2.1.6 Следствие.** *Если  $A$  – область и  $\nu \neq 0$ , то общий слой  $F^{\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2}$  изоморфен  $\mathcal{O}^2$ , а все подслои имеют вид  $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$  и находятся в точности в делителях  $\nu$ .*

**2.1.7 Следствие.** *Рассмотрим расслоение  $F(-1)$  (это расслоение автодвойственно в правильном смысле), где  $F = F^{\nu, \varepsilon_1, \varepsilon_2}$ . Тогда*

$$H^0(X, F(-1)) \simeq H^1(X, F(-1)) \simeq A/\nu.$$

*В частности, идеал, порожденный  $\nu$ , зависит только от класса изоморфизма  $F$ .*

*Доказательство.* Это утверждение не является следствием формулировки предложения (2.1.5), а получено в ходе доказательства. □

**2.1.8.** Далее считаем, что  $A$  – кольцо весьма специального вида, а именно  $A$  – факториальное дедекиндово кольцо или, иными словами,  $A$  – область, являющаяся кольцом главных идеалов. Это предположение используется при явном описании

орбит действий  $\mathrm{GL}_n A$  на  $A^n$  и конгруэнц-подгрупп на  $\mathbf{P}^1(A)$ .

Пусть  $K$  – поле частных  $A$ . С  $\nu \in A$  связана следующая конгруэнц-подгруппа

$$\tilde{\Gamma}_0(\nu) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \mathrm{GL}_2 A \mid \gamma = 0 \pmod{\nu} \right\}.$$

С произвольным ненулевым вектором  $v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} \in K^2$  связана его проективизация  $\bar{v} \in \mathbf{P}^1(K)$ . Однако  $\mathbf{P}^1(K) = \mathbf{P}^1(A)$ , ввиду дедекиндовости  $A$ , и мы можем считать, что  $\bar{v} \in \mathbf{P}^1(A)$ . Проективизацию вектора  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  обозначаем  $\infty$ .

**2.1.9 Лемма.** Пусть  $v = \begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} \in A^2$  – ненулевой вектор. Утверждается, что  $\bar{v}$  и  $\infty$  тогда и только тогда лежат в одной орбите стандартного (левого) действия  $\tilde{\Gamma}_0(\nu)$  на  $\mathbf{P}^1(A)$ , когда  $v_1/(v_0, v_1)$  и  $\nu$  взаимно просты.

*Доказательство.* Заменяя  $v$  на  $v/(v_0, v_1)$ , можем считать, что  $(v_0, v_1) = 1$  (использовали специфику  $A$ !). Орбита  $\infty$  состоит из проективизаций векторов  $\begin{bmatrix} \beta \\ \delta \end{bmatrix}$ , где  $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \tilde{\Gamma}_0(\nu)$ . В частности,  $(\gamma, \delta) = 1$ , а так как  $\gamma = 0 \pmod{\nu}$ , то и  $(\nu, \delta) = 1$ .

Наоборот, пусть  $(v_1, \nu) = 1$ . Так как  $(v_0, v_1) = 1$ , то и  $(\nu v_0, v_1) = 1$ . Пусть  $\alpha v_1 - \gamma_0 \nu v_0 = 1$ . Тогда

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_1 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ где } \sigma = \begin{bmatrix} \alpha & v_0 \\ \nu \gamma_0 & v_1 \end{bmatrix}.$$

Осталось заметить, что  $\sigma \in \tilde{\Gamma}_0(\nu)$ . □

**2.1.10 Теорема.** Пусть  $F$  – векторное 2-расслоение на  $\mathbf{P}^1$ , причем его общий слой  $F_K$  на  $\mathbf{P}_K^1$  изоморфен  $\mathcal{O}^2$ , а все подскоки имеют вид  $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$ . Тогда  $F$  изоморфно расслоению вида  $F^{\nu, \varepsilon, 0}$ , где  $\nu$  и  $\varepsilon$  автоматически взаимно просты.

*Доказательство.* Учитывая следствия теоремы о замене базы (см. 1.2.6), знание общего слоя и вид подскоков, легко понять, что  $H^1(\mathbf{P}^1, F) \simeq H^1(\mathbf{P}^1, F(-1)) \simeq 0$ ,  $H^0(\mathbf{P}^1, F) \simeq A^2$ ,  $H^0(\mathbf{P}^1, F(1)) \simeq A^4$ . Применяя к  $F(1)$  теорему Бейлинсона (см. 1.4.1) и открутку, получим представление  $F$  в виде фактора в точной последовательности

$$0 \rightarrow \mathcal{O}^2(-2) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}^4(-1) \rightarrow F \rightarrow 0, \quad (7)$$

где  $\phi = t_0 \phi_0 + t_1 \phi_1$ , а  $\phi_0, \phi_1 \in M_{4,2}(A)$ . Замена базисов позволяет отождествлять расслоения, построенные по эквивалентным матрицам, где  $\phi \sim \phi'$ , если  $\phi' = \rho \phi \sigma^{-1}$ ,  $\rho \in \mathrm{GL}_4 A$ ,  $\sigma \in \mathrm{GL}_2 A$ .

Покажем сначала, что каждая невырожденная  $\phi$  (см. 2.1.3) эквивалентна матрице вида (2.1.2). Действительно, ограничивая (7) в точку  $t_0 = 0$  получим, что  $\mathrm{rk} \phi_1 = 2$ . Теория элементарных делителей (используем специфику  $A$  – см. 2.1.8) позволяет считать, что  $\phi \sim \phi^{(1)}$ , где

$$\phi_1^{(1)} = \begin{bmatrix} 1_2 \\ 0_2 \end{bmatrix} \in M_{4,2}(A).$$

Стабилизатор  $\phi_1^{(1)}$  в  $\mathrm{GL}_4 A \times \mathrm{GL}_2 A$  состоит из пар  $(\rho, \alpha^{-1})$ , где  $\rho = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$ . Из теории элементарных делителей и свободы выбора  $\alpha$  и  $\delta$  следует, что  $\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)}$ , где

$$\phi_1^{(2)} = \phi_1^{(1)}, \quad \phi_0^{(2)} = \begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix}, \quad \text{а} \quad N = \begin{bmatrix} \nu_1 \nu & 0 \\ 0 & \nu_1 \end{bmatrix}.$$

Необычный порядок элементарных делителей в  $N$  обусловлен тем, что при таком выборе ниже появляется конгруэнц-подгруппа  $\tilde{\Gamma}_0(\nu)$ , а не транспонированная к ней.

Из невырожденности  $\phi$  следует, что  $\nu_1 \in A^*$ . Действительно, иначе найдется простой идеал  $\pi$ , делящий  $\nu_1$ , и у  $\phi_0^{(2)}$  остается единственный 2-минор, который может быть ненулевым по модулю  $\pi$ . Этот минор, как и всякий однородный полином степени 2, имеет нули на  $\mathbf{P}^1 \otimes A/\pi$ , что противоречит невырожденности.

Так как  $\nu_1 \in A^*$ , то на предыдущем шаге мы могли добиться того, чтобы  $\nu_1 = 1$ . Считаем, что мы так и сделали. Итак,

$$\phi^{(1)} \sim \phi^{(2)} = t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_0 \begin{bmatrix} M \\ N(\nu) \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad N(\nu) = \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Будем считать (см. 2.1.2), что  $M = M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ . Из предположений об общем слое  $F$  вытекает (см. 2.1.5), что  $\nu \neq 0$ .

Стабилизатор  $\phi^{(2)}$  в  $\mathrm{GL}_4 A \times \mathrm{GL}_2 A$  состоит из пар  $(\rho, \alpha^{-1})$ , где  $\delta N(\nu) \alpha^{-1} = N(\nu)$ . Целочисленность  $\delta$  равносильна условию  $\alpha \in \tilde{\Gamma}_0(\nu)$ . Осталось понять, что для всякой матрицы  $M = M(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ , где  $(\nu, \varepsilon_1) = 1$ , разрешимо уравнение  $\alpha M \alpha^{-1} + \beta N(\nu) \alpha^{-1} = M(\varepsilon, 0)$  или, иначе говоря, уравнение

$$\alpha \begin{bmatrix} \varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix} \alpha, \quad (8)$$

где  $\alpha = (\alpha_{i,j}) \in \tilde{\Gamma}_0(\nu)$ ,  $\beta = (\beta_{i,j}) \in M_{2,2}(A)$  и  $\varepsilon \in A$  – неизвестные. Сначала, пользуясь леммой 2.1.9, подберем  $\alpha \in \tilde{\Gamma}_0(\nu)$  так, что  $\alpha \begin{bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  для некоторого  $\lambda \in A$ . Это возможно ввиду взаимной простоты  $\nu$  и  $\varepsilon_1$  (см. 2.1.4). Уравнение (8) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu \beta_{1,1} & \beta_{1,2} \\ \nu \beta_{2,1} & \beta_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varepsilon \alpha_{1,1} & \varepsilon \alpha_{1,2} \end{bmatrix}.$$

Осталось найти  $\beta$  и  $\varepsilon$ . Полагаем  $\beta_{1,1} = \beta_{1,2} = 0$ , подбираем  $\beta_{2,1}$  и  $\varepsilon$  из уравнения  $\lambda = \varepsilon \alpha_{1,1} - \xi_{2,1} \nu$  (это возможно, так как  $(\alpha_{1,1}, \nu) = 1$ ) и полагаем  $\beta_{2,2} = \varepsilon \alpha_{1,2}$ .  $\square$

Попробуем описать морфизмы между расслоениями из (2.1.10).

**2.1.11 Предложение.** *Здесь достаточно предположить, что  $A$  – область. Пусть  $F = F^{\nu, \varepsilon, 0}$ ,  $G = F^{\mu, \zeta, 0}$ , где  $(\nu, \varepsilon) = 1$ ,  $(\mu, \zeta) = 1$ ,  $\nu \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$ . Композиция функтора  $H^0$  и канонических изоморфизмов  $H^0(X, F) \simeq A^2$  и  $H^0(X, G) \simeq A^2$  из 2.1.3), отождествляет  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$  с множеством  $\theta \in M_{2,2}(A)$  (переводя при этом композиции в произведения), для которых выполнены следующие условия целочисленности матриц*

$$N(\mu) \theta N(\nu)^{-1} \in M_{2,2}(A), \quad (M(\zeta, 0) \theta - \theta M(\varepsilon, 0)) N(\nu)^{-1} \in M_{2,2}(A),$$

где  $N(\nu)^{-1}, N(\nu) \in M_{2,2}(K)$ .

*Доказательство.* Фунториальность спектральной последовательности Бейлинсона сводит вычисление  $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(F, G)$  к перечислению коммутативных диаграмм вида

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{O}^2(-2) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{O}^4(-1) & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0, \\ \theta \downarrow & & \downarrow \lambda & & & & \\ \mathcal{O}^2(-2) & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{O}^4(-1) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

где  $\phi$  и  $\psi$  – стрелки из определения  $F$  и  $G$ . Вот уравнения коммутативности:

$$\begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ \zeta t_0 & t_1 \\ \mu t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{bmatrix} \theta = \begin{bmatrix} \lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ \varepsilon t_0 & t_1 \\ \nu t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{bmatrix}.$$

При  $t_0 = 0$  коммутирование сводится к равенствам  $\theta = \lambda_{1,1}$ ,  $\lambda_{2,1} = 0$ . С учетом этих равенств при  $t_1 = 0$  коммутирование сводится к соотношениям  $\lambda_{2,2} = N(\mu)\theta N(\nu)^{-1}$ ,  $\lambda_{1,2} = (M(\zeta, 0)\theta - \theta M(\varepsilon, 0))N(\nu)^{-1}$ . Итак, все определено  $\theta$ , но не всякая матрица подходит: нужна целочисленность  $\lambda_{1,2}$  и  $\lambda_{2,2}$ .  $\square$

**2.1.12 Теорема.** *Здесь достаточно предположить, что  $A$  – область. Пусть  $F = F^{\nu, \varepsilon, 0}$ ,  $G = F^{\mu, \zeta, 0}$ , где  $(\nu, \varepsilon) = 1$ ,  $(\mu, \zeta) = 1$ ,  $\nu \neq 0$ ,  $\mu \neq 0$ . Расслоения  $F$  и  $G$  изоморфны тогда и только тогда, когда имеется равенство идеалов  $(\nu) = (\mu)$  и существуют глобальная единица  $\eta \in A^*$  и  $\lambda \in A$ , для которых*

$$\zeta \lambda^2 \equiv \varepsilon \eta \pmod{\nu}.$$

*Доказательство.* Если  $F \simeq G$ , то  $(\mu) = (\nu)$  (см. 2.1.7). Если изоморфизм  $F \rightarrow G$  задан  $\theta \in \text{GL}_2 A$  из предложения 2.1.11, то  $\theta$  и  $\theta^{-1}$  удовлетворяет указанным в этом предложении условиям целочисленности. Вычисления показывают, что  $\theta = (\theta_{i,j})$  задает изоморфизм тогда и только тогда, когда по модулю  $\nu$  выполнены сравнения  $\theta_{2,1} \equiv 0$ ,  $\varepsilon \theta_{2,2} \equiv \zeta \theta_{1,1}$ ,  $\varepsilon \theta_{1,2} \equiv 0$ ,  $\zeta \theta_{1,2} \equiv 0$ . Ввиду обратимости  $\varepsilon$  и  $\zeta$  по модулю  $\nu$  эти сравнения равносильны тому, что

$$\theta_{2,1} \equiv \theta_{1,2} \equiv 0, \quad \varepsilon \theta_{2,2} \equiv \zeta \theta_{1,1}. \quad (9)$$

Пусть  $\eta = \det \theta \in A^*$ . Тогда  $\eta \equiv \theta_{1,1} \theta_{2,2} \equiv \zeta \varepsilon^{-1} \theta_{1,1}^2 \pmod{\nu}$ , что доказывает необходимость условий изоморфности.

Для проверки достаточности найдем  $\chi \in A$  так, что

$$\chi \varepsilon \equiv 1 \pmod{\nu}. \quad (10)$$

Сравнение  $\zeta \lambda^2 \equiv \varepsilon \eta \pmod{\nu}$  из условий запишем в виде  $\eta = \zeta \chi \lambda^2 + \kappa \nu$ , где  $\kappa \in A$ . Найдем  $\omega, \tau \in A$  так, что  $\omega \lambda = \kappa + \tau \nu$ . Положим  $\theta_{1,1} = \lambda$ ,  $\theta_{2,2} = \zeta \chi \lambda + \omega \nu$ ,  $\theta_{2,1} = \tau \nu$ ,  $\theta_{1,2} = \nu$ . Построенная матрица  $(\theta_{i,j})$  индуцирует изоморфизм  $F \rightarrow G$ . Условие  $\theta \in \text{GL}_2 A$  вытекает из определений  $\theta$ ,  $\tau$ ,  $\omega$ ,  $\kappa$  и того, что  $\det \theta = \eta \in A^*$  – глобальная единица. Осталось проверить (9). Сравнения  $\theta_{2,1} \equiv \theta_{1,2} \equiv 0 \pmod{\nu}$  вытекают из определения  $\theta$ , а  $\varepsilon \theta_{2,2} \equiv \zeta \theta_{1,1}$  вытекает из определения  $\theta$  и (10).  $\square$

**2.1.13. Пример.** Теоремы 2.1.10 и 2.1.12 полностью классифицируют 2-расслоения с тривиальным общим слоем и простыми подскоками в случае факториального дедекиндова кольца  $A$ .

Для  $A = \mathbb{C}[t]$  классы изоморфизма интересующих нас расслоений отождествлены с эффективными дивизорами на  $\mathbf{A}^1$ .

Пусть  $A = \mathbb{R}[t]$ . Если  $\nu$  – неприводимый полином, то имеется всего один класс изоморфизма с данным  $\nu$ , независимо от степени. Это связано с тем, что в степени один отрицательные вычеты представимы глобальными единицами. Однако, если  $\nu = p_1^{n_1} \cdots p_e^{n_e} q_1^{m_1} \cdots q_d^{m_d}$ , где  $p_i$  – неприводимые полиномы первой степени, а  $q_i$  – неприводимые полиномы второй степени, то при  $e \geq 1$  имеется  $2^{e-1}$  класс изоморфизма расслоений с данным  $\nu$ .

Похожая, но чуть более интересная картина имеет место для  $A = \mathbb{F}_q[t]$  и  $A = \mathbb{Z}$ . Например, для  $A = \mathbb{Z}$  имеется два расслоения с  $\nu = 5$ , так как единственная нетривиальная глобальная единица  $(-1)$  – квадрат по модулю  $\nu$  (аналогично для всякого простого  $\nu \equiv 1 \pmod{4}$ ) и только одно расслоение с  $\nu = 7$  (аналогично для всякого простого  $\nu \equiv 3 \pmod{4}$ ).

### 3 Минимальные линейные фильтрации

Пусть  $E$  – расслоение на  $\mathbf{P}_A^1$ . Наша цель состоит в том, чтобы находить фильтрацию  $E$  с линейными факторами как можно меньших (по абсолютной величине) степеней. Эту задачу будем решать в довольно частных случаях. А именно, в этом разделе будем предполагать, что  $A$  – факториальное дедекиндово кольцо,  $E$  – расслоение ранга 2 и существует хотя бы одна фильтрация  $E$  с линейными факторами.

Так как  $A$  факториально, то, по теореме Серра (см. 1.2.2), каждый линейный фактор имеет вид  $\mathcal{O}(d)$ .

#### 3.1 Амплитуда расслоения

Предположим дополнительно, что общий слой  $E$  тривиален, то есть  $E_\eta \cong \mathcal{O}^2$ . Тогда в каждой фильтрации с линейными факторами

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset E_2 = E, \quad (11)$$

линейные расслоения  $E_1$  и  $E/E_1$  двойственны.

Действительно, линейное расслоение  $\text{Det } E \cong \mathcal{O}(d)$  для некоторого целого  $d$  ввиду факториальности  $A$  и теоремы Серра (см. 1.2.2). Ограничение этого изоморфизма на общий слой и тривиальностью общего слоя  $E_\eta$  показывают, что  $d = 0$  и  $\text{Det } E \cong \mathcal{O}$ . Но в этом случае  $E_1 \otimes E/E_1 \cong \text{Det } E \cong \mathcal{O}$ . Изоморфизм  $E_1 \otimes E/E_1 \cong \mathcal{O}$  и есть заявленная двойственность.

Таким образом, всякий раз, как есть фильтрация  $E$  вида (11), имеется и такое целое число  $d$ , что

$$E/E_1 \cong \mathcal{O}(d) \text{ и } E_1 \cong \mathcal{O}(-d).$$

Более того,

$$d \geq 0.$$

Действительно, фильтрация (11) индуцирует элемент в

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(E/E_1, E_1) = \text{Ext}_{\mathcal{O}}^1(\mathcal{O}(d), \mathcal{O}(-d)).$$

Но при  $d < 0$  эта группа тривиальна и, следовательно  $E \cong \mathcal{O}(-d) + \mathcal{O}(d)$ , что противоречит тривиальности общего слоя.

**3.1.1 Определение.** Пусть  $E$  векторное расслоение на  $\mathbf{P}_A^1$ , удовлетворяющее свойствам, указанным выше в разделе 3. Амплитудой  $E$  называется минимальное из целых неотрицательных чисел  $d$ , для которых существует фильтрация  $E$  вида (11) с  $E/E_1 \cong \mathcal{O}(d)$  (и следовательно с  $E_1 \cong \mathcal{O}(-d)$ ). Амплитуду  $E$  обозначим  $a(E)$ .

## 3.2 Локальные амплитуды

Предположим, что  $A$  – локальное кольцо. В этом случае амплитуда вычисляется очень просто и определяется типом расщепления в замкнутой точке. Это вытекает из следующего небольшого добавления к результату Хоррокса 1.3.1.

**3.2.1 Предложение.** Пусть  $A$  – локальное дедекиндово кольцо,  $E$  – векторное расслоение  $E$  на  $\mathbf{P}_A^1$ ,  $y$  – замкнутая точка  $\mathrm{Spec} A$  и  $E_y = \mathcal{O}(d_1) + \dots + \mathcal{O}(d_n)$ , где  $d_1 \leq \dots \leq d_n$ . Тогда существует фильтрация

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_r = E,$$

где  $E_i$  – векторное расслоение и  $E_i/E_{i-1} \cong \mathcal{O}(d_i)$  для  $i = 1, \dots, r$ .

*Доказательство.* Достаточно найти такое вложение  $\mathcal{O}(d_1) \rightarrow E$ , что  $E/\mathcal{O}(d_1)$  – векторное расслоение, и воспользоваться индукцией. Заменим  $E$  на  $E(-d_1)$  и будем считать, что  $d_1 = 0$ . Пусть  $H^n(E)$  обозначает  $A$ -модуль  $R^n p_* E$ , где  $p : \mathbf{P}_A^1 \rightarrow \mathrm{Spec} A$  – структурная проекция. Пусть  $F$  – поле вычетов в  $y$ . Пользуясь следствием теоремы Гротендика о замене базы в плоском семействе (см. 1.2.6), последовательно видим, что  $H^1(E) = 0$  и гомоморфизм ограничения  $H^0(E) \otimes_A F \rightarrow H^0(E_y)$  – изоморфизм. Таким образом, можно выбрать сечение  $s \in H^0(E)$ , индуцирующее вложение  $\mathcal{O}$  на слагаемое в  $E_y$ . Тогда  $s : \mathcal{O} \rightarrow E$  в качестве фактора имеет векторное расслоение.  $\square$

## 3.3 Локальные ограничения на амплитуду

Утверждается, что  $a(E) \geq a(E_y)$ , где  $y$  – произвольная замкнутая точка  $\mathrm{Spec} A$ . Это точно вытекает из определения амплитуды как минимума по фильтрациям и из того, что глобальные фильтрации индуцируют локальные.

Положим

$$a_{loc}(E) = \max_y a(E_y).$$

где  $y$  пробегает замкнутые точки  $\mathrm{Spec} A$ . Тогда

$$a(E) \geq a_{loc}(E). \quad (12)$$

## 3.4 Расслоения без подскоков

Иначе говоря, речь идет о расслоениях, для которых  $a_{loc}(E) = 0$  или, иными словами, все локальные амплитуды равны нулю. Утверждается, что всякое такое расслоение тривиально. Это вытекает из следующего более общего результата.

**3.4.1 Предложение.** *Предположим, что кольцо  $A$  дедекиндово,  $E$  – векторное расслоение на  $\mathbf{P}_A^1$  произвольного ранга. Если функция  $y \mapsto d_1(E, y)$  (см. 1.2.3) постоянна на множестве замкнутых точек  $\text{Spec } A$ , то в  $E$  можно так вложить  $\mathcal{O}(d)$  ( $d$  – общее значение  $d_1(E, y)$ ), что  $E/\mathcal{O}(d)$  – векторное расслоение.*

*Доказательство.* По существу это предложение доказано в ходе доказательства предложения (3.2.1). Но все же приведем некоторые подробности. Заменяем  $E$  на  $E(-d)$  и будем считать, что  $d = 0$ . Пусть  $F$  – поле вычетов в  $y$ . Пользуясь следствием теоремы о замене базы в плоском семействе (см. 1.2.6), последовательно видим, что  $H^1(E) = 0$  и гомоморфизм ограничения  $H^0(E) \otimes_A F \rightarrow H^0(E_y)$  – изоморфизм. Таким образом, можно выбрать сечение  $s \in H^0(E)$ , индуцирующее вложение  $\mathcal{O}$  на слагаемое в  $E_y$ . Тогда  $s : \mathcal{O} \rightarrow E$  в качестве фактора имеет векторное расслоение.  $\square$

### 3.5 Расслоения с простыми подскоками

Речь пойдет о расслоениях, для которых  $a_{loc}(E) = 1$  или, иными словами, о расслоениях, для которых почти все локальные амплитуды равны нулю, все подскоки простые и хотя бы один подскок имеется. Будет показано, что для вычисления глобальной амплитуды знания локальных данных, а именно локальных амплитуд, недостаточно.

Далее ограничимся изучением  $\mathcal{O}$ -модуля

$$E = F^{\beta, \alpha, 0} = \text{Coker} [\mathcal{O}(-2)^2 \rightarrow \mathcal{O}(-1)^4],$$

где стрелка задана матрицей

$$\phi = \begin{bmatrix} t_1 & 0 \\ \alpha & t_1 \\ \beta t_0 & 0 \\ 0 & t_0 \end{bmatrix}, \quad (\beta, \alpha) = 1, \beta \neq 0, \beta \notin A^*. \quad (13)$$

Условие взаимной простоты  $\alpha$  и  $\beta$  гарантирует то, что  $E$  является расслоением ранга два (см. 2.1.4). Условие  $\beta \neq 0$  гарантирует тривиальность общего слоя  $E$  и простоту подскоков, а условие  $\beta \notin A^*$  гарантирует существование хотя бы одного подскока (см. 2.1.6).

**3.5.1. Матрица склейки для  $E$ .** Для вычисления образа стрелки  $\phi$  из определения  $F$  и фактора по нему зафиксируем обозначения. Как и выше, стандартный  $\mathcal{O}$ -базис  $\mathcal{O}^2$  обозначим  $e_1, e_2$ , а стандартный  $\mathcal{O}^4$  обозначим  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .

Чтобы найти матрицу склейки для  $E$ , зафиксируем представление

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \quad (14)$$

Тривиализуем  $E$  на  $U_0$ . В этом случае  $\phi$  можно записать в виде

$$\phi|_{U_0} = t_0 \begin{bmatrix} x & 0 \\ \alpha & x \\ \beta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



На  $U_0$  в качестве базиса образа  $\phi$  можно взять  $\phi(t_0^{-2}e_1)$  и  $\phi(t_0^{-2}e_2)$ , то есть столбцы  $\phi|_{U_0}$ . Для вычисления фактора необходимо дополнить  $\phi|_{U_0}$  до обратимой. Подойдет

$$\widetilde{\phi|_{U_0}} = t_0 \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ \alpha & x & \gamma & 0 \\ \beta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det \widetilde{\phi|_{U_0}} = t_0^4.$$

Итак,  $\mathcal{O}_{U_0}$ -модуль  $\mathcal{O}(-1)^4|_{U_0}$  имеет базис

$$t_0^{-1}[g_1, \dots, g_4] = t_0^{-2}[f_1, \dots, f_4]\widetilde{\phi|_{U_0}}, \quad (15)$$

причем  $t_0^{-1}[\bar{g}_3, \bar{g}_4]$  – базис фактора, то есть базис  $E|_{U_0}$ .

Тривиализуем  $E$  на  $U_1$ . В этом случае  $\phi$  можно записать в виде

$$\phi|_{U_1} = t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha y & 1 \\ \beta y & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}, \quad \text{где } y = t_0/t_1 = x^{-1}.$$

Для вычисления фактора нужно дополнить  $\phi|_{U_1}$  до обратимой. Например, так:

$$\widetilde{\phi|_{U_1}} = t_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha y & 1 & 0 & 0 \\ \beta y & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det \widetilde{\phi|_{U_1}} = t_1^4.$$

Итак,  $\mathcal{O}_{U_1}$ -модуль  $\mathcal{O}(-1)^4|_{U_1}$  имеет базис

$$t_1^{-1}[h_1, \dots, h_4] = t_1^{-2}[f_1, \dots, f_4]\widetilde{\phi|_{U_1}}, \quad (16)$$

причем  $t_1^{-1}[\bar{h}_3, \bar{h}_4]$  – базис фактора, то есть базис  $E|_{U_1}$ .

Напишем матрицу перехода на  $U_{01}$ . Для этого запишем  $t_1^{-1}h_3$  и  $t_1^{-1}h_4$  в терминах  $t_0^{-1}g_1, t_0^{-1}g_2, t_0^{-1}g_3, t_0^{-1}g_4$ . Сначала обратим матрицу для выражения  $t_0^{-1}g_i$  через  $t_0^{-2}f_j$  (см. (15)). Вычисления показывают, что

$$\widetilde{\phi|_{U_0}}^{-1} = t_0^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \delta & -\gamma & -\delta x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\beta & \alpha & \beta x \\ 1 & -\delta x & \gamma x & \delta x^2 \end{bmatrix}.$$

С учетом (15) и (16) получаем  $t_1^{-1}[h_1, h_2, h_3, h_4] = x^{-2}t_0^{-1}[g_1, g_2, g_3, g_4]\widetilde{\phi|_{U_0}}^{-1}\widetilde{\phi|_{U_1}}$ . Вычисления показывают, что

$$\widetilde{\phi|_{U_0}}^{-1}\widetilde{\phi|_{U_1}} = x \begin{bmatrix} y & -\delta & -\gamma & -\delta x \\ 0 & y & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta x \\ 0 & 0 & \gamma x & \delta x^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда  $\text{mod } g_1, g_2$  получаем, что

$$t_1^{-1} \begin{bmatrix} h_3 & h_4 \end{bmatrix} = x^{-2} x \begin{bmatrix} \alpha & \beta x \\ \gamma x & \delta x^2 \end{bmatrix} t_0^{-1} \begin{bmatrix} g_3 & g_4 \end{bmatrix}.$$

Итак, расслоение  $E$  может быть задано с помощью матрицы склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha y & \beta \\ \gamma & \delta x \end{bmatrix}, \quad \det \sigma = 1. \quad (17)$$

Иными словами, можно считать, что выбраны базисы  $[e_1, e_2]$  ограничения  $E$  на  $U_0$  и  $[f_1, f_2]$  ограничения  $E$  на  $U_1$ , причем

$$[e_1, e_2] \begin{bmatrix} \alpha x^{-1} & \beta \\ \gamma & \delta x \end{bmatrix} = [f_1, f_2] \text{ или } [e_1, e_2] = [f_1, f_2] \begin{bmatrix} \delta x & -\beta \\ -\gamma & \alpha x^{-1} \end{bmatrix} \text{ на } U_{01}.$$

Мы уже знаем, что  $E$  имеет тривиальный общий слой и простые подскоки в делителях  $\beta$  (см. 2.1.5). Однако нам потребуются явные отождествления с  $\mathcal{O}^2$  и  $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$  в соответствующих случаях.

**3.5.2. Общий слой.** Укажем изоморфизм  $E \otimes \mathbb{Z}[1/\beta] \simeq \mathcal{O}^2$ . Пусть  $[g_1, g_2]$  – стандартный базис  $\mathcal{O}^2$  на  $U_0$ , а  $[h_1, h_2]$  – стандартный базис  $\mathcal{O}^2$  на  $U_1$ . Иными словами,

$$[g_1, g_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [h_1, h_2] \text{ или } [g_1, g_2] = [h_1, h_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ на } U_{01}.$$

Изоморфизм  $E \otimes \mathbb{Z}[1/\beta] \simeq \mathcal{O}^2$  устроен так:

$$[g_1, g_2] \begin{bmatrix} \delta x & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = [e_1, e_2] \quad \text{и} \quad [f_1, f_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha \beta^{-1} x^{-1} & \beta^{-1} \end{bmatrix} = [h_1, h_2].$$

Эти  $U_0$ - и  $U_1$ -изоморфизмы согласованы с матрицами перехода:

$$\begin{bmatrix} \delta x & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha x^{-1} & \beta \\ \gamma & \delta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha \beta^{-1} x^{-1} & \beta^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**3.5.3. Специальные слои.** Укажем изоморфизм  $E \otimes A/\beta \simeq \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$ . В качестве базисов  $\mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$  на  $U_0$  возьмем  $[t_0^{-1}g_1, t_0g_2]$  и  $[t_1^{-1}h_1, t_1h_2]$ , где  $[g_1, g_2]$  и  $[h_1, h_2]$  – стандартные базисы  $\mathcal{O}^2$  на  $U_0$  и  $U_1$ . Тогда

$$[t_0^{-1}g_1, t_0g_2] \begin{bmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = [t_1^{-1}h_1, t_1h_2] \text{ или } [t_0^{-1}g_1, t_0g_2] = [t_0^{-1}h_1, t_0h_2] \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} \text{ на } U_{01}.$$

Изоморфизм  $E \otimes A/\beta \simeq \mathcal{O}(-1) + \mathcal{O}(1)$  устроен так:

$$[t_0^{-1}g_1, t_0g_2] \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ -\gamma x & \alpha \end{bmatrix} = [e_1, e_2] \quad \text{и} \quad [f_1, f_2] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [t_1^{-1}h_1, t_1h_2].$$

Эти  $U_0$ - и  $U_1$ -изоморфизмы согласованы с матрицами перехода:

$$\begin{bmatrix} \delta & 0 \\ -\gamma x & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha x^{-1} & \beta \\ \gamma & \delta x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{-1}(1 + \beta\gamma) & \beta\delta \\ 0 & x \end{bmatrix}.$$

Мы собираемся понять, верно ли равенство  $a(E) = 1$ , то есть изучить вопрос о фильтруемости  $E$  вида  $E_1 \subset E$  с  $E_1 \cong \mathcal{O}(-1)$  и  $E/E_1 \cong \mathcal{O}(1)$ . Такая фильтруемость  $E$  равносильна существованию глобального сечения  $V = E(1)$ , нигде не обращающегося в ноль.

В дальнейших вычислениях в качестве базиса  $V$  на  $U_0$  возьмем  $t_0[e_1, e_2]$ , где  $[e_1, e_2]$  – базис  $E$  на  $U_0$ , а в качестве базиса  $V$  на  $U_1$  возьмем  $t_1[f_1, f_2]$ , где  $[f_1, f_2]$  – базис  $E$  на  $U_1$ . Тогда

$$t_0[e_1, e_2] \begin{bmatrix} \alpha & \beta x \\ \gamma x & \delta x^2 \end{bmatrix} = t_1[f_1, f_2] \text{ или } t_0[e_1, e_2] = t_1[f_1, f_2] \begin{bmatrix} \delta & -\beta x^{-1} \\ -\gamma x^{-1} & \alpha x^{-2} \end{bmatrix} \text{ на } U_{01}.$$

**3.5.4. Вычисление  $H^0(V)$ .** Общее  $U_0$ -сечение  $s = (s_1 e_1 + s_2 e_2) t_0$ , где  $s_i \in A[x]$ , в  $U_1$ -базисе выглядит так:  $s = (\delta s_1 - \beta x^{-1} s_2) t_1 f_1 + (-\gamma x^{-1} s_1 + \alpha x^{-2} s_2) t_1 f_2$ . Поэтому условия глобальности  $s$  таковы:

$$\begin{cases} c_1 : & \delta s_1 - \beta x^{-1} s_2 \in A[x^{-1}]; \\ c_2 : & -\gamma x^{-1} s_1 + \alpha x^{-2} s_2 \in A[x^{-1}]. \end{cases}$$

Отсюда легко видеть, что  $x^{-1} s_1, x^{-2} s_2 \in A[x^{-1}]$ : достаточно рассмотреть линейную комбинацию  $\gamma x^{-1} c_1 + \delta c_2$ , где  $c_1$  и  $c_2$  – условия глобальности  $s$ . Поэтому  $s_1 = u_0 + u_1 x$ ,  $s_2 = v_0 + v_1 x + v_2 x^2$ . На  $u_i$  и  $v_j$  получили уравнение:  $\delta u_1 = \beta v_2$ . Поскольку  $\alpha$  и  $\gamma$  взаимно просты, то общее глобальное сечение  $V$  имеет вид:

$$s = (u_0 + \beta w x) t_0 e_1 + (v_0 + v_1 x + \delta w x^2) t_0 e_2, \text{ где } u_0, v_0, v_1, w \in A. \quad (18)$$

**3.5.5. Незануляемость сечения над  $A[1/\beta]$ .** Поймем, когда сечение  $s$  вида (18) не имеет нулей на  $\mathbf{P}^1 \otimes A[1/\beta]$ . Для этого идентифицируем  $s$  как сечение  $\mathcal{O}(1)^2$ , пользуясь изоморфизмом из 3.5.2. В качестве базиса  $\mathcal{O}^2(1)$  на  $U_0$  возьмем  $t_0[g_1, g_2]$ , где  $[g_1, g_2]$  – стандартный базис  $\mathcal{O}^2$  на  $U_0$ . Изоморфизм  $V \otimes \mathbb{Z}[1/\beta] \simeq \mathcal{O}^2(1)$  (см. 3.5.2) на  $U_0$  устроен так:

$$t_0[g_1, g_2] \begin{bmatrix} \delta x & -\beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = t_0[e_1, e_2].$$

Общее сечение  $\mathcal{O}(1)^2$  имеет вид:  $(a_{10} t_0 + a_{01} t_1) g_1 + (b_{10} t_0 + b_{01} t_1) g_2$ . Выразим общее сечение  $V$  в этих терминах:  $s = (u_0 + \beta w x) t_0 e_1 + (v_0 + v_1 x + \delta w x^2) t_0 e_2 = (u_0 + \beta w x)(t_0 g_2 - \delta x t_0 g_1) + (v_0 + v_1 x + \delta w x^2)(-\beta t_0 g_1) = (-\beta v_0 + [\delta u_0 - \beta v_1] x) t_0 g_1 + (u_0 + \beta w x) t_0 g_2$ . Иначе говоря,

$$a_{10} = -\beta v_0, a_{01} = \delta u_0 - \beta v_1, b_{10} = u_0, b_{01} = \beta w.$$

Итак, по сечению  $s \in H^0(V)$  построили сечение  $\mathcal{O}(1)^2$  над  $A[\beta^{-1}]$ , то есть пару полиномов 1-й степени. Наличие у них общих нулей детектируется результатом

$$R_{11}(a_{10}, a_{01}; b_{10}, b_{01}) = \det \begin{bmatrix} a_{10} & a_{01} \\ b_{10} & b_{01} \end{bmatrix} = a_{10} b_{01} - a_{01} b_{10}.$$

Подставляем выражения для  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  через координаты общего целочисленного сечения, получаем условие

$$-\delta u_0^2 + \beta u_0 v_1 - \beta^2 v_0 w \in A[\beta^{-1}]^*. \quad (19)$$

Наборы  $(u_0, v_0, v_1, w) \in A^4$ , удовлетворяющие этому условию, соответствуют глобальным целочисленным сечениям  $V$ , не имеющим нулей вне делителей  $\beta$ .

**3.5.6. Незануляемость сечения над делителями  $\beta$**  Поймем, когда сечение  $s$  вида (18) не имеет нулей на  $\mathbf{P}^1 \otimes A/\pi$ , где  $\pi$  – простой делитель  $\beta$ . Для этого идентифицируем  $s$  как сечение  $\mathcal{O} + \mathcal{O}(2)$ , пользуясь изоморфизмом из 3.5.3. В качестве базиса  $\mathcal{O} + \mathcal{O}(2)$  на  $U_0$  возьмем  $[g_1, t_0^2 g_2]$ , где  $[g_1, g_2]$  – стандартный базис  $\mathcal{O}^2$  на  $U_0$ . Изоморфизм  $V \otimes A/\pi \simeq \mathcal{O} + \mathcal{O}(2)$  (см. 3.5.3) на  $U_0$  устроен так:

$$[g_1, t_0^2 g_2] \begin{bmatrix} \delta & 0 \\ -\gamma x & \alpha \end{bmatrix} = t_0 [e_1, e_2].$$

Общее сечение  $\mathcal{O} + \mathcal{O}(2)$  имеет вид:  $a_{00}g_1 + (b_{20}t_0^2 + b_{11}t_0t_1 + b_{02}t_1^2)g_2$ . Выразим общее сечение  $V$  в этих терминах:  $s \pmod{\pi} = (u_0 + \beta wx)t_0e_1 + (v_0 + v_1x + \delta wx^2)t_0e_2 = (u_0 + \beta wx)(\delta g_1 - \gamma xt_0^2 g_2) + (v_0 + v_1x + \delta wx^2)(\alpha t_0^2 g_2) = (\delta u_0 + \beta \delta wx)g_1 + (\alpha v_0 + [\alpha v_1 - \gamma u_0]x + wx^2)t_0^2 g_2$ . Иначе говоря (приведем все по модулю  $\pi$ ),

$$a_{00} = \delta u_0, b_{20} = \alpha v_0, b_{11} = \alpha v_1 - \gamma u_0, b_{02} = w.$$

Итак, по сечению  $s \in H^0(V)$  построили сечение  $\mathcal{O} + \mathcal{O}(2)$  над  $A/\pi$ , то есть пару полиномов: нулевой и 2-й степени. Наличие у них общих нулей детектируется результатом

$$R_{02}(a_{00}; b_{20}, b_{11}, b_{02}) = \det \begin{bmatrix} a_{00} & 0 \\ 0 & a_{00} \end{bmatrix} = a_{00}^2.$$

Подставляем выражения для  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  через координаты общего целочисленного сечения и получаем условие  $\delta^2 u_0^2 \neq 0 \pmod{\pi}$  или

$$u_0 \neq 0 \pmod{\pi}. \quad (20)$$

Наборы  $(u_0, v_0, v_1, w) \in A^4$ , удовлетворяющие этому условию, соответствуют глобальным целочисленным сечениям  $V$ , не имеющим нулей над  $A/\pi$ , где  $\pi$  – делитель  $\beta$ .

**3.5.7. Вывод.** Фильтруемость  $E$  вида  $E_1 \subset E$  с  $E_1 \cong \mathcal{O}(-1)$  и  $E/E_1 \cong \mathcal{O}(1)$  равносильна существованию набора  $(u_0, v_0, v_1, w) \in A^4$ , удовлетворяющего условиям:

$$\begin{cases} \delta u_0^2 - \beta u_0 v_1 + \beta^2 v_0 w \in A[\beta^{-1}]^* \\ u_0 \pmod{\beta} \in (A/\beta)^*. \end{cases} \quad (21)$$

Конечно, разрешимость этих условий может быть проверена, например, предъявлением набора. Однако что делать, если решений найти не удастся? В этом случае желательно уметь проверять неразрешимость. Как уже упоминалось выше, никаких локальных препятствий для разрешимости нет. Однако, используя некоторую глобальную информацию, а именно знание единиц  $A[\beta^{-1}]$ , можно слегка модифицировать систему (21), после чего локальные препятствия могут появиться.

А именно, пусть  $\pi_1, \dots, \pi_r$  – все простые делители  $\beta$ . Разрешимость (21) очевидно равносильна существованию неотрицательных целых  $n_1, \dots, n_r$  и  $\theta \in A^*$ , для которых разрешима система

$$\begin{cases} \delta u_0^2 - \beta u_0 v_1 + \beta^2 v_0 w = \theta \pi_1^{n_1} \dots \pi_r^{n_r}. \\ v_0 \pmod{\beta} \in (A/\beta)^*. \end{cases} \quad (22)$$

Более того, очевидно, что  $\text{ord}_\pi(\delta) = 0$  для всякого  $p$ , делящего  $\beta$ . Поэтому из второго условия следует, что все  $n_i = 0$ , а система (22) равносильна существованию глобальной единицы  $\theta \in A^*$ , для которой разрешимо уравнение

$$\delta u_0^2 - \beta u_0 v_1 + \beta^2 v_0 w = \theta. \quad (23)$$

Итак, пусть расслоение  $E$  задано матрицей склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} \alpha x^{-1} & \beta \\ \gamma & \delta x \end{bmatrix}, \text{ где } \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in \text{SL}_2 A.$$

Фильтруемость  $E$  вида  $E_1 \subset E$  с  $E_1 \cong \mathcal{O}(-1)$  и  $E/E_1 \cong \mathcal{O}(1)$ . равносильна существованию  $\theta \in A^*$  и четверки  $(u_0, v_0, v_1, w) \in A^4$ , удовлетворяющей (23), то есть равносильна существованию глобальной единицы  $\theta \in A^*$ , для которой уравнение (23) разрешимо в  $A$ .

**3.5.8. Пример.** Пусть  $A = \mathbb{Z}$ , а расслоение  $E$  задано матрицей склейки

$$\sigma = \begin{bmatrix} 2x^{-1} & 5 \\ 1 & 2x \end{bmatrix}.$$

Равенство  $a(E) = 1$  равносильно существованию четверки  $(u_0, v_0, v_1, w) \in \mathbb{Z}^4$ , для которой  $2u_0^2 - 5u_0 v_1 + 25v_0 w = \pm 1$ . Эти уравнения не разрешимы, так как  $\pm 2$  — не квадрат в  $\mathbb{Z}/5$ . Однако можно показать, что существует фильтрация  $E_1 \subset E$  с  $E_1 \cong \mathcal{O}(-2)$  и  $E/E_1 \cong \mathcal{O}(2)$ , то есть  $a(E) = 2$ .

**3.5.9 Теорема.** Пусть  $A = \mathbb{Z}$ . Тогда  $a(E) = 1$ , если и только если либо  $\alpha \pmod{\beta}$  — квадрат и уравнение  $\delta u_0^2 - \beta u_0 v_1 + \beta^2 v_0 w = 1$  разрешимо в  $\mathbb{Z}_2$ , либо  $(-\alpha \pmod{\beta})$  — квадрат и уравнение  $\delta u_0^2 - \beta u_0 v_1 + \beta^2 v_0 w = -1$  разрешимо в  $\mathbb{Z}_2$ .

*Доказательство.* Заметим, что  $\pm \alpha \pmod{\beta}$  — квадрат тогда и только тогда, когда  $\pm \delta$  — квадрат  $\pmod{\beta}$ , соответственно. Это следствие соотношения  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$  (см. (17)). Поэтому достаточно доказать теорему с заменой  $\alpha$  на  $\delta$ .

Далее,  $a(E) = 1$  тогда и только тогда (см. 3.5.7), когда в  $\mathbb{Z}$  разрешимо хотя бы одно из уравнений

$$\delta u_0^2 - \beta u_0 v_1 + \beta^2 v_0 w = \pm 1.$$

Если уравнение  $\delta u_0^2 - \beta u_0 v_1 + \beta^2 v_0 w = 1$  разрешимо в  $\mathbb{Z}$ , то очевидно, что  $\delta$  — квадрат по модулю  $\beta$ . И аналогично для второго уравнения. Таким образом, часть "только если" теоремы доказана.

Наоборот, предположим, что  $\delta \pmod{\beta}$  — квадрат и уравнение  $\delta u_0^2 - \beta u_0 v_1 + \beta^2 v_0 w = 1$  разрешимо в  $\mathbb{Z}_2$ . Нам надо показать, что разрешимо уравнение

$$\delta u_0^2 - \beta u_0 v_1 + \beta^2 v_0 w = 1. \quad (24)$$

Для изучения разрешимости в  $\mathbb{Z}$  этого уравнения применим результаты, приведенные в [4]. Поскольку в определении квадратичной формы из [4, I, §2] требуется четность коэффициентов при произведениях, то рассмотрим уравнения

$$q(u_0, v_0, v_1, w) = 2, \quad \text{где } q(u_0, v_0, v_1, w) = 2\delta u_0^2 - 2\beta u_0 v_1 + 2\beta^2 v_0 w. \quad (25)$$

Это уравнение получено из (24) домножением на 2, что не влияет на целочисленную разрешимость.

Форма  $q$  неопределенная и  $\mathbb{Z}$ -регулярна в смысле [4, стр. 20], то есть невырождена над  $\mathbb{Q}$ . Для таких форм имеется важный (применяется теорема о сильной аппроксимации!) результат [4, теор. 1.5, с. 147], который говорит, что если  $\text{rk } q \geq 4$  (у нас  $\text{rk } q = 4$ ), то целое число представимо тогда и только тогда, когда оно представимо в  $\mathbb{Z}_p$  для каждого  $p$ .

Осталось изучить вопрос о локальной разрешимости уравнения (25). Так как  $\text{disc}(q) = \beta^6$ , то локальная разрешимость вне множества подскоков и двойки есть автоматически. Это вытекает из гладкости соответствующей квадррики, наличия точки на квадрике над конечным полем при ее размерности больше единицы и леммы Гензеля.

Разберемся с локальной разрешимостью в делителях  $\beta$ , то есть в точках подскока. Итак, пусть нечетное простое число  $p$  делит  $\beta$ . С другой стороны, так как  $\delta \pmod p$  – квадрат, то можно взять  $v_0 = v_1 = w = 0$  и воспользоваться леммой Гензеля. Что касается разрешимости в  $\mathbb{Z}_2$ , то она заложена в условия теоремы.

Случай, когда  $(-\delta)$  – квадрат по модулю  $\beta$ , разбирается аналогично.  $\square$

**3.5.10 Следствие.** Пусть  $A = \mathbb{Z}$  и  $E$  не имеет подскока в двойке. Утверждается, что  $a(E) = 1$  тогда и только тогда, когда либо  $\alpha \pmod \beta$  – квадрат, либо  $(-\alpha) \pmod \beta$  – квадрат.

*Доказательство.* Ввиду теоремы 3.5.9 достаточно показать, что при отсутствии подскока в двойке каждое из уравнений  $\delta u_0^2 - \beta u_0 v_1 + \beta^2 v_0 w = \pm 1$  разрешимо в  $\mathbb{Z}_2$ . Отсутствие подскока в двойке равносильно (см. 2.1.6) нечетности  $\beta$ .

Положим  $u_0 = 1$  и  $v_0 = w = 0$ . Уравнения, разрешимость которых мы проверяем, превратятся в  $\delta - \beta v_1 = \pm 1$ . Его решение  $v_1 = -(\pm 1 - \delta)/\beta$  лежит в  $\mathbb{Z}_2$  ввиду обратимости  $\beta$  в  $\mathbb{Z}_2$ .  $\square$

Итак, теорема 3.5.9 и следствие 3.5.10 позволяют установить верность равенства  $a(E) = 1$  для каждого расслоения вида  $F^{\beta, \alpha, 0}$ . Но ввиду теоремы 2.1.10 в случае  $A = \mathbb{Z}$  каждое из расслоений с тривиальным общим слоем и простыми подскоками изоморфно расслоению вида  $F^{\beta, \alpha, 0}$ . Таким образом, для  $A = \mathbb{Z}$  теорема 3.5.9 и следствие 3.5.10 позволяют установить верность равенства  $a(E) = 1$  для каждого расслоения ранга два с тривиальным общим слоем и простыми подскоками.

## Литература

- [1] Р. Хартсхорн. Алгебраическая геометрия. Москва, Мир, 1981.
- [2] Ж.-П. Серр. Когерентные алгебраические пучки. Расслоенные пространства и их приложения. Москва, изд-во Иностранной литературы, 1958.
- [3] К. Оконек, М. Шнайдер, Х. Шпиндлер. Векторные расслоения на комплексных проективных пространствах. Москва, Мир, 1984.
- [4] Дж. Касселс. Рациональные квадратичные формы. Москва, Мир, 1982.
- [5] Ch. C. Hanna. Subbundles of vector bundles on the projective line. J. Algebra, 52, no. 2, 322-327, 1978

- [6] *G. Horrocks*. Projective modules over an extension of a local ring, Proc. London Math. Soc. (3) 14 (1964), 714-718.