ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ 23/2012

ПРЕДДЕРЕВЬЯ И ТОПОЛОГИЯ ТЕНЕЙ

А. В. МАЛЮТИН

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук
e-mail: malyutin@pdmi.ras.ru

Аннотация

В работе развиваются некоторые аспекты теории преддеревьев, берущей начало в трудах Л. Ворда [33], П. Дюше [12], Б. Боудича [4], С. Аделеке и П. Ноймана [1] и др. Устанавливается связь теории преддеревьев с теорией выпуклых структур. Подробно изучается *топология теней* — эта замечательная топология возникает на древовидных объектах различных классов и имеет многочисленные применения.

Ключевые слова: дерево, преддерево, псевдодерево, древовидное пространство, дендрон, дендрит, R-дерево, промежуточность, пространство интервалов, выпуклость, многообразие выпуклых структур, антиматроид, теорема Крейна-Мильмана, топология теней, топология наблюдателей, топология Лоусона, пространство концов, сизигия.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты 11-01-00677-а и 11-01-12092-офи-м) и гранта Президента РФ МД-5118.2011.1.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

Contents

Введение

В настоящей работе развиваются некоторые аспекты теории преддеревьев. Преддеревья — широкое обобщение обычных деревьев[1], охватывающее Λ-деревья (в частности, $\mathbb{R}$-деревья), древовидные топологические пространства (включая дендроны, дендриты и т. д.), псевдодеревья и ряд других классов древовидных структур. Преддерево можно охарактеризовать как множество с тернарным отношением, интерпретируемым как отношение "между", у которого каждое конечное подпространство вкладывается в дерево[2]. При этом оказывается, что в данном случае вложимость всех конечных подпространств гарантируется вложимостью $\leqslant$4-точечных[3], благодаря чему класс преддеревьев можно задать с помощью простой конечной системой аксиом. По-видимому, впервые преддеревья были определены (под наименованием "*cutpoint structures*") Л. Вордом в [33]. Тот же класс объектов вводится (в других терминах, в рамках теории выпуклых структур) в работе П. Дюше [12] как "*variety of arborescent convexities*". Существенное развитие теория преддеревьев получила в монографиях Б. Боудича [4], С. Аделеке и П. Ноймана [1] (в [1] преддеревья выступают под термином "*B-sets*"). Завоевавший популярность термин "преддерево" ("*pretree*") введен Б. Боудичем.

Имеется несколько подходов к определению преддеревьев: тернарные структуры, разбиения, пространства интервалов, теория выпуклых структур и проч. Наиболее широкое распространение на текущий момент получил вышеупомянутый подход с тернарными структурами. В рамках этого подхода преддерево задается как множество (скажем, $\mathcal{T}$) с тернарным отношением $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^3$, удовлетворяющим следующим аксиомам:

(T0) если $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, то $x \neq z$,

(T1) если $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, то $(z, y, x) \in \mathcal{S}$,

(T2) если $(x, y, z) \in \mathcal{S}$, то $(x, z, y) \notin \mathcal{S}$,

(T3) если $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ и $w \neq y$, то $(x, y, w) \in \mathcal{S}$ или $(w, y, z) \in \mathcal{S}$.

Отношение $\mathcal{S}$ понимается как строгое отношение промежуточности, т. е. соотношение $(x, y, z) \in \mathcal{S}$ следует интерпретировать как "y лежит строго между x

[1] В математической литературе под "обычными" деревьями понимается, как правило, один из следующих классов объектов:

i) связные односвязные CW-комплексы размерности $\leqslant 1$;

ii) так называемые $\mathbb{Z}$-деревья (в качестве ребер выступают пары вершин);

iii) полные симплициальные $\mathbb{R}$-деревья (часто — с ребрами единичной длины).

В данном случае (как и в большинстве случаев использования термина "(обычное) дерево" в настоящей работе) утверждение справедливо для всех этих классов.

[2] Здесь также актуально замечание из сноски 1.

[3] Ср. с характеризацией классов метрических пространств их четырехточечными подпространствами [14, 1.19].

и z". Полагая для точек x, y преддерева $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$

$$[x,y] := \{t \in \mathcal{T} : (x,t,y) \in \mathcal{S}\} \cup \{x,y\},$$

можно переписать систему аксиом (T0)–(T3) в виде

(A0) $[x,y] \supset \{x,y\}$,

(A1) $[x,y] = [y,x]$,

(A2) если $z \in [x,y]$ и $y \in [x,z]$, то $y = z$,

(A3) $[x,y] \subset [x,z] \cup [z,y]$,

т. е. в терминах пространств интервалов. (Напомним, что *пространством интервалов* называется множество X с отображением $X \times X \to 2^X$, $(x,y) \mapsto [x,y]$, обладающим свойствами (A0) и (A1).)

Один из альтернативных подходов к теории преддеревьев дает теория выпуклых структур (эта теория представлена, например, в [28, 30]). В рамках теории выпуклых структур вышеупомянутый прием с переходом от класса пространств к более широкому классу пространств с теми же конечными подпространствами, что и исходный класс, использовал Р. Э. Джемисон-Валднер, определяя *многообразия* выпуклых структур в [18]. Многообразие выпуклых структур, порожденное деревьями[4], рассматривается в работе П. Дюше [12]. Можно показать, что это многообразие эквивалентно классу преддеревьев: имеется естественное взаимно однозначное соответствие между элементами этого многообразия и преддеревьями. (Насколько мне известно, ни доказательств этой эквивалентности, ни ее упоминаний в литературе не имеется. В настоящей работе факт эквивалентности не доказывается.) Отметим, что и в классе тернарных структур, и в классе пространств интервалов подкласс преддеревьев является *конечно базируемым* (его можно задать посредством конечного списка запрещенных подпространств), в то время как эквивалентное классу преддеревьев многообразие выпуклостей конечно базируемым в классе всех выпуклых структур уже не является. В работе мы коснемся связи преддеревьев с теорией выпуклости, дав серию аксиоматических характеризаций преддеревьев в терминах выпуклых структур. Оказывается, к примеру, что преддеревья — это то же самое, что *когерентные антиматроиды, удовлетворяющие первой аксиоме отделимости* (имеется в виду отделимость в смысле выпуклых структур).

Значительную часть настоящей работы занимает разработка направления, связанного с одной замечательной топологией, которая многократно описывалась для различных классов древовидных объектов. На преддереве эта топология порождается множествами вида

$$\{x \in \mathcal{T} : r \notin [x,t]\}, \quad \text{где } r, t \in \mathcal{T},\ r \neq t,$$

[4] См. сноску 1.

которые мы называем *ветвями* (а их дополнения — *тенями*). У древовидных топологических пространств (см. определение в разделе 1.2(3)), например — у обычных CW-деревьев (т. е. связных односвязных CW-комплексов размерности $\leqslant 1$) и $\mathbb{R}$-деревьев, ветви — это компоненты связности подмножеств вида $\mathcal{T} \setminus \{r\}$, $r \in \mathcal{T}$, так что в случае древовидных пространств базой указанной топологии служат компоненты связности пространств вида $\mathcal{T} \setminus F$, где $F \subset \mathcal{T}$ — конечно.

У вышеописанной топологии не имеется устоявшегося названия. Так, Л. Ворд [33], определяя ее для общего случая преддерева, использует термины *augmented cutpoint topology* и *augmented nodal topology*. В предшествующей работе [32] ту же топологию в случае древовидных пространств Ворд обозначает через σ. У Б. Боудича [4] эта топология называется *порядковой* (*order topology*). П. де ля Арп и Ж.-П. Приу [16], вслед за Н. Монодом и И. Шаломом [22], описывают вариант той же топологии для случая пространства, являющегося объединением дерева и его концов, ссылаясь при этом на нее как на *топологию теней* или *теневую* (*shadow topology*). Ч. Фавр и М. Джонсон [13] используют термин *слабая топология* (*weak topology*). Т. Кулбуа, А. Хилион и М. Люстиг [11] описывают топологию для случая $\mathbb{R}$-деревьев и называют ее *топологией наблюдателей* (*observers' topology*), приписывая изобретение этого термина В. Жирарделю. В некоторых случаях (см., например, П. Папасоглу и Э. Свенсон [29, 25]) эту топологию привлекают, не давая ей названия. В монографии Я. Никиела [24] родственная топология на псевдодеревьях, занимая центральное место, также не получает названия и обозначается через $T'_{\leqslant}$. На представляющих древовидные пространства псевдодеревьях интересующая нас топология совпадает с *топологией Лоусона*. В настоящей работе используется термин *топология теней*.

Нетрудно показать, что на обычном дереве[5] топология теней содержится в стандартной, совпадая с ней в том и только том случае, когда дерево локально конечно. На $\mathbb{R}$-дереве топология теней содержится в топологии метрики, совпадая с ней тогда и только тогда, когда метрическое пополнение $\mathbb{R}$-дерева локально компактно в топологии метрики. Вообще, у всякого древовидного пространства топология теней содержится в исходной, а у дендрона — совпадает с ней (см. раздел 6.2(3)). При этом, как показано в [32, теоремы 20,21], переход к топологии теней превращает любое древовидное пространство в регулярное локально связное и дугообразно связное древовидное пространство.

Важная для приложений особенность топологии теней состоит в том, что, пополнив произвольное преддерево определенным образом, мы получаем преддерево с компактной топологией теней. Это свойство оказывается полезным, в частности, при изучении действий групп на древовидных структурах. Например, в случае обычного дерева T в качестве такого "компактного пополнения" выступает объединение $T \cup \mathrm{Ends}(T)$, где $\mathrm{Ends}(T)$ — пространство концов. На $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ имеется естественная структура преддерева, и топология теней

[5] См. сноску 1.

этого преддерева компактна, каково бы ни было T. (Стандартная топология, рассматриваемая обычно на объединении $T \cup \mathrm{Ends}(T)$, компактна тогда и только тогда, когда T локально конечно. Топология теней на $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ содержится в стандартной, совпадая с ней в случае локально конечного T.)

Одна из целей настоящей работы состоит в доказательстве ряда теорем о базовых свойствах топологии теней (отделимости, компактности и т. п.) в общем случае произвольного преддерева. Эти теоремы близки к результатам работы [24]. В ряде важных частных случаев результаты, относящиеся к базовым свойствам топологии теней, доказываются также в [4, 11, 13, 22, 23, 25, 26, 32, 33].

Структура работы. В §1 приведены стандартные аксиоматики теории преддеревьев и доказательства их эквивалентности, даны примеры и некоторые свойства преддеревьев.

В §2 изучаются свойства выпуклых подмножеств преддерева, исследуется связь теории преддеревьев с теорией выпуклых структур.

В §3 изучаются свойства линейных подмножеств преддерева, преддеревья рассматриваются в контексте более общих пространств интервалов.

В §4 определены некоторые классы преддеревьев.

В §5 вводятся понятия ветвей и теней преддерева, изучаются их свойства (они используются в доказательствах свойств топологии теней). Также в §5 представлено альтернативное определение преддеревьев через системы разбиений.

В §6 приведено определение топологии теней и доказан ряд ее свойств.

§7 посвящен свойствам отделимости топологии теней.

В §8 доказывается критерий компактности топологии теней.

В §9 доказывается, что топология теней секвенциально компактна тогда и только тогда, когда она счетно компактна.

В §10 доказывается ряд утверждений о метризуемости топологии теней.

В §11 дается определение пространства концов преддерева, описывается продолжение структуры преддерева на множество его концов, доказывается ряд утверждений о свойствах топологии теней на "пополненном" преддереве.

В §12 обсуждаются свойства топологии теней на обычном $\mathbb{Z}$-дереве и объединении $\mathbb{Z}$-дерева с множеством его концов.

1 Преддеревья

В настоящем параграфе приводятся определения, примеры и некоторые свойства преддеревьев. Как отмечено во введении, имеется несколько подходов к определению преддеревьев. В этом параграфе представлены стандартные аксиоматические способы задания преддеревьев: в терминах тернарных отношений и интервалов. В качестве стартового мы берем определение через строгое отношение промежуточности, — такой вариант аксиоматики на текущий момент доминирует в литературе. Следом приводится система аксиом для нестрогой промежуточности. Затем мы переходим к описанию через системы "замкнутых интервалов". Терминология интервалов используется на протяжении всей работы в качестве основной. В §§2 и 5 представлены новые (насколько мне известно) системы аксиом для теории преддеревьев, основывающиеся на выпуклых множествах и на разбиениях, соответственно.

1.1. Определение. (Первая система аксиом.) *Тернарными отношениями* (или *тернарными структурами*) на множестве X называются подмножества

$$R \subset X^3 = X \times X \times X.$$

Следуя [33], мы будем, как правило, писать $Rxyz$ вместо $(x, y, z) \in R$.

Преддеревом называется множество $\mathcal{T}$ с тернарным отношением $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^3$, удовлетворяющим следующим аксиомам:

(T0) если $\mathcal{S}xyz$, то $x \neq z$,

(T1) если $\mathcal{S}xyz$, то $\mathcal{S}zyx$,

(T2) если $\mathcal{S}xyz$, то $(x, z, y) \notin \mathcal{S}$,

(T3) если $\mathcal{S}xyz$ и $w \neq y$, то $\mathcal{S}xyw$ или $\mathcal{S}wyz$.

Отношение $\mathcal{S}$ понимается как строгое отношение промежуточности, т. е. соотношение $\mathcal{S}xyz$ следует интерпретировать как "y лежит строго между x и z".

1.2. Примеры. 1. Обычные деревья (см. сноску 1) с обычным отношением промежуточности.

2. $\mathbb{R}$-деревья и, более общо, Λ-деревья (определения даны, например, в [8]).

3. Древовидные пространства (включая дендроны и т. п.).

Древовидным пространством называют связное топологическое пространство, в котором любые две различные точки разделены третьей (говорят, что точка $c \in D$ топологического пространства D *разделяет* точки $a, b \in D$, если пространство $D \setminus \{c\}$ представимо в виде дизъюнктной суммы двух открытых множеств A и B, где $a \in A$ и $b \in B$)[6]. Нетрудно убедиться, что все древовидные пространства хаусдорфовы.

---

[6]Точка $c \in D$ топологического пространства D разделяет точки $a, b \in D$ тогда и только тогда, когда a и b лежат в разных квазикомпонентах пространства $D \setminus \{c\}$. Напомним, что *квазикомпонентой* (связности) точки топологического пространства называется пересечение всех содержащих ее открыто-замкнутых подмножеств. (Квазикомпоненты замкнуты и разбивают пространство. Компонента (связности) точки содержится в ее квазикомпоненте. Если D — древовидное пространство и $c \in D$, то компоненты пространства $D \setminus \{c\}$ совпадают с его квазикомпонентами (это следует, например, из [26, теорема 4] или [32, теорема 19]).

Задача. Является ли древивидным связное пространство E, в котором для любых двух точек $a, b \in E$ найдется точка $c \in E$ такая, что a и b лежат в разных компонентах множества $E \setminus \{c\}$?

Дендронами называют компактные древовидные пространства.

Дендритами называют метризуемые дендроны.

4. Любое подмножество преддерева является преддеревом.

Вообще говоря, приведенные примеры исчерпывают перечень, поскольку каждое преддерево вкладывается в некоторое Λ-дерево (см. [4] и [9]). Отметим также, что каждое преддерево вкладывается в некоторый дендрон (см. теорему 7.3).

5. Всякое линейно упорядоченное множество с порядковым отношением промежуточности является преддеревом.

6. Всякое множество с пустым тернарным отношением является преддеревом.

7. *Псевдодеревом* называется частично упорядоченное множество $(P, \leqslant)$, в котором каждое из подмножеств вида $\downarrow p := \{t \in P : t \leqslant p\}$, $p \in P$, линейно упорядочено. *Инфимумом* $\inf\{x, y\}$ элементов $x, y \in P$ называют наибольший элемент множества $(\downarrow x) \cap (\downarrow y)$ (в случае, если таковой существует). Для точек x, y псевдодерева $(P, \leqslant)$ обозначим через $V'(x, y)$ множество тех $z \in P$, для которых выполняется ровно одно из соотношений $z < x$ и $z < y$, и положим $V(x, y) := V'(x, y) \cup \inf\{x, y\}$. Тогда тернарное отношение $\mathcal{S}$, определяемое правилом

$$\mathcal{S}abc \Leftrightarrow b \in V(a, c),$$

определяет на P структуру преддерева. (См. также обсуждение в [4, стр. 25].)

8. Важный пример: объединение всякого дерева (более общо, преддерева) с пространством его концов естественным образом снабжено структурой преддерева (см. §11 и теорему 11.3).

9. Следующий пример взят из [33].

1.3. Предложение. *Пусть T — связное топологическое пространство (выполнения аксиом отделимости не требуется). Определим на T тернарное отношение $\mathcal{S} \subset T^3$, полагая $\mathcal{S}xyz$ в случае, когда x и z разделены точкой y (т. е. лежат в разных квазикомпонентах пространства $T \setminus \{y\}$). Тогда $\mathcal{S}$ удовлетворяет аксиомам $(T0)$–$(T3)$, т. е. является структурой преддерева.*

Proof. Выполнимость аксиом (T0), (T1) и (T3) очевидна из определения отношения $\mathcal{S}$. Для проверки выполнимости аксиомы (T2) предположим, что найдутся $x, y, z \in T$ такие, что $\mathcal{S}xyz$ и $\mathcal{S}xzy$. Условие $\mathcal{S}xyz$ по определению означает, что пространство $T \setminus \{y\}$ разбивается на два открыто-замкнутых множества $A \ni x$ и $B \ni z$. Условие $\mathcal{S}xzy$ означает, что $T \setminus \{z\}$ разбивается на два открыто-замкнутых множества $P \ni x$ и $Q \ni y$. Поскольку A и B открыты в $T \setminus \{y\}$, а P и Q — в $T \setminus \{z\}$, найдутся четыре множества

$$\begin{aligned} A' \in \{A, A \cup \{y\}\}, \quad B' \in \{B, B \cup \{y\}\}, \\ P' \in \{P, P \cup \{z\}\}, \quad Q' \in \{Q, Q \cup \{y\}\}, \end{aligned} \tag{1}$$

открытые в T. При этом по построению имеем

$$\begin{aligned} x \in A' \not\ni z, \quad x \notin B' \ni z, \\ x \in P' \not\ni y, \quad x \notin Q' \ni y. \end{aligned} \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$A' \cap P' = A \cap P \quad \text{и} \quad B' \cup Q' = B \cup Q.$$

Положим

$$R := A' \cap P' = A \cap P \quad \text{и} \quad S := B' \cup Q' = B \cup Q.$$

Множество R непусто (поскольку содержит x) и открыто в T (будучи пересечением открытых A' и P'). Множество S также непусто и открыто в T (будучи объединением открытых B' и Q'). При этом

$$R \cap S \;=\; (A \cap P) \cap (B \cup Q) \;\subset\; (A \cap B) \cup (P \cap Q) \;=\; \varnothing,$$

и, поскольку $B \ni z$ и $Q \ni y$,

$$R \cup S \;=\; (A \cap P) \cup (B \cup Q) \;=\; T.$$

Это означает, что R и S — собственные открыто-замкнутые подмножества в T, что невозможно в силу его связности. Полученное противоречие указывает на выполнимость аксиомы (T2). Предложение доказано. □

1.4. Задача. Сохранит ли справедливость предложение 1.3, если вместо квазикомпонент связности рассматривать компоненты?

Еще один источник примеров преддеревьев возникает из следующего понятия.

1.5. Древовидные наборы разбиений. *Разбиением* множества называется совокупность его непустых попарно непересекающихся подмножеств (*элементов* разбиения) которые покрывают все множество. Разбиение *тривиально*, если состоит из одного элемента. Набор Z нетривиальных разбиений множества X назовем *древовидным*, если у всякой пары ζ, ξ различных разбиений из Z найдутся элементы $\zeta_\xi \in \zeta$ и $\xi_\zeta \in \xi$ такие, что $\zeta_\xi \cup \xi_\zeta = X$. Ясно, что условие $\zeta_\xi \cup \xi_\zeta = X$ задает элементы $\zeta_\xi \in \zeta$ и $\xi_\zeta \in \xi$ однозначно (для нетривиальных несовпадающих разбиений ζ, ξ).

1.6. Предложение. *Пусть Z — древовидный набор нетривиальных разбиений некоторого множества X. Определим на Z тернарное отношение $\mathcal{S} \subset Z^3$, полагая $\mathcal{S}\alpha\beta\gamma$ в случае, когда $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ и $\beta_\alpha \neq \beta_\gamma$. Тогда $\mathcal{S}$ удовлетворяет аксиомам (T0)–(T3), т. е. определяет на Z структуру преддерева.*

Proof. Аксиомы (T0) и (T1) выполняются, так как из $\beta_\alpha \neq \beta_\gamma$ следует, что $\alpha \neq \gamma$ и $\beta_\gamma \neq \beta_\alpha$. Чтобы проверить выполнимость аксиомы (T2), предположим, что $\mathcal{S}\alpha\beta\gamma$ и $\mathcal{S}\alpha\gamma\beta$ для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in Z$. Это в силу определения означает, что $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$, $\beta_\alpha \neq \beta_\gamma$ и $\gamma_\alpha \neq \gamma_\beta$, т. е. $\beta_\alpha \cap \beta_\gamma = \varnothing$ и $\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta = \varnothing$. Однако из $\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha$ в силу предполагаемой древовидности набора Z по определению вытекает, что

$$\alpha_\beta \cup \beta_\alpha = \beta_\gamma \cup \gamma_\beta = \alpha_\gamma \cup \gamma_\alpha = X, \tag{3}$$

в силу чего из условия $\beta_\alpha \cap \beta_\gamma = \varnothing$ получаем, что

$$\beta_\alpha \subset \gamma_\beta \quad \text{и} \quad \beta_\gamma \subset \alpha_\beta, \tag{4}$$

а из условия $\gamma_\alpha \cap \gamma_\beta = \varnothing$ вытекает, что

$$\gamma_\alpha \subset \beta_\gamma \quad \text{и} \quad \gamma_\beta \subset \alpha_\gamma. \tag{5}$$

Из имеющихся соотношений $\beta_\gamma \subset \alpha_\beta$, $\gamma_\beta \subset \alpha_\gamma$ и $\beta_\gamma \cup \gamma_\beta = X$ в силу нетривиальности разбиения α следует, что $\alpha_\beta \neq \alpha_\gamma$ и, значит, $\alpha_\beta \cap \alpha_\gamma = \varnothing$, что в силу (3) дает

$$\alpha_\beta \subset \gamma_\alpha \quad \text{и} \quad \alpha_\gamma \subset \beta_\alpha. \tag{6}$$

Из (4)–(6) следует, что

$$\alpha_\beta = \gamma_\alpha = \beta_\gamma \quad \text{и} \quad \alpha_\gamma = \beta_\alpha = \gamma_\beta, \tag{7}$$

откуда в силу (3) получаем, что $\alpha = \beta = \gamma$. Противоречие.

Аксиома (T3) выполняется, так как из $\beta_\alpha \neq \beta_\gamma$ следует, что либо $\beta_\alpha \neq \beta_\delta$, либо $\beta_\delta \neq \beta_\gamma$. □

1.7. Замечание. Пусть X — множество, Z — некоторый набор его разбиений. Пусть X/Z — разбиение множества X, порожденное набором Z (точки $x, y \in X$ лежат в одном и том же элементе разбиения X/Z если и только если в наборе Z не имеется разбиения, у которого точки x и y лежат в разных элементах). Если набор Z древовиден, то на множестве $Z \cup (X/Z)$ имеется естественная структура преддерева, являющаяся расширением структуры из предложения 1.6.

1.8. Замечание. Сизигийные наборы. Набор $\mathcal{P}$ подмножеств множества X называется *сизигийным*, если, каковы бы ни были подмножества $A, B \in \mathcal{P}$, выполняется одно из следующих соотношений:

$$A \cap B = \varnothing, \quad A \cup B = X, \quad A \subset B, \quad A \supset B.$$

Пусть $\mathcal{P}$ — сизигийный набор подмножеств множества X, включающий хотя бы одно собственное подмножество из X, а $Z_{\mathcal{P}}$ — набор разбиений множества X, образованный всеми теми двухэлементными разбиениями, у (каждого из) которых хотя бы один из элементов входит в $\mathcal{P}$. Тогда, очевидно, $Z_{\mathcal{P}}$ древовиден.

Отметим, что совокупность элементов разбиений всякого древовидного набора разбиений является сизигийной.

1.9. Замечание. Нетривиальному преддереву можно поставить в соответствие некоторые древовидные наборы разбиений. В §5 описывается отвечающая преддереву система *узловых разбиений* (структура преддерева на этой системе изоморфна исходному преддереву). Кроме того, преддереву соответствует древовидная система двухэлементных разбиений, образованная разбиениями, состоящими из *ветвей* преддерева и их дополнений — *теней* (см. §5).

1.10. Вторая система аксиом. В работе [1] *B-множество* определяется как множество $\mathcal{T}$ с тернарным отношением $\overline{\mathcal{S}} \subset \mathcal{T}^3$, удовлетворяющим следующим аксиомам:

(B1) $(\overline{\mathcal{S}}abc) \;\Rightarrow\; (\overline{\mathcal{S}}cba)$,

(B2) $(\overline{\mathcal{S}}abc) \wedge (\overline{\mathcal{S}}acb) \;\Leftrightarrow\; b = c$,

(B3) $(\overline{\mathcal{S}}abc) \;\Rightarrow\; (\overline{\mathcal{S}}abd) \vee (\overline{\mathcal{S}}dbc)$.

Соотношение $\overline{\mathcal{S}}abc$ интерпретируется как "b лежит (нестрого) между a и c".

Для произвольного множества X положим

$$D_X := \{(x,y,z) \in X^3 : (x = y) \vee (y = z)\}. \tag{8}$$

Заметим, что каждая структура B-множества на множестве X содержит D_X (в силу аксиомы (B2)), в то время как ни одна структура преддерева на X не пересекается с D_X (структура преддерева не содержит троек вида (x,y,y) в силу (T2), поэтому не содержит и троек вида (x,x,y) — в силу (T1)).

1.11. Теорема. *Каково бы ни было множество X, эндоморфизм тернарных структур на X, переводящий структуру $S \subset X^3$ в структуру $S \cup D_X$, устанавливает взаимно однозначное соответствие между структурами преддеревьев и структурами B-множеств на X.*

Proof. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что:

1) Если структура $\mathcal{S} \subset X^3$ удовлетворяет аксиомам (T0)–(T3), то структура $\mathcal{S} \cup D_X$ удовлетворяет аксиомам (B1)–(B3).

2) Если структура $\overline{\mathcal{S}} \subset X^3$ удовлетворяет аксиомам (B1)–(B3), то найдется удовлетворяющая аксиомам (T0)–(T3) структура $\mathcal{S} \subset X^3$ такая, что $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup D_X$.

3) Если удовлетворяющие аксиомам (T0)–(T3) структуры $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset X^3$ разнятся, то $\mathcal{S}_1 \cup D_X \neq \mathcal{S}_2 \cup D_X$.

В утверждении 1 выполнимость каждой из аксиом (B1)–(B3) для структуры $\mathcal{S} \cup D_X$ устанавливается простой прямой проверкой. Например, проверка выполнимости аксиомы (B3) выглядит следующим образом. Пусть $(a,b,c) \in \mathcal{S} \cup D_X =: \mathcal{S}'$; если $\mathcal{S}abc$, то соотношение $(\mathcal{S}'abd) \vee (\mathcal{S}'dbc)$ выполняется по аксиоме (T2); если $D_X abc$, то соотношение $(\mathcal{S}'abd) \vee (\mathcal{S}'dbc)$ выполняется, так как D_X согласно своему определению является структурой B-множества.

Для доказательства утверждения 2) достаточно заметить, что если $\overline{\mathcal{S}} \subset X^3$ удовлетворяет аксиомам (B1)–(B3), то $\overline{\mathcal{S}} \setminus D_X$ удовлетворяет аксиомам (T0)–(T3).

Утверждение 3) следует из того, что (как разъясняется перед формулировкой теоремы 1.11) ни $\mathcal{S}_1$, ни $\mathcal{S}_2$ не пересекаются с D_X, а в этом случае неравенство $\mathcal{S}_1 \cup D_X \neq \mathcal{S}_2 \cup D_X$ равносильно неравенству $\mathcal{S}_1 \neq \mathcal{S}_2$. □

1.12. Интервалы. Третья система аксиом. Введем обозначения. Для точек x, y в преддереве $(\mathcal{T}, \mathcal{S})$ положим

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &:= \{t \in \mathcal{T} : \mathcal{S}xty\}, \\ [x, y] &:= \langle x, y\rangle \cup \{x, y\}, \\ [x, y\rangle &:= \langle y, x] := [x, y] \setminus \{y\}. \end{aligned} \tag{9}$$

Отметим, что $[x, x\rangle = \varnothing$. Множества вида $[x, y]$, $[x, y\rangle$, $\langle y, x]$ и $\langle x, y\rangle$ будем называть *интервалами*. Интервалы вида $[x, y]$ называются *замкнутыми интервалами*.

1.13. Лемма. *В преддереве $\mathcal{T}$ для любых точек $a, b, c \in \mathcal{T}$ выполняются следующие соотношения:*

(A0) $[a, b] \supset \{a, b\}$,

(A1) $[a, b] = [b, a]$,

(A2) *если $c \in [a, b]$ и $b \in [a, c]$, то $b = c$,*

(A3) $[a, b] \subset [a, c] \cup [c, b]$.

Лемма 1.13 вытекает из следующей теоремы 1.14, утверждающей, по сути, что набор соотношений (A0)–(A3) может служить системой аксиом для теории преддеревьев. В теореме 1.14 используется понятие *системы* подмножеств; индексированную систему $\{X_i\}_{i \in I}$ подмножеств X_i множества X мы интерпретируем как отображение $I \to 2^X$.

1.14. Теорема. *Сопоставление преддереву системы его замкнутых интервалов задает взаимно однозначное соответствие между преддеревьями и теми системами вида $\{[a, b]\}_{a, b \in X}$, состоящими из подмножеств того или иного множества X, которые обладают свойствами* (A0)–(A3).

Proof. Пусть $\mathcal{S}$ — произвольное тернарное отношение на некотором множестве X. Положим

$$\overline{\mathcal{S}} := \mathcal{S} \cup D_X,$$

где D_X определено в (8). Положим, кроме того,

$$[x, y] := \{t \in X : \mathcal{S}xty\} \cup \{x, y\},$$

как в (9). В силу таких определений получаем, что

$$[x, y] := \{t \in X : \overline{\mathcal{S}}xty\},$$

так что соотношение $\overline{\mathcal{S}}abc$ эквивалентно соотношению $b \in [a, c]$, т. е.

$$\overline{\mathcal{S}} = \{(a, b, c) \in X : b \in [a, c]\}.$$

Нетрудно видеть, что система аксиом (A0)–(A3) представляет собой не что иное, как результат перевода вышеприведенной системы аксиом (B1)–(B3) с языка обозначения $\overline{S}abc$ на язык обозначения $b \in [a,c]$ (прямая и обратная импликации аксиомы (B2) представлены аксиомами (A2) и (A1), соответственно), а доказываемая теорема 1.14 является прямой переформулировкой теоремы 1.11. □

1.15. Замечание. В литературе система аксиом (A0)–(A3) встречается с различными модификациями. Например (см. [6]), эквивалентную систему аксиом дает замена аксиомы (A0) соотношением

(A$\frac{1}{2}$) $[a,a] = \{a\}$.

Соотношение (A$\frac{1}{2}$) следует из аксиомы (A0), дающей включение $a \in [a,a]$, и аксиомы (A2), в силу которой соотношение $b \in [a,a]$ влечет равенство $b = a$ (так как $a \in [a,b]$ по (A0)). Аксиома (A0) выводится из (A$\frac{1}{2}$), (A3) и (A1) так как $[a,a] \subset [a,b] \cup [b,a]$ по (A3).

1.16. Лемма. *В преддереве для любых точек a,b,c,d,x выполняются следующие свойства*:

(A4) *если $b \in [a,c]$, то $[a,b] \subset [a,c]$.*

(A5) *если $b \in [a,c]$ и $c \in [a,d]$, то $c \in [b,d]$.*

(A6) *если $b \in [a,c]$, то $[a,b] \cap [b,c] = \{b\}$.*

(A7) *если $b \in [a,c]$, то $[a,b] \cup [b,c] = [a,c]$.*

(A8) *если $b \in [a,c]$, $c \in [b,d]$ и $b \neq c$, то $\{b,c\} \subset [a,d]$.*

(A9) *если $b \in [a,c]$, то $[x,a] \cap [x,c] \subset [x,b]$.*

Proof. (A8) Поскольку $b \in [a,c]$, и при этом $[a,c] \subset [a,d] \cup [c,d]$ по (A3), то выполняется хотя бы одно из включений $b \in [a,d]$ и $b \in [c,d]$. Поскольку $c \in [b,d]$ и $b \neq c$, то $b \notin [c,d]$ в силу (A2). Следовательно, $b \in [a,d]$. Включение $c \in [a,d]$ получаем, применив (A1).

(A5) В случае, когда $b = c$, требуемое включение выполняется в силу аксиомы (A0). Пусть $b \neq c$. Тогда из условия $b \in [a,c]$ в силу (A2) вытекает, что $c \notin [a,b]$. Условия $c \in [a,d]$ и $c \notin [a,b]$ в силу (A3) дают $c \in [b,d]$, что и требуется.

(A4) Пусть $x \in [a,b]$. Из условий $b \in [a,c]$ и $x \in [a,b]$ в силу (A5) следует, что $b \in [x,c]$. Если $x \neq b$, то условия $x \in [a,b]$ и $b \in [x,c]$ влекут включение $x \in [a,c]$ в силу (A8). Если $x = b$, то включение $x \in [a,c]$ следует из условия $b \in [a,c]$. Итак, включение $x \in [a,c]$ выполняется для всех $x \in [a,b]$.

(A7) По аксиоме (A3) мы имеем $[a,c] \subset [a,b] \cup [b,c]$. Включение $[a,c] \supset [a,b] \cup [b,c]$ следует из (A4) и (A1).

(A9) Пусть $p \in [x,a] \cap [x,c]$. Так как $b \in [a,c]$, мы имеем $b \in [p,a]$ или $b \in [p,c]$ в силу (A3). Если $b \in [p,a]$, то $p \in [x,b]$ в силу (A5) так как $p \in [x,a]$. Если $b \in [p,c]$, то $p \in [x,b]$ в силу (A5) так как $p \in [x,c]$.

(A6) Следует из (A9) при $x := b$ в силу (A$\frac{1}{2}$), (A0) и (A1). $\square$

1.17. Замечание. Поскольку применение аксиом (A0) и (A1) достаточно очевидно, в дальнейшем мы, как правило, будем опускать их упоминание (следуя в этом практике [1, 4]).

1.18. Лемма. *В преддереве для любых точек a, b, x, y, z выполняются следующие свойства:*

(1) *если $\{x,y\} \subset [a,b]$, то $[x,y] \subset [a,b]$.*

(2) *если $\{x,y\} \subset [a,b]$, то $(x \in [a,y]) \vee (y \in [a,x])$.*

Proof. (1) Из условия $\{x,y\} \subset [a,b]$ в силу (A7) следует, что $y \in [a,x]$ или $y \in [x,b]$. При $y \in [a,x]$ в силу (A4) получаем $[x,y] \subset [a,x] \subset [a,b]$, при $y \in [x,b]$ то же (A4) дает $[x,y] \subset [x,b] \subset [a,b]$.

(2) Из условия $\{x,y\} \subset [a,b]$ в силу (A7) следует, что $y \in [a,x]$ или $y \in [x,b]$, и что $x \in [a,y]$ или $x \in [y,b]$. Следовательно, если бы ни одно из включений $x \in [a,y]$ и $y \in [a,x]$ не выполнялось, мы получили бы, что $y \in [x,b]$ и $x \in [y,b]$, откуда $x = y$ в силу (A2) и $(x \in [a,y]) \wedge (y \in [a,x])$ в силу (A0). $\square$

1.19. Замечание. Если отображение $\mathcal{I} : X \times X \to 2^X$ на множестве X обладает свойствами (A0) и (A1) (при $[x,y] := \mathcal{I}(x,y)$), то пару $(X, \mathcal{I})$ называют *пространством интервалов* (см., например, [30]).

Пространства интервалов, обладающие свойствами (A$\frac{1}{2}$), (A4) и (A5), изучались отдельно (см., например, [30, I,§4], [17] [19], [10]). Следуя [30], будем называть такие пространства интервалов *геометрическими*. (Нетрудно видеть, что во всех геометрических пространствах интервалов выполняются также свойства (A2) и (A6).) Преддеревья являются, таким образом, геометрическими пространствами интервалов.

Геометрические пространства интервалов представляют самостоятельный интерес — в определенном смысле, они "обобщают с достаточно хорошей степенью приближения" отношения промежуточности, возникающие на метрических пространствах. Это объясняется следующим образом. Поставим в соответствие произвольному метрическому пространству (M, ρ) пространство интервалов $(M, \mathcal{I}_\rho)$, полагая

$$\mathcal{I}_\rho(a,b) = \{x \in X : \rho(a,x) + \rho(x,b) = \rho(a,b)\}. \tag{10}$$

Пространство интервалов $(X, \mathcal{I})$ назовем *метризуемым*, если на X найдется метрика ρ такая, что $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\rho$. Пусть $\mathscr{E}_F(\mathcal{M})$ — класс, образованный теми пространствами интервалов, у которых все конечные подпространства метризуемы, а $\mathscr{E}_k(\mathcal{M})$ — класс тех пространств, у которых метризуемы все подпространства мощности $\leqslant k$. Класс $\mathscr{E}_F(\mathcal{M})$ (в отличие от преддеревьев) не является конечно базируемым (его невозможно задать посредством конечного списка запрещенных подпространств) и не совпадает с $\mathscr{E}_k(\mathcal{M})$ ни при каком $k \in \mathbb{N}$ (см. [19], доказательство[7] п. (v) основной теоремы). Класс $\mathscr{E}_2(\mathcal{M})$ совпадает с классом всех пространств интервалов. Класс $\mathscr{E}_3(\mathcal{M})$ совпадает с классом пространств интервалов, обладающих свойством (A2). Класс $\mathscr{E}_4(\mathcal{M})$ совпадает с классом геометрических пространств интервалов. Отметим, что $\mathscr{E}_4(\mathcal{M}) = \mathscr{E}_5(\mathcal{M}) \neq \mathscr{E}_6(\mathcal{M})$ (см. [10]).

Как отмечено выше, в любом метрическом пространстве для структуры интервалов (10) наряду с аксиомами (A0) и (A1) выполняется аксиома (A2), а также свойства (A$\frac{1}{2}$), (A4), (A5), (A6). Нетрудно проверить, что в геодезических метрических пространствах, у которых любые две точки можно соединить единственной геодезической, выполняется свойство (A7), а в геодезических пространствах неположительной кривизны выполняется к тому же свойство (A8). Свойство (A9) (которое в отличие от остальных вышеприведенных свойств касается пятерок точек) выполняется не во всех CAT(0) пространствах (контрпример: тройка склеенных краями полуплоскостей).

2 Выпуклые подмножества

В настоящем параграфе обсуждается связь преддеревьев с *теорией выпуклости* (см., например, [18, 28, 30]), вводится понятие *выпуклого подмножества* в преддереве и доказывается ряд связанных с этим понятием утверждений.

В теории выпуклости набор $\mathcal{C}$ подмножеств множества X называется *структурой выпуклых множеств* или *выпуклостью*, если он обладает следующими свойствами (см., например, [30]):

(C0) пустое множество и множество X лежат в $\mathcal{C}$,

(C1) пересечение любого набора множеств из $\mathcal{C}$ лежит в $\mathcal{C}$,

(C2) объединение любого линейно упорядоченного по включению набора множеств из $\mathcal{C}$ лежит в $\mathcal{C}$.

Если $\mathcal{C}$ — выпуклость на множестве X и $A \subset X$, то пересечение всех множеств из $\mathcal{C}$, содержащих A, называется *выпуклой оболочкой* множества A и обозначается через $\mathrm{hull}(A) := \mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(A)$. Из (C1) следует, что $\mathrm{hull}(A) \in \mathcal{C}$.

Имеется естественная связь между выпуклыми структурами и пространствами интервалов (см. определение в разделе 1.19). Как нетрудно видеть,

[7]В формулах указанного доказательства имеются опечатки, однако корректные значения можно восстановить из контекста.

каково бы ни было пространство интервалов[8] $(X,\mathcal{I})$, набор $\mathcal{C}_\mathcal{I} \subset 2^X$, образованный всеми теми подмножествами $D \in 2^X$, которые с каждой парой точек $x, y \in D$ содержат и весь интервал $\mathcal{I}(x,y)$, задает на X выпуклую структуру. С другой стороны, в произвольной выпуклости $(X,\mathcal{C})$ отображение $\mathcal{I}_\mathcal{C} : X \times X \to 2^X$, задаваемое правилом $\mathcal{I}_\mathcal{C}(a,b) := \mathrm{hull}_\mathcal{C}\{a,b\}$, определяет на X структуру пространства интервалов.

Легко проверить, что вышеописанные отображения $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{C}_\mathcal{I}$ и $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{I}_\mathcal{C}$ между классом пространств интервалов и классом выпуклостей не являются ни инъективными, ни сюръективными. Однако можно показать, что сужения этих отображений на образы "двойственных" уже являются взаимно обратными биекциями, а сузив описанные отображения далее — на класс выпуклых структур с *числом Каратеодори* $\leqslant 2$ и соответствующий класс пространств интервалов — мы получим взаимно обратные функторы (по отношению к соответствующим категориям, в качестве морфизмов в которых выступают вложения).

В частности, сужение отображения $\mathcal{I} \mapsto \mathcal{C}_\mathcal{I}$ на преддеревья инъективно, а в композиции с отображением $\mathcal{C} \mapsto \mathcal{I}_\mathcal{C}$ дает тождественное отображение (теорема 2.2), так что преддеревья можно рассматривать как определенный класс выпуклостей. Вообще говоря, как уже отмечалось во введении, можно показать, что класс выпуклостей, соответствующий преддеревьям, совпадает с введенным в [12] *многообразием древовидных выпуклостей*, однако доказательство этой эквивалентности выходит за рамки настоящей работы. (В настоящей работе указанный факт не используется.) В нижеследующей теореме 2.2 дана аксиоматическая характеризация класса выпуклостей, соответствующего преддеревьям (см. также теорему 2.6).

В дальнейшем изложении мы будем, в основном, обращаться с преддеревьями как с пространствами интервалов и опираться на свойства (A0)–(A3), называя их "аксиомами". Системы аксиом (T0)–(T3) и (B1)–(B3) будут использоваться лишь изредка.

2.1. Определение. Подмножество C преддерева $\mathcal{T}$ называется *выпуклым*, если[9] $[x,y] \subset C$ для всех $x, y \in C$.

2.2. Теорема. *Сопоставление преддереву набора всех его выпуклых подмножеств задает взаимно однозначное соответствие между преддеревьями и теми наборами $\Delta \subset 2^X$ подмножеств того или иного множества X, которые обладают следующими свойствами:*

(Δ0) *пустое множество и множество X лежат в Δ,*

(Δ1) *пересечение любого набора множеств из Δ лежит в Δ,*

(Δ2) *объединение любого набора множеств из Δ, имеющих общую точку, лежит в Δ,*

[8] См. определение в разделе 1.19.

[9] Обозначение $[x,y]$ см. в п. 1.12.

($\Delta 3$) *если $a, b, c \in X$, то в Δ найдется элемент, содержащий точку a и ровно одну точку из множества $\{b, c\}$.*

Иными словами, верно следующее:

1) *Совокупность Δ выпуклых множеств произвольного преддерева обладает свойствами ($\Delta 0$)–($\Delta 3$).*

2) *Всякий набор $\Delta \subset 2^X$ подмножеств произвольного множества X, обладающий свойствами ($\Delta 0$)–($\Delta 3$), является совокупностью выпуклых подмножеств некоторого преддерева на X.*

3) *Структура произвольного преддерева однозначно восстанавливается по совокупности его выпуклых подмножеств.*

Proof. Для доказательства теоремы достаточно доказать ее утверждения 1)–3).

1) Пусть Δ — совокупность всех выпуклых множеств некоторого преддерева $\mathcal{T}$. То, что Δ обладает свойствами ($\Delta 0$) и ($\Delta 1$), следует непосредственно из определения выпуклого подмножества (определение 2.1). Проверим выполнимость свойства ($\Delta 2$). Если U есть объединение некоторого набора множеств из Δ с общей точкой $x \in \mathcal{T}$, то для любых $y, z \in U$ выполняются включения $[x, y] \subset U$ и $[x, z] \subset U$, откуда в силу аксиомы (A3) следует, что $[y, z] \subset U$. Следовательно, $U \in \Delta$. Перейдем к проверке свойства ($\Delta 3$). Пусть $a, b, c \in \mathcal{T}$. В случае $b = c$ множество $\{b, c\}$ состоит из одного элемента, так что требованию из свойства ($\Delta 3$) удовлетворяет выпуклое множество $\mathcal{T} \in \Delta$. Если $b \neq c$, то в силу аксиом (A2) и (A0) хотя бы один из интервалов $[a, c]$ и $[a, b]$ "содержит точку a и ровно одну точку из множества $\{b, c\}$". Тем самым Δ обладает свойством ($\Delta 3$), поскольку (замкнутые) интервалы преддерева выпуклы (лемма 1.18).

2) Пусть набор $\Delta \subset 2^X$ подмножеств некоторого множества X обладает свойствами ($\Delta 0$)–($\Delta 3$). Опишем на X структуру преддерева, совокупность выпуклых множеств которого будет совпадать с Δ. Для точек $a, b \in X$ обозначим через $[a, b]_\Delta$ пересечение всех тех множеств из Δ, которые содержат множество $\{a, b\}$. Покажем, что система $\{[a, b]_\Delta\}_{a, b \in X}$ удовлетворяет аксиомам (A0)–(A3).

Аксиомы (A0) и (A1) выполняются по построению.

(A2) Пусть $a, b, c \in X$. Если $b \neq c$, то в силу ($\Delta 3$) в Δ найдется элемент D такой, что выполняется либо соотношение $\{a, b\} \subset D \not\ni c$ (в этом случае $c \notin [a, b]_\Delta$), либо соотношение $\{a, c\} \subset D \not\ni b$ (в этом случае $b \notin [a, c]_\Delta$). Это показывает, что (A2) выполняется.

(A3) Пусть $a, b, c \in X$. Отметим, что, согласно определению, выполняются включения $[a, c]_\Delta \supset \{a, c\}$ и $[c, b]_\Delta \supset \{c, b\}$ (иными словами, как уже отмечено выше, выполняется аксиома (A1)). Из ($\Delta 1$) по построению следует, что $[a, c]_\Delta$ и $[c, b]_\Delta$ лежат в Δ. Поскольку $c \in [a, c]_\Delta \cap [c, b]_\Delta$, по свойству ($\Delta 2$) получаем, что $[a, c]_\Delta \cup [c, b]_\Delta \in \Delta$. Отсюда, поскольку $[a, c]_\Delta \cup [c, b]_\Delta \supset \{a, b\}$, получаем, что $[a, b]_\Delta \subset [a, c]_\Delta \cup [c, b]_\Delta$.

Итак, система $\{[a,b]_\Delta\}_{a,b\in X}$ удовлетворяет аксиомам (A0)–(A3), а это в силу теоремы 1.14 означает, что $\{[a,b]_\Delta\}_{a,b\in X}$ является системой интервалов некоторого преддерева на X. Обозначим это преддерево через X_Δ и покажем, что совокупность его выпуклых подмножеств совпадает с Δ. Действительно, если $D\in\Delta$, то для всех $x,y\in D$ множество $[x,y]_\Delta$ по построению лежит в D, так что D выпукло в X_Δ. Обратно, пусть C — выпуклое подмножество преддерева X_Δ. Если $C=\varnothing$, то $C\in\Delta$ по аксиоме (Δ0). В случае, когда $C\neq\varnothing$, для каждой точки $x\in C$ в силу (A0) и определения выпуклого подмножества (определение 2.1) имеет место равенство $C=\bigcup_{y\in C}[x,y]_\Delta$. Заметим, что все интервалы набора $\{[x,y]_\Delta : y\in C\}$ лежат в Δ (по аксиоме (Δ1)) и имеют общую точку x (по аксиоме (A0)), откуда по аксиоме (Δ2) получаем, что $C=\bigcup_{y\in C}[x,y]_\Delta\in\Delta$. Утверждение 2) доказано.

Для доказательства утверждения 3) достаточно заметить, что для любой пары a,b точек преддерева $\mathcal{T}$ пересечение всех выпуклых подмножеств в $\mathcal{T}$, содержащих множество $\{a,b\}$, совпадает с интервалом $[a,b]$ (поскольку каждое выпуклое множество, содержащее a и b, содержит и интервал $[a,b]$, а сам интервал $[a,b]$ является выпуклым множеством по лемме 1.18). Таким образом, совокупность всех выпуклых подмножеств преддерева однозначно определяет систему его замкнутых интервалов, которая по теореме 1.14 однозначно определяет структуру преддерева.

Утверждение 3), а вместе с ним и теорема, доказаны. $\square$

2.3. Замечание. Вообще говоря, аксиома (Δ0) выводится из аксиом (Δ1) и (Δ2).

2.4. Замечание. Отметим, что при увеличении набора, обладающего свойством (Δ3), это свойство сохраняется, поэтому из всякого набора со свойством (Δ3) можно получить набор, удовлетворяющий аксиомам (Δ0)–(Δ3), пополнив его пересечениями и соответствующего вида объединениями (см. аксиомы (Δ1) и (Δ2)).

2.5. Замечание. Пусть $\mathcal{C}$ — выпуклость на множестве X (см. определение в начале параграфа).

Если объединение любых двух пересекающихся множеств из $\mathcal{C}$ лежит в $\mathcal{C}$, то говорят, что $\mathcal{C}$ *когерентна* (см. [12]). (Как нетрудно проверить, из аксиомы выбора и аксиомы (C2) следует, что в когерентной выпуклости $\mathcal{C}$ объединение любого набора множеств из $\mathcal{C}$, имеющих общую точку, лежит в $\mathcal{C}$. См. свойство Δ2.)

Если в X не найдется подмножества A и точек $p,q\in X\setminus \mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(A)$ таких, что $p\neq q$, $p\in \mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(\{q\}\cup A)$ и $q\in \mathrm{hull}_{\mathcal{C}}(\{p\}\cup A)$, то говорят, что $\mathcal{C}$ является *выпуклой геометрией* (*антиматроидом*).

Если все одноточечные подмножества множества X лежат в $\mathcal{C}$, то говорят, что выпуклость $\mathcal{C}$ удовлетворяет *первой аксиоме отделимости*.

Если для каждой пары a, b несовпадающих точек из X найдутся $A, B \in \mathcal{C}$ такие, что $a \in A$, $b \in B$, $A \cap B = \varnothing$ и $A \cup B = X$, то говорят, что $\mathcal{C}$ удовлетворяет *второй аксиоме отделимости*.

2.6. Теорема. *Пусть $\mathcal{C}$ — выпуклость. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(1) *Выпуклость $\mathcal{C}$ является совокупностью выпуклых множеств некоторого преддерева.*

(2) *Выпуклость $\mathcal{C}$ есть когерентный антиматроид, удовлетворяющий первой аксиоме отделимости.*

(3) *Выпуклость $\mathcal{C}$ когерентна и удовлетворяет второй аксиоме отделимости.*

Мы не приводим здесь доказательства теоремы 2.6. Она выводится из теоремы 2.2.

2.7. Определение. *Выпуклым замыканием* (или *выпуклой оболочкой*) подмножества S в преддереве $\mathcal{T}$ называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих S. Выпуклая оболочка множества S обозначается через $\mathrm{hull}(S)$. (Из определения очевидно следует, что выпуклая оболочка $\mathrm{hull}(S)$ выпукла и содержит S.)

2.8. Лемма. *В преддереве для любого подмножества S выполняется равенство*

$$\mathrm{hull}(S) = \bigcup_{r,s \in S} [r, s].$$

Proof. В [1] *выпуклое замыкание* подмножества S в преддереве определяется как объединение $\mathrm{Cl(S)} := \bigcup_{\mathrm{r,s \in S}} [\mathrm{r, s}]$. В [1, лемма 15.5] доказывается, что множество $\mathrm{Cl(S)}$ выпукло в смысле определения 2. Это дает включение $\mathrm{Cl(S)} \supset \mathrm{hull(S)}$ (поскольку $\mathrm{Cl(S)} \supset \mathrm{S}$). Включение $\mathrm{Cl(S)} \subset \mathrm{hull(S)}$ выполняется в силу определений. Таким образом, имеет место равенство $\mathrm{hull}(S) = \mathrm{Cl(S)}$, что и требовалось. ☐

2.9. Замечание. На языке теории выпуклости лемма 2.8 формулируется следующим образом: у системы выпуклых множеств преддерева *число Каратеодори* не превосходит двух (определение числа Каратеодори и его свойства см., например, в [28, 30]).

2.10. Утверждение. *Пусть S — подмножество в преддереве и $s \in S$. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(a) *Множество* $\mathrm{hull}(S) \setminus \{s\}$ *выпукло.*

(b) *Множество* $\mathrm{hull}(S \setminus \{s\})$ *не содержит точку s.*

(c) *Включение* $s \in [x, y]$ *не выполняется ни при каких* $x, y \in S \setminus \{s\}$.

Proof. (a)$\Rightarrow$(b): Если множество $\mathrm{hull}(S) \setminus \{s\}$ выпукло, то вместе с множеством $S \setminus \{s\}$ оно содержит и его выпуклую оболочку $\mathrm{hull}(S \setminus \{s\})$, откуда и следует, что $s \notin \mathrm{hull}(S \setminus \{s\})$ (поскольку $s \notin \mathrm{hull}(S) \setminus \{s\}$).

$\neg$(a)$\Rightarrow \neg$(b): Если множество $\mathrm{hull}(S) \setminus \{s\}$ не выпукло, то (поскольку $\mathrm{hull}(S)$ выпукло) найдутся $x, y \in \mathrm{hull}(S)$ такие, что $s \in \langle x, y \rangle$. В силу леммы 2.8 найдутся $p, q \in S$ такие, что $y \in [p, q]$. При этом $y \in [x, p] \cup [x, q]$ в силу (A3). Не теряя общности, можно считать, что $y \in [x, p]$. Из условий $y \in [x, p]$ и $s \in \langle x, y \rangle$ в силу (A4) и (A2) следует, что $s \in \langle x, p \rangle$. Применяя то же рассуждение к x, получаем, что $s \in \langle r, p \rangle$ для некоторого $r \in S$. Это означает, что $s \in \mathrm{hull}(S \setminus \{s\})$.

(b)$\Leftrightarrow$(c): Выполняется по лемме 2.8. $\square$

2.11. Определение. Точка s в подмножестве S преддерева называется *экстремальной* (в S), если выполнены условия из утверждения 2.10. Точка t в преддереве $\mathcal{T}$ называется *терминальной* если она экстремальна в $\mathcal{T}$, т. е. если не существует точек $x, y \in \mathcal{T}$ таких, что $t \in \langle x, y \rangle$.

2.12. Замечание. Импликации (a)$\Rightarrow$(b)$\Rightarrow$(c) утверждения 2.10 выполняются в любой выпуклости (если понимать в ней $[a, b]$ как $\mathrm{hull}\{a, b\}$, а $\mathrm{hull}(S)$ — как наименьшее выпуклое множество, содержащее S). В общем случае (c) не влечет (b), а (b) не влечет (a).

2.13. Лемма. *Каково бы ни было подмножество S преддерева $\mathcal{T}$, множество* $\mathrm{ex}(S)$ *его экстремальных точек совпадает с множеством* $\mathrm{ex}(\mathrm{hull}(S))$ *экстремальных точек его выпуклого замыкания.*

Proof. Покажем, что $\mathrm{ex}(S) \subset \mathrm{ex}(\mathrm{hull}(S))$. Действительно, если $s \in \mathrm{ex}(S)$, то $\mathrm{hull}(S) \setminus \{s\}$ выпукло (свойство (a) из утверждения 2.10). Таким образом, поскольку $\mathrm{hull}(\mathrm{hull}(S)) = \mathrm{hull}(S)$, множество $\mathrm{hull}(\mathrm{hull}(S)) \setminus \{s\}$ выпукло. Это по определению означает, что $s \in \mathrm{ex}(\mathrm{hull}(S))$.

Покажем, что $\mathrm{ex}(\mathrm{hull}(S)) \subset \mathrm{ex}(S)$. Пусть $x \in \mathrm{ex}(\mathrm{hull}(S))$. Тогда $x \in S$, поскольку для всякого $y \in \mathrm{hull}(S) \setminus S$ множество $\mathrm{hull}(S) \setminus \{y\}$ содержит S и, значит, $\mathrm{hull}(\mathrm{hull}(S) \setminus \{y\})$ совпадает с $\mathrm{hull}(S)$ и содержит y, а это в силу свойства (a) из утверждения 2.10 означает, что $y \notin \mathrm{ex}(\mathrm{hull}(S))$. Итак, $x \in S$, а множество

$$\mathrm{hull}(S) \setminus \{x\} \ = \ \mathrm{hull}(\mathrm{hull}(S)) \setminus \{x\}$$

выпукло (так как $x \in \mathrm{ex}(\mathrm{hull}(S))$). Это означает, что $x \in \mathrm{ex}(S)$. $\square$

2.14. Замечание. Как видно из доказательства леммы 2.13, она выполняется для любой структуры выпуклых множеств, если понимать экстремальность точки $s \in S$ подмножества S в соответствии с условием (a) из утверждения 2.10. Если понимать экстремальность в смысле условия (b) из 2.10, то включение $\mathrm{ex}(\mathrm{hull}(S)) \subset \mathrm{ex}(S)$ выполняется и в общем случае, однако существуют выпуклости, в которых $\mathrm{ex}(S) \not\subset \mathrm{ex}(\mathrm{hull}(S))$.

3 Линейные подмножества

Настоящий параграф посвящен линейным подмножествам в преддереве. Отметим, что конструкции и утверждения этого параграфа выполняются для значительно более широких, чем преддеревья, классов пространств интервалов. Например, они выполняются для класса $\mathscr{E}_4(\mathrm{CAT}(0))$, образованного теми пространствами интервалов, у которых все подпространства мощности $\leqslant 4$ вкладываются в геодезические метрические пространства неположительной кривизны[10]. Класс $\mathscr{E}_4(\mathrm{CAT}(0))$ включает в себя преддеревья, линейные пространства, пространства Адамара, их подпространства и т. д. С точностью до изоморфизма, имеется лишь четыре четырехточечных преддерева (они однозначно определяют класс преддеревьев) и пять четырехточечных пространств класса $\mathscr{E}_4(\mathrm{CAT}(0))$ (к четырем преддеревьям добавляется пространство $\{x, y, z, w\}$, в котором $[x, z] = \{x, y, z\}$, а остальные интервалы содержат лишь свои концы). Аксиоматически можно охарактеризовать класс $\mathscr{E}_4(\mathrm{CAT}(0))$ как класс пространств, обладающих набором свойств (A0)–(A2), (A4), (A7), (A8) (из которых следуют и свойства (A5), (A6), но не (A3)). В некоторых доказательствах настоящего параграфа мы намеренно избегаем использования аксиомы (A3), чтобы продемонстрировать их справедливость и для пространств класса $\mathscr{E}_4(\mathrm{CAT}(0))$.

3.1. Определения. Говорят, что подмножество L в преддереве *линейно*, если для любых точек $x, y, z \in L$ выполняется хотя бы одно из соотношений $x \in [y, z]$, $y \in [z, x]$ и $z \in [x, y]$. Непустое выпуклое линейное множество называют *дугой*. Под *направлением* на линейном подмножестве L преддерева $\mathcal{T}$ будем понимать линейный порядок $<$ на L такой, что для каждой тройки точек $x, y, z \in L$ выполняется соотношение

$$y \in \langle x, z \rangle \;\Leftrightarrow\; (x < y < z) \vee (z < y < x).$$

Упорядоченное множество $(L, <)$ называют при этом *направленным* линейным множеством.

Следуя [4], точку b в преддереве $\mathcal{T}$ будем называть *супремумом* направленной дуги $(A, <)$ в случае, когда b является наибольшим элементом в $(A, <)$, а также в случае, когда у $(A, <)$ нет наибольшего элемента, а интервал[11] $[x, b\rangle$ является верхним классом[12] в $(A, <)$ для некоторой (а следовательно, и для каждой) точки $x \in A$. Отметим, что направленная дуга может обладать несколькими супремумами.

---

[10] Подразумевается, что метрическое пространство (M, d) наделено структурой пространства интервалов: для $x, y, z \in M$ считаем $y \in [x, z]$ если и только если $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

[11] См. обозначения п. 1.12.

[12] Подмножество E линейно упорядоченного множества $(O, <)$ называется *нижним классом*, если в O не найдется элементов $x < y$ таких, что $y \in E$ и $x \notin E$. *Верхними классами* порядка называют нижние классы обратного к нему порядка.

3.2. Лемма [1, лемма 15.5]. *В преддереве выпуклая оболочка любого линейного множества линейна (и является, таким образом, дугой, если непуста).*

3.3. Лемма. (1) *В преддереве у каждого линейного множества имеется направление. У линейного множества, содержащего хотя бы две точки, имеется в точности два направления (эти направления взаимно обратны).*

(2) *Подмножество направленной дуги выпукло в преддереве если и только если оно порядково выпукло по отношению к направлению.*

(3) *В преддереве все непустые интервалы являются дугами.*

(4) *Пусть x и y — точки преддерева. Тогда на интервале $[x, y]$ существует единственное направление, в котором x является наименьшим элементом.*

(5) *Пусть $([a, b], <)$ — направленный интервал с наименьшим элементом a в преддереве $\mathcal{T}$. Пусть S — содержащее a выпуклое подмножество в $\mathcal{T}$. Тогда пересечение $[a, b] \cap S$ является нижним классом в порядке $([a, b], <)$.*

Proof. (1) Рассмотрим линейное подмножество L преддерева как самостоятельное преддерево (с индуцированной структурой). На преддереве L выполняются аксиомы (A0)–(A3) и, в силу определения линейности, дополнительная "аксиома"

$$x \in [y, z] \text{ или } y \in [z, x] \text{ или } z \in [x, y] \quad \text{для произвольных } x, y, z \in L.$$

Такая система аксиом эквивалентна системе аксиом Паша и Гильберта для множества с линейным отношением промежуточности (см. [1, стр. 6]), что превращает утверждение (1) в хорошо известный классический факт. См. также [4, лемма 2.7].

(2) Это прямо следует из определения направлений.

(3) Требуется доказать, что для любой пары x, y точек в преддереве интервалы $[x, y]$, $[x, y\rangle$ и $\langle x, y\rangle$ линейны и выпуклы. В [1, лемма 15.3] доказывается, что замкнутые интервалы (например, интервал $[x, y]$) линейны и выпуклы (см. также лемму 1.18). Из линейности интервала $[x, y]$ следует линейность интервалов $[x, y\rangle$ и $\langle x, y\rangle$, поскольку подмножество линейного множества по определению линейно. Таким образом, нам остается лишь показать, что интервалы $[x, y\rangle$ и $\langle x, y\rangle$ выпуклы. Поскольку интервал $[x, y]$ линеен, в силу утверждения (1) у него имеется некоторое направление $<$. По определению направления, для любой точки $t \in [x, y]$ верно либо $x \leqslant t \leqslant y$, либо $y \leqslant t \leqslant x$, а это, очевидно, означает, что точки x и y являются наибольшим и наименьшим элементами линейно упорядоченного множества $([x, y], <)$. Из определения направлений прямо следует, что подмножество направленной дуги выпукло в

преддереве если и только если оно порядково выпукло по отношению к направлению (утверждение (2)). Отсюда очевидно следует, что интервалы $[x, y\rangle$ и $\langle x, y\rangle$ выпуклы.

(4) Поскольку случай одноточечного интервала очевиден, будем полагать, что интервал $[x, y]$ содержит хотя бы две точки (т. е. $x \neq y$). Тогда интервал $[x, y]$ линеен в силу утверждения (3) и имеет в точности два направления в силу утверждения (1). Повторяя рассуждение из доказательства утверждения (3), получаем, что точки x и y являются наибольшими и наименьшими элементами этих двух направлений. Поскольку эти направления на $[x, y]$ взаимно обратны, точка x является наибольшим элементом по отношению к одному из этих направлений и наименьшим — по отношению к другому. В частности, на интервале $[x, y]$ имеется единственное направление, в котором x — наименьший элемент.

(5) Заметим, что пересечение $Q := [a, b] \cap S$ выпукло (как пересечение выпуклых множеств $[a, b]$ и S) и содержит точку a. Таким образом, множество Q является порядково выпуклым подмножеством в $([a, b], <)$ (в силу утверждения (2)) и содержит наименьший элемент a. Следовательно, Q является нижним классом в порядке $([a, b], <)$. □

3.4. Определение. Пусть линейное множество L состоит из не менее чем двух точек и содержится в линейном множестве L' и пусть $<$ — направление на L. По лемме 3.3(1), у каждого из множеств L и L' имеется ровно два направления. Из определения направлений следует, что направления множества L являются сужениями направлений множества L'. Следовательно, существует единственное направление $<'$ на L' такое, что $<$ является его сужением. Мы говорим, что направление $<'$ *индуцировано* направлением $<$.

3.5. Лемма. *Пусть $(I, <_I)$ и $(J, <_J)$ — направленные линейные множества в преддереве $\mathcal{T}$. Предположим, что пересечение $I \cap J$ включает по меньшей мере две точки, являясь при этом верхним классом в $(I, <_I)$ и нижним — в $(J, <_J)$, и что сужения порядков $<_I$ и $<_J$ на множество $I \cap J$ совпадают. Тогда объединение $I \cup J$ линейно, а множество I является его нижним классом — по отношению к тому направлению на $I \cup J$, которое индуцировано направлением $<_I$.*

Proof. Для проверки линейности объединения $I \cup J$ достаточно показать, что любое трехточечное подмножество $K \subset I \cup J$ линейно. В силу конечности K найдутся такие $p <_I q \in I$ и $r <_J s \in J$, что

$$K \subset [p, q] \cup [r, s]. \tag{11}$$

Поскольку, "увеличивая" q в $(I, <_I)$ и "уменьшая" r в $(J, <_J)$, мы сохраняем свойство 11, можно считать, что q и r лежат в $I \cap J$. Более того, поскольку $|I \cap J| \geqslant 2$, мы можем считать, что $r <_I q$. К тому же, заменив при необходимости p на меньший элемент в $(I, <_I)$, а s — на больший в $(J, <_J)$, мы приходим к ситуации, когда

$$p \leqslant_I r <_I q \quad \text{и} \quad r <_J q \leqslant_J s.$$

Тогда в силу (A8) получаем, что $r, q \in [p, s]$, откуда в силу (11) получаем, что K содержится в интервале $[p, s]$ и, следовательно, линейно (так как интервалы линейны; см. лемму 3.3(3)). Итак, объединение $I \cup J$ линейно.

При этом направления $<_I$ и $<_J$, совпадая на $I \cap J$, индуцируют одно и то же направление $<$ на $I \cup J$ (поскольку $|I \cap J| \geqslant 2$). Отсюда, воспользовавшись транзитивностью отношения порядка, получаем, что $a < b$ всегда, когда $a \in I$ и $b \in J \setminus I = J \setminus (I \cap J)$ (поскольку $I \cap J$ по условию является нижним классом в $(J, <_J)$). Следовательно, I является нижним классом в $(I \cup J, <)$. $\square$

3.6. Определение. Линейное подмножество преддерева назовем *ограниченным*, если оно содержится в (замкнутом) интервале. Преддерево назовем *ограниченным*, если все его линейные подмножества ограничены.

3.7. Определения. Дугу в преддереве будем называть *лучом*, если она неограничена и имеет экстремальную точку. (Будем говорить, что луч *исходит* из своей экстремальной точки.)

Дугу в преддереве будем называть *полупрямой*[13], если она неограничена и содержится в некотором луче. (Все лучи, таким образом, являются полупрямыми.)

Наконец, назовем дугу в преддереве *прямой*, если она неограничена и не является полупрямой.

3.8. Лемма. *В произвольном преддереве выполняются следующие свойства.* (0) *Неограниченная дуга является либо прямой, либо полупрямой.* (1) *У луча имеется единственная экстремальная точка и единственное направление, в котором эта точка минимальна.* (2) *Линейное множество, представимое в виде объединения двух ограниченных, ограничено.* (3) *Дуга, представимая в виде объединения полупрямой и ограниченного множества, является полупрямой.* (4) *Ни одна прямая не является собственной частью дуги того же преддерева.* (5) *Все собственные верхние и нижние классы направленной прямой являются полупрямыми.* (6) *У полупрямой имеется единственное направление, все непустые верхние классы которого являются полупрямыми, а собственные нижние классы — ограничены.* (7) *Множество всех полупрямых, содержащихся в заданной полупрямой, линейно упорядочено по включению.* (8) *Пусть R — луч с экстремальной точкой x и пусть $y \in R$. Тогда $R_y := R \setminus [x, y\rangle$ — луч с экстремальной точкой y.* (9) *Дуга является прямой в том и только в том случае, когда содержит пару непересекающихся полупрямых.* (10) *Если у полупрямых H_1, H_2 и H_3 пересечения $H_1 \cap H_2$ и $H_1 \cap H_3$ являются полупрямыми, то полупрямой является и пересечение $H_2 \cap H_3$.*

Proof. (0) Это следует непосредственно из определений.

[13] Мы заимствуем термин из [1], но, в отличие от [1], не требуем, чтобы полупрямая содержалась в прямой.

(1) Воспользуемся тем, что у каждого линейного множества имеется направление (лемма 3.3(1)). Из определения направлений следует, что экстремальные точки линейного множества являются экстремальными (наибольшими либо наименьшими) по отношению к его направлениям (так что у линейного множества имеется не более двух экстремальных точек) и что линейное множество с двумя экстремальными точками содержится в замкнутом интервале с концами в этих точках. Таким образом, поскольку луч неограничен, его экстремальная точка единственна. Остается заметить, что из определения направлений в силу леммы 3.3 следует к тому же, что у произвольного линейного множества с экстремальной точкой имеется ровно одно направление, в котором эта точка минимальна.

(2) Это утверждение доказывается в [1, лемма 16.4]. Оно также может быть доказано по схеме представленного ниже доказательства утверждения (3).

(3) Пусть дуга A является объединением полупрямой H и ограниченного множества B. Пусть $<$ — произвольное направление на A (существующее в силу леммы 3.3(1)). Так как H выпукла и неограничена, она является верхним или нижним классом в $(A,<)$. Поскольку у всякого направления имеется обратное, мы не умалим общности, считая, что H — верхний класс. Пусть $B' := A \setminus H$ — соответствующий нижний класс. Если $B' = \varnothing$, то $A = H$ — полупрямая. Если же у $(A,<)$ имеется наименьший элемент, то A — луч. Остается рассмотреть случай, когда $B' \neq \varnothing$, а в $(A,<)$ нет наименьшего элемента. Множество B' в этом случае бесконечно. Отметим, что B' ограничено, поскольку лежит в B, так что найдется замкнутый интервал $[x,y]$, содержащий B'. Пусть $\prec$ — направление на $[x,y]$, индуцированное направлением $<$. Мы можем, не теряя общности, считать, что x — наименьший элемент в $([x,y],\prec)$. Пусть I — наименьший нижний класс в $([x,y],\prec)$, содержащий B'. Тогда, применив лемму 3.5 к направленным дугам $(I,\prec_I)$ и $(A,<)$ (где $\prec_I$ — сужение порядка $\prec$ на I), получаем, что объединение $I \cup A$ линейно, а точка x, экстремальная в I, является экстремальной и в $I \cup A$. Таким образом, $I \cup A$ — луч, а A — полупрямая.

(4) Допустим, что в некотором преддереве имеется прямая L, являющаяся собственной частью дуги A. Пусть $<$ — произвольное направление на A (см. лемму 3.3(1)). Поскольку прямые по определению выпуклы и неограничены, L является нижним или верхним классом в $(A,<)$. Мы можем без потери общности считать, что L — верхний класс. Поскольку мы предполагаем, что $L \neq A$, найдется точка $x \in A \setminus L$. Тогда L содержится в верхнем классе $A_x := \{t \in A : x \leqslant t\}$. Из определения направлений заключаем, что A_x является дугой, а x — ее экстремальной точкой. При этом A_x неограничена, так как содержит L. Неограниченная дуга, имеющая экстремальную точку — луч. Таким образом, L содержится в луче A_x и, значит, либо ограничена, либо является полупрямой. Полученное противоречие завершает доказательство.

(5) Пусть Y — собственный верхний или нижний класс направленной прямой $(L,<)$. Покажем, что Y является полупрямой. Положим $X := L \setminus Y$. В силу определения направлений классы X и Y выпуклы и, значит, являются дугами.

В силу утверждения (4) ни X, ни Y не являются прямыми. В частности, дуга X либо ограничена, либо является полупрямой. Отсюда вытекает, что дуга Y неограничена, поскольку в противном случае из утверждений (2) и (3) последовало бы, что прямая $L = X \cup Y$ ограничена или является полупрямой. Итак, дуга Y неограничена и не является прямой. Значит, Y — полупрямая.

(6), (7) Пусть H — полупрямая, R — содержащий ее луч, p — его экстремальная точка, а $<$ — то направление на R, в котором p минимальна (см. утверждение (1)). Обозначим через $<_H$ сужение на H порядка $<$ и покажем, что $<_H$ удовлетворяет требованиям утверждения (6). Всякий собственный нижний класс X в $(H, <_H)$ ограничен, поскольку $X \subset [p, y]$ для любой точки $y \in H \setminus X$. Пусть Y — непустой верхний класс в $(H, <_H)$ и пусть $X := H \setminus Y$. (Отметим, что Y в силу определения направлений является дугой.) Тогда множество X ограничено так как $X \subset [p, y]$ при $y \in Y$. Следовательно, дуга Y неограничена, поскольку в противном случае полупрямая H была бы ограничена в силу утверждения (2) как объединение двух ограниченных линейных множеств X и Y. Итак, Y — неограниченная дуга, содержащаяся в полупрямой и, значит, сама являющаяся полупрямой. Таким образом, направление $<_H$ удовлетворяет требованиям утверждения (6). В силу леммы 3.3(1), единственным отличным от $<_H$ направлением на H является направление $<'_H$ обратное к $<_H$. Следовательно, $<_H$ является единственным направлением на H, удовлетворяющим требованиям утверждения (поскольку все собственные верхние классы в $(H, <'_H)$ являются собственными нижними классами в $(H, <_H)$, т. е. ограничены).

Теперь заметим, что любая содержащаяся в H полупрямая H' является верхним классом в $(H, <_H)$. (В самом деле: в силу определения направлений всякая неограниченная дуга, содержащаяся в направленной дуге $(I, <)$, должна быть в $(I, <)$ нижним или верхним классом, а у $(H, <_H)$ все собственные нижние классы ограничены.) Отсюда следует утверждение (7), поскольку множество верхних классов линейно упорядоченного множества линейно упорядочено по включению.

(8) Пусть $<$ — то направление на R, в котором точка x является минимальным элементом (см. утверждение (1)). Тогда, как следует из определения направлений, $[x, y\rangle = \{t \in R : t < y\}$ и $R_y = \{t \in R : y \leqslant t\}$. Также из определения направлений следует, что R_y — дуга, а y — единственная экстремальная точка у R_y (поскольку x — единственная экстремальная точка у R), а из утверждения (2) следует, что дуга R_y неограничена. Это означает, что R_y — луч с экстремальной точкой y.

(9) Если дуга A содержит пару непересекающихся полупрямых, то она неограничена и, как следует из утверждения (7), не является полупрямой. Следовательно, A является прямой в силу утверждения (0). Обратная импликация следует из утверждения (5).

(10) Отметим, что полупрямые $H_1 \cap H_2$ и $H_1 \cap H_3$ содержатся в полупрямой H_1. Отсюда в силу утверждения (7) следует, что пересечение $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ совпадает с одной из полупрямых $H_1 \cap H_2$ и $H_1 \cap H_3$. В частности, $H_1 \cap H_2 \cap H_3$ неограничено. Вспомним, что пересечение линейных выпуклых множеств ли-

нейно и выпукло, так что пересечение дуг либо пусто, либо является дугой. Отсюда следует, что пересечение $H_2 \cap H_3$ является дугой. Дуга $H_2 \cap H_3$ неограничена, так как содержит полупрямую $H_1 \cap H_2 \cap H_3$. Отсюда, поскольку $H_2 \cap H_3$ содержится в полупрямой H_2, следует, что $H_2 \cap H_3$ является полупрямой. □

4 Классы преддеревьев

4.1. Определение. Точка m преддерева $\mathcal{T}$ называется *медианой* тройки $a, b, c \in \mathcal{T}$, если $m \in [a,b] \cap [a,c] \cap [b,c]$. У тройки точек имеется не более одной медианы (см., например, [1, лемма 15.2]). Преддерево называется *медианным*, если у каждой тройки его точек имеется медиана.

4.2. Замечание. Преддеревья из примеров 1.2(1)–(3) медианны.

4.3. Определение. Если у тройки a, b, c точек в преддереве $\mathcal{T}$ не имеется медианы, то будем говорить, что политоп[14] $\operatorname{hull}\{a,b,c\} = [a,b] \cup [b,c] \cup [c,a]$ является *особенностью* преддерева $\mathcal{T}$. Пусть $<_a$, $<_b$ и $<_c$ — те порядки на дугах $I_a := [a,b] \cap [a,c]$, $I_b := [b,a] \cap [b,c]$ и $I_c := [c,a] \cap [c,b]$, соответственно, в которых точки a, b, c являются наименьшими элементами. Будем говорить, что особенность $\operatorname{hull}\{a,b,c\}$ имеет *тип* Y_0, Y_1, Y_2 или Y_3 в соответствии с тем, у какого количества (0, 1, 2 или 3) направленных дуг из тройки $(I_a, <_a)$, $(I_b, <_b)$, $(I_c, <_c)$ имеются наибольшие элементы.

4.4. Пример. Возьмем три экземпляра единичного интервала $[0,1]_i$, $i = 1, 2, 3$. Склеив начальные точки 0_1, 0_2 и 0_3, получим *тройник* Y, на котором имеется естественная структура преддерева. Удалив из Y точку 0, получаем особенность типа Y_0. Удалив из Y $k(\in \{1,2,3\})$ интервалов вида $[0_i, 1_i\rangle$, получаем особенность типа Y_k.

4.5. Определение. Подмножество S в преддереве называется *звездой*, если $[x,y] = \{x,y\}$ для всех $x, y \in S$. (Всякая звезда выпукла.)

4.6. Замечание. Трехточечная звезда является особенностью типа Y_3. Каждая особенность типа Y_3 содержит трехточечную звезду.

4.7. Замечание. Преддерево обладает особенностью типа Y_2 тогда и только тогда, когда в нем имеется направленная дуга с двумя (или более) супремумами.

[14] Заимствуя термин из теории выпуклых структур, мы называем выпуклую оболочку конечного множества *политопом*. См. также лемму 2.8.

4.8. Определение. Точка t преддерева $\mathcal{T}$ называется *регулярной*, если соотношение $[x,t] \cap [t,y] = \{t\}$ выполняется лишь в случае, когда $t \in [x,y]$. Преддерево, все точки которого регулярны, будем называть *регулярным*.

4.9. Замечание. Регулярные преддеревья называются *насыщенными* (*saturated*) в [4]. В терминах работы [1] регулярное преддерево — это B-множество с *точным* отношением промежуточности (*true* betweenness relation).

4.10. Утверждение. *Медианное преддерево регулярно.*

Proof. Если преддерево нерегулярно, то в нем найдутся точки x, y, z такие, что $[x,z] \cap [z,y] = \{z\}$ и $z \notin [x,y]$, откуда вытекает, что пересечение $[x,y] \cap [x,z] \cap [z,y]$ пусто, т. е. у тройки x, y, z нет медианы. □

4.11. Замечание. Нетрудно видеть, что немедианное преддерево регулярно тогда и только тогда, когда все его особенности имеют тип Y_0.

4.12. Определение. Будем говорить, что преддерево *дедекиндово полно*, если все его направленные замкнутые интервалы (а значит, и все дуги) *порядково полны*, т. е. полны как линейно упорядоченные множества. (Линейно упорядоченное множество *полно*, если в нем каждое ограниченное сверху подмножество имеет точную верхнюю грань.)

Напомним, что линейное подмножества преддерева *ограничено*, если оно содержится в (замкнутом) интервале (определение 3.6). Будем говорить, что преддерево *слабо полно*, если все ограниченные дуги в нем являются интервалами.

4.13. Лемма. *Дедекиндово полное преддерево слабо полно.*

Proof. Пусть A — ограниченная дуга в дедекиндово полном преддереве $\mathcal{T}$. Тогда, в силу ограниченности дуги A, в $\mathcal{T}$ найдется содержащий ее замкнутый интервал (скажем, I). Поскольку $\mathcal{T}$ дедекиндово полно, интервал I порядково полон (с любым из своих направлений). Из определения направлений прямо следует, что подмножество направленной дуги выпукло в преддереве если и только если оно порядково выпукло по отношению к направлению. Таким образом, дуга A является порядково выпуклым подмножеством в порядково полном замкнутом интервале. Отсюда очевидным образом следует, что A является ограниченным порядковым интервалом в I, а значит, интервалом в преддереве. Итак, всякая ограниченная дуга в дедекиндово полном преддереве является интервалом. □

4.14. Замечание. Можно показать, что преддерево дедекиндово полно тогда и только тогда, когда оно слабо полно и не имеет особенностей типа Y_1. В частности, для медианных и, более общо, регулярных преддеревьев слабая и дедекиндова полнота эквивалентны.

Отметим, что в дедекиндово полных преддеревьях не имеется ни особенностей типа Y_0, ни особенностей типа Y_1, а слабо полное преддерево, обладающее особенностями типа Y_0, обладает и особенностями типа Y_1. Отсюда в силу замечания 4.11 следует, что всякое регулярное слабо полное преддерево дедекиндово полно и медианно.

4.15. Замечание. В [4, 5] полными называются преддеревья, в которых все дуги являются интервалами; в нашей терминологии это — ограниченные слабо полные преддеревья (см. теорему 8.2). В работах [33, 25] полными называются дедекиндово полные преддеревья.

4.16. Замечание. Обычные деревья (см. сноску 1), $\mathbb{R}$-деревья, древовидные пространства дедекиндово полны (и, следовательно, слабо полны). Не все Λ-деревья слабо полны.

4.17. Определение. Метрическое пространство (T, ρ) называется *метрическим преддеревом*, если отображение $T^2 \to 2^T$, $(a, b) \mapsto [a, b]_\rho$, где

$$[a, b]_\rho := \{t \in T : \rho(a, t) + \rho(t, b) = \rho(a, b)\},$$

удовлетворяет аксиомам преддерева. Будем говорить, что преддерево *метризуемо*, если оно изоморфно (как преддерево) некоторому метрическому преддереву.

4.18. Замечание. Медианное преддерево метризуемо в том и только в том случае, когда оно вкладывается в $\mathbb{R}$-дерево. Существуют метрические преддеревья, не допускающие изометричного вложения в $\mathbb{R}$-дерево. Пример: метрическое преддерево, состоящее из четырех точек a, b, c, d с $\rho(a, b) = 3$, в котором расстояния между остальными парами точек равны 2.

4.19. Задача. Существует ли неметризуемое преддерево, у которого все дуги метризуемы (т. е. вкладываются в $\mathbb{R}$)? (Достаточно рассмотреть случай преддерева, у которого каждая максимальная дуга изоморфна единичному отрезку вещественной прямой.)

5 Разбиения, ветви и тени

В настоящем параграфе вводятся понятия ветвей и теней преддерева и доказывается ряд их свойств. Эти свойства используются в последующих параграфах при изучении топологии теней.

5.1. Определения. Напомним, что *разбиением* множества называется совокупность его непустых попарно непересекающихся подмножеств (*элементов* разбиения) которые покрывают все множество. Если ζ — разбиение множества X и $x \in X$, условимся обозначать через $\zeta(x)$ элемент в ζ, содержащий x.

Пусть r — точка в преддереве $\mathcal{T}$. Определим на множестве $\mathcal{T} \smallsetminus \{r\}$ бинарное отношение R_r, положив

$$xR_r y \;\Leftrightarrow\; r \notin [x, y]. \tag{12}$$

Отношение R_r является отношением эквивалентности (оно рефлексивно в силу (A$\frac{1}{2}$), симметрично в силу (A1) и транзитивно в силу (A3)).

Обозначим через ζ_r и будем называть *узловым разбиением преддерева $\mathcal{T}$ в точке* r разбиение, элементами которого являются множество $\{r\}$ и классы эквивалентности отношения R_r.

Подмножества преддерева $\mathcal{T}$, имеющие вид $\zeta_r(t)$, $r \neq t$, будем называть *ветвями*[15] преддерева $\mathcal{T}$. Таким образом, при $r \neq t$, по определению,

$$\zeta_r(t) = \{x \in \mathcal{T} : r \notin [x, t]\}. \tag{13}$$

Точку r будем называть при этом *источником* ветви $\zeta_r(t)$.

Дополнения ветвей будем называть *тенями*. Тень $\mathcal{T} \smallsetminus \zeta_r(t)$ отбрасывается точкой r, если источник света расположен в точке t:

$$\mathcal{T} \smallsetminus \zeta_r(t) = \{x \in \mathcal{T} : r \in [x, t]\}. \tag{14}$$

5.2. Замечание. В случае, когда структура преддерева рассматривается на топологическом пространстве X (см. предложение 1.3), ветви узлового разбиения ζ_x — это квазикомпоненты связности пространства $X \smallsetminus \{x\}$. Если X — древовидное пространство (например, $\mathbb{R}$-дерево или дендрон), то ветви разбиения ζ_x — это компоненты связности пространства $X \smallsetminus \{x\}$.

5.3. Замечание. У $\mathbb{Z}$-деревьев множества ветвей и теней совпадают (см. лемму 5.14).

5.4. Замечание. Для преддерева $\mathcal{T}$ и его точки $a \in \mathcal{T}$ определим бинарное отношение R'_a на $\mathcal{T} \smallsetminus \{a\}$ следующим образом:

$$xR'_a y \;\Leftrightarrow\; [a, x] \cap [a, y] \neq \{a\}.$$

В [1, теорема 15.6] доказывается, что R'_a является отношением эквивалентности на множестве $\mathcal{T} \smallsetminus \{a\}$ и что $R'_a \subset R_a$. Более того, $R'_a = R_a$ тогда и только тогда, когда точка a регулярна (см. определение 4.8).

[15] Мы используем термин из [30, стр. 7]. Альтернативный термин из теории выпуклостей: *коточки* — максимальные выпуклые множества в дополнении к той или иной точке (выпуклость ветвей доказывается в лемме 5.10).

5.5. Замечание. Элементы $\zeta_r(t)$ можно описать формулой, общей для случаев $r \neq t$ и $r = t$. Действительно, как нетрудно проверить, для любых $r, t \in \mathcal{T}$ выполняется равенство

$$\zeta_r(t) = \{x \in \mathcal{T} : r \notin [x, t\rangle\}. \tag{15}$$

5.6. Замечание. В преддереве $\mathcal{T}$ с тернарной структурой $\mathcal{S}$ (см. определение 1.1) для узловых разбиений в силу определений выполняется соотношение

$$\mathcal{S}prq \;\Leftrightarrow\; (p \neq r \neq q) \wedge (\zeta_r(p) \neq \zeta_r(q)). \tag{16}$$

5.7. Замечание. Система узловых разбиений преддерева является древовидной в смысле определения 1.5. При этом описанная в предложении 1.6 структура преддерева на этой системе изоморфна структуре исходного преддерева.

5.8. Лемма. *Во всяком преддереве $\mathcal{T}$ выполняются следующие свойства*:

(Z0) $\zeta_x(x) = \{x\}$ *для всех* $x \in \mathcal{T}$,

(Z1) $\zeta_x(y) \cup \zeta_y(x) = \mathcal{T}$ *для всех* $x \neq y \in \mathcal{T}$.

Proof. Свойство (Z0) выполняется по построению. Докажем свойство (Z1). Пусть $x \neq y \in \mathcal{T}$. Тогда

$$\zeta_x(y) = \{z \in \mathcal{T} : x \notin [z, y]\} \quad \text{и} \quad \zeta_y(x) = \{z \in \mathcal{T} : y \notin [z, x]\}. \tag{17}$$

При этом из условия $x \neq y$ в силу аксиомы (A2) следует, что для каждого $z \in \mathcal{T}$ выполняется одно из соотношений $x \notin [z, y]$ и $y \notin [z, x]$. С учетом соотношений (17) это означает, что $\zeta_x(y) \cup \zeta_y(x) = \mathcal{T}$. Лемма доказана. □

Оказывается, соотношения (Z0) и (Z1) также можно использовать в качестве аксиом для альтернативного определения преддеревьев через разбиения, — мы можем рассматривать преддерево как множество $\mathcal{T}$ с системой разбиений $\{\zeta_x\}_{x \in \mathcal{T}}$ (каждой точке $x \in \mathcal{T}$ сопоставлено разбиение ζ_x), обладающей свойствами (Z0) и (Z1).

5.9. Теорема. *Сопоставление преддереву системы его узловых разбиений задает взаимно однозначное соответствие между преддеревьями и теми системами вида $\{\zeta_x\}_{x \in X}$, состоящими из разбиений того или иного множества X, которые обладают свойствами* (Z0) *и* (Z1).

Proof. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

1) Система узловых разбиений произвольного преддерева обладает свойствами (Z0) и (Z1).

2) Структура произвольного преддерева однозначно восстанавливается по его системе узловых разбиений[16].

[16] Вообще говоря, структура преддерева восстанавливается и по набору узловых разбиений (при забывании об индексации). См. следствие 5.11 и его доказательство.

3) Всякая система $\{\xi_x\}_{x\in X}$ разбиений ξ_x произвольного множества X, обладающая свойствами (Z0) и (Z1), является системой узловых разбиений некоторого преддерева на X.

Утверждение 1) доказывается в лемме 5.8.

Утверждение 2) следует из соотношения (16).

Докажем утверждение 3). Пусть система $\{\xi_x\}_{x\in X}$ разбиений ξ_x некоторого множества X обладает свойствами (Z0) и (Z1). Определим на X тернарное отношение $\mathcal{S}$ правилом (ср. с (16))

$$\mathcal{S}prq \;\Leftrightarrow\; (p \neq r \neq q) \wedge (\xi_r(p) \neq \xi_r(q)). \tag{18}$$

Покажем, что $\mathcal{S}$ является структурой преддерева, т.е. удовлетворяет аксиомам (T0)–(T3).

Выполнимость аксиом (T0) и (T1) очевидна из (18).

Чтобы проверить выполнимость аксиомы (T2), предположим, что найдутся точки $x, y, z \in X$ такие, что $y \neq z$, $\mathcal{S}xyz$ и $\mathcal{S}xzy$. Тогда $x \neq y \neq z \neq x$, $\xi_y(x) \neq \xi_y(z)$ и $\xi_z(x) \neq \xi_z(y)$ (в силу (18)). В частности, мы имеем $x \notin \xi_y(z)$ и $x \notin \xi_z(y)$. Однако из неравенства $z \neq y$ в силу (Z1) вытекает, что $\xi_y(z) \cup \xi_z(y) = X$. Следовательно, $x \notin X$. Мы пришли к противоречию, а значит, аксиома (T2) выполняется.

Аксиома (T3): покажем, что в случае выполнения соотношений $\mathcal{S}xyz$ и $w \neq y$ верно и хотя бы одно из соотношений $\mathcal{S}xyw$ и $\mathcal{S}wyz$. Условие $\mathcal{S}xyz$ означает, что $x \neq y \neq z$ и $\xi_y(x) \neq \xi_y(z)$. Из неравенства $\xi_y(x) \neq \xi_y(z)$ следует, что выполняется одно из неравенств $\xi_y(w) \neq \xi_y(z)$ и $\xi_y(w) \neq \xi_y(x)$. Из условий $x \neq y \neq z$ и $w \neq y$ вытекает, что $x \neq y \neq w$ и $w \neq y \neq z$. Следовательно, в случае $\xi_y(w) \neq \xi_y(x)$ выполняется соотношение $\mathcal{S}xyw$, а в случае $\xi_y(w) \neq \xi_y(z)$ — соотношение $\mathcal{S}wyz$.

Итак, $(X, \mathcal{S})$ является преддеревом. Для завершения доказательства остается показать, что, какова бы ни была точка $r \in X$, соответствующее узловое разбиение ζ_r преддерева $(X, \mathcal{S})$ совпадает с ξ_r. Сравним разбиения ζ_r и ξ_r. Элемент $\zeta_r(r)$ совпадает с $\{r\}$ по определению узлового разбиения, а $\xi_r(r) = \{r\}$ в силу предположения о выполнимости свойства (Z0) для системы $\{\xi_x\}_{x\in X}$. Теперь заметим, что для точек $p, q \in X \setminus \{r\}$ (т.е. при $p \neq r \neq q$) из (16) и (18), соответственно, вытекает, что

$$\mathcal{S}prq \;\Leftrightarrow\; \zeta_r(p) \neq \zeta_r(q), \tag{19}$$

$$\mathcal{S}prq \;\Leftrightarrow\; \xi_r(p) \neq \xi_r(q). \tag{20}$$

Из (19) и (20), поскольку $\zeta_r(r) = \{r\} = \xi_r(r)$, следует, что $\zeta_r = \xi_r$. Утверждение 3), а вместе с ним и теорема, доказаны. $\square$

Следующие леммы содержат ряд свойств ветвей.

5.10. Лемма. *Во всяком преддереве $\mathcal{T}$ выполняются следующие свойства:*

(1) *У каждой ветви имеется единственный источник.*

(2) *Каждая ветвь выпукла.*

(3) *Если* $(B_i)_{i\in I}$ *— набор ветвей с общим источником* r*, то объединение* $U_* := U \cup \{r\}$*, где* $U := \bigcup_{i\in I} B_i$*, выпукло.*

(4) *Каждая тень выпукла.*

(5) *Пусть* S *— выпуклое множество в* $\mathcal{T}$ *и пусть* $r \in \mathcal{T} \setminus S$*. Тогда множество* S *содержится в одной из ветвей разбиения* ζ_r*.*

Proof. (1) Пусть B — произвольная ветвь. По определению, у B имеется источник (скажем, b). Допустим, точка a также является источником для B. Тогда $a \notin B$ и $b \notin B$ по определению источников и ветвей (определение 5.1). Выберем произвольно точку $t \in B$. Поскольку $t \in B$, $b \notin B$ и a — источник ветви B, то в силу определения 5.1 имеем $a \in [b,t]$. Аналогичным образом получаем, что $b \in [a,t]$, откуда по аксиоме (A2) следует, что $a = b$. Утверждение доказано.

(2) Пусть B — произвольная ветвь, r — ее источник. Тогда, если $x, y \in B$, то в силу определения ветвей имеем $r \notin [x,y]$, а в силу в силу свойства (A4) для любого $t \in [x,y]$ выполняется включение $[x,t] \subset [x,y]$, так что $r \notin [x,t]$, откуда по определению ветвей следует, что $t \in B$. Таким образом, если $x, y \in B$, то $[x,y] \subset B$, т. е. B выпукла.

(3) Допустим, что U_* не выпукло. Тогда найдутся точки $p, q \in U_*$ такие, что $[p,q] \not\subset U_*$. Пусть $x \in [p,q] \setminus U_*$. Заметим, что $r \in [p,x]$ (если $p = r$, это включение имеет место по аксиоме (A0); если $p \in U$, включение выполняется по определению 5.1). Аналогичным образом проверяется, что $r \in [x,q]$. В силу свойства (A5) включения $x \in [p,q]$ и $r \in [p,x]$ влекут включение $x \in [r,q]$. В силу аксиомы (A2), включения $r \in [x,q]$ и $x \in [r,q]$ влекут равенство $x = r$. Однако $r \in U_*$ и $x \notin U_*$. Обнаруженное противоречие доказывает утверждение.

(4) Утверждение следует из (3) в силу определений.

(5) Рассуждая от противного, предположим, что S не содержится ни в одной из ветвей разбиения ζ_r. Тогда, поскольку $r \notin S$, множество S пересекается как минимум с двумя ветвями (скажем, B_1 и B_2) разбиения ζ_r. Заметим, что для любых точек $a_1 \in S \cap B_1$ и $a_2 \in S \cap B_2$ выполняется включение $r \in [a_1, a_2]$ (по определению 5.1). Отсюда, поскольку S выпукло, следует, что $r \in S$. Мы пришли к противоречию. Утверждение доказано. □

5.11. Следствие. *Собственное подмножество преддерева выпукло тогда и только тогда, когда оно является пересечением ветвей преддерева. Структура произвольного преддерева однозначно восстанавливается по совокупности его ветвей.*

Proof. Первое утверждение следствия очевидным образом вытекает из леммы 5.10(5). Второе утверждение следует из первого в силу того, что структура произвольного преддерева однозначно восстанавливается по совокупности его выпуклых подмножеств (теорема 2.2(3)). □

5.12. Лемма. *Пусть A и B — ветви преддерева $\mathcal{T}$ с источниками a и b, соответственно. Тогда*:

1. $(a \in B) \wedge (b \in A) \;\Leftrightarrow\; A \cup B = \mathcal{T}$.

2. $(a \in B) \wedge (b \notin A) \;\Leftrightarrow\; A \subsetneq B$.

3. $(a \notin B) \wedge (b \notin A) \wedge (A \neq B) \;\Leftrightarrow\; (A \cap B = \varnothing) \wedge (A \cup B \neq \mathcal{T})$.

Proof. 1. Если $a \in B$ и $b \in A$, то $B = \zeta_b(a)$, $A = \zeta_a(b)$ и $a \neq b$ (поскольку $a \in B$, а точка b не лежит в ветви B, будучи ее источником), откуда в силу свойства (Z1) следует, что $A \cup B = \zeta_a(b) \cup \zeta_b(a) = \mathcal{T}$. Обратно, если $A \cup B = \mathcal{T}$, то $a \in B$ (так как $a \notin A$) и $b \in A$ (так как $b \notin B$).

2. Если $a \in B$ и $b \notin A$, то $B = \zeta_b(a)$, $A \neq \zeta_a(b)$ и $a \neq b$ (поскольку $a \in B$, а точка b не лежит в ветви B, будучи ее источником). В силу (Z1) имеем $\zeta_b(a) \cup \zeta_a(b) = \mathcal{T}$. Таким образом, ветвь $B = \zeta_b(a)$ содержит все элементы разбиения ζ_a за исключением элемента $\zeta_a(b)$. В частности, B содержит A. А из того, что множество $B \setminus A$ содержит a (и, значит, непусто), вытекает, что $A \subsetneq B$.

Если $A \subsetneq B$, то $b \notin A$ (поскольку $b \notin B$). Чтобы доказать, что $a \in B$, предположим, рассуждая от противного, что $a \notin B$, и рассмотрим ветвь $\zeta_b(a)$. Из условий $a \in \zeta_b(a)$ и $b \notin A$ в силу соображений из первой части доказательства следует, что $A \subset \zeta_b(a)$. Это входит в противоречие с условием $A \subset B$, поскольку ветви $\zeta_b(a)$ и B являются различными элементами разбиения ζ_b. Таким образом, a лежит в B. Утверждение доказано.

3. Пусть $a \notin B$, $b \notin A$ и $A \neq B$. Тогда $A \cup B \neq \mathcal{T}$ в силу пп. 1,2 настоящей леммы. Для доказательства соотношения $A \cap B = \varnothing$ рассмотрим случаи $a = b$ и $a \neq b$. В случае $a = b$ ветви A и B являются элементами одного и того же разбиения $\zeta_a = \zeta_b$, так что соотношение $A \cap B = \varnothing$ следует из соотношения $A \neq B$. В случае $a \neq b$ в силу (Z1) имеем $\zeta_b(a) \cup \zeta_a(b) = \mathcal{T}$. При этом A и $\zeta_a(b)$ являются различными элементами разбиения $\zeta_a(b)$ (так как $b \notin A$), откуда получаем, что $A \cap \zeta_a(b) = \varnothing$. Аналогичным образом из условия $a \notin B$ (при $a \neq b$) вытекает, что $B \cap \zeta_b(a) = \varnothing$. Из соотношений $\zeta_b(a) \cup \zeta_a(b) = \mathcal{T}$, $A \cap \zeta_a(b) = \varnothing$ и $B \cap \zeta_b(a) = \varnothing$ очевидно следует, что $A \cap B = \varnothing$.

Для доказательства обратной импликации заметим, что соотношения $a \notin B$ и $b \notin A$ следуют из условия $A \cup B \neq \mathcal{T}$ в силу пп. 1,2 настоящей леммы, а условие $A \cap B = \varnothing$ очевидно влечет соотношение $A \neq B$. $\square$

5.13. Лемма. *Пусть $y \neq x \neq z$ — точки в преддереве $\mathcal{T}$. Тогда*

$$y \in \langle x, z] \quad \Leftrightarrow \quad \zeta_y(x) \subset \zeta_z(x).$$

Proof. Пусть $y \in \langle x, z]$. Тогда, если $y = z$, то $\zeta_y(x) = \zeta_z(x)$, так что включение $\zeta_y(x) \subset \zeta_z(x)$ выполняется. Если $y \neq z$, то $z \notin [x, y]$ по (A2) так как $y \in \langle x, z] \subset [x, z]$. Из условия $z \notin [x, y]$ по определению ветвей получаем, что $y \in \zeta_z(x)$. Из условия $y \in [x, z]$ по определению ветвей получаем, что $z \notin \zeta_y(x)$. Из $y \in \zeta_z(x)$ и $z \notin \zeta_y(x)$ по лемме 5.12(2) получаем, что $\zeta_y(x) \subset \zeta_z(x)$.

Пусть $\zeta_y(x) \subset \zeta_z(x)$. В случае $\zeta_y(x) = \zeta_z(x)$ по лемме 5.10(1) получаем, что $y = z$, откуда следует, что $y \in \langle x, z]$. В случае $\zeta_y(x) \subsetneq \zeta_z(x)$ по лемме 5.12(2) получаем, что $z \notin \zeta_y(x)$, откуда в силу определения ветвей следует, что $y \in [x, z]$, так что $y \in \langle x, z]$, поскольку $x \neq y$. $\square$

5.14. Лемма. *Пусть a и b — несовпадающие точки в преддереве $\mathcal{T}$. Предположим, что $[a,b] = \{a,b\}$, и что хотя бы одна из точек a и b регулярна*[17]*. Тогда ветви $\zeta_a(b)$ и $\zeta_b(a)$ являются взаимодополняющими, т. е. $\mathcal{T} \setminus \zeta_a(b) = \zeta_b(a)$.*

Proof. Положим, не умаляя общности, что точка b регулярна. Пусть $x \in \zeta_a(b)$. Тогда $a \notin [x,b]$ по определению ветвей. Таким образом, $[x,b] \cap [b,a] = \{b\}$. Отсюда в силу регулярности точки b следует, что $b \in [a,x]$. Это означает, что $x \notin \zeta_b(a)$. Следовательно $\zeta_a(b) \cap \zeta_b(a) = \varnothing$. Отсюда, воспользовавшись тем, что $\zeta_a(b) \cup \zeta_b(a) = \mathcal{T}$ (свойство (Z1)), получаем требуемое $\mathcal{T} \setminus \zeta_a(b) = \zeta_b(a)$. $\square$

5.15. Обозначения. Для точки x и подмножества S в преддереве $\mathcal{T}$ введем следующее обозначение:

$$U_S(x) := \{t \in \mathcal{T} : [t,x] \cap S = \varnothing\}. \tag{21}$$

5.16. Лемма. *Пусть x, y — точки, S, Q — подмножества в преддереве $\mathcal{T}$. Тогда:*

(1) $U_S(x) = \mathcal{T} \Leftrightarrow S = \varnothing$.

(2) $U_S(x) = \varnothing \Leftrightarrow x \in S$.

(3) $U_S(x) \ni x \Leftrightarrow S \not\ni x$.

(4) $U_S(x) \cap U_Q(x) = U_{S \cup Q}(x)$.

(5) *Если $x \neq y$, то $U_{\{y\}}(x) = \zeta_y(x)$.*

(6) *Если $x \notin S$, то $U_S(x) = \bigcap_{r \in S} \zeta_r(x)$.*

(7) *Если $y \in U_S(x)$, то $U_S(x) = U_S(y)$.*

Proof. (1) Если $U_S(x) = \mathcal{T}$, то $[t,x] \cap S = \varnothing$ для всех $t \in \mathcal{T}$, откуда, поскольку $t \in [t,x]$ по аксиоме (A0), следует, что $t \notin S$, так что $S = \varnothing$. Обратная импликация прямо следует из определения.

(2) Если $U_S(x) = \varnothing$, то $x \notin U_S(x)$, а это по определению означает, что $[x,x] \cap S \neq \varnothing$. Остается заметить, что $[x,x] = \{x\}$ (свойство (A$\frac{1}{2}$)). Если $x \in S$, то при любом $t \in \mathcal{T}$ множество $[t,x] \cap S$ содержит x (так как $x \in [t,x]$ по аксиоме (A0)) и, следовательно, непусто. Это по определению означает, что $U_S(x) = \varnothing$.

[17] Определение регулярности дано в 4.8.

(3) Если $x \in U_S(x)$, то $U_S(x) \neq \varnothing$, так что $x \notin S$ в силу (2). Если $x \notin S$, то $[x,x] \cap S = \varnothing$, так как $[x,x] = \{x\}$ по свойству (A$\frac{1}{2}$), откуда по определению получаем, что $x \in U_S(x)$.

(4) Прямо следует из определения (21).

(5) Следует из определения ветвей.

(6) Следует из (4) и (5).

(7) Определим отношение R_S на множестве $\mathcal{T} \setminus S$, положив xR_Sy в том случае, когда $[x,y] \cap S = \varnothing$ (ср. с определением 5.1). Отношение R_S является отношением эквивалентности (оно рефлексивно в силу (A$\frac{1}{2}$), симметрично в силу (A1) и транзитивно в силу (A3)). Как видно непосредственно из определений, для каждого $x \in \mathcal{T} \setminus S$ множество $U_S(x)$ является содержащим точку x классом отношения R_S. Отсюда очевидным образом следует требуемое. $\square$

6 Топология теней

В настоящем параграфе приведено определение топологии теней и доказан ряд ее свойств.

6.1. Определение. Напомним, что *ветвями* преддерева $\mathcal{T}$ называются множества вида

$$\zeta_a(b) = \{t \in \mathcal{T} : a \notin [t,b]\},$$

где $a \neq b$ (определение 5.1). Определим *топологию теней* на преддереве $\mathcal{T}$ как наименьшую топологию, в которой все ветви преддерева $\mathcal{T}$ открыты. Иными словами, ветви образуют предбазу топологии теней.

Тени (т. е. дополнения ветвей; определение 5.1) образуют предбазу замкнутых множеств в топологии теней.

6.2. Примеры. 1. На преддереве с пустым тернарным отношением топология теней совпадает с топологией конечных дополнений.

2. На рассматриваемом как преддерево линейно упорядоченном множестве топология теней совпадает с обычной порядковой топологией.

3. У всякого древовидного пространства (см. определение в примере 1.2(3)) топология теней содержится в исходной (см. [32, теорема 20]), а совпадает с ней тогда и только тогда, когда пространство периферически конечно[18] (см. [32, теорема 21], а также [23, следствие 5.12]).

В частности, на дендроне топология теней совпадает с исходной (см., например, [20, следствие 2.2]).

Всякое древовидное пространство при переходе к топологии теней превращается в регулярное локально связное дугообразно связное периферически конечное древовидное пространство (см. [32, теоремы 20,21]).

[18] Говорят, что топологическое пространство *периферически конечно*, если у него имеется база открытых множеств, у каждого элемента которой граница конечна.

4. На дереве (будь то $\mathbb{Z}$-дерево, CW-дерево или симплициальное $\mathbb{R}$-дерево, — см. замечание из сноски 1) топология теней содержится в обычной, а совпадает с ней тогда и только тогда, когда дерево локально конечно. (См. пример 3.)

5. Топология теней на $\mathbb{R}$-дереве T содержится в топологии метрики (см. предложение 6.6), а совпадает с ней тогда и только тогда, когда (метрическое) пополнение у T локально компактно, т. е. когда всякая ограниченная бесконечная последовательность точек в T имеет фундаментальную подпоследовательность. (Это выводится из утверждений примера 3.) В частности, топологии совпадают в следующих случаях:

– T симплициально и локально конечно,

– T локально компактно в топологии метрики,

– T "имеет конечную длину", т. е. накрывается набором интервалов конечной суммарной длины.

6. Пусть T — дерево (как в примере 4), а $\mathrm{Ends}(T)$ — множество его концов. На объединении $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ имеется естественная структура преддерева (она описывается в §11), содержащая T в качестве вложенного преддерева. Наличие естественной структуры преддерева на $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ позволяет говорить о топологии теней на этом объединении. Кроме того, на $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ имеется известная стандартная топология[19]. Можно показать, что эта стандартная топология является наименьшей из топологий, содержащих топологию теней и индуцирующих исходную топологию на дереве T. Теневая топология преддерева $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ содержится в стандартной, а совпадает с ней тогда и только тогда, когда T локально конечно (см. предложение 12.3).

7. Псевдодерево (см. определение в примере 1.2(7)) является полурешеткой тогда и только тогда, когда соответствующее преддерево медианно. В этом случае топология теней совпадает с топологией $T'_{\leqslant}$ из [24].

6.3. Лемма. *Пусть $\mathcal{T}$ — преддерево. Тогда совокупность $\mathfrak{U}$ всех подмножеств вида*

$$U_F(x) := \{t \in \mathcal{T} : [t, x] \cap F = \varnothing\},$$

где $x \in \mathcal{T}$, а $F \subset \mathcal{T}$ — конечно или пусто, является базой топологии теней.

Proof. Из леммы 5.16 следует, что совокупность $\mathfrak{U}$ состоит из пересечений всевозможных конечных наборов ветвей преддерева $\mathcal{T}$, пустого множества и множества $\mathcal{T}$. Остается заметить, что ветви по определению образуют предбазу

[19] Существует несколько проработанных техник, позволяющих описать множество $\mathrm{Ends}(T)$ концов дерева и стандартную топологию на объединении $T \cup \mathrm{Ends}(T)$. Множество $\mathrm{Ends}(T)$ можно рассматривать, например, как

A) множество классов *конфинальных лучей* (обобщение этого подхода на случай произвольных преддеревьев рассматривается в §11);

B) *пространство концов* в смысле Фрейденталя (см., например, [3, 7]);

C) *границу на бесконечности* в смысле гиперболических по Громову пространств (см., например, [15]);

D) *наблюдаемую границу* CAT(0) пространства — с так называемой *конической топологией* (см., например, [3]).

топологии теней и что в топологическом пространстве X с предбазой $\mathcal{P}$ множество, состоящее из пересечений всевозможных конечных наборов элементов из $\mathcal{P}$, пустого множества и множества X, является базой пространства X. $\square$

6.4. Лемма. *Последовательность $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ точек преддерева $\mathcal{T}$ сходится к точке $x \in \mathcal{T}$ в топологии теней на $\mathcal{T}$ тогда и только тогда, когда для каждой точки $z \in (\mathcal{T} \smallsetminus \{x\})$ множество $\{j \in \mathbb{N} : z \in [x, x_j]\}$ пусто или конечно, т. е. когда*

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{j>k} [x, x_j] \;=\; \{x\}.$$

Proof. По определению, последовательность $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ точек топологического пространства X сходится к точке $x \in X$, если всякая окрестность точки x содержит все элементы последовательности $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, начиная с некоторого номера. Если $\mathcal{P}$ — предбаза в X, то для всякой окрестности U точки x найдется конечный набор элементов предбазы $\mathcal{P}$, пересечение которых содержит x и содержится в U. Отсюда очевидным образом следует, что $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к x тогда и только тогда, когда каждый элемент предбазы $\mathcal{P}$, содержащий x, содержит и все элементы последовательности $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, начиная с некоторого номера.

Перейдем непосредственно к доказательству утверждения леммы. Пусть $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ — последовательность в $\mathcal{T}$ и x — точка в $\mathcal{T}$. В силу определения 5.1 семейство $\{\zeta_z(x)\}_{z\in(\mathcal{T}\smallsetminus\{x\})}$ есть в точности множество всех тех ветвей в $\mathcal{T}$, которые содержат точку x. Тогда, поскольку ветви образуют предбазу топологии теней, в силу вышеприведенного факта получаем, что $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ сходится к x если и только если для каждой точки $z \in (\mathcal{T} \smallsetminus \{x\})$ ветвь $\zeta_z(x)$ содержит все элементы последовательности $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$, начиная с некоторого номера, т.е. если для каждой точки $z \in (\mathcal{T} \smallsetminus \{x\})$ множество $\{j \in \mathbb{N} : x_j \notin \zeta_z(x)\}$ пусто или конечно. Остается заметить, что в силу определений при $z \neq x$ условия $x_j \notin \zeta_z(x)$ и $z \in [x, x_j]$ эквивалентны. $\square$

6.5. Предложение (ср. [4, лемма 7.8]). *Пусть S — подмножество преддерева $\mathcal{T}$. Тогда топология теней на S (как на преддереве с унаследованной от $\mathcal{T}$ структурой) содержится в топологии, которую индуцирует на S топология теней преддерева $\mathcal{T}$. Если S выпукло в $\mathcal{T}$, то указанные топологии совпадают.*

Proof. Будем обозначать через ζ_x^S и $\zeta_x^{\mathcal{T}}$ узловые разбиения в преддеревьях S и $\mathcal{T}$, соответственно (см. определение 5.1). Из определения ветвей (то же определение 5.1) вытекает, что каждая ветвь $\zeta_x^S(y)$, $x \neq y \in S$, преддерева S является пересечением множества S с ветвью $\zeta_x^{\mathcal{T}}(y)$ преддерева $\mathcal{T}$. Поскольку ветви порождают топологию теней, отсюда следует первое утверждение предложения. При этом для доказательства второго утверждения остается лишь проверить, что, каковы бы ни были точки $a \neq b \in \mathcal{T}$, в случае, когда S выпукло в $\mathcal{T}$, пересечение $S \cap \zeta_a^{\mathcal{T}}(b)$ открыто в топологии теней преддерева S. Если $a \in S$, то $S \cap \zeta_a^{\mathcal{T}}(b)$ либо пусто, либо является ветвью разбиения ζ_a^S множества S (и, следовательно, в обоих случаях открыто). Если $a \notin S$, то в силу леммы 5.10(5) пересечение $S \cap \zeta_a^{\mathcal{T}}(b)$ либо пусто, либо совпадает с S (и, следовательно, открыто). $\square$

6.6. Предложение. *На метрическом преддереве*[20] *топология теней содержится в топологии метрики.*

Proof. Поскольку ветви порождают топологию теней, для доказательства предложения достаточно показать, что все ветви открыты в топологии метрики. Пусть B — ветвь с некоторым источником r в метрическом преддереве (T, ρ). В силу определения ветвей, каковы бы ни были точки $x \in B$ и $y \in T \setminus B$, выполняется соотношение $r \in [x, y]$, эквивалентное равенству $\rho(x, y) = \rho(x, r) + \rho(r, y)$. Это означает, что, какова бы ни была точка $x \in B$, открытый шар с центром в x радиуса $\rho(x, r)$ содержится в B. Отсюда очевидно следует требуемое. $\square$

6.7. Предложение. *В регулярном (в частности, в медианном) преддереве замкнутые интервалы являются замкнутыми подмножествами по отношению к топологии теней.*

6.8. Замечание. Чуть более детальный анализ показывает, что все замкнутые интервалы (а вместе с ними — лучи и прямые) преддерева $\mathcal{T}$ являются замкнутыми подмножествами по отношению к топологии теней тогда и только тогда, когда в $\mathcal{T}$ не имеется ни особенностей типа Y_1, ни особенностей типа Y_2 (см. определение 4.3).

Доказательство предложения 6.7. Пусть $[a, b]$ — замкнутый интервал в регулярном преддереве $\mathcal{T}$. Для доказательства предложения достаточно показать, что для любой точки $x \in \mathcal{T} \setminus [a, b]$ в $\mathcal{T}$ найдется ветвь, содержащая x и не пересекающаяся с $[a, b]$. Отметим, что в силу аксиомы (A0) пересечение $Q := [x, a] \cap [x, b]$ содержит точку x. Однако Q не совпадает с x, поскольку в противном случае в силу регулярности преддерева $\mathcal{T}$ мы получили бы, вопреки предположению, что $x \in [a, b]$. Возьмем произвольную точку $q \in Q \setminus \{x\}$ и покажем, что ветвь $\zeta_q(x)$ (по определению содержащая точку x) не пересекается с $[a, b]$. Действительно, из включения $q \in [x, a]$ по определению ветвей получаем, что $a \notin \zeta_q(x)$, а из включения $q \in [x, b]$ — что $b \notin \zeta_q(x)$. Отсюда в силу того, что тень $\mathcal{T} \setminus \zeta_q(x)$ выпукла (лемма 5.10(4)), следует требуемое. $\square$

Приведем результаты типа теоремы Крейна–Мильмана.

6.9. Предложение. *В ограниченном преддереве выпуклая оболочка множества его терминальных*[21] *точек совпадает со всем преддеревом.*

[20] См. определение 4.17.

[21] См. определение 2.11.

Proof. Пусть $\mathcal{T}$ — ограниченное преддерево, $\mathrm{ex}(\mathcal{T})$ — множество его терминальных точек. Пусть $a \in \mathcal{T}$ — произвольная точка. Покажем, что $a \in \mathrm{hull}(\mathrm{ex}(\mathcal{T}))$. Достаточно рассмотреть случай, когда a не терминальна. Тогда, согласно определениям, найдутся точки $p, q \in \mathcal{T}$ такие, что $a \in \langle p, q\rangle$. Рассмотрим на $\mathcal{T}$ отношение порядка $<_a$, определяемое правилом

$$x <_a y \;\Leftrightarrow\; [a, x] \subsetneq [a, y].$$

Покажем, что всякая цепь C в $(\mathcal{T}, <_a)$ имеет верхнюю грань. Действительно, как нетрудно видеть, C является линейным множеством в $\mathcal{T}$ и, значит, поскольку $\mathcal{T}$ ограничено, лежит в некотором замкнутом интервале $[v, w]$. В силу (A3) имеем $[v, w] \subset [a, v] \cup [a, w]$, так что каждый элемент c из C содержится в $[a, v] \cup [a, w]$. При этом, если $c \in [a, v]$ (соотв., $c \in [a, w]$), то и все элементы из C, $<_a$-меньшие, чем c, тоже лежат в $[a, v]$ (соотв., $[a, w]$). Отсюда, как легко проверить, следует, что C содержится либо в $[a, v]$, либо в $[a, w]$, а это значит, что в множестве $\{v, w\}$ имеется верхняя грань для C.

Теперь, обращаясь к лемме Куратовского–Цорна, получаем, что в $(\mathcal{T}, <_a)$ найдутся максимальные элементы p' и q' такие, что $p \leqslant_a p'$ и $q \leqslant_a q'$, т. е. $p \in [a, p']$ и $q \in [a, q']$. Из условий $p \in [a, p']$, $a \in \langle p, q\rangle$ и $q \in [a, q']$, дважды обращаясь к (A8), получаем $a \in \langle p, q'\rangle$, а затем — $a \in \langle p', q'\rangle$.

Максимальные элементы порядка $<_a$ являются терминальными точками в $\mathcal{T}$. (Действительно, если точка $s \in \mathcal{T}$ не терминальна, то найдутся $v, w \in \mathcal{T}$ такие, что $s \in \langle v, w\rangle$, откуда в силу (A3) получаем, что s лежит в $[a, v\rangle \cup [a, w\rangle$, так что в силу (A4) либо $s <_a v$, либо $s <_a w$, т. е. s не является максимальным элементом.)

Мы показали, таким образом, что $a \in [p', q']$, где $p', q' \in \mathrm{ex}(\mathcal{T})$, так что $a \in \mathrm{hull}(\mathrm{ex}(\mathcal{T}))$. Предложение доказано. $\square$

6.10. Следствие. *Пусть выпуклое подмножество K преддерева $\mathcal{T}$ компактно в топологии теней. Тогда K совпадает с выпуклой оболочкой множества своих экстремальных точек.*

Proof. Пусть $\mathcal{S}_K$ — сужение структуры преддерева с $\mathcal{T}$ на K. Тогда, в силу предложения 6.5, топология теней на преддереве $(K, \mathcal{S}_K)$ компактна, откуда в силу теоремы 8.2 следует, что преддерево $(K, \mathcal{S}_K)$ ограничено. Остается воспользоваться предложением 6.9, заметив, что множество экстремальных точек подмножества K в преддереве $\mathcal{T}$ совпадает с множеством терминальных точек преддерева $(K, \mathcal{S}_K)$. $\square$

7 Отделимость

Настоящий параграф посвящен свойствам отделимости топологии теней на преддереве. Мы используем схемы доказательств из [24].

Напомним, что топологическое пространство X называют

– T_1-*пространством*, если все его точки замкнуты,

– *хаусдорфовым*, если любые две различные точки в X обладают непересекающимися окрестностями,

– *регулярным*, если всякое замкнутое подмножество в X и всякая не содержащаяся в нем точка обладают непересекающимися окрестностями,

– *нормальным*, если любые два замкнутых непересекающихся подмножества в X обладают непересекающимися окрестностями,

– *наследственно нормальным* (*вполне нормальным*), если любое его подпространство нормально в индуцированной топологии,

– *совершенно нормальным*, если для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств A и B в X найдется непрерывное отображение $f : X \to \mathbb{R}$ такое, что $f^{-1}(0) = A$ и $f^{-1}(1) = B$.

– *монотонно нормальным*, если X является T_1-пространством и существует оператор H, сопоставляющий паре (p, C), где $C \subset X$ — замкнуто и $p \in X \setminus C$, открытое множество $H(p, C) \subset X$ так, что

(1) $p \in H(p, C) \subset X \setminus C$,

(2) если $D \subset X$ замкнуто и $p \notin C \supset D$, то $H(p, C) \subset H(p, D)$,

(3) если $p, q \in X$ и $p \neq q$, то $H(p, \{q\}) \cap H(q, \{p\}) = \varnothing$.

7.1. Замечание. Монотонно нормальное пространство вполне нормально и хаусдорфово. Совершенное нормальное пространство вполне нормально. Монотонная нормальность и совершенная нормальность несравнимы.

Существуют преддеревья, топология теней на которых монотонно нормальна но не совершенно нормальна. (Пример: множество всех счетных ординалов с обычной порядковой топологией.)

7.2. Лемма. *Преддерево с топологией теней является T_1-пространством.*

Proof. Лемма следует из того факта, что для каждой пары $x \neq y$ различных точек преддерева ветвь $\zeta_x(y)$ (см. определение 5.1) содержит точку y, не содержит x и при этом по определению является открытым в топологии теней множеством. □

Фигурирующие в нижеследующей теореме 7.3 понятия звезды и супремума дуги даны в разделах 4.5 и 3.1, соответственно. Определения медианных и регулярных преддеревьев приведены в §4. Определение дендрона дано в примере 1.2(3).

7.3. Теорема. *Пусть $\mathcal{T}$ — преддерево. Тогда следующие свойства эквивалентны.*

(i) *В преддереве $\mathcal{T}$ не имеется ни бесконечных звезд, ни направленных дуг, обладающих двумя и более супремумами (например, $\mathcal{T}$ медианно или, более общо, регулярно).*

(ii) *Топология теней на $\mathcal{T}$ хаусдорфова.*

(iii) *Топология теней на $\mathcal{T}$ регулярна.*

(iv) *Топология теней на $\mathcal{T}$ нормальна.*

(v) *Топология теней на $\mathcal{T}$ вполне нормальна.*

(vi) *Топология теней на $\mathcal{T}$ монотонно нормальна.*

(vii) *Преддерево $\mathcal{T}$ с топологией теней вкладывается (как топологическое пространство) в дендрон.*

Proof. • (i) ⇒ (ii) :

Пусть x и y — различные точки в $\mathcal{T}$. Покажем, что x и y обладают непересекающимися окрестностями.

В случае, если $\langle x,y\rangle \neq \varnothing$, для произвольной точки $r \in \langle x,y\rangle$ ветви

$$\zeta_r(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in \mathcal{T} : r \notin [t,x]\} \quad \text{и} \quad \zeta_r(y) \stackrel{\text{def}}{=} \{t \in \mathcal{T} : r \notin [t,y]\}$$

являются непересекающимися окрестностями для x и y. Действительно, в силу определения имеют место включения $x \in \zeta_r(x)$ and $y \in \zeta_r(y)$. При этом $\zeta_r(x) \neq \zeta_r(y)$ (поскольку $r \in [x,y]$, откуда по определению ветвей получаем, что $x \notin \zeta_r(y)$ и $y \notin \zeta_r(x)$), так что $\zeta_r(x)$ и $\zeta_r(y)$ дизъюнктны (будучи различными элементами разбиения ζ_r).

В случае, если $\langle x,y\rangle = \varnothing$ (т.е. $[x,y] = \{x,y\}$), пусть S — максимальная звезда в преддереве $\mathcal{T}$, содержащая звезду $\{x,y\}$. Согласно предположению пункта (i), S конечна. Заметим, что для каждого $r \in S$ множество $S \smallsetminus \{r\}$ содержится в одной ветви разбиения ζ_r (это легко следует из определений). Обозначим такую ветвь для $r \in S$ через D_r и положим

$$P_x := \bigcap_{r \in S \smallsetminus \{x\}} D_r \quad \text{и} \quad P_y := \bigcap_{r \in S \smallsetminus \{y\}} D_r.$$

(При этом $P_x \cap P_y = \bigcap_{r \in S} D_r$.) Поскольку S конечно, пересечения P_x и P_y открыты (в топологии теней). По построению, $x \in P_x$ и $y \in P_y$. Покажем, что $P := P_x \cap P_y = \varnothing$. Действительно, рассуждая от противного, допустим, что найдется точка $p \in P$. Тогда $p \notin S$ (так как $p \in D_r$ и $r \notin D_r$ для всех $r \in S$). Более того, каковы бы ни были точки $r \neq s \in S$, выполняется соотношение $r \notin [p,s]$ (это следует из определения ветвей, так как $p, s \in D_r$ по построению). Отсюда следует, что $[p,r\rangle = [p,s\rangle$ для всех $r, s \in S$ (действительно, в силу (A3) имеем $[p,r] \subset [p,s] \cup [s,r]$ и $[p,s] \subset [p,r] \cup [s,r]$, причем $[s,r] = \{s,r\}$ и, как показано выше, $\{s,r\} \not\subset [p,r\rangle \cup [p,s\rangle$). Обозначим не зависящий от выбора $r \in S$ интервал $[p,r\rangle$ через $[p,S\rangle$. Отметим, что $[p,S\rangle \subset P$, поскольку, как следует из определения ветвей, $[p,r\rangle \subset D_r$ для каждого $r \in S$. Пусть $<$ — то направление на интервале $[p,S\rangle$, в котором p является наименьшим элементом (см. лемму 3.3(4)). Тогда, если в $([p,S\rangle,<)$ имеется наибольший элемент m, то $S \cup \{m\}$, как легко следует из конструкции, звезда, а это противоречит максимальности звезды S, а если в $([p,S\rangle,<)$ нет наибольшего элемента, то каждая из точек звезды S является супремумом для $([p,S\rangle,<)$, а это противоречит условию п. (i). Полученное противоречие показывает, что $P_x \cap P_y = \varnothing$, т. е. P_x и P_y — непересекающиеся окрестности для x и y. Хаусдорфовость, таким образом, доказана.

• $\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii) :

Топология теней на преддереве, являющемся звездой, совпадает с топологией конечных дополнений (см. пример 6.2(1)) и, следовательно, является хаусдорфовой, только если звезда конечна. Отсюда, поскольку подпространства хаусдорфова пространства хаусдорфовы, в силу предложения 6.5 и выпуклости звезд следует, что топология теней на преддереве с бесконечной звездой нехаусдорфова.

Если в преддереве $\mathcal{T}$ найдутся различные точки a и b, являющиеся супремумами одной и той же направленной дуги $(A,<)$, то топология теней на $\mathcal{T}$ нехаусдорфова, поскольку точки a и b не обладают непересекающимися окрестностями. (Действительно, в случае, когда точка s является супремумом направленной дуги $(A,<)$, произвольная ветвь $\zeta_r(s)$, содержащая s, содержит либо всю дугу A (если $r \notin A$), либо ее верхний класс $\langle r,s\rangle$ (если $r \in A$). Отсюда вытекает, что любая окрестность точки s содержит непустой верхний класс дуги $(A,<)$.)

• (ii) $\Rightarrow$ (vii) :

Из леммы 5.12 следует, что набор ветвей произвольного преддерева является сизигийным (см. определение в разделе 1.8). Как показано в [21] (см. также [20, теорема 6.6] и [24, следствие 3.13]), хаусдорфово пространство, обладающее сизигийной (замкнутой[22]) предбазой, вкладывается в некоторый дендрон.

• (vii) $\Rightarrow$ (vi) :

Дендроны монотонно нормальны (см., например, доказательство следствия 3.14 в [24]). Из определения монотонной нормальности ясно, что это свойство является наследственным, т. е. подмножество монотонно нормального пространства с индуцированной топологией монотонно нормально.

• (vi) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (iv) :

Эти импликации выполняются для любых пространств по определению.

• (iv) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (ii) :

Прямо следует из леммы 7.2. □

8 Компактность

В настоящем параграфе доказывается теорема 8.2 о необходимых и достаточных условиях компактности топологии теней на преддереве. Эта теорема обобщает результаты о компактности топологии теней для различных классов древовидных структур, полученные, например, в [4, предложение 7.13], [22,

[22]Набор, состоящий из дополнений подмножеств, образующих открытую предбазу, является замкнутой предбазой. Набор, состоящий из дополнений подмножеств, образующих сизигийный набор, также является сизигийным.

предложение 4.2] (случай объединения счетного дерева с пространством его концов), [13, предложение 7.13], [11, предложение 1.13] (случай сепарабельных $\mathbb{R}$-деревьев).

Фигурирующие в теореме 8.2 понятия ограниченности и слабой полноты преддерева вводятся в разделах 3.6 и 4.12. Определения направленной дуги и ее супремума приведены в 3.1. Теорема также использует перекликающееся с понятием супремума направленной дуги понятие минимальной верхней грани цепи ветвей, которое приведено ниже.

8.1. Определение. Условимся считать совокупность $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ всех ветвей преддерева $\mathcal{T}$ частично упорядоченным множеством, — с порядковым отношением включения подмножеств. Соответственно, набор $\mathcal{C}$ ветвей из $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ будем называть *цепью*, если для каждой пары $B_1, B_2 \in \mathcal{C}$ одна из ветвей B_1, B_2 содержит другую. Ветвь $D \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$ называется *верхней гранью* набора $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}(\mathcal{T})$, если $B \subset D$ для всех $B \in \mathcal{P}$. Ветвь $D \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$ называется *минимальной верхней гранью* набора $\mathcal{P}$, если $\bigcup_{B\in\mathcal{P}} B \subset D$ и не существует ветви $D' \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$ такой, что $\bigcup_{B\in\mathcal{P}} B \subset D' \subsetneq D$. Отметим, что у набора ветвей, не имеющего *точной верхней грани*, минимальная верхняя грань либо отсутствует, либо не единственна.

8.2. Теорема. *Пусть $\mathcal{T}$ — преддерево. Тогда следующие свойства эквивалентны.*

(i) *Преддерево $\mathcal{T}$ ограничено и слабо полно.*

(ii) *Все дуги в $\mathcal{T}$ являются интервалами.*

(iii) *У каждой направленной дуги в $\mathcal{T}$ имеется супремум.*

(iv) *Каждая цепь ветвей в $\mathcal{T}$ имеет минимальную верхнюю грань.*

(v) *Топология теней на $\mathcal{T}$ компактна.*

Proof. • (i) $\Rightarrow$ (ii) :

В ограниченном слабо полном преддереве каждая дуга ограничена (в силу ограниченности преддерева) и, следовательно, является интервалом (в силу слабой полноты).

• (ii) $\Rightarrow$ (i) :

Если все дуги в $\mathcal{T}$ являются интервалами, то $\mathcal{T}$ слабо полно (по определению слабой полноты). Кроме того, в этом случае $\mathcal{T}$ и ограничено, поскольку каждое линейное подмножество содержится в своей выпуклой оболочке, которая в силу леммы 3.2 является дугой, каждая дуга в силу предположения является интервалом, а каждый интервал по определению содержится в некотором замкнутом интервале.

• (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) :

Эквивалентность свойств (ii) и (iii) доказывается в [4, лемма 3.13]. (В [4] преддеревья, обладающие свойством (ii), называются полными.)

• (iii) $\Rightarrow$ (iv) :

Предположим, что в преддереве $\mathcal{T}$ у каждой направленной дуги имеется супремум. Покажем, что у произвольной цепи $\mathcal{C}$ ветвей в $\mathcal{T}$ имеется минимальная верхняя грань. Заметим, что наибольший элемент цепи является ее минимальной верхней гранью, поэтому достаточно рассмотреть случай цепи $\mathcal{C}$ без наибольшего элемента.

Обозначим через $R_{\mathcal{C}}$ подмножество в $\mathcal{T}$, образованное источниками ветвей из $\mathcal{C}$. Поскольку у каждой ветви источник единствен (лемма 5.10), а у различных ветвей с непустым пересечением источники различны (что прямо вытекает из определений), переход от ветви к ее источнику дает взаимно однозначное соответствие между элементами множеств $\mathcal{C}$ и $R_{\mathcal{C}}$. Обозначим через $<$ линейный порядок на множестве $R_{\mathcal{C}}$, соответствующий порядку в цепи $\mathcal{C}$ (для точек $r, s \in R_{\mathcal{C}}$ полагаем $r < s$ если $B_r \subsetneq B_s$, где B_r и B_s — ветви из $\mathcal{C}$ с источниками r и s, соответственно).

Заметим, что порядок $<$ согласован со структурой преддерева $\mathcal{T}$ в том смысле, что всякая тройка r, s, t точек из $R_{\mathcal{C}}$, удовлетворяющая соотношению $r < s < t$, удовлетворяет и соотношению $s \in \langle r, t \rangle$. Действительно, условие $r < s < t$ по определению равносильно условию $B_r \subsetneq B_s \subsetneq B_t$ для ветвей B_r, B_s и B_t из $\mathcal{C}$ с источниками r, s и t, соответственно. Из условия $B_r \subsetneq B_s \subsetneq B_t$ по лемме 5.12(2) следует, что $r \in B_s$ и $t \notin B_s$. Это в силу определения ветвей означает, что $s \in [r, t]$, откуда следует $s \in \langle r, t \rangle$ так как $r \neq s \neq t$. Из этого наблюдения в силу определения направлений и линейности порядка $<$ вытекает, что $R_{\mathcal{C}}$ является линейным подмножеством в $\mathcal{T}$, а порядок $<$ является направлением на $R_{\mathcal{C}}$.

Рассмотрим выпуклую оболочку $\overline{R}_{\mathcal{C}} := \mathrm{hull}(R_{\mathcal{C}})$. Из линейности множества $R_{\mathcal{C}}$ по лемме 3.2 следует, что $\overline{R}_{\mathcal{C}}$ является дугой. Пусть $<'$ — направление на $\overline{R}_{\mathcal{C}}$, индуцированное[23] направлением $<$ на $R_{\mathcal{C}}$. По условию у направленной дуги $(\overline{R}_{\mathcal{C}}, <')$ найдется супремум (скажем, s) в $\mathcal{T}$. При этом, как следует из определений, множество $\overline{R}_{\mathcal{C}} \cup \{s\}$ является дугой, а точка s является наибольшим элементом этой дуги (по направлению $<''$ на $\overline{R}_{\mathcal{C}} \cup \{s\}$, индуцированному направлением $<'$). Отсюда вытекает, что $s \notin \overline{R}_{\mathcal{C}}$, поскольку мы рассматриваем случай, когда у $\mathcal{C}$ нет наибольшего элемента. (В самом деле, условие об отсутствии у $\mathcal{C}$ наибольшего элемента очевидным образом влечет отсутствие такового и у $(R_{\mathcal{C}}, <)$. Следовательно, нет наибольшего элемента и у $(\overline{R}_{\mathcal{C}}, <')$, поскольку для каждого $x \in \overline{R}_{\mathcal{C}} \setminus R_{\mathcal{C}}$ существуют $a, b \in R_{\mathcal{C}}$ такие, что $x \in \langle a, b \rangle$, откуда следует, что либо $x <' a$, либо $x <' b$.) Поскольку $s \notin \overline{R}_{\mathcal{C}}$, а множество $\overline{R}_{\mathcal{C}}$ выпукло, по лемме 5.10(5) существует ветвь B_* с источником в s, содержащая дугу $\overline{R}_{\mathcal{C}}$.

Покажем, что ветвь B_* является минимальной верхней гранью цепи $\mathcal{C}$.

Продемонстрируем сначала, что B_* является для $\mathcal{C}$ верхней гранью, т.е. $\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B \subset B_*$. Пусть B_r — ветвь из $\mathcal{C}$ с источником в некоторой точке $r \in R_{\mathcal{C}}$. Поскольку у $\mathcal{C}$ нет наибольшего элемента, найдется ветвь $B_{r'} \in \mathcal{C}$ с некоторым

[23] Этот термин для направлений определен в 3.4.

источником $r' \in R_{\mathcal{C}}$ такая, что $B_r \subsetneq B_{r'}$. Из условия $B_r \subsetneq B_{r'}$ следует, что $r < r'$ и $r <'' r'$. Мы также имеем $r' <'' s$, поскольку s есть наибольший элемент в $(\overline{R}_{\mathcal{C}} \cup \{s\}, <'')$ и $r' \neq s$. Отсюда, поскольку $<''$ — направление, получаем, что $r' \in \langle r, s]$. По лемме 5.12(2) из условия $B_r \subsetneq B_{r'}$ следует, что $r \in B_{r'}$, так что $B_{r'} = \zeta_{r'}(r)$. Заметим, что r лежит в B_* (поскольку B_* содержит $\overline{R}_{\mathcal{C}}$), так что $B_* = \zeta_s(r)$. Из полученных соотношений $B_{r'} = \zeta_{r'}(r)$, $B_* = \zeta_s(r)$ и $r' \in \langle r, s]$ в силу леммы 5.13 вытекает, что $B_r \subsetneq B_{r'} \subset B_*$. Тем самым доказано, что B_* является для $\mathcal{C}$ верхней гранью.

Теперь покажем, что верхняя грань B_* минимальна. Рассуждая от противного, допустим, что B_* не минимальна, т. е. найдется ветвь B' такая, что $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B \subset B' \subsetneq B_*$. Тогда B' содержит множество $R_{\mathcal{C}}$. (Действительно, поскольку мы рассматриваем случай, когда в цепи $\mathcal{C}$ нет наибольшего элемента, то для каждой точки $r \in R_{\mathcal{C}}$ соответствующая ветвь $B_r \in \mathcal{C}$ с источником в r должна содержаться в качестве собственного подмножества в некоторой ветви $D \in \mathcal{C}$. Тогда и r лежит в D по лемме 5.12(2), так что $r \in D \subset B'$.) Следовательно, поскольку ветвь B' выпукла (см. лемму 5.10(2)), она содержит и выпуклую оболочку $\overline{R}_{\mathcal{C}} = \mathrm{hull}(R_{\mathcal{C}})$. Пусть s' — источник ветви B'. Заметим, что для любой точки $r \in R_{\mathcal{C}}$ мы имеем $r \in R_{\mathcal{C}} \subset B' \subsetneq B_*$, откуда в силу леммы 5.13 следует, что $s' \in [r, s] \subset \overline{R}_{\mathcal{C}} \cup \{s\}$. При этом $s' \notin \overline{R}_{\mathcal{C}}$, поскольку $\overline{R}_{\mathcal{C}} \subset B'$, а ветвь B' не содержит своего источника s'. Следовательно, $s' = s$. Однако в силу леммы 5.12(2) это противоречит предположению о том, что $B' \subsetneq B_*$. Полученное противоречие доказывает, что B_* является минимальной верхней гранью цепи $\mathcal{C}$. Итак, мы показали, что каждая цепь ветвей имеет минимальную верхнюю грань.

• (iv) $\Rightarrow$ (iii) :

Предположим, что в преддереве $\mathcal{T}$ у каждой цепи ветвей имеется минимальная верхняя грань. Покажем, что каждая направленная дуга $(J, <)$ в $\mathcal{T}$ имеет супремум. В случае, когда у дуги $(J, <)$ имеется наибольший элемент, он, очевидно, является ее супремумом. Рассмотрим случай, когда у $(J, <)$ нет наибольшего элемента. Условимся обозначать через J_z нижний[24] класс $\{t \in J : t < z\}$ дуги $(J, <)$, отвечающий точке $z \in J$. Из определения направлений следует, что, поскольку J — дуга, множество J_z выпукло (и линейно) в $\mathcal{T}$, какова бы ни была точка $z \in J$. Если точка $z \in J$ не является наименьшим элементом в $(J, <)$, то множество J_z непусто (и является, таким образом, дугой). Как следует из леммы 5.10, если точка $z \in J$ не является наименьшим элементом в $(J, <)$, то в разбиении ζ_z найдется единственная ветвь $D_z := D_z(J, <)$, содержащая дугу J_z.

Обозначим через $\mathcal{C}_J := \mathcal{C}(J, <)$ множество всех ветвей вышеописанного вида D_z (где точка $z \in J$ не является наименьшим элементом в $(J, <)$). Пусть D_x и D_y — две произвольные ветви из $\mathcal{C}_J$ с $x < y \in J$. Возьмем произвольную точку $w \in J_x \subset D_x$. Тогда, поскольку $w < x < y$, выполняется включение $x \in \langle w, y]$. Кроме того, и D_x, и D_y содержат w, поскольку $D_x \supset J_x \ni w$ и $D_y \supset J_y \ni w$. Отсюда по лемме 5.13 следует, что $D_x \subsetneq D_y$. Мы доказали,

[24] Определение нижнего класса дано в сноске 12.

таким образом, что $\mathcal{C}_J$ является цепью и что при $D_x, D_y \in \mathcal{C}_J$ и $x < y$ имеет место включение $D_x \subsetneq D_y$.

Поскольку предполагается, что у каждой цепи ветвей в $\mathcal{T}$ имеется минимальная верхняя грань, найдется ветвь B_m, являющаяся минимальной верхней гранью для цепи $\mathcal{C}_J$. Докажем, что источник m ветви B_m является супремумом для $(J, <)$. Для этого достаточно показать, что множество $J \cup \{m\}$ является дугой, а точка m максимальна по отношению к направлению $<'$ на этой дуге, индуцированному направлением $<$ на J. (Действительно, продемонстрировав, что $(J \cup \{m\}, <')$ — направленная дуга с наибольшим элементом m, мы тем самым докажем, что для каждой точки $x \in J$ выполняется равенство

$$\{t \in J : x \leqslant t\} = \{t \in (J \cup \{m\}) : x \leqslant' t <' m\} = [x, m\rangle,$$

которое и означает, что точка m является супремумом для $(J, <)$.)

Отметим, что, поскольку мы рассматриваем случай, когда порядок $(J, <)$ не имеет наибольшего элемента, точка m не лежит в J. (Действительно, если бы m лежала в J, то в силу отсутствия в $(J, <)$ наибольшего элемента нашлась бы точка $p \in J$ такая, что $m < p$. Это дало бы включение $m \in J_p \subset D_p \subset B_m$, которое невозможно, поскольку ветвь не может содержать свой источник.)

Покажем, что множество $J \cup \{m\}$ линейно. Поскольку J линейно, для проверки линейности множества $J \cup \{m\}$ достаточно удостовериться в том, что для произвольных $x < y \in J$ выполняется включение $y \in [x, m]$. Условие $x < y$ дает включение $x \in D_y$. Заметим, кроме того, что $m \notin D_y$ (потому что $D_y \subset B_m$ и $m \notin B_m$). Отсюда в силу (13) следует, что $y \in [x, m]$. Таким образом, линейность множества $J \cup \{m\}$ доказана.

Остается удостовериться, что $J \cup \{m\}$ выпукло. Допустим, что $J \cup \{m\}$ не выпукло, а его выпуклую оболочку обозначим через K. По лемме 3.2 оболочка K является дугой. Обозначим через $<'$ и $<''$ направления на (линейном множестве) $J \cup \{m\}$ и дуге K, соответственно, индуцированные направлением $<$ дуги J. Из определения направлений прямо следует, что подмножество направленной дуги выпукло в преддереве если и только если оно порядково выпукло по отношению к направлению. Отсюда вытекает, в частности, тот факт, что выпуклая оболочка подмножества направленной дуги совпадает с порядковой выпуклой оболочкой этого множества (по отношению к направлению). Таким образом, множества J и $\{m\}$ порядково выпуклы в $(K, <'')$, а порядковая выпуклая оболочка множества $J \cup \{m\}$ в порядке $(K, <'')$ совпадает со всем множеством K. Это, очевидно, означает, что одно из множеств J и $\{m\}$ является нижним, а другое — верхним классами линейного порядка $(K, <'')$. Вышеприведенное доказательство линейности множества $J \cup \{m\}$ ясно свидетельствует о том, что точка m является наибольшим элементом порядка $(J \cup \{m\}, <')$, а значит, и порядка $(K, <'')$. Следовательно, множество $\{m\}$ является верхним, а множество J — нижним классом в $(K, <'')$. Это, очевидно, означает, что для любых точек $x \in J$ и $p \in K \setminus (J \cup \{m\})$ выполняется соотношение $x <'' p <'' m$. (Множество $K \setminus (J \cup \{m\})$ непусто, поскольку мы полагаем, что K есть выпуклая оболочка невыпуклого множества $J \cup \{m\}$.)

Зададим теперь набор ветвей $\mathcal{C}_K := \mathcal{C}(K, <'')$ по направленной дуге $(K, <'')$ в точности тем же способом, каким набор $\mathcal{C}_J$ построен по $(J, <)$. (Обозначим через K_z множество $\{t \in K : t <'' z\}$ для точки $z \in K$. Тогда для каждой неминимальной в $(K, <'')$ точки $z \in K$ существует единственная ветвь $D''_z := D''_z(K, <'')$ с источником z, содержащая множество K_z. Множество $\mathcal{C}_K$ определим как множество всех ветвей вида D''_z, где точка $z \in K$ не является наименьшим элементом в $(K, <'')$.) Дословно воспроизведя в применении к $\mathcal{C}_K$ вышеприведенное доказательство того, что $\mathcal{C}_J$ является цепью, получаем, что $\mathcal{C}_K$ является цепью и что при $D''_x, D''_y \in \mathcal{C}_K$ и $x <'' y$ выполняется условие $D''_x \subsetneq D''_y$. Заметим, что для каждой неминимальной в $<''$ точки $z \in J \subset K$ выполняется равенство $D''_z = D_z$ (потому что ветви D''_z и D_z имеют один и тот же источник z и обе содержат множество J_z) и что $B_m = D''_m$ (поскольку существует единственная ветвь с источником m, содержащая J). Далее, поскольку, как доказано выше, для произвольных точек $x \in J$ и $p \in K \setminus (J \cup \{m\})$ выполняется соотношение $x <'' p <'' m$, и поскольку при $D''_x, D''_y \in \mathcal{C}_K$ и $x <'' y$ имеем $D''_x \subsetneq D''_y$, то для каждой неминимальной точки $x \in J$ мы имеем

$$D_x \ = \ D''_x \ \subsetneq \ D''_p \ \subsetneq \ D''_m \ = \ B_m,$$

а это означает, что ветвь D''_p является верхней гранью для цепи $\mathcal{C}_J$ и что верхняя грань B_m неминимальна. Мы пришли к противоречию. Следовательно, множество $J \cup \{m\}$ выпукло. Итак, точка m является супремумом для $(J, <)$.

• (iv) $\Rightarrow$ (v) :

Пусть в преддереве $\mathcal{T}$ всякая цепь ветвей имеет минимальную верхнюю грань. Покажем, что топология теней на $\mathcal{T}$ компактна. Напомним, что множество ветвей $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ образует *предбазу* этой топологии. По лемме Александера, топологическое пространство с предбазой $\mathcal{P}$ компактно тогда и только тогда, когда каждое покрытие, составленное из элементов предбазы $\mathcal{P}$, обладает конечным подпокрытием. Таким образом, для доказательства компактности топологии теней на $\mathcal{T}$ достаточно показать, что в $\mathcal{T}$ всякое покрытие ветвями обладает конечным подпокрытием. Предположим противное: пусть в множестве ветвей найдется набор $\mathcal{E}$, покрывающий $\mathcal{T}$ и не обладающий конечным подпокрытием. Мы покажем, что при таком предположении набор $\mathcal{E}$ обладает следующими двумя взаимоисключающими свойствами:

P1. Для каждой ветви $B \in \mathcal{E}$ найдется ветвь $B' \in \mathcal{E}$ такая, что $B \subsetneq B'$.

P2. У всякой цепи ветвей из $\mathcal{E}$ найдется верхняя грань в $\mathcal{E}$.

Свойство P1 вытекает из леммы 5.12. Действительно, пусть $B \in \mathcal{E}$ и пусть точка $b \in \mathcal{T}$ является источником ветви B. Тогда $b \notin B$ по определению. Поскольку $\mathcal{E}$ покрывает $\mathcal{T}$, найдется ветвь $B' \in \mathcal{E}$, содержащая b. Тогда из леммы 5.12 следует, что выполняется либо включение $B' \supsetneq B$ (если B не содержит источника ветви B'), либо условие $B' \cup B = \mathcal{T}$ (в противном случае). Предположение об отсутствии у $\mathcal{E}$ конечного подпокрытия исключает вариант $B' \cup B = \mathcal{T}$. Значит, $B' \supsetneq B$, что и требовалось.

Докажем свойство P2. Пусть $\mathcal{C}$ — цепь в покрытии $\mathcal{E}$. По условию для цепи $\mathcal{C}$ найдется минимальная верхняя грань $B_m \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$. Пусть m — источник ветви B_m. Поскольку $\mathcal{E}$ покрывает $\mathcal{T}$, найдется ветвь $B_r \in \mathcal{E}$, с некоторым источником r, содержащая m. Покажем, что ветвь B_r является верхней гранью для $\mathcal{C}$.

Для этого докажем сначала, что объединение $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$ не содержит источника r ветви B_r. Действительно, предположив, напротив, что $r \in D$ для некоторой ветви $D \in \mathcal{C}$, в силу леммы 5.12 получаем, что либо $D \supset B_r$, либо $D \cup B_r = \mathcal{T}$. Предположение об отсутствии у $\mathcal{E}$ конечного подпокрытия исключает вариант $D \cup B_r = \mathcal{T}$. Вариант $D \supset B_r$ также невозможен, так как B_r по построению содержит точку m, которая не лежит в D (поскольку D, как элемент цепи $\mathcal{C}$, содержится в верхней грани B_m и, следовательно, не может содержать ее источника m). Итак, $r \notin \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$. Отсюда в силу леммы 5.10 следует существование ветви $B'_r \in \zeta_r$, содержащей (выпуклое) множество $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$ (которое выпукло как объединение выпуклых множеств, образующих цепь). Покажем, что $B'_r = B_r$. Для этого предположим, что, напротив, $B'_r \neq B_r$. Тогда $B'_r \cap B_r = \varnothing$, поскольку ветви B'_r и B_r являются элементами одного и того же разбиения ζ_r. Так как $m \in B_r$ (по построению), по лемме 5.12 выполняется одно из условий $B_m \supset B_r$ или $B_m \cup B_r = \mathcal{T}$. Из условий $B_m \supset \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$, $B'_r \supset \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$ и $B'_r \cap B_r = \varnothing$ вытекает, что $B_m \not\supset B_r$. Следовательно, $B_m \cup B_r = \mathcal{T}$. Из условий $B_m \cup B_r = \mathcal{T}$ и $B'_r \cap B_r = \varnothing$ вытекает, что $B'_r \subset B_m$. Более того, мы имеем $B'_r \subsetneq B_m$ (поскольку из условий $B_m \cup B_r = \mathcal{T}$ и $r \notin B'_r$ следует, что $r \in (B_m \setminus B'_r)$). Таким образом, $B_m \supsetneq B'_r \supset \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$, что входит в противоречие с предположением о минимальности верхней грани B_m. Значит, $B_r = B'_r \supset \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$. Итак, ветвь $B_r \in \mathcal{E}$ является верхней гранью цепи $\mathcal{C}$. Свойство P2 для покрытия $\mathcal{E}$ доказано.

Теперь заметим, что по лемме Куратовского–Цорна из свойства P2 вытекает существование в $\mathcal{E}$ максимального элемента, в то время как свойство P1 указывает на отсутствие таковых. Полученное противоречие доказывает, что $\mathcal{T}$ компактно.

• (v) $\Rightarrow$ (iv) :

Предположим, что в множестве ветвей преддерева $\mathcal{T}$ найдется цепь $\mathcal{C}$, не имеющая минимальной верхней грани, и покажем, что в этом случае топология теней на $\mathcal{T}$ не компактна. Пусть $\mathcal{D}$ — множество всех тех ветвей в $\mathcal{T}$, которые не пересекаются с объединением $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$. Покажем, что набор $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$ является покрытием преддерева $\mathcal{T}$. Для этого предположим, напротив, что найдется точка $x \in \mathcal{T}$, не накрываемая ветвями из $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$, и рассмотрим разбиение ζ_x. Поскольку множество $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$ выпукло (что очевидно следует из выпуклости ветвей; см. лемму 5.10(2)), из предположения о том, что $x \notin \bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$, по лемме 5.10(5) получаем, что в разбиении ζ_x имеется ветвь B_x, содержащая множество $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$. Поскольку цепь $\mathcal{C}$ не имеет минимальной верхней грани, верхняя грань B_x не минимальна. Это означает, что найдется ветвь B_y (с источником y) такая, что $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B \subset B_y \subsetneq B_x$. Отметим, что $y \neq x$ (поскольку $B_y \subsetneq B_x$). Заметим также, что ветви $\zeta_y(x)$ и B_y представляют собой различные элементы разбиения ζ_y (так как $x \notin B_y$ в силу условий $x \notin B_x$ и $B_y \subsetneq B_x$), так что $\zeta_y(x) \cap B_y = \varnothing$. Из условий $\zeta_y(x) \cap B_y = \varnothing$ и $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B \subset B_y$ вытекает, что $\zeta_y(x) \cap \left(\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B\right) = \varnothing$. Таким образом, $\zeta_y(x) \in \mathcal{D}$, т.е. точка x содержится в ветви из $\mathcal{D}$. Полученное таким образом противоречие доказывает, что $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$ является покрытием для $\mathcal{T}$.

Как нетрудно видеть, в покрытии $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$ нет конечного подпокрытия. Действительно, по построению, ветви из $\mathcal{D}$ не пересекают множества $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$, в то время как ни одно из конечных подмножеств цепи $\mathcal{C}$ не покрывает всего множества $\bigcup_{B\in\mathcal{C}} B$ (это следует из того, что $\mathcal{C}$ не имеет минимальной верхней грани, а следовательно, и максимального элемента). Итак, множество $\mathcal{D} \cup \mathcal{C}$ является открытым покрытием, не имеющим конечных подпокрытий, а это означает, что преддерево $\mathcal{T}$ в топологии теней не компактно. Теорема доказана. $\square$

9 Секвенциальная компактность

В этом параграфе доказывается теорема об эквивалентности счетной и секвенциальной компактности для топологии теней на преддеревьях.

Напомним, что топологическое пространство называется *счетно компактным*, если в любом его счетном открытом покрытии (т. е. покрытии открытыми множествами) найдется конечное подпокрытие. Топологическое пространство называется *секвенциально компактным*, если в любой бесконечной последовательности точек этого пространства найдется сходящаяся подпоследовательность. Всякое секвенциально компактное пространство счетно компактно (см., например, [27]). Метрическое пространство секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно компактно. Существуют компактные и не секвенциально компактные, а также секвенциально компактные, но не компактные пространства. Существуют преддеревья, топология теней на которых секвенциально компактна, но не компактна. (Пример: множество всех счетных ординалов с обычной порядковой топологией.) Как показывает следующая теорема, всякое преддерево, компактное в топологии теней, секвенциально компактно.

9.1. Теорема. *Преддерево с топологией теней секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно счетно компактно.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

9.2. Лемма. *Пусть a и b — точки преддерева $\mathcal{T}$. Условимся для точки $x \in \mathcal{T}$ обозначать через Q_x пересечение $[a,b] \cap [a,x]$. Тогда*:

1. *Если $x, y \in \mathcal{T}$, то одно из множеств Q_x, Q_y содержит другое.*

2. *В любом конечном подмножестве $S \subset \mathcal{T}$ найдется точка $s' \in S$ такая, что $Q_{s'} = \bigcap_{s\in S} Q_s$.*

Proof. Обозначим через $<$ то направление на интервале $[a,b]$, в котором a является наименьшим элементом (см. лемму 3.3(4)). Тогда по лемме 3.3(5) для каждой точки $x \in \mathcal{T}$ множество Q_x является нижним классом в порядке $([a,b],<)$. Это делает утверждения леммы очевидными, поскольку множество нижних классов любого линейно упорядоченного множества линейно упорядочено по включению. $\square$

9.3. Замечание. Из леммы 9.2 очевидным образом следует, что для любых точки $t \in \mathcal{T}$ и конечного подмножества $S \subset \mathcal{T}$ найдутся такие элементы $s_1, s_2 \in S$, что $\bigcap_{s \in S}[t,s] = [t,s_1] \cap [t,s_2]$; более того, для любого элемента $s_1 \in S$ найдется элемент $s_2 \in S$ такой, что $\bigcap_{s \in S}[t,s] = [t,s_1] \cap [t,s_2]$ (положим $a := t$ и $b := s_1$).

Доказательство теоремы 9.1. Поскольку всякое секвенциально компактное пространство счетно компактно, требуется показать лишь, что счетно компактное преддерево секвенциально компактно (в рамках настоящего доказательства под преддеревом имеется в виду преддерево с топологией теней). Пусть $\mathcal{T}$ — произвольное счетно компактное преддерево и $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — произвольная последовательность его точек. Воспользуемся тем, что топологическое пространство счетно компактно тогда и только тогда, когда каждая последовательность в нем обладает точкой накопления (см., например, [27]). Таким образом, у последовательности $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ есть точка накопления в $\mathcal{T}$ (скажем, точка x). Покажем, что в последовательности $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ имеется подпоследовательность, сходящаяся к x (в топологии теней).

Ясно, что достаточно ограничиться рассмотрением случая последовательности, в которой $x_i \neq x$ для всех $i \in \mathbb{N}$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Воспользуемся описанным в замечании 5.4 и обозначенным через R'_x отношением эквивалентности на множестве $\mathcal{T} \setminus \{x\}$, в котором $yR'_x z$ тогда и только тогда, когда $[x,y] \cap [x,z] \neq \{x\}$. Пусть $\alpha \in \{1, 2, \ldots, \infty\}$ — число классов эквивалентности отношения R'_x, содержащих точки из последовательности $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Если $\alpha = \infty$, то в $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ найдется бесконечная подпоследовательность $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$, состоящая из попарно неэквивалентных (в R'_x) элементов. Это означает, что $[x,p_i] \cap [x,p_j] = \{x\}$ для всех $i \neq j \in \mathbb{N}$, так что последовательность $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ сходится к x по лемме 6.4.

Если же α конечно, рассмотрим набор $Y_1, \ldots, Y_\alpha$ всех тех классов R'_x-эквивалентности, в которых содержатся точки последовательности $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Покажем, что для некоторого класса $Y_* \in \{Y_1, \ldots, Y_\alpha\}$ выполняется условие $\bigcap_{i \in N_*}\langle x, x_i] = \varnothing$, где через N_* обозначено множество $\{i : x_i \in Y_*\}$. Действительно, если бы пересечение $\bigcap_{i \in N_k}\langle x, x_i]$, где $N_k := \{i : x_i \in Y_k\}$, было непусто для всех $k \in \{1, \ldots, \alpha\}$, то, взяв для каждого $k \in \{1, \ldots, \alpha\}$ точку $z_k \in \bigcap_{i \in N_k}\langle x, x_i]$, мы получили бы, что пересечение $\bigcap_{k \in \{1, \ldots, \alpha\}} \zeta_{z_k}(x)$ ветвей $\zeta_{z_k}(x)$ является открытой окрестностью точки x, не содержащей точек из $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, что невозможно, поскольку x является точкой накопления для $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Заметим, что для каждого конечного множества $S \subset \mathcal{T} \setminus \{x\}$, состоящего из R'_x-эквивалентных точек, пересечение $\bigcap_{s \in S}\langle x, s]$ непусто. (Это следует из леммы 9.2(2), поскольку для любой пары s_1, s_2 R'_x-эквивалентных точек пересечение $\langle x, s_1] \cap \langle x, s_2]$ непусто по определению отношения R'_x.) Следовательно, поскольку у класса Y_* пересечение $\bigcap_{i \in N_*}\langle x, x_i]$ пусто, этот класс содержит бесконечно много точек из $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Пусть $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ — бесконечная подпоследовательность в $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$, состоящая из всех тех точек, которые лежат в Y_*. (При этом $\bigcap_{j \in \mathbb{N}}\langle x, t_j] = \bigcap_{i \in N_*}\langle x, x_i] = \varnothing$.) Мы покажем, что в $(t_j)_{j \in \mathbb{N}}$ имеется подпоследовательность, сходящаяся к x.

Для каждого $j \in \mathbb{N}$ положим

$$P_j := \bigcap_{i \leqslant j} \langle x, t_i] \quad \text{и} \quad I_j := \langle x, t_1] \cap \langle x, t_j].$$

Заметим, что (для каждого $j \in \mathbb{N}$) выполняются следующие свойства:

$$P_j \supset P_{j+1}, \tag{22}$$

$$P_j \neq \varnothing, \tag{23}$$

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} P_i = \varnothing, \tag{24}$$

$$\bigcap_{i \leqslant j} I_i = P_j, \tag{25}$$

$$(P_{j+1} \neq P_j) \Rightarrow (P_{j+1} = I_{j+1}). \tag{26}$$

Свойства (22) и (25) очевидны, свойство (23) вытекает из леммы 9.2(2) в силу вышеупомянутого рассуждения, потому что $\{t_1, \ldots, t_j\}$ есть конечное множество R'_x-эквивалентных точек. Свойство (24) доказывает цепочка равенств

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} P_i = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \langle x, t_j] = \bigcap_{i \in N_*} \langle x, x_i] = \varnothing.$$

Докажем справедливость свойства (26). В силу свойства (25) неравенство $P_{j+1} \neq P_j$ эквивалентно неравенству

$$\bigcap_{i \leqslant j+1} I_i \neq \bigcap_{i \leqslant j} I_i. \tag{27}$$

Из леммы 9.2 следует, что семейство всех множеств вида $Q_p := \langle x, t_1] \cap \langle x, p]$ линейно упорядочено по включению. В частности, пересечения $\bigcap_{i \leqslant j+1} I_i$ и $\bigcap_{i \leqslant j} I_i$ равны наименьшему I_i в множествах $\{I_i\}_{i \leqslant j+1}$ и $\{I_i\}_{i \leqslant j}$. Следовательно, условие (27) означает, что множество I_{j+1} является наименьшим (по включению) в $\{I_i\}_{i \leqslant j+1}$, так что $\bigcap_{i \leqslant j+1} I_i = I_{j+1}$ и $P_{j+1} = I_{j+1}$.

Положим $M := \{1\} \cup \{j \in \mathbb{N} \setminus \{1\} : P_j \neq P_{j-1}\}$. Из свойств (22)–(24) очевидно следует, что множество M бесконечно. Покажем, что последовательность $(t_j)_{j \in M}$ сходится к x. Допустим, что $(t_j)_{j \in M}$ не сходится к x. Тогда в силу леммы 6.4 найдется точка $z \in \mathcal{T} \setminus \{x\}$, содержащаяся в бесконечном числе интервалов из семейства $\{\langle x, t_j] : j \in M\}$. Отсюда вытекает, в частности, что $z \in Y_*$ (так как из определения R'_x-эквивалентности ясно следует, что для всякого $t \in Y_*$ интервал $\langle x, t]$ целиком лежит в Y_*). Значит, множество $I_z := \langle x, t_1] \cap \langle x, z]$ непусто и содержится в бесконечном числе интервалов из множества $\{\langle x, t_1] \cap \langle x, t_j]\}_{j \in M}$. Из свойства (26) по определению множества M очевидно следует, что для каждого $j \in M$ выполняется равенство $\langle x, t_1] \cap \langle x, t_j] = P_j$. Таким образом, множество I_z содержится в бесконечном количестве множеств P_j, откуда в силу свойства (22) следует, что I_z содержится во всех множествах P_j, что противоречит свойству (24). Это доказывает, что $(t_j)_{j\in M}$ сходится к x. Остается вспомнить, что $(t_j)_{j\in M}$ является подпоследовательностью в $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Теорема доказана. $\square$

10 Метризуемость

В этом параграфе доказывается ряд утверждений о метризуемости топологии теней на преддереве.

10.1. Определения. Будем говорить, что подмножество S преддерева $\mathcal{T}$ *квазиплотно* в $\mathcal{T}$, если для каждой пары $a \neq b \in \mathcal{T}$ в интервале $[a, b\rangle$ содержится точка из S. Преддерево, содержащее конечное или счетное квазиплотное подмножество, будем называть *квазисепарабельным.*

Преддерево, не имеющее ни бесконечных звезд, ни направленных дуг, обладающих двумя и более супремумами (см. п.(i) в теореме 7.3), будем называть *квазихаусдорфовым.* В силу теоремы 7.3, преддерево квазихаусдорфово в том и только том случае, когда топология теней на нем хаусдорфова. Всякое регулярное (в частности, медианное) преддерево, таким образом, квазихаусдорфово.

Ограниченное слабо полное преддерево будем называть *квазикомпактным* (в силу теоремы 8.2, преддерево квазикомпактно в том и только том случае, когда топология теней на нем компактна).

10.2. Теорема. (1) *Преддерево квазисепарабельно тогда и только тогда, когда топология теней на нем удовлетворяет второй аксиоме счетности.* (2) *Топология теней на квазихаусдорфовом квазисепарабельном преддереве метризуема.* (3) *Топология теней на квазикомпактном квазихаусдорфовом преддереве метризуема тогда и только тогда, когда преддерево квазисепарабельно.*

10.3. Замечание. Метрика на преддереве может быть совместима с топологией теней, но несовместима со структурой преддерева (в смысле определения 4.17), и наоборот. В теореме 10.2 идет речь о метризуемости топологии теней и не затрагивается вопрос о совместимости метрики со структурой преддерева. Вообще говоря, можно показать, что на каждом квазихаусдорфовом квазисепарабельном преддереве имеется метрика, совместимая и со структурой преддерева, и с топологией теней.

Для доказательства теоремы 10.2 нам потребуется следующая лемма.

10.4. Лемма. *Подмножество S преддерева $\mathcal{T}$ квазиплотно тогда и только тогда, когда семейство ветвей $\mathcal{B}_S := \{\zeta_a(b) : a \neq b \in S\}$ образует предбазу топологии теней.*

Proof. Пусть S — квазиплотное подмножество в $\mathcal{T}$. Поскольку множество $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ всех ветвей в $\mathcal{T}$ по определению является предбазой топологии теней и

$\mathcal{B}_S \subset \mathcal{B}(\mathcal{T})$, то для того, чтобы доказать, что $\mathcal{B}_S$ — предбаза топологии теней, достаточно показать, что каждая ветвь в $\mathcal{T}$ является объединением ветвей из $\mathcal{B}_S$. Иными словами, достаточно проверить, что для любой ветви $B \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$ и любой ее точки $x \in B$ найдется ветвь $D \in \mathcal{B}_S$ такая, что $x \in D \subset B$. Зафиксируем $B \in \mathcal{B}(\mathcal{T})$ и $x \in B$. Пусть r — источник ветви B (так что $B = \zeta_r(x)$). Поскольку множество S квазиплотно, найдутся точки $a, b \in S$ такие, что $a \in [r, x\rangle$ и $b \in [x, a\rangle$. Положим $D := \zeta_a(b)$ и покажем, что $x \in D \subset B$. Включение $x \in D = \zeta_a(b)$, которое по определению ветви равносильно соотношению $a \notin [x, b]$, следует в силу аксиомы (A2) из условия $b \in [x, a\rangle$. Чтобы показать, что $\zeta_a(b) = D \subset B = \zeta_r(x)$, достаточно проверить, что для всех точек $t \in \mathcal{T}$ таких, что $r \in [x, t]$, выполняется условие $a \in [b, t]$. Обозначим через $<$ то направление на интервале $[x, t]$, в котором x является наименьшим элементом (см. лемму 3.3(4)). Из условий $r \in [x, t]$, $a \in [r, x\rangle$ и $b \in [x, a\rangle$ в силу свойства (A4) следует, что $a, b \in [x, t]$. Из тех же условий в силу определения направленных линейных множеств получаем, что

$$x \leqslant b < a \leqslant r \leqslant t,$$

т. е. $a \in [b, t]$. Итак, мы показали, что $\mathcal{B}_S$ — предбаза топологии теней.

Пусть S — такое подмножества преддерева $\mathcal{T}$, что множество $\mathcal{B}_S$ является предбазой для топологии теней. Тогда, поскольку преддерево $\mathcal{T}$ с этой топологией является T_1-пространством (теорема 7.2), для каждой пары x, y различных точек из $\mathcal{T}$ найдется ветвь $B \in \mathcal{B}_S$ такая, что $x \notin B$ и $y \in B$. Пусть $r \in S$ — источник ветви B. Условия $x \notin B$ и $y \in B$ по определению ветвей означают, что $r \in [x, y]$ и $r \neq x$ (поскольку $r \notin B$ по определению). Таким образом, $r \in [y, x\rangle$. Это доказывает, что S квазиплотно в $\mathcal{T}$. $\square$

Доказательство теоремы 10.2. (1) Из леммы 10.4 вытекает, что топология теней всякого квазисепарабельного преддерева обладает счетной предбазой и, следовательно, удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Обратно, пусть топология теней на преддереве $\mathcal{T}$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. Воспользуемся тем, что *в топологическом пространстве, удовлетворяющем второй аксиоме счетности, любая предбаза содержит конечный или счетный поднабор, также являющийся предбазой*[25]. Отсюда следует (поскольку ветви по определению образуют предбазу топологии теней), что в множестве ветвей найдется конечный или счетный набор $\mathcal{D}$, являющийся предбазой для топологии теней в $\mathcal{T}$. Обозначим через S_1 множество, образованное источниками ветвей из $\mathcal{D}$. Множество S_1 конечно или счетно, поскольку

[25] Предположим, что A — предбаза некоторого топологического пространства X, удовлетворяющего второй аксиоме счетности. Тогда (как следует из определений) множество B, состоящее из пересечений конечных наборов элементов из A, является базой пространства X. Поскольку X удовлетворяет второй аксиоме счетности, база B содержит некоторую счетную базу $B' \subset B$ (см., например, [2, гл. I, §1, теорема 2] или [31, задача 16(15).10].) Элементы предбазы A, участвующие в образовании множеств предбазы B', очевидно, образуют искомую счетную предбазу $A' \subset A$.

каждая ветвь имеет лишь один источник (лемма 5.10). Пусть S_2 — произвольное не более чем счетное подмножество в $\mathcal{T}$, пересекающееся с каждой ветвью из $\mathcal{D}$. Тогда множество $S := S_1 \cup S_2$ конечно или счетно, а множество $\mathcal{B}_S = \{\zeta_a(b) : a \neq b \in S\}$ содержит $\mathcal{D}$ и тем самым является предбазой топологии теней. Отсюда по лемме 10.4 следует, что S квазиплотно в $\mathcal{T}$, что по определению означает квазисепарабельность топологии теней на $\mathcal{T}$.

(2) В силу утверждения (1), топология теней всякого квазисепарабельного преддерева удовлетворяет второй аксиоме счетности. Топология теней на квазихаусдорфовом преддереве регулярна и хаусдорфова по теореме 7.3. Остается вспомнить метризационную теорему Тихонова–Урысона: *всякое регулярное хаусдорфово топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо.*

(3) Пусть $\mathcal{T}$ — квазикомпактное квазихаусдорфово преддерево. Тогда топология теней на $\mathcal{T}$ хаусдорфова и компактна в силу теорем 7.3 и 8.2. Напомним, что *компактное хаусдорфово пространство метризуемо тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет второй аксиоме счетности* (см., например, [2, гл. V, §2, теорема 4]). Таким образом, топология теней на $\mathcal{T}$ метризуема тогда и только тогда, когда удовлетворяет второй аксиоме счетности, а из утверждения (1) мы знаем, что последнее условие равносильно квазисепарабельности. $\square$

11 Пространство концов

В настоящем параграфе дается определение концов преддерева и описывается продолжение структуры преддерева на множество его концов. Отметим, что имеется несколько подходов к определению концов (пред)деревьев. Мы отталкиваемся от классического определения концов через классы конфинальных лучей. Эквивалентное определение можно получить, к примеру, через введенное в [4] понятие *потоков* — определив концы как потоки определенного типа.

11.1. Определение. Пусть $\mathcal{T}$ — преддерево. Напомним, что *лучом* в преддереве называется неограниченная дуга, имеющая экстремальную точку (определение 3.7). Определим на множестве лучей в $\mathcal{T}$ бинарное отношение E, полагая $(R, R') \in E$ для лучей R и R', если пересечение $R \cap R'$ является полупрямой. Отношение E является отношением эквивалентности (рефлексивность и симметричность очевидны, транзитивность следует из леммы 3.8(10)). *Концами* преддерева $\mathcal{T}$ называются классы эквивалентности отношения E. Множество всех концов преддерева $\mathcal{T}$ обозначим через $\mathrm{Ends}(\mathcal{T})$.

11.2. Определение. Пусть $\mathcal{T}$ — преддерево, $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}^3$ — его тернарная структура, $\mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ — пространство его концов. Определим на множестве $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ тернарную структуру $\widehat{\mathcal{S}}$ следующим образом:

R1. Если $x, y, z \in \mathcal{T}$, то $\widehat{\mathcal{S}}xyz \Leftrightarrow \mathcal{S}xyz$.

R2. Если $x, y \in \mathcal{T}$ и $\omega \in \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$, то

$\widehat{\mathcal{S}}xy\omega \Leftrightarrow \widehat{\mathcal{S}}\omega yx \Leftrightarrow$ найдется луч $R \in \omega$ такой, что $\mathcal{S}xyr$ для всех $r \in R$.

R3. Если $x \in \mathcal{T}$ и $\omega, \tau \in \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$, то

$\widehat{\mathcal{S}}\omega x\tau \Leftrightarrow$ найдутся лучи $R \in \omega$ и $Q \in \tau$ такие, что $\mathcal{S}rxq$ для всех $r \in R$ и $q \in Q$.

R4. Если $\omega \in \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ и $x, y \in \mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$, то $(x, \omega, y) \notin \widehat{\mathcal{S}}$.

11.3. Теорема. *Множество $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ с вышеописанной структурой $\widehat{\mathcal{S}}$ является преддеревом.*

Proof. Выполнимость аксиом (T0), (T1) и (T2) для отношения $\widehat{\mathcal{S}}$ легко следует из выполнимости этих аксиом для отношения $\mathcal{S}$ в силу определения отношения $\widehat{\mathcal{S}}$ и того факта, что лучи, представляющие один и тот же конец, имеют непустое пересечение (это касается аксиом (T0) и (T2) в случае R3).

Для проверки выполнимости аксиомы (T3) воспользуемся описанной в §5 системой понятий, связанной с ветвями и узловыми разбиениями преддеревьев. Пусть $x, y, z, w \in \mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ таковы, что $\widehat{\mathcal{S}}xyz$ и $y \neq w$. Из условия $\widehat{\mathcal{S}}xyz$ в силу определения отношения $\widehat{\mathcal{S}}$ следует, что $y \in \mathcal{T}$. Напомним, что элемент разбиения ζ_y, содержащий точку $t \in \mathcal{T}$, обозначается через $\zeta_y(t)$.

Если $\omega \in \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$, будем обозначать через $\zeta_y(\omega)$ ту ветвь разбиения ζ_y, в которой имеются лучи, представляющие ω. (Существование ветви $\zeta_y(\omega)$ следует из леммы 3.8(6), в силу которой всякий луч R, представляющий ω, содержит в качестве подмножества луч R', также представляющий ω и не содержащий точку y, и леммы 5.10(5), в силу которой луч R', будучи выпуклым множеством, содержится в некоторой ветви разбиения ζ_y. Единственность следует из того, что различные ветви разбиения не пересекаются, в то время как любые два луча, представляющие один и тот же конец преддерева, по определению пересекаются.)

Из определений отношения $\widehat{\mathcal{S}}$ и разбиения ζ_y прямо следует, что при $p, q \in \mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T}) \setminus \{y\}$ условия $\widehat{\mathcal{S}}pyq$ и $\zeta_y(p) \neq \zeta_y(q)$ эквивалентны. Из предположения о том, что $\widehat{\mathcal{S}}xyz$ и $y \neq w$, следует, что $\{x, z, w\} \not\ni y$ и $\zeta_y(x) \neq \zeta_y(z)$. Значит, либо $\zeta_y(w) \neq \zeta_y(x)$ и $\widehat{\mathcal{S}}xyw$, либо $\zeta_y(w) \neq \zeta_y(z)$ и $\widehat{\mathcal{S}}wyz$. Таким образом, (T3) для $\widehat{\mathcal{S}}$ выполняется. $\square$

11.4. Определение. В дальнейшем, если задано преддерево $\mathcal{T}$, мы рассматриваем на множестве $\widehat{\mathcal{T}} := \mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ структуру преддерева, описанную в разделе 11.2.

Для интервалов преддерева $\widehat{\mathcal{T}}$ будем использовать обозначения из раздела 1.12. Путаницы между интервалами преддеревьев $\mathcal{T}$ и $\widehat{\mathcal{T}}$ не возникает, поскольку в силу определения преддерева $\widehat{\mathcal{T}}$ его система интервалов содержит систему интервалов преддерева $\mathcal{T}$. В случаях, когда на уровне обозначений различение интервалов у преддеревьев $\mathcal{T}$ и $\widehat{\mathcal{T}}$ уместно, интервалы снабжены соответствующими индексами: например, $[a,b]_{\mathcal{T}}$ и $[x,y\rangle_{\widehat{\mathcal{T}}}$ (при этом при $a,b \in \mathcal{T}$ всегда $[a,b]_{\mathcal{T}} = [a,b]_{\widehat{\mathcal{T}}}$).

11.5. Лемма. 1. *Пусть p — точка в преддереве $\mathcal{T}$ и пусть $\omega \in \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$. Тогда в $\mathcal{T}$ существует единственный луч, исходящий из p и представляющий ω. Этот луч совпадает с интервалом $[p,\omega\rangle$ преддерева $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$.*

2. *Если концы ω и τ преддерева $\mathcal{T}$ различны, то в $\mathcal{T}$ существует единственная прямая, содержащая лучи из ω и τ. Эта прямая совпадает с интервалом $\langle\omega,\tau\rangle$ преддерева $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$.*

Proof. 1. Пусть R — произвольный луч из ω, а x — его начальная точка. Положим $H := R \setminus [p,x]$ и покажем, что выпуклая оболочка множества $\{p\} \cup H$ является лучом, исходящим из p и представляющим ω.

Убедимся сначала в том, что множество $\{p\} \cup H$ линейно. Поскольку H линейно (будучи подмножеством луча), для этого достаточно проверить, что при произвольных $a,b \in H$ выполняется одно из включений $a \in [p,b]$ и $b \in [p,a]$. Действительно, поскольку a и b лежат на исходящем из x луче R, выполняется одно из включений $a \in [x,b]$ и $b \in [x,a]$. В случае $a \in [x,b]$ в силу аксиомы (A3) выполняется включение $a \in [p,b]$ (поскольку $H = R \setminus [p,x]$, откуда $a,b \notin [p,x]$), а в случае $b \in [x,a]$ — включение $b \in [p,a]$. Итак, $\{p\} \cup H$ линейно.

Из приведенного рассуждения следует к тому же, что точка p экстремальна в $\{p\} \cup H$. Отметим, кроме того, что множество H неограничено (иначе мы получили бы, что луч R содержится в объединении ограниченных множеств H и $[p,x]$, а это невозможно в силу леммы 3.8(2)). Таким образом, множество $\{p\} \cup H$ линейно и неограничено, а p — его экстремальная точка. Отсюда в силу лемм 3.2 и 2.13 следует, что выпуклая оболочка $R_p := \mathrm{hull}(\{p\} \cup H)$ является неограниченной дугой с экстремальной точкой p, а это означает, что R_p есть луч, исходящий из точки p.

Луч R_p представляет конец ω, поскольку пересечение $R_p \cap R$ является полупрямой (множество $R_p \cap R$ есть неограниченная дуга, поскольку является пересечением дуг и содержит H, но не является прямой, поскольку содержится в луче).

Докажем теперь равенство $R_p = [p,\omega\rangle$, из которого последует, в частности, единственность луча R_p с требуемыми свойствами.

Покажем, что $R_p \subset [p,\omega\rangle$. Точка p лежит в $[p,\omega\rangle$, так как $p \neq \omega$. Пусть z — произвольная точка из $R_p \setminus \{p\}$. Возьмем любую точку $y \in R_p \setminus [p,z]$. Тогда множество $R_y := R_p \setminus [p,y\rangle$ является лучом (лемма 3.8(8)), причем представляющим ω, а из определения направлений легко следует, что для любого $t \in R_y$ имеет место включение $z \in \langle p,t\rangle$. Отсюда по определению структуры преддерева на $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ имеем $z \in [p,\omega\rangle$. Итак, $R_p \subset [p,\omega\rangle$.

Покажем, что $[p,\omega\rangle \subset R_p$. Отметим, что $[p,\omega\rangle = \{p\} \cup \langle p,\omega\rangle$ (так как $p \neq \omega$). Точка p лежит в R_p по определению. Пусть z — произвольная точка из

$\langle p, \omega \rangle$. Тогда, по определению структуры преддерева на $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$, имеется луч $R' \in \omega$ такой, что $z \in \langle p, t \rangle$ для всех $t \in R'$. Однако R' пересекается с R_p, так что, взяв $t \in R' \cap R_p$, получаем $z \in \langle p, t \rangle \subset R_p$ (так как лучи выпуклы).

Утверждение доказано.

2. Пусть $x \in \mathcal{T}$ — произвольная точка. В силу первого утверждения леммы существуют лучи $R_1 \in \omega$ и $R_2 \in \tau$, исходящие из x. Положим $H_1 := R_1 \setminus R_2$ и $H_2 := R_2 \setminus R_1$ и покажем, что выпуклая оболочка множества $H_1 \cup H_2$ является прямой и содержит лучи из ω и τ.

Убедимся сперва в том, что множество $H_1 \cup H_2$ линейно. Поскольку H_1 и H_2 линейны (будучи подмножествами лучей), для этого достаточно проверить, что при произвольных $a \in H_i$ и $b, c \in H_j$, где $\{i, j\} = \{1, 2\}$, выполняется одно из включений $b \in [a, c]$ и $c \in [a, b]$. Действительно, заметим, что $b, c \notin [a, x]$, так как $[a, x] \subset R_i$, а $b, c \in H_j = R_j \setminus R_i$. Так как b и c лежат на исходящем из x луче R_j, выполняется одно из включений $b \in [x, c]$ и $c \in [x, b]$. В случае $b \in [x, c]$ из условия $b \notin [a, x]$ в силу аксиомы (A3) получаем, что $b \in [a, c]$. В случае $c \in [x, b]$ из условия $c \notin [a, x]$ в силу аксиомы (A3) получаем $c \in [a, b]$. Итак, $H_1 \cup H_2$ линейно.

Теперь покажем, что H_1 содержит луч из ω, а H_2 — из τ. Действительно, поскольку $\omega \neq \tau$, пересечение $K := R_1 \cap R_2$, согласно определению 11.1, не является полупрямой. Однако K выпукло (будучи пересечением выпуклых). Выпуклое подмножество луча, не являющееся полупрямой, очевидно, ограничено. Отсюда легко следует, что $H_i = R_i \setminus K$ $(i = 1, 2)$ содержит некоторый луч R_i'. Поскольку $R_i \cap R_i' = R_i'$ луч R_1', как и луч R_1, лежит в ω, а луч R_2' — в τ.

Таким образом, множество $H_1 \cup H_2$ линейно и содержит (непересекающиеся) лучи из ω и τ. Отсюда в силу лемм 3.2 и 3.8(9) следует, что выпуклая оболочка $L := \mathrm{hull}(H_1 \cup H_2)$ является прямой (и, как и требуется, содержит лучи из ω и τ).

Докажем теперь равенство $L = \langle \omega, \tau \rangle$, из которого следует, в частности, единственность прямой L с требуемыми свойствами.

Покажем, что $L \subset \langle \omega, \tau \rangle$. Пусть z — произвольная точка из L. Взяв произвольное направление $<$ на L и пару точек $a, b \in L$ таких, что $a < z < b$, мы в силу имеющихся свойств прямой L и леммы 3.8 получаем, что один из лучей

$$R_a := \{t \in L : t \leqslant a\} \quad \text{и} \quad R_b := \{t \in L : b \leqslant t\}$$

лежит в ω, а второй — в τ. При этом для любых $r \in R_a$ и $s \in R_b$ имеем $r < z < s$, откуда по определению направлений следует, что $z \in \langle r, s \rangle$. Это по определению структуры преддерева на $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ означает, что $z \in \langle \omega, \tau \rangle$.

Покажем, что $\langle \omega, \tau \rangle \subset L$. Пусть z — произвольная точка из $\langle \omega, \tau \rangle$. Тогда, по определению структуры преддерева $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$, найдутся лучи $R \in \omega$ и $Q \in \tau$ такие, что $z \in \langle r, q \rangle$ для всех $r \in R$ и $q \in Q$. Однако и R, и Q пересекаются с L, так как L содержит лучи из τ и ω. Взяв $r \in R \cap L$ и $q \in Q \cap L$, получаем $z \in \langle r, q \rangle \subset L$ (так как прямые выпуклы).

Лемма доказана. $\square$

11.6. Предложение. *Пусть $\mathcal{T}$ — преддерево. Тогда*:

(1) *Множество* $\mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ *пусто если и только если* $\mathcal{T}$ *ограничено.*

(2) *Все точки из* $\mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ *являются терминальными в преддереве* $\widehat{\mathcal{T}}$.

(3) *В преддереве* $\widehat{\mathcal{T}}$ *множество* $\mathcal{T}$ *выпукло.*

(4) *Преддерево* $\widehat{\mathcal{T}}$ *ограничено.*

Proof. (1) Покажем, что равносильны следующие свойства:

(a) $\mathrm{Ends}(\mathcal{T}) = \varnothing$,

(b) в $\mathcal{T}$ нет лучей,

(c) в $\mathcal{T}$ нет полупрямых,

(d) в $\mathcal{T}$ нет неограниченных дуг,

(e) в $\mathcal{T}$ нет неограниченных линейных множеств ($\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathcal{T}$ ограничено).

Свойства (a) и (b) равносильны, поскольку $\mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ есть, по определению, множество классов эквивалентных лучей в $\mathcal{T}$.

Свойства (b) и (c) равносильны, поскольку каждый луч есть полупрямая, а каждая полупрямая содержится в некотором луче.

Свойства (c) и (d) равносильны, поскольку неограниченные дуги — это прямые и полупрямые, причем каждая прямая содержит полупрямые (см. лемму 3.8).

Свойства (d) и (e) равносильны, поскольку выпуклая оболочка неограниченного линейного множества в силу леммы 3.2 является дугой.

(2) Утверждение следует из п. R4 в определении структуры $\widehat{\mathcal{S}}$ (определение 11.2).

(3) Если $x, y \in \mathcal{T}$, то в силу определения преддерева $\widehat{\mathcal{T}}$ имеем $[x,y]_{\widehat{\mathcal{T}}} = [x,y]_{\mathcal{T}} \subset \mathcal{T}$. Это по определению означает, что $\mathcal{T}$ выпукло в $\widehat{\mathcal{T}}$.

(4) Предположим, что преддерево $\widehat{\mathcal{T}}$ неограничено. Тогда, как следует из доказательства утверждения (1), в преддереве $\widehat{\mathcal{T}}$ найдется луч R. Пусть r — экстремальная точка луча R. Заметим, что, поскольку все точки из $\mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ терминальны в преддереве $\widehat{\mathcal{T}}$ (утверждение (2)), эти точки экстремальны в любом подмножестве, в которое входят (в смысле определения 2.11). Следовательно, поскольку начало луча является его единственной экстремальной точкой (лемма 3.8), множество $R \smallsetminus \{r\}$ лежит в $\mathcal{T}$. Возьмем произвольную точку $x \in R \smallsetminus \{r\}$ и рассмотрим множество $R_x := R \smallsetminus [r, x\rangle$. Из леммы 3.8 следует, что R_x есть луч в $\widehat{\mathcal{T}}$ с экстремальной точкой x. Отметим, что R_x содержится в $\mathcal{T}$. Как нетрудно видеть, R_x является лучом и в преддереве $\mathcal{T}$. Пусть $\omega \in \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ — конец, представленный лучом R_x. Тогда, в силу леммы 11.5, множество R_x содержится в интервале $[x, \omega]$ преддерева $\widehat{\mathcal{T}}$, т. е. ограничено в $\widehat{\mathcal{T}}$ и не является там лучом. Это противоречие доказывает, что $\widehat{\mathcal{T}}$ неограничено. □

11.7. Предложение. *Пусть $\mathcal{T}$ — преддерево и $\widehat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$. Тогда*:

(1) *Преддерево $\widehat{\mathcal{T}}$ медианно если и только если $\mathcal{T}$ медианно.*

(2) *Преддерево $\widehat{\mathcal{T}}$ слабо полно если и только если $\mathcal{T}$ слабо полно.*

(3) *Преддерево $\widehat{\mathcal{T}}$ квазисепарабельно если и только если $\mathcal{T}$ квазисепарабельно.*

11.8. Замечание. Преддеревья $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ не различимы и такими свойствами, как регулярность, наличие особенностей (определение 4.3), дедекиндова полнота, наличие совместимой со структурой метрики (см. определение 4.17) и т. п.

Доказательство предложения 11.7. (1) Воспользуемся следующим утверждением:

11.9. Утверждение. *Если $p, t, q \in \widehat{\mathcal{T}}$ и $t \notin \{p, q\}$, то*

$$[t, p] \cap [t, q] \cap \mathcal{T} \neq \varnothing.$$

Proof. В случае $t \in \mathcal{T}$ множество $[t, p] \cap [t, q] \cap \mathcal{T}$ содержит точку t. В случае $t \in \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ в силу леммы 11.5 в каждом из интервалов $[t, p]$ и $[t, q]$ содержится тот или иной луч, представляющий t, так что P содержит пересечение двух таких лучей, которое согласно определению 11.1 является полупрямой в $\mathcal{T}$. $\square$

Из определения медианного преддерева легко следует, что выпуклое подмножество медианного преддерева, рассматриваемое как преддерево с индуцированной структурой, также медианно. Следовательно, если $\widehat{\mathcal{T}}$ медианно, то и $\mathcal{T}$ медианно, так как $\mathcal{T}$ выпукло в $\widehat{\mathcal{T}}$ (предложение 11.6), а его тернарная структура преддерева вложена в структуру преддерева $\widehat{\mathcal{T}}$.

Покажем, что $\widehat{\mathcal{T}}$ медианно, если медианно $\mathcal{T}$. Будем использовать обозначение

$$Y(a, b, c) := [a, b] \cap [b, c] \cap [a, c].$$

Пусть $a, b, c \in \widehat{\mathcal{T}}$ — произвольная тройка точек. Если точки a, b и c не все различны, то в силу аксиомы (A0) одна из них и является медианой тройки. Если $a \neq b \neq c \neq a$, то в силу утверждения 11.9 найдутся точки $a', b', c' \in \mathcal{T}$ такие, что

$$a' \in [b, a] \cap [a, c], \qquad b' \in [a, b] \cap [b, c] \qquad \text{и} \qquad c' \in [a, c] \cap [c, b].$$

Заметим, что

$$[a', b'] \subset [a, b], \qquad [a', c'] \subset [a, c] \qquad \text{и} \qquad [b', c'] \subset [b, c]$$

в силу леммы 1.18, так что $Y(a', b', c') \subset Y(a, b, c)$. Остается отметить, что $Y(a', b', c')$ непусто в силу медианности преддерева $\mathcal{T}$.

(2) Допустим, что существует слабо полное преддерево $\mathcal{T}$, у которого преддерево $\widehat{\mathcal{T}}$ не является слабо полным. Тогда, поскольку $\widehat{\mathcal{T}}$ ограничено (предложение 11.6), по теореме 8.2 в $\widehat{\mathcal{T}}$ найдется направленная дуга $(A, <)$, не имеющая супремума. В частности, у $(A, <)$ не имеется наибольшего элемента. Заметим, что пересечение $A \cap \mathcal{T}$ непусто, так как подмножество $\mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ преддерева $\widehat{\mathcal{T}}$ содержит лишь одноточечные дуги (это следует, например, из леммы 11.5). Пусть x — произвольная точка из $A \cap \mathcal{T}$. Обозначим через A_x верхний класс $\{t \in A : x \leqslant t\}$ и через $<_x$ — сужение на A_x порядка $<$. Ясно, что A_x есть дуга, и что направленная дуга $(A_x, <_x)$ не имеет супремума (поскольку $(A, <)$ не имеет супремума). В частности, у $(A_x, <_x)$ не имеется наибольшего элемента. Отсюда следует, что A_x лежит в $\mathcal{T}$ (поскольку x — единственная экстремальная точка дуги A_x — лежит в $\mathcal{T}$, а все точки из $\mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ терминальны в преддереве $\widehat{\mathcal{T}}$ (предложение 11.6) и, значит, экстремальны в любом подмножестве, в которое входят). Это, как нетрудно видеть, означает, что порядок $(A_x, <_x)$ является направленной дугой и в преддереве $\mathcal{T}$. Ситуация разбивается на два случая:

(i) дуга A_x ограничена в преддереве $\mathcal{T}$,

(ii) дуга A_x неограничена в преддереве $\mathcal{T}$.

В случае (i) дуга A_x является интервалом в преддереве $\mathcal{T}$ поскольку предполагается, что $\mathcal{T}$ слабо полно. Поскольку у порядка $(A_x, <_x)$ имеется наименьший элемент x и не имеется наибольшего элемента, интервал A_x представим в виде $[x, y\rangle$ для некоторого $y \in \mathcal{T}$. Однако в таком случае точка y является супремумом направленной дуги $(A_x, <_x)$ в преддереве $\mathcal{T}$, а так как $\mathcal{T}$ выпукло в $\widehat{\mathcal{T}}$, то y является супремумом направленной дуги $(A_x, <_x)$ и в преддереве $\widehat{\mathcal{T}}$.

В случае (ii) дуга A_x является, согласно определению, лучом в $\mathcal{T}$, исходящим из точки x. Пусть $\omega \in \mathrm{Ends}(\mathcal{T}) \subset \widehat{\mathcal{T}}$ — конец преддерева $\mathcal{T}$, содержащий луч A_x. Тогда $A_x = [x, \omega\rangle$ по лемме 11.5, так что точка ω является супремумом направленной дуги $(A_x, <_x)$ в преддереве $\widehat{\mathcal{T}}$.

Итак, оба возможных случая привели нас к противоречию. Следовательно, $\widehat{\mathcal{T}}$ слабо полно.

Докажем, что из предположения о слабой полноте преддерева $\widehat{\mathcal{T}}$ следует слабая полнота преддерева $\mathcal{T}$. Пусть L — ограниченная дуга в преддереве $\mathcal{T}$. Тогда L является ограниченной дугой и в преддереве $\widehat{\mathcal{T}}$ (поскольку $\mathcal{T}$ выпукло в $\widehat{\mathcal{T}}$). Если $\widehat{\mathcal{T}}$ слабо полно, то L является интервалом в $\widehat{\mathcal{T}}$, так что найдутся $a, b \in \widehat{\mathcal{T}}$ такие, что $L \in \{[a, b], [a, b\rangle, \langle a, b\rangle\}$. В случае, когда a или b лежат в $\mathrm{Ends}(\mathcal{T})$, интервалы $[a, b]$, $[a, b\rangle$ и $\langle a, b\rangle$ являются неограниченными дугами преддерева $\mathcal{T}$ в силу леммы 11.5. Следовательно $a, b \in \mathcal{T}$, так что интервалы $[a, b]$, $[a, b\rangle$ и $\langle a, b\rangle$ преддерева $\widehat{\mathcal{T}}$ являются интервалами и в преддереве $\mathcal{T}$. Утверждение доказано.

(3) Если подмножество $S \subset \mathcal{T}$ квазиплотно в преддереве $\mathcal{T}$, то оно квазиплотно и в преддереве $\widehat{\mathcal{T}}$, т. е., каковы бы ни были точки $a \neq b \in \widehat{\mathcal{T}}$, интервал $[a, b\rangle$ содержит точку из S. Действительно, если $a, b \in \mathcal{T}$, то интервал $[a, b\rangle$ содержит точку из S, поскольку S квазиплотно в $\mathcal{T}$. Если a или b лежат в $\mathrm{Ends}(\mathcal{T})$, то в силу леммы 11.5 интервал $[a, b\rangle$ содержит неограниченную дугу из $\mathcal{T}$, а каждая неограниченная дуга из $\mathcal{T}$, очевидно, содержит бесконечно много точек

из S.

Из доказанного утверждения следует, что квазисепарабельность преддерева $\mathcal{T}$ влечет квазисепарабельность преддерева $\widehat{\mathcal{T}}$. Обратная импликация очевидна. $\square$

11.10. Следствие. *Пусть $\mathcal{T}$ — преддерево. Тогда следующие условия эквивалентны.*

(i) *Преддерево $\mathcal{T}$ слабо полно.*

(ii) *Преддерево $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ в топологии теней компактно.*

Proof. Если $\mathcal{T}$ слабо полно, то и $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ слабо полно (предложение 11.7). Кроме того, $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ ограничено (предложение 11.6). Следовательно, $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ в топологии теней компактно по теореме 8.2.

Обратно, если $\mathcal{T} \cup \mathrm{Ends}(\mathcal{T})$ в топологии теней компактно, то оно слабо полно по теореме 8.2. Тогда $\mathcal{T}$ слабо полно по предложению 11.7. $\square$

12 Деревья

В настоящем параграфе обсуждаются свойства топологии теней на обычном $\mathbb{Z}$-дереве и объединении $\mathbb{Z}$-дерева с множеством его концов. (Топология теней в этом случае рассматривалась в [22, 16].)

В терминах теории преддеревьев $\mathbb{Z}$-деревья описываются как медианные преддеревья (определение 4.1), у которых все интервалы являются конечными множествами. "Эквивалентность" этого определения и классических определений $\mathbb{Z}$-дерева доказана, например, в [1, лемма 29.1] и в [4, лемма 3.34].

Рассматривая $\mathbb{Z}$-деревья как класс преддеревьев, в ходе дальнейшего изложения мы, как правило, без дополнительных оговорок используем в применении к $\mathbb{Z}$-деревьям описанные в предыдущих параграфах для преддеревьев конструкции и понятия (такие как интервалы, лучи, ветви, концы, полнота и т. п.). Значительная часть этих понятий является прямым обобщением соответствующих стандартных понятий теории деревьев.

Кроме того, далее привлекается ряд не описанных выше терминов классической теории деревьев. Так, точки $\mathbb{Z}$-дерева будем называть *вершинами*, а (неупорядоченные) пары *соседних* вершин (то есть вершин, между которыми не имеется других вершин) — *ребрами*. Напомним, что *степенью* вершины называют число содержащих ее ребер. $\mathbb{Z}$-дерево называется *локально конечным*, если все его вершины имеют конечные степени. Стандартную целозначную метрику $\mathbb{Z}$-дерева будем обозначать через 'dist': для точек a и b произвольного $\mathbb{Z}$-дерева значение $\mathrm{dist}(a, b)$ совпадает с числом содержащихся в интервале $[a, b]$ ребер (которое на единицу меньшее, чем количество точек в этом интервале).

Напомним, что *множеством концов* $\mathrm{Ends}(T)$ $\mathbb{Z}$-дерева T называют множество классов эквивалентности *конфинальных* лучей в T, считая два луча эквивалентными (конфинальными), если их пересечение является лучом (см. §11, где конструкция множества концов описывается для случая произвольного преддерева). На множестве $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ естественным образом возникает структура преддерева (см. §11). Теоремы 7.3, 8.2, 9.1 и 10.2 дают следующий результат о топологии теней на преддереве $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ (см. определение 6.1).

12.1. Следствие. *Каково бы ни было $\mathbb{Z}$-дерево T, топология теней на преддереве $\widehat{T} := T \cup \mathrm{Ends}(T)$ нормальна, хаусдорфова, компактна и секвенциально компактна. Топология теней на $\widehat{T}$ метризуема в том и только том случае, когда T не более чем счетно.*

Proof. Поскольку все интервалы $\mathbb{Z}$-дерева являются конечными множествами, в силу определения 4.12 получаем, что все $\mathbb{Z}$-деревья дедекиндово полны (и следовательно, по лемме 4.13, слабо полны). Все $\mathbb{Z}$-деревья медианны (см. определение). Таким образом, поскольку T медианно и слабо полно, в силу предложения 11.7 и $\widehat{T}$ медианно и слабо полно. Кроме того, $\widehat{T}$ ограничено (в силу предложения 11.6). Из медианности преддерева $\widehat{T}$ в силу теоремы 7.3 следует, что топология теней на нем нормальна и хаусдорфова. Из слабой полноты и ограниченности преддерева $\widehat{T}$ в силу теоремы 8.2 следует, что топология теней на нем компактна (ср. со следствием 11.10). Секвенциальная компактность следует из теоремы 9.1.

Что касается метризуемости, то, поскольку топология теней на $\widehat{T}$ компактна и хаусдорфова, она метризуема тогда и только тогда, когда удовлетворяет второй аксиоме счетности (см., например, [2, гл. V, §2, теорема 4]). По теореме 10.2, топология теней на преддереве удовлетворяет второй аксиоме счетности в том и только том случае, когда преддерево квазисепарабельно (см. определение 10.1), а в силу предложения 11.7 преддерево $\widehat{T}$ квазисепарабельно если и только если T квазисепарабельно. Таким образом, топология теней на $\widehat{T}$ метризуема тогда и только тогда, когда T квазисепарабельно. Согласно определению 10.1, преддерево квазисепарабельно, если у него имеется не более чем счетное квазиплотное подмножество. Из определений очевидным образом следует, что единственным квазиплотным подмножеством в $\mathbb{Z}$-дереве является множество всех его точек (вершин). Следовательно, топология теней на $\widehat{T}$ метризуема в том и только том случае, когда T не более чем счетно. $\square$

12.2. Определение. Сильная топология. Пусть T — $\mathbb{Z}$-дерево. Определим *сильную топологию* на преддереве $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ как наименьшую топологию, в которой открыты все ветви преддерева $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ и все вершины $\mathbb{Z}$-дерева T. Иными словами, сильная топология — это наименьшая из топологий, содержащих топологию теней и индуцирующих дискретную топологию (т. е. топологию метрики dist) на самом $\mathbb{Z}$-дереве T.

В качестве стандартной топологии на объединении $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ рассматривается, как правило, именно сильная топология. Имеется несколько известных подходов к ее описанию (см. сноску 19). Нетрудно доказать следующие утверждения.

12.3. Предложение. *Пусть T — $\mathbb{Z}$-дерево. Тогда*:

I. *Топология теней на $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ содержится в сильной топологии, а совпадает с ней тогда и только тогда, когда T локально конечно.*

II. *Теневая и сильная топологии совпадают на $\mathrm{Ends}(T)$.*

III. *Сильная топология на $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ метризуема (в частности — нормальна и хаусдорфова), каково бы ни было T, а компактна тогда и только тогда, когда T локально конечно.* (*Ср. со следствием 12.1.*)

12.4. Замечание. Напомним, что топологическое пространство называется *вполне несвязным*, если все его подпространства, содержащие не менее двух точек, несвязны. Каково бы ни было $\mathbb{Z}$-дерево T, пространство $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ вполне несвязно и с сильной топологией, и с топологией теней.

Если у локально конечного $\mathbb{Z}$-дерева T нет вершин степени $\leqslant 2$, то пространство концов $\mathrm{Ends}(T)$ *канторово* (то есть гомеоморфно канторову множеству). (Это вытекает из теоремы Брауэра, которая утверждает, что всякое непустое компактное хаусдорфово пространство, не имеющее изолированных точек и обладающее счетной базой, состоящей из открыто-замкнутых множеств, канторово.)

Если у счетного $\mathbb{Z}$-дерева T нет вершин конечной степени, то топология теней на $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ канторова, а пространство $\mathrm{Ends}(T)$ гомеоморфно *пространству Бэра*[26] или, что то же самое, множеству иррациональных чисел с унаследованной от вещественной прямой топологией.

Из вышеупомянутых фактов вытекает, что в случае счетного $\mathbb{Z}$-дерева T и топология теней, и сильная топология на множестве $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ вкладываются в вещественную прямую.

12.5. Замечание. Метрики на $\mathbb{Z}$-деревьях. Приведем ряд (несложно доказываемых) фактов о метриках на $\mathbb{Z}$-деревьях. Пусть T — $\mathbb{Z}$-дерево, E — множество всех его ребер. Для произвольной положительной вещественнозначной функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ определим функцию $\mathrm{dist}_f : T^2 \to \mathbb{R}$, положив

$$\mathrm{dist}_f(a, b) := \sum_{e \in E \,:\, e \subset [a,b]} f(e).$$

Нетрудно проверить, что dist_f является метрикой на T и что эта метрика совместима (в смысле определения 4.17) со структурой преддерева на T. Стандартная метрика dist на T совпадает с метрикой dist_{f_1}, где $f_1(E) = \{1\}$.

[26] *Пространством Бэра* называют множество $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ всех бесконечных последовательностей $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ натуральных чисел с топологией, порожденной наборами вида

$$\{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : x_p = k\}, \quad p, k \in \mathbb{N}.$$

Если T локально конечно, то для всякой функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ топология метрики dist_f дискретна. Если T не является локально конечным, то для определенного вида функций $f : E \to \mathbb{R}_+$ метрика dist_f не дискретна. (Для построения соответствующего примера достаточно выбрать вершину $v \in T$ бесконечной степени и взять функцию $f : E \to \mathbb{R}_+$ такую, что

$$\inf\{f(e) : e \in E, v \in e\} = 0.$$

Если T счетно, то счетно и E, и найдется функция $f : E \to \mathbb{R}_+$ с $\sum_{e\in E} f(e) < \infty$ (естественно называть такие функции *суммируемыми*). Если функция $f : E \to \mathbb{R}_+$ суммируема, то метрика dist_f индуцирует на T топологию теней.

Пусть $f : E \to \mathbb{R}_+$ — произвольная положительная функция, (T'_f, dist'_f) — метрическое пополнение пространства (T, dist_f). Обозначим через $\partial_f T$ множество $T'_f \smallsetminus T$ (с унаследованной метрикой). Нетрудно видеть, что, какова бы ни была функция $f : E \to \mathbb{R}_+$, определено каноническое инъективное отображение

$$\partial_f T \to \mathrm{Ends}(T) \tag{28}$$

и, соответственно, отображение

$$T'_f \to T \cup \mathrm{Ends}(T). \tag{29}$$

Инъекция (28) является топологическим вложением по отношению к стандартной[27] топологии на $\mathrm{Ends}(T)$. Как легко видеть, для любого $\mathbb{Z}$-дерева T существуют положительные функции $f : E \to \mathbb{R}_+$ дающие ограниченную метрику dist_f. (В частности, если T счетно, а f — суммируема, то dist_f ограничена.) Если dist_f ограничена, то каноническая инъекция (28) является биекцией и, более того, гомеоморфизмом. Если dist_f ограничена и дает дискретную топологию, то каноническая биекция (29) является гомеоморфизмом по отношению к сильной топологии на $T \cup \mathrm{Ends}(T)$. Если T счетно, а $f : E \to \mathbb{R}_+$ — суммируема, то биекция (29) является гомеоморфизмом по отношению к топологии теней на $T \cup \mathrm{Ends}(T)$.

12.6. Замечание. В [7], Д. И. Картрайт, П. М. Соарди и В. Вус описывают компактификации для не являющихся локально конечными графов. В частности, ими конструируется (метризуемая) компактификация $\widetilde{T}$ для (счетного и не являющегося локально конечным) $\mathbb{Z}$-дерева T. Компактификация строится путем пополнения множества $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ множеством T^* *несобственных вершин* (множество T^* является копией множества $T^\infty \subset T$ вершин бесконечной степени).

Можно показать, что топология теней на $T \cup \mathrm{Ends}(T)$ является фактортопологией компактификации Картрайта–Соарди–Вуса, отвечающей факторотображению

$$T \cup \mathrm{Ends}(T) \cup T^* \to T \cup \mathrm{Ends}(T),$$

[27] Напомним, что и топология теней, и сильная топология индуцируют одну и ту же топологию на множестве концов, на которую мы и ссылаемся как на стандартную.

отправляющему каждую несобственную вершину $x^* \in T^*$ в соответствующую вершину $x \in T^\infty$.

Отметим, что компактификация Картрайта–Соарди–Вуса обобщается на значительно более широкий класс преддеревьев, чем $\mathbb{Z}$-деревья, причем с сохранением описанной связи с топологией теней.

References

[1] S. A. Adeleke, P. M. Neumann, *Relations related to betweenness: their structure and automorphisms*, Memoirs Amer. Math. Soc. **131**, no. 623, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[2] П. С. Александров, П. С. Урысон, *Мемуар о компактных топологических пространствах*, М.: Наука, 1971.

[3] M. R. Bridson, A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-Positive Curvature*, Grundlehren der math. Wiss. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[4] B. H. Bowditch, *Treelike structures arising from continua and convergence groups*, Memoirs Amer. Math. Soc. **139**, no. 662, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[5] B. H. Bowditch, J. Crisp, *Archimedean actions on median pretrees*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **130** (2001), 383–400.

[6] B. H. Bowditch, *Peripheral splittings of groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 4057–4082.

[7] D. I. Cartwright, P. M. Soardi, W. Woess, *Martin and end compactifications for nonlocally finite graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), 679–693.

[8] I. M. Chiswell, *Introduction to Λ-trees*, World Scientific Publishing Co., 2001.

[9] I. M. Chiswell, *Generalised trees and Λ-trees*. In "Combinatorial and Geometric Group Theory", London Math. Soc. Lecture Notes Series No. **204**, ed. A. J. Duncan, N. D. Gilbert, J. Howie, Cambridge University Press, 1995, pp. 43–55.

[10] V. Chvátal, *Sylvester–Gallai theorem and metric betweenness*, Discrete Comput. Geom. **31**(2) (2004), 175–195.

[11] T. Coulbois, A. Hilion, and M. Lustig, *Non-unique ergodicity, observers' topology and the dual algebraic lamination for R-trees*, Illinois Journal of Mathematics, **51**(3) (2007), 897–911.

[12] P. Duchet, *Convexity in combinatorial structures*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **14** (1987), 261–293.

[13] C. Favre, M. Jonsson, *The Valuative Tree*, Lecture Notes in Mathematics **1853**, Berlin, Springer, 2004.

[14] M. L. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Birkhäuser, Basel, 1998.

[15] М. Л. Громов, *Гиперболические группы*, Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2002.

[16] P. de la Harpe, J.-P. Préaux, *C^*-simple groups: Amalgamated free products, HNN extensions and fundamental groups of 3-manifolds*, preprint 2009, arXiv.math.GR/0909.3528.

[17] J. Hedlíková, *Ternary spaces, media, and Chebyshev sets*, Czechoslovak Math. J. **33** (1983), 373–389.

[18] R. E. Jamison-Waldner, *A perspective on abstract convexity: Classifying alignments by varieties*, D. C. Kay, M. Breem (Eds.), Convexity and Related Combinatorial Geometry, Dekker, New York, 1982, pp. 113–150.

[19] R. Mendris, P. Zlatoš, *Axiomatization and undecidability results for metrizable betweenness relations*, Proc. Am. Math. Soc. **123**:3 (1995), 873–882.

[20] J. van Mill, E. Wattel, *Dendrons*, in "Topology and order structures", Part 1, Math. Centre Tracts, vol. **142**, Math. Centrum, Amsterdam, 1981, pp. 59–81.

[21] J. van Mill, E. Wattel, *Subbase characterizations of subspaces of compact trees*, Top. Appl. **13** (1982), 321–326.

[22] N. Monod, Y. Shalom, *Cocycle superrigidity and bounded cohomology for negatively curved spaces*, J. Differential Geom. **67** (2004), 395–455.

[23] T. B. Muenzenberger, R. E. Smithson, *Semilattice structures on dendritic spaces*, Top. Proc. 2, no 1 (1977) pp. 243-260.

[24] J. Nikiel, *Topologies on pseudo-trees and applications*, Memoires Amer. Math. Soc. **82**, N. 416 (1989).

[25] P. Papasoglu, E. L. Swenson, *From continua to $\mathbb{R}$-trees*, Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 1759–1784.

[26] B. J. Pearson, *Concerning the structure of dendritic spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **15**:2 (1974), 293–305.

[27] L. A. Steen, J. A. Seebach, Jr., *Counterexamples in Topology*, Springer-Verlag, 1978.

[28] В. П. Солтан, *Введение в аксиоматическую теорию выпуклости*, Кишинев, Штиинца, 1984.

[29] E. L. Swenson, *A cut point theorem for* CAT(0) groups, J. Differential Geom. **53**:2 (1999), 327–358.

[30] M.L.J. van de Vel, *Theory of Convex Structures*, North Holland, Amsterdam, 1993.

[31] О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов, *Элементарная топология*, М.: МЦНМО, 2010.

[32] L. E. Ward, Jr., *Recent developments in dendritic spaces and related topics*, Studies in topology (Proc. Conf., Univ. North Carolina, Charlotte, N.C., 1974; dedicated to Math. Sect. Polish Acad. Sci.), Academic Press, New York, 1975, pp. 601–647.

[33] L. E. Ward, Jr., *Axioms for cutpoints*, General topology and modern analysis (Proc. Conf., Univ. California, Riverside, Calif., 1980), Academic Press, New York, 1981, pp. 327–336.