ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 21/2012

Песочные группы треугольных бинарных деревьев.

И. А. Крепкий

10 декабря 2012 г.

Математико-механический факультет СПбГУ,
Санкт-Петербургский Государственный Университет,
Университетский пр. 28, Петродворец, Санкт-Петербург

feb418@gmail.com

Аннотация

В статье определяется бесконечная серия так называемых треугольных бинарных деревьев. Основной результат работы - вычислены песочные групы графов данной серии.

Ключевые слова: песочные группы, треугольные бинарные деревья, нормальная форма Смита.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

1 Введение

За последние двадцать лет вышло несколько десятков статей, посвященных изучению и вычислению песочных групп графов (см., например, [[1]],[[2]],[[3]]) Поскольку не существует универсального способа вычисления группы графа, помимо приведения его матрицы Лапласа к форме Смита [[7]], в некоторых работах, например, [[4]],[[5]],[[6]], явно вычисляются песочные группы для некоторых бесконечных серий графов. В настоящем тексте мы вводим последовательность так называемых треугольных деревьев и доказываем, что их песочная группа есть степень циклической группы C_3.

2 Определения

Прежде всего дадим определение песочной группы графа. Сразу стоит заметить, что существует два определения, эквивалентность которых доказана в [[1]]. Здесь будет предложено только одно из них.
Пусть G - некоторый простой связный граф. Для произвольной нумерации вершин этого графа построим его матрицу Лапласа - M. Обозначим как N матрицу, полученную из матрицы M удалением произвольных столбца и строки с одинаковыми номерами. Рассмотрим нормальную форму Смита матрицы N - она будет представлять из себя диагональную матрицу, содержащую положительные натуральные числа на диагонали. Мультимножество этих чисел обозначим как $\overline{N}$ (далее всегда мультимножество, полученное через приведение некоторой матрицы A к нормальной форме Смита, будем обозначать как $\overline{A}$).
Второе определение, основанное на матрице Лапласа, допускает краткую переформулировку:

Определение 1 *Песочной группой графа G называется группа* $\prod\limits_{k\in\overline{N}} C_k$.

(Через C_k мы обозначаем циклическую группу порядка k).
Далее песочную группу графа G будем обозначать как $S(G)$.
Полезно заметить, что для вычисления $S(G)$ нам достаточно получить нормальную форму Смита матрицы M, потому как в нашем случае $\overline{M} = \overline{N} \cup \{0\}$ и, соответственно, $\overline{M} \setminus \{0\}$ очевидным образом определяет значение $S(G)$.

3 Описание серии графов

На рис.1 – 3 изображены первые несколько членов бесконечной последовательности графов, для которой мы хотим вычислить соответствующую последовательность песочных групп.

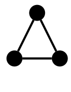

Рис. 1: Tr_1

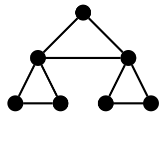

Рис. 2: Tr_2

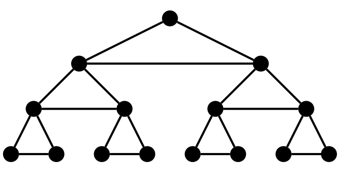

Рис. 3: Tr_3

Далее n-тый член этой последовательности мы будем обозначать как Tr_n и называть "треугольное бинарное дерево". Прежде всего строго определим эту серию графов. Для удобства

определения будем считать, что каждый из графов серии снабжён ровно одной помеченной вершиной.
Tr_1 представляет из себя цикл из трёх вершин, одна из которых - помечена (рис. 4)

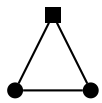

Рис. 4:

Tr_n (для $n > 1$) строится из двух копий графа Tr_{n-1} и одной дополнительной вершины - эта вершина и две помеченные вершины графов Tr_{n-1} объединяются в цикл, как это показано на рис. $5 - 7$:

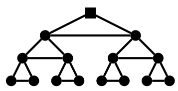

Рис. 5: Tr_{n-1}

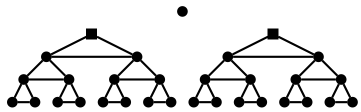

Рис. 6:

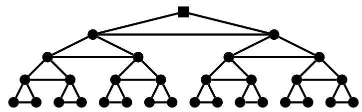

Рис. 7: Tr_n

Теперь единственной помеченной вершиной графа Tr_n будет считаться та из вершин, вошедших в новый 3-цикл, которая ранее не была помеченной. Таким образом, последовательность графов полностью определена. Стоит добавить, что в этой серии нас будет интересовать только структура графов - отмеченные вершины являются лишь вспомогательным элементом для описания конструкции.
Далее нам понадобятся матрицы Лапласа графов предложенной серии. Для их описания введём нумерацию вершин для каждого из графов.
Вершины Tr_1 пронумеруем числами с 1 по 3. Так, чтобы помеченная вершина получила номер 2 (рис.8).

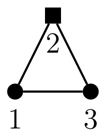

Рис. 8: Tr_1

Пусть теперь $n > 1$. Ясно, что граф Tr_n состоит из $(2^{n+1} - 1)$ вершин. Как было упомянуто ранее, Tr_n состоит из двух подграфов и помеченной вершины. Вершины одного из подграфов следует пронумеровать натуральными числами от 1 до $(2^n - 1)$, вершины второго - числами от $(2^n + 1)$ до $(2^{n+1} - 1)$. (В обоих случаях порядок нумерации должен совпадать с порядком нумерации графа Tr_{n-1}.) Помеченной вершине присвоим номер 2^n. В качестве примера на рис.$9 - 11$ изображена процедура нумерации вершин графа Tr_4

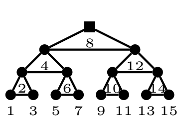

Рис. 9: Tr_3

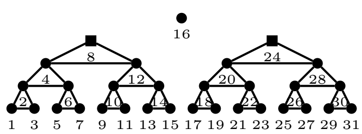

Рис. 10:

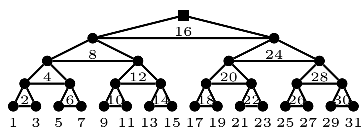

Рис. 11: Tr_4

Матрицу Лапласа графа Tr_n, соответствующую такому способу нумерации вершин обозначим как M_n. Матрицу, полученную из M_n заменой $(2^n, 2^n)$-того элемента на -4 будем обозначать как M'_n.
В таком случае, M_1 примет вид:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

И, соответственно, матрица M'_1 примет вид:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ясно, что M_n получена, как блочная, через объединение M'_{n-1}, матрицы, состоящей из одного элемента (-2) и M'_{n-1} с последующим присвоением значения 1 элементам (2^n, 2^{n-1}), (2^{n-1}, 2^n), ($2^n + 2^{n-1}$, 2^{n-1}), (2^{n-1}, $2^n + 2^{n-1}$), (2^n, $2^n + 2^{n-1}$), ($2^n + 2^{n-1}$, 2^n):

$$\left(\begin{array}{cccc|c|cccc}
 & M'_{n-1} & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\
 &&&& 0 &&&& 0\\
 &&&& \vdots &&&& \vdots\\
 &&&& 0 &&&& 0\\ \hline
1 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ \hline
0 &&&& 0 &&&&\\
\vdots &&&& \vdots &&&&\\
0 &&&& 0 &&&&\\
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 &&& M'_{n-1} &
\end{array}\right)$$

4 Песочные группы графов серии

Теперь мы хотим вычислить песочную группу графа Tr_n. Как было упомянуто ранее, песочная группа графа однозначно определяется нормальной формой Смита матрицы Лапласа этого графа. Или, что то же самое, мультимножеством чисел, расположенных на диагонали нормальной формы Смита. Ясно, что сложение/вычитание одной строки (или столбца) матрицы из другой не сказывается на соответствующем мультимножестве. Так же ясно, что если A - мультимножество, соответствующее матрице Лапласа некоторого графа, а B - мультимножество, соответствующее матрице, полученной из матрицы Лапласа путём удаления строки и столбца с равными номерами, то $A = B \cup \{0\}$. Этого нам достаточно для вычисления мультимножества, соответствующего матрице графа Tr_n.
Мультимножество, соответствующее некоторой матрице A, далее будем обозначать как $\overline{A}$.

Вычислим значения $\overline{M_n}$. Непосредственная проверка показывает, что $\overline{M_1} = \{1, 3, 0\}$.
Теперь рассмотрим матрицу M_n $(n > 1)$. Поочерёдно прибавим к её 2^{n-1}-той строке строки с 2^n

по $(2^{n+1}-1)$, а затем к 2^{n-1}-тому столбцу столбцы с 2^n по $(2^{n+1}-1)$. В результате получим:

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
M_{n-1} & & \\
\hline
 & -2 & 0 \ \cdots \ 0 \quad 1 \\
\hline
 & \begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{matrix} & M'_{n-1}
\end{array}\right)$$

Блочно-диагональный характер полученной матрицы влечёт за собой равенство

$$\overline{M_n} = \overline{M_{n-1}} \cup \overline{K_n} \tag{1}$$

Здесь K_n имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c}
-2 & 0 \ \cdots \ 0 \quad 1 \\
\hline
\begin{matrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{matrix} & M'_{n-1}
\end{array}\right)$$

$\dot{K}_n$ - дополнение K_n до матрицы Лапласа некоторого связного графа:

$$\left(\begin{array}{cc|c}
-2 & 1 & 0 \ \cdots \ 0 \quad 1 \\
1 & -2 & 0 \ \cdots \ 0 \quad 1 \\
\hline
0 & 0 & \\
\vdots & \vdots & \\
0 & 0 & \\
1 & 1 & M'_{n-1}
\end{array}\right)$$

Ясно, что

$$\overline{K_n} = \overline{\dot{K}_n} \setminus \{0\} \tag{2}$$

Теперь модифицируем $\dot{K}_n$ путём последовательного прибавления к её $(2^{n-1}+2)$-той строке строк 1 и 2, а затем к её $(2^{n-1}+2)$-тому столбцу столбцов 1 и 2:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & \\ 1 & -2 & \\ \hline & & \\ & & M_{n-1} \\ & & \end{array}\right)$$

Результат снова блочно-диагонален, причём соответствующее мультимножество для одного из блоков - $\overline{M_{n-1}}$, а для другого - $\{1,3\}$. Т.е.

$$\overline{\dot{K_n}} = \overline{M_{n-1}} \cup \{1,3\} \tag{3}$$

Собрав воедино равенства (1),(2),(3), получим:
$\overline{M_n} = \overline{M_{n-1}} \cup \overline{K_n} = \overline{M_{n-1}} \cup \overline{\dot{K_n}} \setminus \{0\} = \overline{M_{n-1}} \cup \overline{M_{n-1}} \cup \{1,3\} \setminus \{0\}$.
Обозначим $\overline{M_n} \setminus \{0\}$ как H_n, тогда получим:
$H_n \cup \{0\} = H_{n-1} \cup \{0\} \cup H_{n-1} \cup \{0\} \cup \{1,3\} \setminus \{0\}$,
т.е. $H_n = H_{n-1} \cup H_{n-1} \cup \{1,3\}$.
С учётом того, что $H_1 = \{1,3\}$ мы легко можем утверждать, что в H_n содержатся только элементы "1"и "3"и каждый из них встречается в этом мультимножестве ровно $2^n - 1$ раз.

Как было сказано в главе 2, значение H_n однозначно определяет песочную группу графа Tr_n, как $S(Tr_n) = \prod\limits_{k \in H_n} C_k$. Что и влечёт справедливость теоремы:

Теорема 1 $S(Tr_n) = (C_3)^{2^n - 1}$.

5 Благодарности

Автор благодарит Дужина Сергея Васильевича за научное руководство, помощь в работе с TEX при написании данной статьи и ценные рекомендации по оформлению работы.

Список литературы

[1] Alexander E. Holroyd, Lionel Levine, Karola Meszaros, Yuval Peres, James Propp, David B. Wilson, Chip-Firing and Rotor-Routing on Directed Graphs,
`http://arxiv.org/abs/0801.3306`

[2] David Perkinson, Jacob Perlman, John Wilmes, Primer for the algebraic geometry of sandpiles,
`http://arxiv.org/abs/1112.6163`

[3] Lionel Levine, Sandpile groups and spanning trees of directed line graphs,
`http://arxiv.org/abs/0906.2809`

[4] Hao Liang, Yong-Liang Pan, Jian Wang, The critical group of $K_m \times P_n$, Linear Algebra and its Applications, Volume 428, Issues 11–12, 1 June 2008, Pages 2723-2729, ISSN 0024-3795,
10.1016/j.laa.2008.01.002.
`http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379508000232`

[5] Arnaud Dartois, Francesca Fiorenzi, Paolo Francini, Sandpile group on the graph Dn of the dihedral group, European Journal of Combinatorics, Volume 24, Issue 7, October 2003, Pages 815-824, ISSN 0195-6698, 10.1016/S0195-6698(03)00104-5.
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669803001045

[6] Carlos A. Alfaro, Carlos E. Valencia, On the sandpile group of the cone of a graph, Linear Algebra and its Applications, Volume 436, Issue 5, 1 March 2012, Pages 1154-1176, ISSN 0024-3795, 10.1016/j.laa.2011.07.030.
http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002437951100543X

[7] K. R. Matthews, Smith normal form. MP274: Linear Algebra, Lecture Notes, University of Queensland, 1991.
http://www.numbertheory.org/courses/MP274/smith.pdf