

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецеветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

[http://www.pdmi.ras.ru /preprint/](http://www.pdmi.ras.ru/preprint/)

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ АНАЛОГИ
ОПЕРАТОРОВ ДУНКЛА ПЕРВОГО ПОРЯДКА,
АССОЦИИРОВАННЫЕ С МНОГОЧЛЕНАМИ БУРЧНАЛЛА-ЧАУНДИ¹

С.П. ХЭКАЛО

khekalo@mail.ru, khekalo@pdmi.ras.ru

Государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
”Московский государственный областной
социально-гуманитарный институт”
РОССИЯ, 140410, Московская область
Коломна, ул. Зеленая, 30

Декабрь, 2012

АННОТАЦИЯ

В работе, на основе естественного обобщения, строятся и изучаются аналоги дифференциально-разностных операторов Дункла первого порядка. Эти аналоги оказываются тесно связанными с так называемыми многочленами Бурчнала-Чаунди и, следовательно, с преобразованиями Дарбу. Для введенных операторов находятся собственные функции.

Ключевые слова. Дифференциально-разностные операторы, рациональный оператор Дункла первого порядка, многочлен Бурчнала-Чаунди, собственные функции.

¹Работа поддержана грантом Президента РФ, №. МД-3982.2013.1

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В.А. Стеклова
РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М. Бабич, Н.А. Вавилов, А.М. Вершик, М.А. Всемирнов,
А.И. Генералов, И.А. Ибрагимов, Л.Ю. Колотилина,
Г.В. Кузьмина, П.П. Кулиш, Б.Б. Лурье, Ю.В. Матиясевич,
Н.Ю. Нецветаев, С.И. Репин, Г.А. Серегин, В.Н. Судаков, О.М. Фоменко.

0. Введение. Дифференциально-разностные рациональные операторы Дункла, зависящие от многих переменных и параметров, фактически введены в работе [1]. Изучение этих операторов выявило их глубокие связи с различными разделами математики и, в частности, с теорией интегрируемости дифференциальных операторов (см, например, обзор [2] и цитированную там литературу).

Отметим два важных свойства операторов Дункла. Во-первых, эти операторы коммутируют между собой на всем пространстве, а во-вторых, – ограничение суммы квадратов операторов Дункла по ортогональным направлениям на семейство функций, инвариантное относительно действия группы Вейля, есть хорошо известная в теории интегрируемости деформация оператора Лапласа потенциалами Калоджеро-Мозера [2]. (Под деформацией понимается добавление к оператору членов меньшего порядка.)

Первый способ конструирования аналогов операторов Дункла связан со свойством коммутируемости. Так, в работе [3], в явном виде найдены все подобные операторы, сохраняющие свойства коммутируемости на всем пространстве (тригонометрический и эллиптический случаи). Другой подход к построению обобщений (см, например, [4]) основан на упомянутом втором свойстве операторов Дункла. При этом свойство коммутируемости сохраняется уже не на всем пространстве, а лишь на его специальном подмногообразии [5].

В настоящей работе, при построении аналогов операторов Дункла первого порядка, используется второй подход.

Пусть $k \in \mathbf{Z}_+$ – неотрицательный целочисленный параметр; $\frac{d}{dx}$ – оператор взятия производной, действующий на пространстве $\mathcal{F} = \{f(x)\}, x \in \mathbf{R}$, почти всюду дифференцируемых функций; \hat{s} – оператор отражения, действующий на \mathcal{F} по правилу $\hat{s} : f(x) \rightarrow f(-x)$; $\mathcal{F}_{\pm} = \{f_{\pm}(x)\}$ – подпространства соответственно четных и нечетных функций в \mathcal{F} .

На $\mathbf{R}^* = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ рациональный оператор Дункла, с точностью до постоянного множителя, имеет наиболее простой вид

$$\nabla_k = \frac{d}{dx} - \frac{k}{x} \hat{s}. \quad (0.1)$$

С оператором (0.1) связано семейство интегрируемых операторов

$$\mathcal{L}_k = \nabla_k^2|_{\mathcal{F}'_+} = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{k(k-1)}{x^2}, \quad (0.2)$$

являющихся деформациями оператора Лапласа потенциалами Штельмахера [6]. (Символ $\nabla_k^2|_{\mathcal{F}'_+}$ в формуле (0.2) означает ограничение действия квадрата оператора Дункла на подпространство \mathcal{F}'_+ в \mathcal{F} дважды дифференцируемых функций.)

Семейство операторов (0.2), в смысле интегрируемости, оказывается ”слишком бедным”. Это выясняется в работе [8] при изучении проблемы Адамара (более подробно см. [7],[2]) о гюйгенсовых дифференциальных операторах. В [8] был описан более общий класс гюйгенсовых интегрируемых операторов

$$\mathcal{L}_{k,\gamma} = \frac{d^2}{dx^2} + (\ln \mathcal{P}_k^2(|x|))'', \quad \gamma \in \mathbf{R}^{k-1}, \quad k \in \mathbf{N}. \quad (0.3)$$

Операторы (0.3) являются деформациями оператора Лапласа потенциалами Лагнезе-Штельмакхера. Последние, в свою очередь, ассоциированы с так называемыми многочленами Бурчналла-Чаунди [9]:

$$\mathcal{P}_k(x) := \mathcal{P}_k(x, (\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1})), \quad \gamma_i \in \mathbf{R}.$$

Эти многочлены могут быть заданы рекуррентным образом

$$\mathcal{P}_0(x) = 1; \quad \mathcal{P}_1(x) = x; \quad \mathcal{P}'_{k+1}(x) \cdot \mathcal{P}_{k-1}(x) - \mathcal{P}_{k+1}(x) \cdot \mathcal{P}'_{k-1}(x) = (2k+1) \cdot \mathcal{P}_k^2(x).$$

Они зависят от параметра интегрирования $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}) \in \mathbf{R}^{k-1}$ так, что

$$\mathcal{P}_k(x)|_{\gamma=0} = x^{k(k+1)/2} \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_{k,0} = \mathcal{L}_{k+1}. \quad (0.4)$$

Таким образом, возникает задача построения и изучения аналога рационального оператора Дункла (0.1), заданного на симметричном относительно $x = 0$ подмножестве в \mathbf{R}^* , ассоциированного с деформациями (0.3):

$$\nabla_{k,\gamma} = \frac{d}{dx} - \varphi_k(x, \gamma) \hat{s}, \quad \varphi_k(x, 0) = \frac{k}{x}, \quad (0.5)$$

$$\nabla_{k,\gamma}^2|_{\mathcal{F}'_+} = \mathcal{L}_{k-1,\gamma}. \quad (0.6)$$

1. Собственные функции оператора Дункла. В этом пункте приводятся необходимые сведения об операторе Дункла ∇_k (0.1) на \mathbf{R}^* и непосредственно находятся его собственные функции. Собственные функции так же находятся на основе аппарата M -калибровочно эквивалентных операторов, $M \in \mathbf{N}$. Целью такого изложения является подготовительная работа к решению поставленной во введении задачи (0.5)-(0.6).

На \mathcal{F} корректно определены действия операторов

$$\mathcal{T}_\pm = \frac{d}{dx} + \frac{k}{x} (1 \mp \hat{s}),$$

для которых в работе [10] найдены аналитические собственные функции. Фактически это означает, что аналитические собственные функции найдены и для ∇_k . Сообщение об этом опубликовано в [11] и [12]. Приведем доказательство.

ЛЕММА 1.1. *Пусть a, b, A и B – операторы умножения на соответствующую функцию из \mathcal{F} , тогда операторное равенство $a + b \hat{s} = A + B \hat{s}$ на \mathcal{F} равносильно системе*

$$\begin{cases} a = A, \\ b = B. \end{cases}$$

Доказательство. Если $a = A$ и $b = B$, то равенство $a + b \hat{s} = A + B \hat{s}$ на \mathcal{F} очевидно. Рассмотрим сужения операторного равенства $a + b \hat{s} = A + B \hat{s}$ на подмножества четных \mathcal{F}_+ и нечетных \mathcal{F}_- функций в \mathcal{F} . Имеем $a + b = A + B$ и $a - b = A - B$ в

смысле равенства функций из \mathcal{F} . Очевидно, что тогда $a = A$ и $b = B$. Доказательство завершено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Операторные уравнения*

$$\nabla_k = \chi^{-1}(x) \cdot \mathcal{T}_\pm \cdot \chi(x) \quad (1.1)$$

на функцию $\chi(x) \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^*)$, с точностью до постоянного множителя, имеют единственное решение $\chi(x) = x^{-k}$. (При этом оператору \mathcal{T}_+ соответствует четное значение параметра k , а оператору \mathcal{T}_- – нечетное.)

Доказательство. Непосредственно имеем

$$\chi^{-1}(x) \cdot \mathcal{T}_\pm \cdot \chi(x) = \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} + \frac{d}{dx} + \frac{k}{x} \mp \frac{k \cdot \chi(-x)}{x \cdot \chi(x)} \hat{s} \equiv \frac{d}{dx} - \frac{k}{x} \hat{s}.$$

Тогда по лемме 1.1 имеем

$$\begin{cases} \frac{\chi'(x)}{\chi(x)} + \frac{k}{x} = 0, \\ \frac{k \cdot \chi(-x)}{x \cdot \chi(x)} = \pm \frac{k}{x}; \end{cases} \quad \begin{cases} \chi(x) = c \cdot x^{-k}, \\ \chi(-x) = \pm \chi(x). \end{cases}$$

Последняя система выполняется при четных и нечетных значениях параметра k , соответственно индексу оператора \mathcal{T}_\pm . Доказательство завершено.

Остается отметить, что благодаря калибровочному преобразованию (1.1), собственные функции операторов \mathcal{T}_\pm и ∇_k отличаются множителем $\chi(x)$.

Далее, пусть $\Gamma(\cdot)$ – стандартная гамма-функция Эйлера и

$$\mathcal{J}_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+\nu+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}, \quad \nu \in \mathbf{R},$$

– одна из функций Бесселя [13]. Обозначим через

$$\begin{aligned} \psi_1^+(x) &= x^k \cdot \left(\mathcal{J}_{k-1/2}(x) + \frac{x}{2k+1} \cdot \mathcal{J}_{k+1/2}(x) \right), \\ \psi_1^-(x) &= x^{-k} \cdot \left(\mathcal{J}_{-k-1/2}(x) + \frac{x}{-2k+1} \cdot \mathcal{J}_{k+1/2}(x) \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. [10],[11],[12]. *Функция*

$$\psi_1(x) = \begin{cases} \psi_1^+(x), & k – \text{четное}, \\ \psi_1^-(x), & k – \text{нечетное}. \end{cases} \quad (1.3)$$

с точностью до постоянного множителя, является собственной функцией оператора ∇_k , отвечающей единичному собственному значению.

Доказательство. Непосредственно легко проверяется, что при четном k имеют место формулы

$$\nabla_k [x^k \cdot \mathcal{J}_{k-1/2}] (x) = \frac{x^{k+1}}{2k+1} \cdot \mathcal{J}_{k+1/2}(x),$$

$$\nabla_k [x^{k+1} \cdot \mathcal{J}_{k+1/2}] (x) = (2k+1) \cdot x^k \cdot \mathcal{J}_{k-1/2}(x),$$

а при нечетном k – формулы

$$\nabla_k [x^{-k} \cdot \mathcal{J}_{-k-1/2}] (x) = \frac{x^{-k+1}}{-2k+1} \cdot \mathcal{J}_{-k+1/2}(x),$$

$$\nabla_k [x^{-k+1} \cdot \mathcal{J}_{-k+1/2}] (x) = (-2k+1) \cdot x^{-k} \cdot \mathcal{J}_{-k-1/2}(x).$$

Доказательство завершено.

Замечание 1.1. Фактически, функция $\psi_1(x)$ найдена в работах [10]-[12] методом неопределенных коэффициентов, посредством подстановки формального ряда $\psi_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot x^n$ в уравнение $\nabla_k[\psi_1](x) = \psi_1(x)$.

Следствие 1.1. Собственная функция $\psi_\lambda(x)$ оператора ∇_k , отвечающая собственному значению $\lambda \in \mathbf{R}^*$, с точностью до постоянного множителя, имеет вид $\psi_\lambda(x) = \psi_1(\lambda \cdot x)$.

Доказательство. Непосредственно имеем

$$\begin{aligned} \nabla_k[\psi_\lambda](x) &= \left(\frac{d}{dx} - \frac{k}{x} \hat{s} \right) [\psi_\lambda](x) = \lambda \cdot \psi'_1(\lambda \cdot x) - \lambda \cdot \frac{k}{\lambda \cdot x} \cdot \psi_1(-\lambda \cdot x) \\ &= \lambda \cdot \nabla_k[\psi_1](\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \psi_1(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \psi_\lambda(x). \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Далее, в силу следствия 1.1, будем рассматривать только $\psi_1(x)$, опуская для простоты обозначений индекс: $\psi_1(x) = \psi(x)$.

В силу общезвестного разложения $\mathcal{F}(\mathbf{R}^*) = \mathcal{F}_+(\mathbf{R}^*) \oplus \mathcal{F}_-(\mathbf{R}^*)$ представим собственную функцию $\psi(x)$ в виде четной и нечетной составляющих

$$\psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x), \quad \psi_+ \in \mathcal{F}_+, \quad \psi_- \in \mathcal{F}_-.$$

Тогда из формул (1.2) мы имеем их явный вид:

а) при четном k

$$\psi_+(x) = x^k \cdot \mathcal{J}_{k-1/2}(x), \quad \psi_-(x) = \frac{x^{-k+1}}{-2k+1} \cdot \mathcal{J}_{-k+1/2}(x);$$

б) при нечетном k

$$\psi_+(x) = \frac{x^{k+1}}{2k+1} \cdot \mathcal{J}_{k+1/2}(x), \quad \psi_-(x) = x^{-k} \cdot \mathcal{J}_{-k-1/2}(x).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Четная и нечетная составляющие собственной функции $\psi(x)$ оператора Дункла ∇_k , являются собственными функциями операторов вида (0.2):

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k[\psi_+](x) = \psi_+(x), \\ \mathcal{L}_{k+1}[\psi_-](x) = \psi_-(x). \end{cases} \quad (1.4)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\nabla_k[\psi](x) = \psi(x) \Leftrightarrow \nabla_k[\psi_+](x) + \nabla_k[\psi_-](x) = \psi_+(x) + \psi_-(x)$$

и в силу отображения $\nabla_k : \mathcal{F}_\pm \rightarrow \mathcal{F}_\mp$ имеют место системы уравнений

$$\begin{cases} \nabla_k[\psi_+](x) = \psi_-(x), \\ \nabla_k[\psi_-](x) = \psi_+(x); \end{cases} \quad \begin{cases} \psi'_+(x) - \frac{k}{x} \cdot \psi_+(x) = \psi_-(x), \\ \psi'_-(x) + \frac{k}{x} \cdot \psi_-(x) = \psi_+(x). \end{cases}$$

Из последней системы получаем, что четная и нечетная составляющие собственной функции $\psi(x)$ оператора ∇_k по необходимости удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \psi''_+(x) - \frac{k(k-1)}{x^2} \cdot \psi_+(x) = \psi_+(x), \\ \psi''_-(x) - \frac{k(k+1)}{x^2} \cdot \psi_-(x) = \psi_-(x). \end{cases}$$

Доказательство завершено.

Замечание 1.2. Система (1.4), а так же явный вид функций $\psi_+(x)$ и $\psi_-(x)$ дают хорошо известное [13] классическое дифференциальное уравнение на функцию Бесселя

$$\mathcal{J}_{k-1/2}''(x) + \frac{2k}{x} \cdot \mathcal{J}_{k-1/2}'(x) - \mathcal{J}_{k-1/2}(x) = 0, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4. Система (1.4) равносильна равенству $\nabla_k^2[\psi](x) = \psi(x)$.

Доказательство. На основе очевидных операторных равенств

$$\hat{s}^2 = 1, \quad \frac{d}{dx} \hat{s} = -\hat{s} \frac{d}{dx}$$

непосредственно имеем:

$$\nabla_k^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{k}{x^2} \hat{s} - \frac{k^2}{x^2}.$$

Таким образом,

$$\nabla_k^2|_{\mathcal{F}'_+} = \mathcal{L}_k, \quad \nabla_k^2|_{\mathcal{F}'_-} = \mathcal{L}_{k+1}. \quad (1.5)$$

В результате, система (1.4) равносильна системе

$$\begin{cases} \nabla_k^2[\psi_+](x) = \psi_+(x), \\ \nabla_k^2[\psi_-](x) = \psi_-(x) \end{cases} \Leftrightarrow \nabla_k^2[\psi](x) = \psi(x).$$

Последняя равносильность очевидна в силу отображения $\nabla_k^2 : \mathcal{F}_\pm \rightarrow \mathcal{F}_\pm$. Доказательство завершено.

В ходе последнего доказательства возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \nabla_k[\psi](x) = \psi(x) & \xrightarrow{\nabla_k} & \nabla_k^2[\psi](x) = \psi(x) \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \psi(x) = \psi_+(x) + \psi_-(x) & & \\ \xrightarrow{(1) \longleftrightarrow (2)} & & \\ \left\{ \begin{array}{l} \psi'_+(x) - \frac{k}{x} \cdot \psi_+(x) = \psi_-(x), \quad (1) \\ \psi'_-(x) + \frac{k}{x} \cdot \psi_-(x) = \psi_+(x). \quad (2) \end{array} \right. & & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_k[\psi_+](x) = \psi_+(x), \\ \mathcal{L}_{k+1}[\psi_-](x) = \psi_-(x). \end{array} \right. \end{array}$$

Она показывает, что собственные функции оператора Дункла ∇_k можно искать в классе собственных функций оператора ∇_k^2 , ассоциированных с собственными функциями дифференциального оператора (0.2).

СЛЕДСТВИЕ 1.2. *Оператор ∇_k^2 имеет не более четырех линейно независимых собственных функций.*

Доказательство. Поскольку дифференциальные операторы \mathcal{L}_k и \mathcal{L}_{k+1} могут соответственно иметь на $\mathcal{F}'_+(\mathbf{R}^*)$ и $\mathcal{F}'_-(\mathbf{R}^*)$ не более двух линейно независимых собственных функций, то в силу предложения 1.4. (формулы 1.5) у оператора ∇_k^2 их не более четырех. Доказательство завершено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5. *Пусть $\psi_\pm(k; x) \in \mathcal{F}'_\pm(\mathbf{R}^*)$ – собственные функции оператора \mathcal{L}_k , тогда функции*

$$\{\psi_+(k; x), \psi_-(k+1; x), \operatorname{sgn}(x) \cdot \psi_+(k+1; x), \operatorname{sgn}(x) \cdot \psi_-(k; x)\} \quad (1.6)$$

являются линейно независимыми собственными функциями оператора ∇_k^2 .

Доказательство этого факта очевидно в силу конструкции функций, формул (1.5) и приведенной диаграммы.

Определение 1.1 [14]. *Оператором косого присоединенного действия $\operatorname{ad}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^m \mathcal{C}$, $m \in \mathbf{Z}_+$, называется оператор, задаваемый рекуррентным соотношением*

$$\operatorname{ad}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^0 \mathcal{C} = \mathcal{C}; \quad \operatorname{ad}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^{m+1} \mathcal{C} = \operatorname{ad}_{\mathcal{A}, \mathcal{B}}^m (\mathcal{A} \cdot \mathcal{C} - \mathcal{C} \cdot \mathcal{B}).$$

По индукции нетрудно проверяется, что для линейных дифференциальных операторов \mathcal{S} и \mathcal{S}_0 на \mathbf{R}^* , а так же для оператора f умножения на функцию $f(x) \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^*)$ имеет место формула

$$\text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^m f = \sum_{n=0}^m (-1)^n \binom{m}{n} \mathcal{S}^{m-n} \cdot f \cdot \mathcal{S}_0^n. \quad (1.7)$$

Определение 1.2 [14]. *Линейные дифференциальные операторы \mathcal{S} и \mathcal{S}_0 на \mathbf{R}^* , называются M -калибровочно эквивалентными, если найдутся $M \in \mathbf{N}$ и оператор умножения на ненулевую функцию $f(x) \in \mathcal{F}(\mathbf{R}^*)$, такие что имеет место операторное равенство*

$$\text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^{M+1} f \equiv 0. \quad (1.8)$$

Замечание 1.3. В силу линейности оператора косого присоединенного действия очевидно, что

$$\text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^{M+1} f \equiv 0 \Rightarrow \text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^{M+m} f \equiv 0, \forall m \in \mathbf{N}.$$

Замечание 1.4. Если в равенстве (1.8) положить $M = 0$, то получится элементарное [7] калибровочное преобразование $\mathcal{S} = f \cdot \mathcal{S}_0 \cdot f^{-1}$, под которое подпадает равенство (1.1).

Условимся записывать $\mathcal{S} \xleftarrow{M,f} \mathcal{S}_0$, если операторы \mathcal{S} и \mathcal{S}_0 являются M -калибровочно эквивалентными посредством функции f .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 [15], [2]. *Пусть $\mathcal{S} \xleftarrow{M,f} \mathcal{S}_0$, тогда:*

1°. *Главные символы операторов \mathcal{S} и \mathcal{S}_0 совпадают, то есть один из этих операторов получается из другого деформацией (добавлением членов меньшего порядка);*

2°. *Если $\psi_0^*(x)$ – собственная функция оператора \mathcal{S}_0 с собственным значением $\lambda_0 \neq 0$, то функция*

$$\psi^*(x) = (\text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^M f) [\psi_0^*](x)$$

является собственной функцией оператора \mathcal{S} с собственным значением λ_0 ;

3°. *Имеет место формула*

$$\mathcal{S} \xleftarrow{M,f} \mathcal{S}_0 \iff \mathcal{S} \xleftarrow{M,|f|} \mathcal{S}_0. \quad (1.9)$$

Доказательство. Из определения 1.1 имеем

$$\mathcal{S} \xleftarrow{M,f} \mathcal{S}_0 \iff \mathcal{S} (\text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^M f) = (\text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^M f) \mathcal{S}_0.$$

Таким образом, для доказательства 1° остается заметить, что главный символ произведения линейных операторов равен произведению их главных символов.

Для доказательства пункта 2° имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{S}[\psi^*](x) &= \mathcal{S}(\text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^M f)[\psi_0^*](x) = (\text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^M f) \mathcal{S}_0[\psi_0^*](x) \\ &= \lambda_0 \cdot (\text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^M f)[\psi_0^*](x) = \lambda_0 \cdot \psi^*(x).\end{aligned}$$

Остается отметить, что (1.9) справедливо в силу формулы

$$\text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^M |f| = \text{sgn}(f) \cdot \text{ad}_{\mathcal{S}, \mathcal{S}_0}^M f,$$

являющейся следствием равенства (1.7). Доказательство завершено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7[14],[16]. *Операторы*

$$\mathcal{L}_k = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{k(k-1)}{x^2}, \quad k = 2, 3, \dots, \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_0 = \frac{d^2}{dx^2}$$

$(k-1)$ -калибровочно эквивалентны: $\mathcal{L}_k \xleftarrow{k-1, x^{k-1}} \mathcal{L}_0$.

Замечание 1.5. Отметим, что для операторов \mathcal{L}_k выполнены условия так называемой пошаговой калибровочной эквивалентности: $\mathcal{L}_k \xleftarrow{1, x} \mathcal{L}_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$, которое является достаточным для $\mathcal{L}_k \xleftarrow{k-1, x^{k-1}} \mathcal{L}_0$ [16].

Замечание 1.6. Операторы \mathcal{L}_k , $k = 2, 3, \dots$, и \mathcal{L}_0 не являются 0-калибровочно эквивалентными, то есть не существует функции f , такой что $\mathcal{L}_k = f \cdot \mathcal{L}_0 \cdot f^{-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.3. *Справедлива эквиваленция*

$$\mathcal{L} \xleftarrow{k-1, x^{k-1}} \mathcal{L}_0 \iff \mathcal{L} \xleftarrow{k-1, |x|^{k-1}} \mathcal{L}_0, \quad k = 2, 3, \dots$$

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Собственная функция оператора \mathcal{L}_k имеет вид*

$$\psi^*(x) = (\text{ad}_{\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_0}^{k-1} |x|^{k-1}) [\psi_0^*](x)$$

или с учетом равенства (1.7)

$$\psi^*(x) = \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \binom{k-1}{n} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{k(k-1)}{x^2} \right)^{k-n-1} [|x|^{k-1} \cdot \psi_0^*](x), \quad (1.10)$$

т.е. $\psi_0^*(x) = a_1 \cdot \exp(x) + a_2 \cdot \exp(-x)$, $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$.

Перейдем теперь к описанию четной и нечетной составляющих функции $\psi^*(x)$. Очевидно, что они определяются с помощью аналогов гиперболических функций:

$$\begin{aligned}\text{sh}_k(x) &:= \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \binom{k-1}{n} \mathcal{L}_k^{k-n-1} [|x|^{k-1} \cdot \text{sh}](x), \\ \text{ch}_k(x) &:= \sum_{n=0}^{k-1} (-1)^n \binom{k-1}{n} \mathcal{L}_k^{k-n-1} [|x|^{k-1} \cdot \text{ch}](x).\end{aligned} \quad (1.11)$$

Замечание 1.7. В силу конструкции $\text{sh}_k(x) \in \mathcal{F}_-(\mathbf{R}^*)$ и $\text{ch}_k(x) \in \mathcal{F}_+(\mathbf{R}^*)$.

ПРИМЕРЫ.

$$\text{sh}_1(x) = \text{sh}(x); \quad \text{ch}_1(x) = \text{ch}(x);$$

$$\text{sh}_2(x) = 2 \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{ch}(x) - \frac{2}{|x|} \cdot \text{sh}(x); \quad \text{ch}_2(x) = 2 \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{sh}(x) - \frac{2}{|x|} \cdot \text{ch}(x);$$

$$\text{sh}_3(x) = 8 \text{sh}(x) - \frac{24}{x} \cdot \text{ch}(x) + \frac{24}{x^2} \cdot \text{sh}(x); \quad \text{ch}_3(x) = 8 \text{ch}(x) - \frac{24}{x} \cdot \text{sh}(x) + \frac{24}{x^2} \cdot \text{ch}(x);$$

$$\text{sh}_4(x) = 48 \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{ch}(x) - \frac{288}{|x|} \cdot \text{sh}(x) + \frac{720 \operatorname{sgn}(x)}{x^2} \cdot \text{ch}(x) - \frac{720}{|x|^3} \cdot \text{sh}(x),$$

$$\text{ch}_4(x) = 48 \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{sh}(x) - \frac{288}{|x|} \cdot \text{ch}(x) + \frac{720 \operatorname{sgn}(x)}{x^2} \cdot \text{sh}(x) - \frac{720}{|x|^3} \cdot \text{ch}(x).$$

Далее, на основе формул (1.10) и (1.6), из предложения 1.5 следует

ТЕОРЕМА 1.1. *Любая собственная функция оператора ∇_k^2 , отвечающая единичному собственному значению, может быть представлена в виде*

$$\begin{aligned} \psi_1^*(x) &= a_1 \cdot \text{ch}_k(x) + a_2 \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{sh}_k(x) \\ &+ a_3 \cdot \text{sh}_{k+1}(x) + a_4 \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{ch}_{k+1}(x), \end{aligned} \tag{1.12}$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 1.5. *Любая собственная функция оператора ∇_k^2 , отвечающая собственному значению $\lambda \in \mathbf{R}^*$, имеет вид*

$$\psi_\lambda^*(x) = \begin{cases} \psi_1^*(\sqrt{\lambda} \cdot x), & \lambda > 0, \\ \psi_1^*(i \cdot \sqrt{-\lambda} \cdot x), & \lambda < 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 1.2. *Имеют место формулы ∇_k -дифференцирования*

$$\begin{aligned} \nabla_k[\text{sh}_{k+1}](x) &= 2k \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{sh}_k(x); & \nabla_k[\operatorname{sgn}(x) \cdot \text{sh}_k](x) &= \frac{1}{2k} \cdot \text{sh}_{k+1}(x); \\ \nabla_k[\text{ch}_k](x) &= \frac{1}{2k} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{ch}_{k+1}(x); & \nabla_k[\operatorname{sgn}(x) \cdot \text{ch}_{k+1}](x) &= 2k \cdot \text{ch}_k(x). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Доказательство. В силу формул (1.11) и (1.12) имеем $\text{ch}_k(x) \in \mathcal{F}_+(\mathbf{R}^*)$ и $\nabla_k^2[\text{ch}_k](x) = \text{ch}_k(x)$. Таким образом, функция $\nabla_k[\text{ch}_k](x) \in \mathcal{F}_-(\mathbf{R}^*)$ является собственной функцией оператора ∇_k^2 . В результате, из (1.12) получаем

$$\nabla_k[\text{ch}_k](x) = c_{1k} \cdot \text{sh}_{k+1}(x) + c_{2k} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{ch}_{k+1}(x). \tag{1.14}$$

Далее, в силу конструкции (1.11) имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}_{k+1}(x) &= a_{-k} \cdot |x|^{-k} \cdot \operatorname{sh}(x) + a_{-k+1} \cdot |x|^{-k+1} \cdot \operatorname{ch}(x) + \dots \\ &\quad + a_{k-1} \cdot |x|^{k-1} \cdot \operatorname{ch}(x) + a_k \cdot |x|^k \cdot \operatorname{sh}(x), \\ \operatorname{ch}_k(x) &= b_{-k+1} \cdot |x|^{-k+1} \cdot \operatorname{ch}(x) + a_{-k+2} \cdot |x|^{-k+2} \cdot \operatorname{sh}(x) + \dots \\ &\quad + a_{k-2} \cdot |x|^{k-2} \cdot \operatorname{sh}(x) + a_{k-1} \cdot |x|^{k-1} \cdot \operatorname{ch}(x).\end{aligned}$$

Для нахождения константы c_{1k} в равенстве (1.14) приравняем коэффициенты левой и правой частей (1.14), например, при слагаемых вида $|x|^k \cdot \operatorname{sh}(x)$, а для нахождения c_{2k} – при слагаемых вида $|x|^{-k} \cdot \operatorname{ch}(x)$.

1). Поиск c_{1k} . Очевидно, что левая часть формулы (1.14) не содержит слагаемого вида $|x|^k \cdot \operatorname{sh}(x)$, а правая – содержит с коэффициентом $(-1)^k \cdot c_{1k}$:

$$\operatorname{sh}_{k+1}(x) = \dots + (-1)^k \binom{k}{k} \mathcal{L}_{k+1}^0 [|x|^k \cdot \operatorname{sh}] (x) = \dots + (-1)^k |x|^k \cdot \operatorname{sh}(x).$$

В результате $c_{1k} = 0$;

2). Поиск c_{2k} . Очевидно, что

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}_k(x) &= \mathcal{L}_k^{k-1} [|x|^{k-1} \cdot \operatorname{ch}] (x) + \dots \\ &= |x|^{k-1-2(k-1)} \cdot \operatorname{ch}(x) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} ((k-2i+1)(k-2i) - k(k-1)) + \dots \\ &= |x|^{-k+1} \cdot \operatorname{ch}(x) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} (-2)(2i-1)(k-i) + \dots \\ &= (-1)^{k-1} 2^{k-1} \cdot (2k-3)!! \cdot (k-1)! \cdot |x|^{-k+1} \cdot \operatorname{ch}(x) + \dots.\end{aligned}$$

Тогда коэффициент при $|x|^{-k} \cdot \operatorname{ch}(x)$ в левой части формулы (1.14) имеет вид

$$\begin{aligned}(-1)^{k-1} 2^{k-1} \cdot (2k-3)!! \cdot (k-1)! \cdot [(-k+1) \cdot \operatorname{sgn}(x) - k \cdot \operatorname{sgn}(x)] \\ = (-1)^k 2^{k-1} \cdot (2k-1)!! \cdot (k-1)! \cdot \operatorname{sgn}(x),\end{aligned}$$

а в правой –

$$c_{2k} \cdot (-1)^k \cdot 2^k \cdot (2k-1)!! \cdot k! \cdot \operatorname{sgn}(x).$$

Итак, $c_{2k} = 1/2k$ и имеет место формула

$$\nabla_k [\operatorname{ch}_k](x) = \frac{1}{2k} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{ch}_{k+1}(x).$$

Применив к обеим частям этой формулы оператор ∇_k , получаем

$$\operatorname{ch}_k(x) = \frac{1}{2k} \cdot \nabla_k[\operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{ch}_{k+1}](x).$$

Оставшиеся две формулы получаются аналогично. Доказательство завершено.

ТЕОРЕМА 1.3. *Любая собственная функция $\psi_1(x)$ оператора Дункла ∇_k , отвечающая единичному собственному значению, может быть записана в виде*

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= a_1 \cdot (2k \cdot \operatorname{ch}_k(x) + \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{ch}_{k+1}(x)) \\ &\quad + a_2 \cdot (\operatorname{sh}_{k+1}(x) + 2k \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sh}_k(x)),\end{aligned}\tag{1.15}$$

где $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Все функции $\psi_1(x)$ по необходимости содержатся в классе функций (1.12) согласно приведенной выше диаграмме. Из формул (1.12) и (1.13) имеем

$$\begin{aligned}\nabla_k[\psi_1^*](x) &= \frac{a_1}{2k} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{ch}_{k+1}(x) + \frac{a_2}{2k} \cdot \operatorname{sh}_{k+1}(x) \\ &\quad + 2k \cdot a_3 \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \operatorname{sh}_k(x) + 2k \cdot a_4 \cdot \operatorname{ch}_k(x).\end{aligned}$$

Тогда, для выполнения равенства $\nabla_k[\psi_1^*](x) = \psi_1^*(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $a_1 = 2k \cdot a_4$ и $a_2 = 2k \cdot a_3$. В результате

$$\psi_1(x) = \psi_1^*(x)|_{a_1=2k \cdot a_4, a_2=2k \cdot a_3}.$$

Доказательство завершено.

Замечание 1.7. Аналогичным образом для операторов ∇_k^2 и ∇_k можно установить соответствующие ядра:

$$\operatorname{Ker}[\nabla_k^2](x) = a_1 \cdot |x|^k + a_2 \cdot |x|^{-k+1} + \operatorname{sgn}(x) \cdot (a_3 \cdot |x|^{k+1} + a_4 \cdot |x|^{-k}),$$

$$\operatorname{Ker}[\nabla_k](x) = a_1 \cdot |x|^k + a_4 \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^{-k},$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{R}$.

2. Связь функций $\operatorname{sh}_k(x)$ и $\operatorname{ch}_k(x)$ с функцией Бесселя. Пусть $z \in \mathbf{C}$, $p \in \mathbf{R}$, $n, m, k \in \mathbf{Z}_+$, $p_k = k(k-1)/4$ и

$$(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)}, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{C},$$

– символ Погоффмана.

Имеют место следующие равенства:

$$\sum_{m=0}^k (-1)^m \cdot \frac{(z+m, k)}{m!(k-m)!} = (-1)^k,\tag{2.1}$$

$$\sum_{m=0}^{2p_{k+1}} (-1)^m \cdot \frac{(n+m-p_{k+2}+1, p_{k+2}) \cdot (n+m-p_{k+2}+3/2, p_k-1/2)}{m!(2p_{k+1}-m)!} = (-1)^{2p_{k+1}}, \quad (2.2)$$

$$\mathcal{L}_k^m [|x|^p] = 4^m \cdot \left(-\frac{p+k-1}{2}, m \right) \cdot \left(\frac{-p+k}{2}, m \right) \cdot |x|^{p-2m}. \quad (2.3)$$

Формулы (2.1) и (2.2) при более общих значениях параметров имеются в книге [17, стр. 218-220], а формула (2.3) очевидным образом получается исходя из явного вида оператора \mathcal{L}_k .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. *Имеют место формулы ($k \in \mathbf{N}$)*

$$\operatorname{sh}_k(x) = \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^k \cdot \mathcal{J}_{k-1/2}(x), \quad (2.4)$$

$$\operatorname{ch}_k(x) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (2k-2)!}{|x|^{k-1}} \cdot \mathcal{J}_{-k+1/2}(x). \quad (2.5)$$

Доказательство. Формулу (1.11) запишем в виде

$$\operatorname{sh}_{k+1}(x) = (-1)^k \cdot \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \mathcal{L}_{k+1}^m [|x|^k \cdot \operatorname{sh}] (x).$$

Используя разложением гиперболического синуса в степенной ряд, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}_{k+1}(x) &= (-1)^k \cdot \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \mathcal{L}_{k+1}^m \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n+k+1} \cdot \operatorname{sgn}(x)}{(2n+1)!} \right] \\ &= (-1)^k \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{m=0}^k (-1)^m \binom{k}{m} \mathcal{L}_{k+1}^m [|x|^{2n+k+1}]. \end{aligned}$$

или по формуле (2.3)

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}_{k+1}(x) &= (-1)^k \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^{k+1} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{k}{m} \cdot (-n-k-1/2, m) \cdot (-n, m)}{(2n+1)!} \cdot |x|^{2n-2m}. \end{aligned}$$

Отметим, что символ Похгаммера $(-n, m) \neq 0$, если $-n + m - 1 < 0$, то есть, если $n \geq m$. Тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}_{k+1}(x) &= (-1)^k \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^{k+1} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{k}{m} \cdot (-n-m-k-1/2, m) \cdot (-n-m, m)}{(2n+2m+1)!} \cdot |x|^{2n} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}_{k+1}(x) &= (-1)^k \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^{k+1} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k \frac{(-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{k}{m} \cdot (n+k+3/2, m) \cdot (n+1, m)}{(2n+2m+1)!} \cdot |x|^{2n}. \end{aligned}$$

Далее, используя формулы

$$\Gamma(x) \cdot \Gamma(x + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}} \cdot \Gamma(2x), \quad \Gamma(k + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}} \cdot (2k+1)!!$$

преобразуем коэффициент к следующему виду

$$\begin{aligned} \frac{4^m \cdot \binom{k}{m} \cdot (n+k+3/2, m) \cdot (n+1, m)}{(2n+2m+1)!} \\ = \frac{\sqrt{\pi} \cdot k!}{n! \cdot 2^{2n+1} \cdot \Gamma(n+k+3/2)} \cdot \frac{(n+m+3/2, k)}{m!(k-m)!}. \end{aligned}$$

В результате, по формуле (2.1) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}_{k+1}(x) &= \sqrt{\pi} \cdot k! \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^{k+1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{2n}}{n! \cdot 2^{2n+1} \cdot \Gamma(n+k+3/2)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \cdot k! \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^{k+1}}{2 \cdot \Gamma(k+3/2)} \cdot \mathcal{J}_{k+1/2}(x) = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^{k+1} \cdot \mathcal{J}_{k+1/2}(x). \end{aligned}$$

Формула (2.4) доказана. Аналогично, для $\operatorname{ch}_k(x)$ имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}_k(x) &= (-1)^{k+1} \cdot \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \binom{k-1}{m} \mathcal{L}_k^m [|x|^k \cdot \operatorname{ch}] (x) \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{|x|^{k-1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{k-1}{m} \cdot (-n-k+1, m) \cdot (-n+1/2, m)}{(2n)!} \cdot |x|^{2(n-m+k-1)}. \end{aligned}$$

Поскольку $(-n - k + 1, m) \neq 0$, если $n - m + k - 1 \geq 0$, то

$$\begin{aligned}
& \operatorname{ch}_k(x) \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{|x|^{k-1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{k-1}{m} \cdot (-n - m, m) \cdot (-n - m + k - 1/2, m)}{(2n + 2m - 2k + 2)!} \cdot |x|^{2n} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{|x|^{k-1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{k-1}{m} \cdot (n+1, m) \cdot (n-k+3/2, m)}{(2n + 2m - 2k + 2)!} \cdot |x|^{2n} \\
&= \frac{\sqrt{\pi} \cdot (k-1)!}{|x|^{k-1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2k-2n-2}}{n! \cdot \Gamma(n-k+3/2)} \cdot |x|^{2n} \\
&= \frac{\sqrt{\pi} \cdot (k-1)! \cdot 2^{2k-2}}{|x|^{k-1} \cdot \Gamma(-k+3/2)} \cdot \mathcal{J}_{-k+1/2}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \cdot (2k-2)!}{|x|^{k-1}} \cdot \mathcal{J}_{-k+1/2}(x)
\end{aligned}$$

и формула (2.5) доказана. Предложение доказано.

Следствие 2.1. Все собственные функции $\psi_1(x)$ оператора ∇_k , отвечающие единичному собственному значению, могут быть представлены в виде

$$\psi_1(x) = a_1 \cdot \operatorname{sgn}^k(x) \cdot \psi_1^+(x) + a_2 \cdot \operatorname{sgn}^{k+1}(x) \cdot \psi_1^-(x), \quad (2.6)$$

где $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$, а функции $\psi_1^+(x)$, $\psi_1^-(x)$ определены формулами (1.2).

Доказательство. Подставим в формулу (1.15) выражения $\operatorname{sh}_k(x)$ и $\operatorname{ch}_k(x)$ через функцию Бесселя (2.4), (2.5):

$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= a_1 \cdot \operatorname{sgn}^k(x) \cdot x^k \cdot \left(\mathcal{J}_{k-1/2}(x) + \frac{x}{2k+1} \cdot \mathcal{J}_{k+1/2}(x) \right) \\
&\quad + a_2 \cdot \operatorname{sgn}^{k+1}(x) \cdot x^{-k} \cdot \left(\mathcal{J}_{-k-1/2}(x) + \frac{x}{-2k+1} \cdot \mathcal{J}_{-k+1/2}(x) \right) \\
&= a_1 \cdot \operatorname{sgn}^k(x) \cdot \psi_1^+(x) + a_2 \cdot \operatorname{sgn}^{k+1}(x) \cdot \psi_1^-(x).
\end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Замечание 2.1. Очевидно, что частные случаи формулы (2.6), с точностью до постоянного множителя, дают формулу (1.3).

3. Обобщение операторов Дункла. Согласно, приведенной во введении задаче (0.5)-(0.6), будем искать обобщение операторов Дункла ∇_k на некотором симметричном относительно точки $x = 0$ подмножестве $\Omega \subset \mathbf{R}^*$.

Как и ранее, обозначим через $\mathcal{F}(\Omega)$ – множество функций дифференцируемых по крайней мере на Ω , а через $\mathcal{F}_+(\Omega)$, $\mathcal{F}_-(\Omega)$ – подмножества в $\mathcal{F}(\Omega)$ четных и нечетных функций соответственно.

На $\mathcal{F}(\Omega)$ корректно действует оператор

$$\tilde{\nabla} = \frac{d}{dx} - \varphi(x) \hat{s},$$

где $\varphi(x)$ – оператор умножения на функцию $\varphi(x) \in \mathcal{F}(\Omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Для того, чтобы оператор $\tilde{\nabla}$ отображал $\mathcal{F}_{\pm}(\Omega)$ в $\mathcal{F}_{\mp}(\Omega)$ необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x) \in \mathcal{F}_{-}(\Omega)$:

$$\tilde{\nabla} : \mathcal{F}_{\pm}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{F}_{\mp}(\Omega) \iff \varphi(x) \in \mathcal{F}_{-}(\Omega). \quad (3.1)$$

Доказательство. Для произвольной функции $f_{\pm}(x) \in \mathcal{F}_{\pm}(\Omega)$ очевидна цепочка эквиваленций

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} : \mathcal{F}_{\pm}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{F}_{\mp}(\Omega) \iff f'_{\pm}(x) \mp \varphi(x) \cdot f_{\pm}(x) \in \mathcal{F}_{\mp}(\Omega) \\ &\iff \varphi(x) \cdot f_{\pm}(x) \in \mathcal{F}_{\mp}(\Omega) \\ &\iff \varphi(x) \in \mathcal{F}_{-}(\Omega). \end{aligned}$$

Доказательство завершено.

Везде далее будем считать, что $\varphi(x) \in \mathcal{F}_{-}(\Omega)$. Определим вид оператора $\tilde{\nabla}^2$, действующего на множестве $\mathcal{F}'_{\pm}(\Omega)$ дважды дифференцируемых функций:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}^2 &= \frac{d^2}{dx^2} - \varphi'(x) \hat{s} - \varphi(x) \cdot \frac{d}{dx} \hat{s} - \varphi(x) \cdot \hat{s} \frac{d}{dx} + \varphi(x) \cdot \varphi(-x) \hat{s}^2 \\ &= \frac{d^2}{dx^2} - \varphi'(x) \hat{s} - \varphi^2(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\tilde{\nabla}^2 \Big|_{\mathcal{F}'_{\pm}(\Omega)} = \frac{d^2}{dx^2} \mp \varphi'(x) - \varphi^2(x).$$

Далее напомним, что деформация оператора Лапласа потенциалами Лагнезе-Штельмахера (0.3) имеет вид

$$\mathcal{L}_{k,\gamma} = \frac{d^2}{dx^2} + (\ln \mathcal{P}_k^2(|x|))'', \quad \gamma \in \mathbf{R}^{k-1}, \quad k \in \mathbf{N},$$

где многочлены Бурнхалла-Чаунди

$$\mathcal{P}_k(x) := \mathcal{P}_k(x, (\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1})), \quad \gamma_i \in \mathbf{R}$$

задаются рекуррентным образом

$$\mathcal{P}_0(x) = 1; \quad \mathcal{P}_1(x) = x; \quad \mathcal{P}'_{k+1}(x) \cdot \mathcal{P}_{k-1}(x) - \mathcal{P}_{k+1}(x) \cdot \mathcal{P}'_{k-1}(x) = (2k+1) \cdot \mathcal{P}_k^2(x).$$

ТЕОРЕМА 3.1. Система операторных уравнений

$$\begin{cases} \tilde{\nabla}^2 \Big|_{\mathcal{F}'_+(\Omega)} = \mathcal{L}_{k-1,\gamma}, \\ \tilde{\nabla}^2 \Big|_{\mathcal{F}'_-(\Omega)} = \mathcal{L}_{k,\gamma} \end{cases} \quad (3.2)$$

на функцию $\varphi(x) \in \mathcal{F}_-(\Omega)$, имеет единственное решение

$$\varphi(x) = \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_k(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)'.$$

Доказательство. Система (3.2) операторных уравнений равносильна переопределенной системе дифференциальных уравнений Рикатти на функцию $\varphi(x) \in \mathcal{F}_-(\Omega)$

$$\begin{cases} -\varphi'(x) - \varphi^2(x) = (\ln \mathcal{P}_{k-1}^2(|x|))'', \\ \varphi'(x) - \varphi^2(x) = (\ln \mathcal{P}_k^2(|x|))''. \end{cases} \quad (3.3)$$

Таким образом,

$$\varphi'(x) = \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_k(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)''$$

и в силу (3.1)

$$\varphi(x) = \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_k(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)'.$$

Остается показать, что найденная функция удовлетворяет одному из уравнений системы (3.3). Для этого введем обозначения

$$\alpha_k(x) = \varphi'(x) - \varphi^2(x) \quad \text{и} \quad \beta_k(x) = (\ln \mathcal{P}_k^2(|x|))''.$$

Преобразуем разность

$$\begin{aligned} & \alpha_{k+1}(x) - \alpha_k(x) \\ &= \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_{k+1}(|x|) \cdot \mathcal{P}_{k-1}(|x|)}{\mathcal{P}_k^2(|x|)} \right| \right)'' + \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_{k+1}(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)' \cdot \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_k^2(|x|)}{\mathcal{P}_{k+1}(|x|) \cdot \mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)' \\ &= \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_{k+1}^2(|x|) \cdot \mathcal{P}_{k-1}(|x|)}{\mathcal{P}_k^2(|x|) \cdot \mathcal{P}_{k+1}(|x|)} \right| \right)'' + \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_{k+1}(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)' \cdot \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_k^2(|x|)}{\mathcal{P}_{k+1}(|x|) \cdot \mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)' \\ &= \beta_{k+1}(x) - \beta_k(x) + \theta(x), \end{aligned}$$

где

$$\theta(x) = - \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_{k+1}(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)'' + \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_{k+1}(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)' \cdot \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_k^2(|x|)}{\mathcal{P}_{k+1}(|x|) \cdot \mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)'$$

Далее, поскольку

$$\begin{aligned} \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_{k+1}(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)' &= \frac{\mathcal{P}_{k-1}(|x|) \cdot (\mathcal{P}'_{k+1}(|x|) \cdot \mathcal{P}_{k-1}(|x|) - \mathcal{P}_{k+1}(|x|) \cdot \mathcal{P}'_{k-1}(|x|))}{\mathcal{P}_{k+1}(|x|) \cdot \mathcal{P}_{k-1}^2(|x|)} \cdot \operatorname{sgn}(x) \\ &= \frac{(2k+1) \cdot \mathcal{P}_k^2(|x|)}{\mathcal{P}_{k+1}(|x|) \cdot \mathcal{P}_{k-1}^2(|x|)} \cdot \operatorname{sgn}(x), \end{aligned}$$

то $\theta(x) \equiv 0$ и имеет место соотношение

$$\alpha_{k+1}(x) - \alpha_k(x) = \beta_{k+1}(x) - \beta_k(x), \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Далее, прямой подсчет дает

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_1(|x|)}{\mathcal{P}_0(|x|)} \right| \right)'' - \left[\left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_1(|x|)}{\mathcal{P}_0(|x|)} \right| \right)' \right]^2 = (\ln |x|)'' - [(\ln |x|)']^2 \\ &= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{x^2}; \\ \beta_1(x) &= (\ln \mathcal{P}_1^2(|x|))'' = 2 (\ln |x|)'' = -\frac{2}{x^2}. \end{aligned}$$

В результате $\alpha_k(x) = \beta_k(x)$, $\forall k \in \mathbf{N}$, там, где $\mathcal{P}_{k-1}(|x|) \neq 0$ и второе уравнение системы (3.3) выполнено. Доказательство завершено.

Итак, операторы

$$\nabla_{k,\gamma} \equiv \tilde{\nabla} = \frac{d}{dx} - \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_k(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)' \hat{s}, \quad k \in \mathbf{N}, \quad (3.4)$$

действующие на множестве

$$\Omega = \{x \in \mathbf{R}^* \mid \mathcal{P}_{k-1}(|x|) \neq 0, \mathcal{P}_k(|x|) \neq 0\},$$

в силу (0.4) и (3.2) удовлетворяют задаче (0.5)-(0.6). Таким образом, эти операторы являются естественным обобщением классического рационального оператора Дункла ∇_k на \mathbf{R}^* :

$$\nabla_{k,0} = \nabla_k.$$

4. Собственные функции операторов $\nabla_{k,\gamma}$. В силу формул (3.1)-(3.3) для собственной функции $\tilde{\psi}(x) \in \mathcal{F}(\Omega)$ оператора $\nabla_{k,\gamma}$ имеет место коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{k,\gamma}[\tilde{\psi}](x) = \tilde{\psi}(x) & \xrightarrow{\nabla_{k,\gamma}} & \nabla_{k,\gamma}^2[\tilde{\psi}](x) = \tilde{\psi}(x) \\ \uparrow & \tilde{\psi}(x) = \tilde{\psi}_+(x) + \tilde{\psi}_-(x) & \downarrow \\ \{\text{System I}\} & \xrightarrow{(1) \longleftrightarrow (2)} & \{\text{System II}\}, \end{array}$$

где соответствующие системы имеют следующий вид

$$\begin{cases} \tilde{\psi}'_+(x) - \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_k(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)' \cdot \tilde{\psi}_+(x) = \tilde{\psi}_-(x), & (1) \\ \tilde{\psi}'_-(x) + \left(\ln \left| \frac{\mathcal{P}_k(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} \right| \right)' \cdot \tilde{\psi}_-(x) = \tilde{\psi}_+(x); & (2) \end{cases} \quad \{\text{System I}\}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_{k-1,\gamma}[\tilde{\psi}_+](x) = \tilde{\psi}_+(x), \\ \mathcal{L}_{k,\gamma}[\tilde{\psi}_-](x) = \tilde{\psi}_-(x). \end{cases} \quad \{\text{System II}\}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1 [14],[15]. *Операторы*

$$\mathcal{L}_{k,\gamma} = \frac{d^2}{dx^2} + (\ln \mathcal{P}_k^2(|x|))'', \quad k \in \mathbf{N}, \quad \text{и} \quad \mathcal{L}_0 = \frac{d^2}{dx^2}$$

являются калибровочно эквивалентными:

$$\mathcal{L}_{k,\gamma} \begin{cases} \xleftarrow{k, |x|^k} \mathcal{L}_0, & \gamma = 0, \\ \xleftarrow{\frac{k(k+1)}{2}, \mathcal{P}_k(|x|)} \mathcal{L}_0, & \gamma \neq 0. \end{cases}$$

Замечание 4.1. Случай $\gamma = 0$ дает следствие 1.3.

Таким образом, приведенные выше диаграмма и предложение 4.1 показывают, что схемы нахождения собственных функций $\tilde{\psi}(x)$ и $\psi(x)$ одинаковы.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *Собственная функция оператора $\mathcal{L}_{k,\gamma}$, отвечающая единичному собственному значению, с точностью до постоянного множителя, имеет вид*

$$\tilde{\psi}^*(x) = \left(\text{ad}_{\mathcal{L}_{k,\gamma}, \mathcal{L}_0}^{k(k+1)/2} \mathcal{P}_k(|x|) \right) [\psi_0^*](x)$$

или с учетом равенства (1.7)

$$\tilde{\psi}^*(x) = \sum_{n=0}^{k(k+1)/2} (-1)^n \binom{\frac{k(k+1)}{2}}{n} \left(\frac{d^2}{dx^2} + (\ln \mathcal{P}_k^2(|x|))'' \right)^{\frac{k(k+1)}{2}-n} [\mathcal{P}_k(|x|) \cdot \psi_0^*](x), \quad (4.1)$$

$$e^{\partial_x} \psi_0^*(x) = a_1 \cdot \exp(x) + a_2 \cdot \exp(-x), \quad a_1, a_2 \in \mathbf{R}.$$

Замечание 4.2. Собственные функции операторов $\nabla_{k,\gamma}$, и $\mathcal{L}_{k,\gamma}$, отвечающие произвольному собственному значению $\lambda \neq 0$, могут быть построены исходя из предложения 1.6.

Для определения четной и нечетной составляющих функции (4.1) введем в рассмотрение специальные функции, обобщающие функции (1.11).

$$\begin{aligned} \text{Sh}_k(x) &:= \sum_{n=0}^{k(k-1)/2} (-1)^n \binom{\frac{k(k-1)}{2}}{n} \mathcal{L}_{k-1,\gamma}^{\frac{k(k-1)}{2}-n} [\mathcal{P}_{k-1}(|x|) \cdot \text{sh}] (x), \\ \text{Ch}_k(x) &:= \sum_{n=0}^{k(k-1)/2} (-1)^n \binom{\frac{k(k-1)}{2}}{n} \mathcal{L}_{k-1,\gamma}^{\frac{k(k-1)}{2}-n} [\mathcal{P}_{k-1}(|x|) \cdot \text{ch}] (x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Замечание 4.3. В силу конструкции $\text{Sh}_k(x) \in \mathcal{F}_-(\Omega)$ и $\text{Ch}_k(x) \in \mathcal{F}_+(\Omega)$.

ПРИМЕРЫ.

$$\text{Sh}_1(x) = \text{sh}_1(x) = \text{sh}(x); \quad \text{Ch}_1(x) = \text{ch}_1(x) = \text{ch}(x);$$

$$\text{Sh}_2(x) = \text{sh}_2(x) = 2 \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{ch}(x) - \frac{2}{|x|} \cdot \text{sh}(x);$$

$$\text{Ch}_2(x) = \text{ch}_2(x) = 2 \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{sh}(x) - \frac{2}{|x|} \cdot \text{ch}(x);$$

$$\text{Sh}_3(x) = -\frac{144x^2}{|x|^3 + \gamma_1} \text{sh}(x) + 48 \operatorname{sgn}(x) \cdot \left(1 + \frac{3|x|}{|x|^3 + \gamma_1}\right) \cdot \text{ch}(x), \quad \gamma = (\gamma_1) \in \mathbf{R};$$

$$\text{Ch}_3(x) = -\frac{144x^2}{|x|^3 + \gamma_1} \text{ch}(x) + 48 \operatorname{sgn}(x) \cdot \left(1 + \frac{3|x|}{|x|^3 + \gamma_1}\right) \cdot \text{sh}(x), \quad \gamma = (\gamma_1) \in \mathbf{R}.$$

Связь между функциями (4.2) и (1.11) определяет следующая теорема

ТЕОРЕМА 4.1. *Имеют место формулы:*

a). При $k = 1, 2$

$$\text{Sh}_k(x) = \text{sh}_k(x) \quad \text{и} \quad \text{Ch}_k(x) = \text{ch}_k(x); \quad (4.3)$$

б). При $k \geq 3$

$$\begin{aligned} \text{Sh}_k(x)|_{\gamma=0} &= \frac{2^{(k-1)(k-2)/2} \cdot \binom{\frac{k(k-1)}{2}}{k-1}!}{(k-1)!} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{ch}_k(x), \\ \text{Ch}_k(x)|_{\gamma=0} &= \frac{2^{(k-1)(k-2)/2} \cdot \binom{\frac{k(k-1)}{2}}{k-1}!}{(k-1)!} \cdot \operatorname{sgn}(x) \cdot \text{sh}_k(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Доказательство. При $k = 1$ или $k = 2$ формулы (4.3) непосредственно легко проверяются (см. примеры).

Далее, для $k \geq 3$ обозначим через $p_k = k(k - 1)/4$. По определению, используя формулу (2.3), имеем

$$\begin{aligned}
& \text{Sh}_{k+1}(x)|_{\gamma=0} \\
&= (-1)^{2p_{k+1}} \cdot \sum_{m=0}^{2p_{k+1}} (-1)^m \binom{2p_{k+1}}{m} \mathcal{L}_{k+1}^m [|x|^{2p_{k+1}} \cdot \text{sh}] (x) \\
&= (-1)^{2p_{k+1}} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2p_{k+1}} (-1)^m \frac{\binom{2p_{k+1}}{m}}{(2n+1)!} \mathcal{L}_{k+1}^m [|x|^{2n+2p_{k+1}+1}] \\
&= (-1)^{2p_{k+1}} \cdot \text{sgn}(x) \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2p_{k+1}} \frac{(-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{2p_{k+1}}{m}}{(2n+1)!} \cdot (-n - p_{k+2}, m) \cdot (-n - p_k, m) \cdot |x|^{2n+2p_{k+1}+1-2m}
\end{aligned}$$

Очевидно, что для $t \in \mathbf{Z}_+$ имеют место принадлежности

$$p_{4t+2} = \frac{(2t+1)(4t+1)}{2} \notin \mathbf{N}; \quad p_{4t+3} = \frac{(2t+1)(4t+3)}{2} \notin \mathbf{N};$$

$$p_{4t+4} = (t+1)(4t+3) \in \mathbf{N}; \quad p_{4t+5} = (t+1)(4t+5) \in \mathbf{N}.$$

Тогда символ Погаммера $(-n - p_k, m)$ при $k = 4t + 2$ или $k = 4t + 3$ никогда не обращается в нуль, а при $k = 4t + 4$ или $k = 4t + 5$ – не обращается в нуль при выполнении неравенства $m \leq n + p_k$.

В результате можно записать

$$\begin{aligned}
& \text{Sh}_{k+1}(x)|_{\gamma=0} = \frac{(-1)^{2p_{k+1}} \cdot \text{sgn}(x)}{|x|^k} \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2p_{k+1}} \frac{(-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{2p_{k+1}}{m}}{(2n+1)!} \cdot (-n - p_{k+2}, m) \cdot (-n - p_k, m) \cdot |x|^{2n+2p_{k+2}-2m},
\end{aligned}$$

где во множителе, представленном рядом, отрицательные степени $|x|$ отсутствуют. Действительно, если предположить, что $2n + 2p_{k+2} - 2m \leq -1$, то:

1. В случае $k = 4t + 2$ или $k = 4t + 3$ имеет место ложное неравенство

$$n + p_{k+2} + 1/2 \leq m \leq n + p_{k+2};$$

2. В случае $k = 4t + 4$ или $k = 4t + 5$ имеет место двойное неравенство

$$n + p_{k+2} + 1/2 \leq m \leq n + p_k,$$

выполнение которого возможно лишь при $p_{k+2} - p_k + 1/2 \leq 0$, то есть $(k+1)(k+2) - k(k-1) + 2 \leq 0$, что также ложно.

Таким образом, в последнем ряде можно заменить индекс суммирования $n \rightarrow n+m-p_{k+2}$ так, что справедливо равенство

$$\begin{aligned} \text{Sh}_{k+1}(x)|_{\gamma=0} &= \frac{(-1)^{2p_{k+1}} \cdot \text{sgn}(x)}{|x|^k} \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{2p_{k+1}} \frac{(-1)^m \cdot 4^m \cdot \binom{2p_{k+1}}{m}}{(2n+2m-2p_{k+2}+1)!} \cdot (n+1, m) \cdot (n-k+1/2, m) \cdot |x|^{2n}. \end{aligned}$$

Преобразовав коэффициент к виду

$$\begin{aligned} &\frac{4^m \cdot \binom{2p_{k+1}}{m} \cdot (n+1, m) \cdot (n-k+1/2, m)}{(2n+2m-2p_{k+2}+1)!} \\ &= \frac{(2p_{k+1})! \cdot \sqrt{\pi}}{n! \cdot 2^{2n-2p_{k+2}+1} \cdot \Gamma(n-k+1/2)} \\ &\times \frac{(n+m-p_{k+2}+1, p_{k+2}) \cdot (n+m-p_{k+2}+3/2, p_k-1/2)}{m! \cdot (2p_{k+1}-m)!}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \text{Sh}_{k+1}(x)|_{\gamma=0} &= \frac{(-1)^{2p_{k+1}} \cdot \text{sgn}(x)}{|x|^k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2p_{k+1})! \cdot \sqrt{\pi}}{n! \cdot 2^{2n-2p_{k+2}+1} \cdot \Gamma(n-k+1/2)} \\ &\times \left(\sum_{m=0}^{2p_{k+1}} (-1)^m \cdot \frac{(n+m-p_{k+2}+1, p_{k+2}) \cdot (n+m-p_{k+2}+3/2, p_k-1/2)}{m! \cdot (2p_{k+1}-m)!} \right) \cdot |x|^{2n}. \end{aligned}$$

В результате, из формулы (2.2) имеем

$$\text{Sh}_{k+1}(x)|_{\gamma=0} = \frac{(2p_{k+1})! \cdot \sqrt{\pi} \cdot 2^{2p_{k+2}-1} \cdot \text{sgn}(x)}{|x|^k \cdot \Gamma(-k+1/2)} \cdot \mathcal{J}_{-k-1/2}(x)$$

и по формуле (2.5)

$$\begin{aligned} \text{Sh}_{k+1}(x)|_{\gamma=0} &= \frac{(-1)^k \cdot (2p_{k+1})! \cdot \sqrt{\pi} \cdot 2^{2p_{k+2}-1}}{(2k)! \cdot \Gamma(-k+1/2)} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{ch}_{k+1}(x) \\ &= \frac{(2p_{k+1})! \cdot 2^{2p_{k+2}-2k-1}}{k!} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{ch}_{k+1}(x) \\ &= \frac{\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)! \cdot 2^{k(k-1)/2}}{k!} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{ch}_{k+1}(x). \end{aligned}$$

Аналогично получается и вторая из формул (4.4). Доказательство завершено.

На основании формул (4.2), (3.2) и (1.6), по аналогии с теоремой 1.1, имеет место

ТЕОРЕМА 4.2. *Любая собственная функция оператора $\nabla_{k,\gamma}^2$, отвечающая единичному собственному значению, может быть представлена в виде*

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_1^*(x) &= a_1 \cdot \text{Ch}_k(x) + a_2 \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Sh}_k(x) \\ &+ a_3 \cdot \text{Sh}_{k+1}(x) + a_4 \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Ch}_{k+1}(x),\end{aligned}\tag{4.5}$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{R}$.

Везде далее будем обозначать через

$$c_k = 2^k \cdot \left(\frac{k(k-1)}{2} + 1, k \right).$$

ТЕОРЕМА 4.3. *Имеют место формулы $\nabla_{k,\gamma}$ -дифференцирования:*

1). При $k = 2$ имеем

$$\begin{aligned}\nabla_{2,\gamma}[\text{Ch}_2](x) &= \frac{1}{24} \cdot \text{Sh}_3(x); & \nabla_{2,\gamma}[\text{sgn}(x) \cdot \text{Ch}_3](x) &= 24 \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Sh}_2(x); \\ \nabla_{2,\gamma}[\text{Sh}_3](x) &= 24 \cdot \text{Ch}_2(x); & \nabla_{2,\gamma}[\text{sgn}(x) \cdot \text{Sh}_2](x) &= \frac{1}{24} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Ch}_3(x).\end{aligned}$$

2). При $k \neq 2$ имеем

$$\begin{aligned}\nabla_{k,\gamma}[\text{Ch}_k](x) &= \frac{1}{c_k} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Ch}_{k+1}(x); & \nabla_{k,\gamma}[\text{sgn}(x) \cdot \text{Ch}_{k+1}](x) &= c_k \cdot \text{Ch}_k(x); \\ \nabla_{k,\gamma}[\text{Sh}_{k+1}](x) &= c_k \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Sh}_k(x); & \nabla_{k,\gamma}[\text{sgn}(x) \cdot \text{Sh}_k](x) &= \frac{1}{c_k} \cdot \text{Sh}_{k+1}(x).\end{aligned}$$

Доказательство можно провести методом, аналогичным методу доказательства теоремы 1.2, но это не очень удобно. Будем применять формулы (4.3), (4.4) и $\nabla_{k,0} = \nabla_k$.

Поскольку $\text{Ch}_k(x)$ и $\text{Sh}_{k+1}(x)$ являются собственными функциями оператора $\nabla_{k,\gamma}^2$, то функции $\nabla_{k,\gamma}[\text{Ch}_k](x)$ и $\nabla_{k,\gamma}[\text{Sh}_{k+1}](x)$ – так же его собственные функции. Далее, исходя из принадлежностей $\nabla_{k,\gamma}[\text{Ch}_k](x) \in \mathcal{F}_-(\Omega)$, $\nabla_{k,\gamma}[\text{Sh}_{k+1}](x) \in \mathcal{F}_+(\Omega)$, на основе формулы (4.5) имеем следующие равенства:

$$\nabla_{k,\gamma}[\text{Ch}_k](x) = A_{1k} \cdot \text{Sh}_{k+1}(x) + B_{1k} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Ch}_{k+1}(x),$$

$$\nabla_{k,\gamma}[\text{Sh}_{k+1}](x) = A_{2k} \cdot \text{Ch}_k(x) + B_{2k} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Sh}_k(x).$$

Остается определить константы.

1). Случай $k = 1$.

$$\nabla_{1,\gamma}[\text{Ch}_1](x) = A_{11} \cdot \text{Sh}_2(x) + B_{11} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Ch}_2(x),$$

$$\nabla_{1,\gamma}[\text{Sh}_2](x) = A_{21} \cdot \text{Ch}_1(x) + B_{21} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Sh}_1(x).$$

или, согласно формулам (4.3),

$$\nabla_1[\text{ch}_1](x) = A_{11} \cdot \text{sh}_2(x) + B_{11} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{ch}_2(x),$$

$$\nabla_1[\text{sh}_2](x) = A_{21} \cdot \text{ch}_1(x) + B_{21} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{sh}_1(x).$$

Таким образом, равенства (1.13) дают $A_{11} = 0$; $B_{11} = 1/2$; $A_{21} = 0$; $B_{21} = 2$.

2). Случай $k = 2$.

$$\nabla_{2,\gamma}[\text{Ch}_2](x) = A_{12} \cdot \text{Sh}_3(x) + B_{12} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Ch}_3(x),$$

$$\nabla_{2,\gamma}[\text{Sh}_3](x) = A_{22} \cdot \text{Ch}_2(x) + B_{22} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Sh}_2(x).$$

Далее, по формулам (4.3) и (4.4) имеем

$$\nabla_{2,\gamma}[\text{Ch}_2](x)|_{\gamma=0} = \nabla_2[\text{ch}_2](x) = 6A_{12} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{ch}_3(x) + 6B_{12} \cdot \text{sh}_3(x),$$

$$\nabla_{2,\gamma}[\text{Sh}_3](x)|_{\gamma=0} = 6 \cdot \nabla_2[\text{sgn}(x) \cdot \text{ch}_3](x) = A_{22} \cdot \text{ch}_2(x) + B_{22} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{sh}_2(x).$$

Таким образом, согласно (1.13) имеем $A_{12} = 1/24$; $B_{12} = 0$; $A_{22} = 24$; $B_{22} = 0$.

3). Случай $k \geq 3$. Из формул (4.4) имеем

$$\nabla_{k,\gamma}[\text{Ch}_k](x)|_{\gamma=0} = \frac{2^{k(k-1)/2} \cdot \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)!}{k!} \cdot (A_{1k} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{ch}_{k+1}(x) + B_{1k} \cdot \text{sh}_{k+1}(x)),$$

$$\nabla_{k,\gamma}[\text{Sh}_{k+1}](x)|_{\gamma=0} = \frac{2^{(k-1)(k-2)/2} \cdot \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)!}{(k-1)!} \cdot (A_{2k} \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{sh}_k(x) + B_{2k} \cdot \text{ch}_k(x)).$$

По формулам (4.4) и (1.13) левые части последних двух формул вычисляются следую-

щим образом

$$\begin{aligned}\nabla_{k,\gamma}[\text{Ch}_k](x)|_{\gamma=0} &= \frac{2^{(k-1)(k-2)/2} \cdot \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)!}{(k-1)!} \cdot \nabla_k[\text{sgn}(x) \cdot \text{sh}_k](x) \\ &= \frac{2^{k(k-3)/2} \cdot \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)!}{k!} \cdot \text{sh}_{k+1}(x), \\ \nabla_{k,\gamma}[\text{Sh}_{k+1}](x)|_{\gamma=0} &= \frac{2^{k(k-1)/2} \cdot \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)!}{k!} \cdot \nabla_k[\text{sgn}(x) \cdot \text{ch}_{k+1}](x) \\ &= \frac{2^{k(k-1)/2+1} \cdot \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)!}{(k-1)!} \cdot \text{ch}_k(x).\end{aligned}$$

Сравнивая соответствующие формулы, получаем формулы на константы:

$$\begin{aligned}A_{1k} = 0, \quad &\frac{2^{k(k-1)/2} \cdot \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)!}{k!} \cdot B_{1k} = \frac{2^{k(k-3)/2} \cdot \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)!}{k!}; \\ A_{2k} = 0, \quad &\frac{2^{k(k-1)(k-2)/2} \cdot \left(\frac{k(k-1)}{2}\right)!}{(k-1)!} \cdot B_{2k} = \frac{2^{k(k+1)/2+1} \cdot \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)!}{(k-1)!}.\end{aligned}$$

В результате

$$A_{1k} = A_{2k} = 0; \quad B_{2k} = \frac{1}{B_{1k}} = c_k.$$

Остальные формулы получаются аналогично. Доказательство завершено.

Замечание 4.4. Находить явный вид функций $\text{Sh}_k(x)$ и $\text{Ch}_k(x)$ непосредственно из определения (4.2) технически трудно. Результат теоремы 4.3 позволяет это делать проще, исходя из рекуррентных формул ($k \geq 3$):

$$\text{Sh}_{k+1}(x) = c_k \cdot \nabla_{k,\gamma} [\text{sgn}(x) \cdot \text{Sh}_k](x),$$

$$\text{Ch}_{k+1}(x) = c_k \cdot \text{sgn}(x) \cdot \nabla_{k,\gamma} [\text{Ch}_k](x),$$

где явный вид функций $\text{Sh}_3(x)$ и $\text{Ch}_3(x)$ приведен в примерах.

ТЕОРЕМА 4.4. Любая собственная функция $\tilde{\psi}_1(x)$ оператора Дункла $\nabla_{k,\gamma}$, отвечающая единичному собственному значению, может быть записана:

1). При $k = 2$ – в виде

$$\tilde{\psi}_1(x) = a_1 \cdot (24 \cdot \text{Ch}_2(x) + \text{Sh}_3(x)) + a_2 \cdot \text{sgn}(x) \cdot (24 \cdot \text{Sh}_2(x) + \text{Ch}_3(x));$$

2). При $k \neq 2$ – в виде

$$\tilde{\psi}_1(x) = a_1 \cdot (c_k \cdot \text{Ch}_k(x) + \text{sgn}(x) \cdot \text{Ch}_{k+1}(x)) + a_2 \cdot (\text{Sh}_{k+1}(x) + c_k \cdot \text{sgn}(x) \cdot \text{Sh}_k(x)),$$

где $a_1, a_2 \in \mathbf{R}$.

Доказательство теоремы 4.4 непосредственно основано на применении оператора $\nabla_{k,\gamma}$ к формуле (4.5), с использованием формул $\nabla_{k,\gamma}$ -дифференцирования из теоремы 4.3.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. Собственные функции $\psi_1(x)$ оператора $\nabla_k = \nabla_{k,0}$ естественным образом связаны с собственными функциями $\tilde{\psi}_1(x)$ оператора $\nabla_{k,\gamma}$:

$$\psi_1(x) = \tilde{\psi}_1(x) \Big|_{\gamma=0}.$$

Доказательство получается из теоремы 4.4 на основе (4.3), (4.4) и очевидной формулы

$$c_k \cdot b_k = 2k \cdot b_{k+1},$$

где, напомним,

$$c_k = 2^k \cdot \left(\frac{k(k-1)}{2} + 1, k \right) \quad \text{и} \quad b_k = \frac{2^{(k-1)(k-2)/2} \cdot \binom{k(k-1)}{2}!}{(k-1)!}.$$

Замечание 4.5. Ядра операторов $\nabla_{k,\gamma}^2$ и $\nabla_{k,\gamma}$, $k \geq 2$, соответственно имеют вид:

$$\text{Ker}[\nabla_{k,\gamma}^2](x) = a_1 \cdot \frac{\mathcal{P}_k(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} + a_2 \cdot \frac{\mathcal{P}_{k-2}(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} + \text{sgn}(x) \cdot \left(a_3 \cdot \frac{\mathcal{P}_{k+1}(|x|)}{\mathcal{P}_k(|x|)} + a_4 \cdot \frac{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)}{\mathcal{P}_k(|x|)} \right),$$

$$\text{Ker}[\nabla_{k,\gamma}](x) = a_1 \cdot \frac{\mathcal{P}_k(|x|)}{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)} + a_4 \cdot \text{sgn}(x) \cdot \frac{\mathcal{P}_{k-1}(|x|)}{\mathcal{P}_k(|x|)}.$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbf{R}$.

Замечание 4.6. Ядра операторов ∇_k^2 и ∇_k , приведенные в замечании 1.7, естественным образом связаны с ядрами операторов $\nabla_{k,\gamma}^2$ и $\nabla_{k,\gamma}$, $k \geq 2$:

$$\text{Ker}[\nabla_{k,\gamma}^2](x) \Big|_{\gamma=0} = \text{Ker}[\nabla_k^2](x),$$

$$\text{Ker}[\nabla_{k,\gamma}](x) \Big|_{\gamma=0} = \text{Ker}[\nabla_k](x).$$

References

- [1] C.F. Dunkl, Differential-difference operators associated to reflection groups, *Trans. Math. Soc.*, 311, (1989), p. 163 – 183.
- [2] Ю.Ю.БЕРЕСТ, А.П.ВЕСЕЛОВ, Принцип Гюйгенса и интегрируемость, – УМН. т.49, 6(300), (1994), с.8-78.
- [3] V.M. BUCHSTABER, G. FELDER, A.P. VESELOV, Elliptic Dunkl operators, root systems, and functional equations, arXiv:hep-th/9403178, (1994), p. 1 – 30.
- [4] V.A. GOLUBEVA, V.P. LEKSIN, Heisenberg-Weyl operator algebras associated to the models of Calogero-Sutherland type and isomorfism of rational and trigonometric models, *J. Math. Sci.*, 98, 3, (2000), p. 291 – 318.
- [5] В.В. МЕЩЕРЯКОВ, Дифференциально-разностные операторы, Saarbrücken, Germany: LAP LAMBERT Acad. Pub.GmbH & Co. KG, (2010).
- [6] K.L. STELLMACHER, Ein Beispiel einer Huygennchen differentialgleichung, – Nachr. Akad. Wiss., Gottingen Math. Phys. Kl. Pa., V. 10, (1953), p. 133 – 138.
- [7] Н.Х. ИБРАГИМОВ, Группы преобразований в математической физике, – М.:Наука, (1983).
- [8] J.E. LAGNESE, K.L. STELLMACHER, A method of generating class of Huygens' operators, – *J. Math. Mech.*, V. 17, N 5, (1967), p. 461 – 472.
- [9] J.L.BURCHNALL, T.W.CHAUNDY, A set of differential equations which can be solved by polynomials, *Proc. London Math. Soc.*, 30, (1929), p. 401-414.
- [10] M. RÖSLER, Generalized Hermite polynomials and the heat equation for Dunkl operators, *Comm. Math. Phys.*, 192 (1998), p. 519-542.
- [11] В.В.МЕЩЕРЯКОВ, С.П. ХЭКАЛО, Собственные функции рационального оператора Дункла на прямой, Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам: тезисы докладов, Сузdalь, – М. МИАН, (2010), с.133.
- [12] S. КНЕКАЛО, Special functions associated with the Darboux-Dunkl differential-difference operators, Days on Diffraction, International conference, Abstracts, S.-Petersburg, (2012) p. 60-61.
- [13] Д.С. КУЗНЕЦОВ, Специальные функции, – М.: Высшая школа, (1965).

- [14] Y.BEREST, Hierarchies of Huygens' Operators and Hadamard's Conjecture, – Acta Appl. Math. V.53, (1998), p. 125-185.
- [15] С.П. ХЭКАЛО, Дифференциальный оператор Кэли-Лапласа на пространстве прямоугольных матриц, Известия Академии Наук, Математическая серия, т.69, 1, (2005), с. 195-224.
- [16] С.П. ХЭКАЛО, Пошаговая калибровочная эквивалентность дифференциальных операторов, Математические заметки, т.77, в.6, (2005), с. 917-929.
- [17] Р.Л. Грэхем, Д.Э. Кнут, О. Поташник, Конкретная математика. Математические основы информатики, 2-е изд: Пер. с англ. – М.: ООО "И.Д.Вильямс", (2010).