ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПОМИ ПРЕПРИНТ — 17/2012

УСРЕДНЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. А. Суслина

Санкт-Петербургский государственный университет,
Физический факультет,
Ульяновская ул., д. 3, Петродворец,
Санкт-Петербург, 198504, Россия
e-mail: suslina@list.ru

АННОТАЦИЯ

В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, где $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$, рассматривается матричный эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ второго порядка при условии Неймана на границе. Здесь $\varepsilon > 0$ — малый параметр, коэффициенты оператора периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$; никакой регулярности коэффициентов не предполагается. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ к резольвенте эффективного оператора $\mathcal{A}_N^0$ с постоянными коэффициентами. Для нормы разности резольвент установлена оценка порядка ε (точная по порядку). Найдена аппроксимация оператора $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, с погрешностью $O(\sqrt{\varepsilon})$. Аппроксимация дается суммой оператора $(\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1}$ и корректора первого порядка. Для строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ найдена аналогичная аппроксимация с погрешностью $O(\varepsilon)$.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, задача Неймана, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00458-а) и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-357.2012.1).

Введение

Работа относится к теории усреднений (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам усреднения в пределе малого периода посвящена обширная литература. Укажем, в первую очередь, книги [BeLP], [BaPa], [ZhKO].

0.1. Теоретико-операторный подход к задачам усреднения. В серии работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1-4] был предложен и развит теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам теории усреднений. С помощью этого подхода были получены так называемые операторные оценки погрешности в задачах гомогенизации для эллиптических ДО. Рассматривались матричные сильно эллиптические ДО, действующие в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и допускающие факторизацию вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{0.1}$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — периодическая матрица-функция, ограниченная и положительно определенная, а $b(\mathbf{D})$ — ДО первого порядка. Подробнее условия на $g(\mathbf{x})$ и $b(\mathbf{D})$ описаны ниже в §1.

В работах [BSu1-4] изучался вопрос о поведении решения уравнения $\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, при малом ε. При $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ сходится в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0$ „усреднённого" уравнения $\mathcal{A}^0 \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}$. Здесь $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — *эффективный оператор* с постоянной эффективной матрицей g^0. В [BSu1,2] была установлена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

В операторных терминах это означает, что резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится при $\varepsilon \to 0$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ к резольвенте эффективного оператора, причем выполнена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.2}$$

В дальнейшем в [BSu3] была получена более точная аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$. (Здесь мы не останавливаемся на этом подробнее.)

В [BSu4] была найдена аппроксимация резольвенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ (что соответствует аппроксимации решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в энергетической норме):

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.3}$$

Здесь $K(\varepsilon)$ — корректор. Оператор $K(\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, и потому зависит от ε.

Оценки вида (0.2), (0.3), получившие название *операторных оценок погрешности*, точны по порядку; постоянные в оценках контролируются явно через данные задачи. Метод работ [BSu1–4] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений.

0.2. Другой подход к получению операторных оценок погрешности в задачах усреднения был предложен В. В. Жиковым. В работах [Zh1, Zh2, ZhPas, Pas] рассматривались скалярный эллиптический оператор $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ (с вещественной матрицей $g(\mathbf{x})$) и система теории упругости. Были получены оценки вида (0.2), (0.3) для соответствующих задач в $\mathbb{R}^d$. Метод основан на анализе первого приближения к решению и введении дополнительного параметра. Помимо задач в $\mathbb{R}^d$ изучались задачи в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на границе. При этом аппроксимация решений в классе $H^1(\mathcal{O})$ выводилась из соответствующего результата в $\mathbb{R}^d$. За счет влияния границы оценки в ограниченной области ухудшаются и получается погрешность $O(\varepsilon^{1/2})$:

$$\|\mathcal{A}_{\flat,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_\flat^0)^{-1} - \varepsilon K_\flat(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}, \quad \flat = D, N. \tag{0.4}$$

Здесь $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$, $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ — операторы с условием Дирихле либо Неймана на границе, $\mathcal{A}_D^0$, $\mathcal{A}_N^0$ и $K_D(\varepsilon)$, $K_N(\varepsilon)$ — соответствующие эффективные операторы и корректоры.

В [ZhPas] была также получена оценка вида $\|\mathcal{A}_{\flat,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_\flat^0)^{-1}\|_{L_2\to L_2} \leqslant C\varepsilon^{1/2}$, как (довольно грубое) следствие из (0.4). Возникает естественный вопрос об улучшении L_2-оценки. В работе [ZhPas] для скалярного эллиптического оператора $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ (с вещественной матрицей $g(\mathbf{x})$) при условии Дирихле была получена оценка для $\|\mathcal{A}_{D,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_D^0)^{-1}\|_{L_2\to L_2}$ порядка $\varepsilon^{\frac{d}{2d-2}}$ при $d \geqslant 3$ и порядка $\varepsilon|\log\varepsilon|$ при $d = 2$. В доказательстве существенно использовался принцип максимума, специфический для скалярных эллиптических уравнений.

Близкие результаты для оператора $-\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla$ в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана были установлены в работах Гризо [Gr1, Gr2] с помощью „unfolding“-метода. Была получена оценка вида (0.4), а в работе [Gr2] впервые (для того же скалярного эллиптического оператора) была установлена точная по порядку оценка

$$\|\mathcal{A}_{\flat,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{A}_\flat^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon, \quad \flat = D, N. \tag{0.5}$$

0.3. Операторные оценки погрешности для матричных эллиптических операторов в ограниченной области. В недавних работах [PSu1,2], [Su1,2] изучалась задача Дирихле в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с границей класса $C^{1,1}$ для уравнения $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Здесь $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$ — матричный оператор вида (0.1) при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. В [PSu1,2] была получена оценка вида (0.4) для оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$. Метод опирался на использование оценок (0.2), (0.3) для задачи в $\mathbb{R}^d$ и оценку поправки типа пограничного слоя; при этом многие технические приемы заимствовались из работы [ZhPas].

В статьях [Su1,2] автору удалось получить точную по порядку оценку погрешности вида (0.5) для того же матричного оператора $\mathcal{A}_{D,\varepsilon}$. Проблема состояла в том, чтобы установить оценку порядка ε для L_2-нормы поправки; для решения этой задачи была применена оценка вида (0.4) и существенно использовались соображения двойственности.

В недавней работе [KeLiS] изучались задачи усреднения для равномерно эллиптических систем с вещественными гельдеровскими коэффициентами в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана на границе. Авторы получили оценку вида (0.5) в рассматриваемых задачах.

Отметим, что класс сильно эллиптических операторов (0.1), который мы изучаем, шире, чем класс операторов из [KeLiS]. Кроме того, мы не предполагаем какой-либо регулярности коэффициентов, что существенно расширяет сферу возможных применений.

0.4. Основные результаты. В настоящей работе получены аналоги результатов из [PSu1,2], [Su1,2] для задачи Неймана. Подчеркнем, что задача усреднения при условии Неймана сложнее, чем при условии Дирихле. Основная трудность здесь связана с тем, что меняется краевое условие: в исходной задаче конормальная производная решения содержит быстро осциллирующие коэффициенты, а в усредненной задаче — постоянные коэффициенты. (В задаче Дирихле краевые условия в исходной и усредненной задаче одинаковые.)

Изучаются матричные ДО $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с границей класса $C^{1,1}$. Оператор $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ задан дифференциальным выражением (0.1) при условии Неймана на $\partial\mathcal{O}$. Эффективный оператор $\mathcal{A}_N^0$ задан выражением $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ при условии Неймана. Изучается поведение решений уравнения $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, при малом ε. Здесь λ подчинено ограничению, которое обеспечивает положительную определенность оператора $\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I$. Отдельно (в §9) рассмотрен важный для приложений случай $\lambda = 0$, в котором требуются дополнительные условия ортогональности на $\mathbf{F}$ и $\mathbf{u}_\varepsilon$.

В операторных терминах, установлены оценки

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon, \tag{0.6}$$

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon^{1/2}. \tag{0.7}$$

Здесь $K_N(\varepsilon)$ — соответствующий корректор. При этом корректор имеет различную форму в зависимости от свойств периодического решения $\Lambda(\mathbf{x})$ вспомогательной задачи (1.7). В общем случае корректор содержит вспомогательный сглаживающий оператор. Если Λ ограничено, корректор имеет стандартный вид. Помимо аппроксимации решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ получена также аппроксимация потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$. В строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ получена точная по порядку оценка

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O}')} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.8}$$

Основным достижением работы автор считает точную по порядку оценку (0.6).

0.5. Метод основан на использовании результатов (0.2), (0.3) для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$ и на учете влияния границы. Основные трудности связаны с оцениванием „поправки типа пограничного слоя" $\mathbf{w}_\varepsilon$ — решения задачи Неймана для однородного уравнения $\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{w}_\varepsilon + \lambda \mathbf{u}_\varepsilon = 0$ в $\mathcal{O}$ с краевым условием $\partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{w}_\varepsilon = \boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ на $\partial\mathcal{O}$. Здесь $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ строится определенным образом по решению $\mathbf{u}_0$ усредненной задачи и содержит быстро осциллирующие коэффициенты (см. §4).

Некоторые технические приемы заимствованы из [ZhPas], в частности, использование сглаживания по Стеклову.

Сначала устанавливается оценка (0.7). Для ее доказательства необходимо получить оценку H^1-нормы функции $\mathbf{w}_\varepsilon$ через $C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$. Затем мы доказываем неравенство (0.6), для чего требуется получить оценку L_2-нормы поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ через $C\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$. При этом мы опираемся на уже доказанную оценку (0.7) и применяем соображения двойственности.

0.6. Структура статьи. В работе девять параграфов. В §1 введен класс рассматриваемых операторов, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Дано описание эффективного оператора и корректора. Приведены нужные для дальнейшего результаты из [BSu2,4] и [PSu2]. Точнее, из известных результатов об аппроксимации оператора $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ мы выводим теоремы об аппроксимации резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1}$ при любом $\lambda > 0$. В §2 обсуждается постановка задачи Неймана в ограниченной области, приводится ряд вспомогательных сведений, описана усредненная задача. В §3 собраны вспомогательные утверждения разного характера, которые нужны в дальнейшем. В §4 содержатся формулировки главных результатов (теоремы 4.1 и 4.2) и приведен первый этап доказательства: введена поправка типа пограничного слоя, и доказательства теорем 4.1 и 4.2 сведены к вопросам об оценках этой поправки. §5 содержит доказательство теоремы 4.2, §6 — доказательство теоремы 4.1. В §7 изучается случай, когда $\Lambda \in L_\infty$: показано, что в этом случае можно избавиться от сглаживающего оператора в корректоре. В §8 рассматриваются оценки в строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ области $\mathcal{O}$: показано, что из оценки (0.6) и результатов в $\mathbb{R}^d$ можно получить оценку (0.8). Наконец, §9 посвящен изучению случая $\lambda = 0$. Результаты в этом случае выводятся из теорем для случая $\lambda > 0$.

0.7. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{H}$ и $\|\cdot\|_\mathfrak{H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Через $I = I_\mathfrak{H}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$.

Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$; $\mathbf{1} = \mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — $(n\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как оператора в $\mathbb{C}^n$. Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n=1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но иногда мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций.

0.8. Благодарности. Результаты работы были получены и текст статьи написан во время визита автора в Институт Миттаг-Леффлера (Юршхольм, Швеция) в сентябре–октябре 2012 г. Автор выражает глубокую признательность директору Института Арию Лаптеву, организаторам программы Григорию Розенблюму и Георгию Райкову, всему коллективу Института за теплое гостеприимство и создание прекрасных условий для научного творчества.

§1. Задача усреднения для периодического эллиптического оператора в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

В этом параграфе мы описываем класс рассматриваемых матричных эллиптических операторов и приводим результаты об усреднении для задачи в $\mathbb{R}^d$, полученные в [BSu2], [BSu4], а также в [PSu2]. Точнее, из уже известных результатов об аппроксимации резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ мы получаем теоремы об аппроксимации резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1}$ при любом $\lambda > 0$.

1.1. Решетки в $\mathbb{R}^d$. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d \in \mathbb{R}^d$:

$$\Gamma = \{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d:\ \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d \nu_j \mathbf{a}_j,\quad \nu_j\in\mathbb{Z}\},$$

и пусть Ω — (элементарная) ячейка решетки Γ:

$$\Omega := \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\ \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \tau_j\mathbf{a}_j,\quad -\frac{1}{2} < \tau_j < \frac{1}{2}\}.$$

Будем пользоваться обозначением $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$.

Двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$ базис $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_d$ в $\mathbb{R}^d$ определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}_i,\mathbf{a}_j\rangle = 2\pi\delta_{ij}$. Этот базис порождает решетку $\widetilde{\Gamma}$, двойственную к решетке Γ. Ниже используются обозначения

$$r_0 = \frac{1}{2}\min_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}|\mathbf{b}|,\quad r_1 = \frac{1}{2}\operatorname{diam}\Omega.$$

Через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Если $\varphi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, обозначим

$$\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0.$$

1.2. Класс операторов. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается ДО $\mathcal{A}_\varepsilon$ второго порядка, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0. \tag{1.1}$$

Здесь измеримая эрмитова матрица-функция $g(\mathbf{x})$ размера $m \times m$ (вообще говоря, с комплексными элементами) предполагается периодической относительно решётки Γ, равномерно положительно определенной и ограниченной, т. е.

$$c\mathbf{1}_m \leqslant g(\mathbf{x}) \leqslant \widetilde{c}\mathbf{1}_m, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d; \quad 0 < c \leqslant \widetilde{c} < \infty.$$

Далее, $b(\mathbf{D})$ — однородный $(m \times n)$-матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^{d} b_l D_l, \tag{1.2}$$

где b_l — постоянные матрицы (вообще говоря, с комплексными элементами). Оператору $b(\mathbf{D})$ отвечает символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Предполагается, что $m \geqslant n$ и

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \ 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \tag{1.3}$$

Это условие равносильно существованию постоянных α_0 и α_1 таких, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{1.4}$$

Отметим сразу, что из (1.4) следует оценка

$$|b_l| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad l = 1, \dots, d. \tag{1.5}$$

Строгое определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ даётся через соответствующую квадратичную форму

$$a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

При сделанных предположениях эта форма замкнута в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и неотрицательна. Используя преобразование Фурье и условие (1.4), легко убедиться, что выполнены оценки

$$c_0 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant a_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{1.6}$$

где $c_0 = \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$, $c_1 = \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}$.

Простейший пример оператора (1.1) — это скалярный эллиптический оператор $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$. В этом случае $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$. Очевидно, условие (1.4) выполнено при $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$. Оператор теории упругости также допускает запись в виде (1.1) при $n = d$, $m = d(d+1)/2$. Эти и другие примеры подробно рассмотрены в [BSu2].

1.3. Эффективный оператор. Для формулировки результатов нам нужно описать эффективный оператор $\mathcal{A}^0$.

Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — матрица-функция размера $n\times m$, являющаяся (слабым) Γ-периодическим решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.7}$$

Иными словами, для столбцов $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,m$, матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$ верно следующее: $\mathbf{v}_j \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$, справедливо тождество

$$\int_\Omega \langle g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\mathbf{v}_j(\mathbf{x}) + \widehat{\mathbf{e}}_j), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x})\rangle\, d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n),$$

и $\int_\Omega \mathbf{v}_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$. Здесь $\widehat{\mathbf{e}}_1,\dots,\widehat{\mathbf{e}}_m$ — стандартные орты в $\mathbb{C}^m$.

Так называемая *эффективная матрица* g^0 размера $m \times m$ строится по следующему правилу:

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.8}$$

где

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m \right). \tag{1.9}$$

Оказывается, что матрица g^0 положительна. *Эффективный оператор* $\mathcal{A}^0$ для оператора (1.1) задается дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$$

на области определения $H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

Ниже нам понадобятся следующие оценки для $\Lambda(\mathbf{x})$, установленные в [BSu3, (6.28) и п. 7.3]:

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} m^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \tag{1.10}$$

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} m^{1/2} (2r_0)^{-1} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{1.11}$$

1.4. Свойства эффективной матрицы. Следующие свойства эффективной матрицы установлены в [BSu2, гл. 3, теорема 1.5].

Предложение 1.1. *Для эффективной матрицы справедливы оценки*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{1.12}$$

Здесь

$$\overline{g} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \underline{g} = \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

При $m = n$ эффективная матрица g^0 совпадает с $\underline{g}$.

Оценки (1.12) известны в теории усреднений для конкретных ДО как вилка Фойгта-Рейсса. Выделим случаи, когда в (1.12) реализуется верхняя или нижняя грань. Следующие утверждения получены в [BSu2, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7].

Предложение 1.2. *Равенство* $g^0 = \overline{g}$ *равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.13}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})$.

Предложение 1.3. *Равенство* $g^0 = \underline{g}$ *равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.14}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})^{-1}$.

Очевидно, из (1.12) вытекают оценки нормы для матриц g^0 и $(g^0)^{-1}$:

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.15}$$

Отметим оценку снизу для символа эффективного оператора $\mathcal{A}^0$, вытекающую из (1.4) и (1.15):

$$b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) \geqslant c_0 |\boldsymbol{\xi}|^2 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \quad c_0 = \alpha_0 \|g^{-1}\|_\infty^{-1}. \tag{1.16}$$

1.5. Сглаживание по Стеклову. Нам понадобится вспомогательный сглаживающий оператор S_ε, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ по правилу

$$(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z})\, d\mathbf{z} \tag{1.17}$$

и называемый *сглаживающим оператором по Стеклову*. Отметим, что

$$\|S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1. \tag{1.18}$$

Очевидно, $D^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u} = S_\varepsilon D^\alpha \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ для любого мультииндекса α, такого что $|\alpha| \leqslant s$. Поэтому

$$\|S_\varepsilon\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to H^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1, \quad s \in \mathbb{N}. \tag{1.19}$$

Укажем некоторые свойства оператора (1.17), см. [ZhPas, леммы 1.1 и 1.2] или [PSu2, предложения 3.1, 3.2].

Предложение 1.4. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ *выполнена оценка*

$$\|S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Предложение 1.5. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$*, такая что* $f \in L_2(\Omega)$. *Пусть* $[f^\varepsilon]$ *— оператор умножения на функцию* $f^\varepsilon(\mathbf{x})$. *Тогда оператор* $[f^\varepsilon] S_\varepsilon$ *непрерывен в* $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, *причем*

$$\|[f^\varepsilon] S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \varepsilon > 0.$$

1.6. Результаты для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим эллиптическое уравнение в $\mathbb{R}^d$:

$$\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \lambda \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}, \tag{1.20}$$

где $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\lambda > 0$ — параметр. Известно, что при $\varepsilon \to 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ сходится в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к решению „усреднённого“ уравнения

$$\mathcal{A}^0 \mathbf{u}_0 + \lambda \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}. \tag{1.21}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение уравнения* (1.20) *и* $\mathbf{u}_0$ — *решение уравнения* (1.21). *Справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_1(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Иначе говоря, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \lambda I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant\ C_1(\lambda)\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.22)$$

Здесь $C_1(\lambda) = \check{C}_1\lambda^{-1/2}$, *а постоянная* $\check{C}_1$ *зависит только от норм* $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от констант* α_0, α_1 *из* (1.4) *и от параметров решётки* Γ.

Доказательство. В работе [BSu2, гл. 4, теорема 2.1] оценка (1.22) была доказана в случае $\lambda = 1$ при $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Нам надо лишь объяснить, как перенести оценку на общий случай.

Заметим, что при $\lambda = 1$ и $\varepsilon > 1$ левая часть в (1.22) очевидным образом оценивается через 2, а тогда и через 2ε. Поэтому будем исходить из оценки

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant\ \check{C}_1\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.23)$$

Постоянная $\check{C}_1$ зависит лишь от $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0, α_1 и от параметров решётки Γ.

Далее, за счет масштабного преобразования (1.23) равносильно неравенству

$$\|(\mathcal{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant\ \check{C}_1\varepsilon^{-1}, \quad \varepsilon > 0. \quad (1.24)$$

Здесь $\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Если записать (1.24) с заменой ε на $\varepsilon\lambda^{1/2}$, а затем применить обратное преобразование, то получится (1.22) с постоянной $C_1(\lambda) = \check{C}_1\lambda^{-1/2}$. $\bullet$

Для того, чтобы получить аппроксимацию решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в пространстве $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, необходимо учесть корректор первого порядка. Положим

$$K_\lambda(\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + \lambda I)^{-1}. \quad (1.25)$$

Здесь $[\Lambda^\varepsilon]$ — оператор умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, а S_ε — сглаживающий оператор, определенный в (1.17). Оператор (1.25) непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Действительно, оператор $b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + \lambda I)^{-1}$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. Оператор $[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывно переводит $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Это легко проверить с помощью предложения 1.5, учитывая, что $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. При этом $\varepsilon\|K_\lambda(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(1)$ при малом ε. (См. ниже доказательство теоремы 1.7, где это проверено при $\lambda = 1$.)

„Первое приближение“ к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ имеет вид

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}^0 + \lambda I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K_\lambda(\varepsilon)\mathbf{F}. \quad (1.26)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.7. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение уравнения* (1.20) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение уравнения* (1.21). *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (1.26). *Тогда*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_2(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.27}$$

Иначе говоря, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \lambda I)^{-1} - \varepsilon K_\lambda(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant\ C_2(\lambda)\varepsilon,\ \varepsilon > 0. \tag{1.28}$$

Здесь $C_2(\lambda) = \widehat{C}_2(\lambda^{-1/2} + 1)$, *а постоянная* $\widehat{C}_2$ *зависит только от* $m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *и параметров решётки* Γ.

Доказательство. В [BSu4, теорема 10.6] аналогичная теорема была установлена при $\lambda = 1$, но с другим сглаживающим оператором вместо S_ε. В [PSu2, теорема 3.3] было выяснено, что можно перейти к сглаживателю S_ε, и неравенство (1.28) было доказано при $\lambda = 1$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Нам надо лишь объяснить, как перенести оценку на общий случай.

Итак, будем исходить из оценки

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant\ \check{C}_2\varepsilon,\ 0 < \varepsilon \leqslant 1. \tag{1.29}$$

Постоянная $\check{C}_2$ зависит лишь от $m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметров решётки Γ.

При $\varepsilon > 1$ оценки тривиальны: достаточно оценить каждый оператор под знаком нормы в (1.29) по отдельности. Из нижнего неравенства (1.6) вытекает оценка

$$\min\{c_0, 1\}\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}\mathbf{v}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant ((\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{v})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

при $\mathbf{v} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, откуда

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \max\{1, c_0^{-1/2}\} = \max\{1, \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\}. \tag{1.30}$$

С учетом (1.15) для нормы $(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}$ справедлива такая же оценка:

$$\|(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \max\{1, c_0^{-1/2}\}. \tag{1.31}$$

Оценим теперь $(L_2 \to H^1)$-норму оператора $\varepsilon K_1(\varepsilon) = \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}$. Пусть $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Тогда с учетом предложения 1.5

$$\|\varepsilon K_1(\varepsilon)\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Используя преобразование Фурье и (1.4), (1.16), получаем:

$$\begin{aligned}\|b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi})|^2|(b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{1})^{-1}|^2|\widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \\ &\leqslant \alpha_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2(c_0|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1)^{-2}|\widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})|^2\, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \alpha_1(2c_0)^{-1}\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{1.32}$$

Здесь $\widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Следовательно,

$$\|\varepsilon K_1(\varepsilon)\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\alpha_1^{1/2}(2c_0)^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.33}$$

Рассмотрим производные

$$\varepsilon\partial_j(K_1(\varepsilon)\mathbf{F}) = [(\partial_j\Lambda)^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0+I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial_j(\mathcal{A}^0+I)^{-1}\mathbf{F}.$$

С учетом предложения 1.5 имеем:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^d\|\varepsilon\partial_j(K_1(\varepsilon)\mathbf{F})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2|\Omega|^{-1}\|\mathbf{D}\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0+I)^{-1}\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &+ 2\varepsilon^2|\Omega|^{-1}\|\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\sum_{j=1}^d\|b(\mathbf{D})\partial_j(\mathcal{A}^0+I)^{-1}\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{1.34}$$

Аналогично (1.32) получаем:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^d\|b(\mathbf{D})\partial_j(\mathcal{A}^0+I)^{-1}\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \alpha_1\int_{\mathbb{R}^d}|\boldsymbol{\xi}|^4(c_0|\boldsymbol{\xi}|^2+1)^{-2}|\widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})|^2\,d\boldsymbol{\xi} \leqslant \alpha_1 c_0^{-2}\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{1.35}$$

В итоге в силу (1.32), (1.34) и (1.35) справедлива оценка

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^d\|\varepsilon\partial_j(K_1(\varepsilon)\mathbf{F})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant |\Omega|^{-1}\|\mathbf{D}\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\alpha_1 c_0^{-1}\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &+ 2\varepsilon^2|\Omega|^{-1}\|\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\alpha_1 c_0^{-2}\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{1.36}$$

Теперь из (1.33) и (1.36) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}\|\varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant |\Omega|^{-1/2}\alpha_1^{1/2}c_0^{-1/2}\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\\ &+ \varepsilon|\Omega|^{-1/2}\alpha_1^{1/2}\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)}(2c_0)^{-1/2}(1+4c_0^{-1})^{1/2}.\end{aligned}$$

С учетом (1.10), (1.11) это приводит к оценке

$$\|\varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_3 + C_4\varepsilon, \quad \varepsilon>0, \tag{1.37}$$

где

$$\begin{aligned}&C_3 = m^{1/2}\alpha_1^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty},\\ &C_4 = 2^{-3/2}m^{1/2}r_0^{-1}\alpha_1^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\left(1+4\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Теперь из (1.30), (1.31) и (1.37) вытекает оценка

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{A}_\varepsilon+I)^{-1} - (\mathcal{A}^0+I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant 2\max\{1,\alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\} + C_3 + C_4\varepsilon, \quad \varepsilon>0.\end{aligned}$$

Разумеется, при $\varepsilon > 1$ правая часть не превосходит $\widetilde{C}_2\varepsilon$, где $\widetilde{C}_2 = 2\max\{1, \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\} + C_3 + C_4$. Комбинируя это с (1.29), получаем оценку типа (1.29) уже при всех $\varepsilon > 0$:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_2\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.38}$$

где $\widehat{C}_2 = \max\{\check{C}_2, \widetilde{C}_2\}$.

Нетрудно вывести из неравенства (1.38) аналогичную аппроксимацию для $(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1}$ с произвольным $\lambda > 0$. Действительно, (1.38) равносильно оценке

$$\|(-\Delta + I)^{1/2}\left((\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_2\varepsilon \tag{1.39}$$

при $\varepsilon > 0$. За счет масштабного преобразования (1.39) равносильно неравенству

$$\begin{gathered}\|(-\Delta + \varepsilon^2 I)^{1/2}\left((\mathcal{A} + \varepsilon^2 I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1} - \Lambda S b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0 + \varepsilon^2 I)^{-1}\right)\|_{L_2\to L_2} \\ \leqslant \widehat{C}_2, \quad \varepsilon > 0.\end{gathered} \tag{1.40}$$

Здесь $S = S_1$ — оператор (1.17) при $\varepsilon = 1$. Запишем (1.40) с заменой ε на $\varepsilon\lambda^{1/2}$ и выполним обратное преобразование. Получаем:

$$\|(-\Delta + \lambda I)^{1/2}\left((\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \lambda I)^{-1} - \varepsilon K_\lambda(\varepsilon)\right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_2\varepsilon$$

при $\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает (1.28) с постоянной $C_2(\lambda) = \widehat{C}_2(\lambda^{-1/2} + 1)$. $\bullet$

Из теоремы 1.7 можно получить аппроксимацию так называемых потоков $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$.

Теорема 1.8. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение уравнения* (1.20) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение уравнения* (1.21). *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} \leqslant C_5(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.41}$$

Здесь $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица* (1.9), $C_5(\lambda) = C_5'\lambda^{-1/2} + C_5''$, *а постоянные* C_5', C_5'' *зависят только от* $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметров решётки* Γ.

Доказательство. Из (1.4) и (1.27) вытекает оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_2(\lambda)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.42}$$

С учетом (1.2) и (1.26) имеем:

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + \varepsilon\sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\mathbf{u}_0. \tag{1.43}$$

Оценим последнее слагаемое в правой части (1.43) с помощью (1.5) и предложения 1.5:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\left\|\sum_{l=1}^{d} g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \mathbf{u}_0\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} |\Omega|^{-1/2} \|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} d^{1/2} \|\mathbf{D} b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{1.44}$$

Далее, из предложения 1.4 следует оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - g^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} r_1 \|\mathbf{D} b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.45}$$

В силу (1.9) справедливо равенство

$$g^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 = \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0. \tag{1.46}$$

Теперь из (1.43)–(1.46) с учетом (1.11) вытекает неравенство

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_6 \varepsilon \|\mathbf{D} b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.47}$$

где $C_6 = (dm)^{1/2}(2r_0)^{-1}\alpha_1^{1/2}\alpha_0^{-1/2}\|g\|^{3/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} + r_1\|g\|_{L_\infty}$.

Аналогично (1.35) имеем:

$$\|\mathbf{D} b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^4 (c_0|\boldsymbol{\xi}|^2 + \lambda)^{-2} |\widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \alpha_1 c_0^{-2} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.48}$$

Сопоставляя (1.42) и (1.47), (1.48), приходим к (1.41) с постоянной $C_5(\lambda) = C_5'\lambda^{-1/2} + C_5''$, где $C_5' = \widehat{C}_2\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}$, $C_5'' = \widehat{C}_2\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty} + C_6\alpha_1^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}$. •

Выделим случай, когда корректор обращается в ноль. Следующее утверждение вытекает из теоремы 1.7, предложения 1.2 и уравнения (1.7).

Предложение 1.9. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение уравнения* (1.20) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение уравнения* (1.21). *Если* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.13), *то* $\Lambda = 0$ *и* $K_\lambda(\varepsilon) = 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_2(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0.$$

1.7. Результаты для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$ в случае $\Lambda \in L_\infty$. Оказывается, что при некоторых дополнительных предположениях относительно свойств решения задачи (1.7), сглаживающий оператор S_ε в выражении (1.25) для корректора может быть устранен (заменен тождественным оператором). Наложим следующее условие.

Условие 1.10. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* $\Lambda(\mathbf{x})$ *задачи* (1.7) *ограничено*: $\Lambda \in L_\infty$.

Нам понадобится следующее мультипликаторное свойство матрицы Λ, см. [PSu2, следствие 2.4].

Предложение 1.11. *При условии* 1.10 *для любой функции* $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *при* $\varepsilon > 0$ *выполнено неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}u|^2 d\mathbf{x}.$$

Постоянные β_1, β_2 *задаются выражениями*

$$\beta_1 = 16 m \alpha_0^{-1} \|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty},$$
$$\beta_2 = 2(1 + 2d\alpha_0^{-1}\alpha_1 + 20 d\alpha_0^{-1}\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty}).$$

Положим

$$K^0_\lambda(\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}^0 + \lambda I)^{-1}.$$

Используя предложение 1.11, легко понять, что при условии 1.10 оператор $K^0_\lambda(\varepsilon)$ непрерывен из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим вместо (1.26) другое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}^0 + \lambda I)^{-1} \mathbf{F} + \varepsilon K^0_\lambda(\varepsilon) \mathbf{F}. \tag{1.49}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.12. *Пусть выполнено условие* 1.10. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение уравнения* (1.20) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение уравнения* (1.21). *Пусть функция* $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ *определена в* (1.49). *Тогда*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_7(\lambda) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.50}$$

Иначе говоря, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + \lambda I)^{-1} - \varepsilon K^0_\lambda(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_7(\lambda)\varepsilon,\ \varepsilon > 0.$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} \leqslant C_8(\lambda) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad \varepsilon > 0, \tag{1.51}$$

где матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *определена в* (1.9), $C_7(\lambda) = C'_7 \lambda^{-1/2} + C''_7$, $C_8(\lambda) = C'_8 \lambda^{-1/2} + C''_8$, *а постоянные* C'_7, C''_7, C'_8, C''_8 *зависят только от* $d, m, \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и параметров решётки* Γ, *а также от нормы* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Доказательство. Для доказательства оценки (1.50) нам нужно оценить H^1-норму функции $\varepsilon \Lambda^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0$. Начнем с L_2-нормы. В силу условия 1.10 и оценки (1.18) имеем

$$\varepsilon \|\Lambda^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\varepsilon \|\Lambda\|_{L_\infty} \|b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.52}$$

Рассмотрим производные

$$\partial_l (\varepsilon \Lambda^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0) = (\partial_l \Lambda)^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D}) \partial_l \mathbf{u}_0. \tag{1.53}$$

Второе слагаемое в правой части (1.53) оценивается с помощью условия 1.10 и неравенства (1.18):

$$\sum_{l=1}^d \|\varepsilon \Lambda^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D}) \partial_l \mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 4\varepsilon^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \|\mathbf{D} b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.54}$$

Для оценки первого слагаемого в правой части (1.53) применим предложение 1.11. Получаем:

$$\sum_{l=1}^{d} \|(\partial_l \Lambda)^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leqslant \beta_1 \|(I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2 \varepsilon^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \sum_{l=1}^{d} \|(I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D}) D_l \mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.55}$$

В силу предложения 1.4

$$\|(I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\mathbf{D} b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|. \tag{1.56}$$

Теперь из (1.55), (1.56) и (1.18) вытекает неравенство

$$\sum_{l=1}^{d} \|(\partial_l \Lambda)^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^2 \left(\beta_1 r_1^2 + 4\beta_2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty}\right) \|\mathbf{D} b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.57}$$

В итоге из (1.53), (1.54), (1.57) следует оценка

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{d} \|\partial_l (\varepsilon \Lambda^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2\varepsilon^2 \left(4(1+\beta_2)\|\Lambda\|^2_{L_\infty} + \beta_1 r_1^2\right) \|\mathbf{D} b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

Аналогично (1.32) получается оценка

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1 \int_{\mathbb{R}^d} |\boldsymbol{\xi}|^2 (c_0 |\boldsymbol{\xi}|^2 + \lambda)^{-2} |\widehat{\mathbf{F}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant \alpha_1 (2\lambda c_0)^{-1} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Вместе с (1.52), (1.58) и (1.48) это дает

$$\|\varepsilon \Lambda^\varepsilon (I - S_\varepsilon) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_9(\lambda) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.59}$$

где $C_9(\lambda) = C_9' \lambda^{-1/2} + C_9''$, $C_9' = \sqrt{2} \|\Lambda\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$,

$$C_9'' = \sqrt{2} \alpha_1^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty} \left(2(1+\beta_2)^{1/2} \|\Lambda\|_{L_\infty} + \beta_1^{1/2} r_1\right).$$

В результате из (1.27) и (1.59) с учетом (1.26) и (1.49) вытекает искомая оценка (1.50) с постоянной $C_7(\lambda) = C_7' \lambda^{-1/2} + C_7''$, где $C_7' = \widehat{C}_2 + C_9'$, $C_7'' = \widehat{C}_2 + C_9''$.

Для доказательства (1.51) заметим, что из (1.50) с учетом (1.4) следует оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon C_7(\lambda) \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.60}$$

Далее, в силу (1.2), (1.9) и (1.49)

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \check{\mathbf{v}}_\varepsilon = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + \varepsilon \sum_{l=1}^{d} g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \mathbf{u}_0. \tag{1.61}$$

Последний член в правой части (1.61) оценим на основании (1.5), (1.48) и условия 1.10:

$$\left\| \varepsilon \sum_{l=1}^{d} g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \mathbf{u}_0 \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \alpha_1 c_0^{-1} d^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (1.62)$$

Теперь из (1.60)–(1.62) вытекает (1.51) с постоянной $C_8(\lambda) = C_8' \lambda^{-1/2} + C_8''$, где $C_8' = C_7' \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2}$,

$$C_8'' = C_7'' \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} + d^{1/2} \|\Lambda\|_{L_\infty} \alpha_1 \alpha_0^{-1} \|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \ \bullet$$

В некоторых случаях условие 1.10 выполнено автоматически. Следующее утверждение проверено в [BSu4, лемма 8.7].

Предложение 1.13. *Условие* 1.10 *заведомо выполнено, если имеет место хотя бы одно из следующих предположений*:

1°. *размерность не превосходит двух, т. е.* $d \leqslant 2$;

2°. *оператор действует в* $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, *и имеет вид* $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ — *вещественная матрица*;

3°. *размерность произвольна и* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнено* (1.14).

Отметим, что выполнение условия 1.10 можно обеспечить и за счет предположения о некоторой гладкости матрицы $g(\mathbf{x})$.

Выделим специальный случай, когда $g^0 = \underline{g}$. В этом случае матрица (1.9) оказывается постоянной: $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Кроме того, в этом случае выполнено условие 1.10. Применяя утверждение теоремы 1.12 относительно аппроксимации потоков, приходим к следующему предложению.

Предложение 1.14. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение уравнения* (1.20), $\mathbf{u}_0$ — *решение уравнения* (1.21), *и* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon$. *Пусть* $g^0 = \underline{g}$, *т.е. выполнены соотношения* (1.14). *Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} \leqslant C_8(\lambda) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)}, \quad \varepsilon > 0.$$

§2. Задача Неймана в ограниченной области: предварительные рассмотрения

2.1. Коэрцитивность. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Накладывается дополнительное условие на символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$ при $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$.

Условие 2.1. *Предположим, что для матрицы-функции* $b(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d$, *выполнено*

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^d. \quad (2.1)$$

Отметим, что условие 2.1 является более ограничительным, чем условие (1.3). Как установлено в книге [Ne] (см. теорему 7.8 из §3.7), условие 2.1 является *необходимым и достаточным условием* *коэрцитивности* формы $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}$ на классе $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ (причем это верно в любой ограниченной области $\mathcal{O}$ с липшицевой границей).

Предложение 2.2. [Ne] *Условие* 2.1 *необходимо и достаточно для существования постоянных $\mathcal{C}_1 > 0$, $\mathcal{C}_2 \geqslant 0$ таких, что выполнено неравенство типа Гординга*

$$\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \mathcal{C}_2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \geqslant \mathcal{C}_1\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.2}$$

Замечание 2.3. Постоянные $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ зависят от матрицы $b(\boldsymbol{\xi})$ и от области $\mathcal{O}$, но в общем случае их трудно контролировать явно. Однако, часто для конкретных операторов их можно найти. Поэтому в дальнейшем мы будем ссылаться на зависимость других постоянных от $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$.

Всюду ниже *условие* 2.1 *предполагается выполненнным.*

2.2. Постановка задачи. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ при условии Неймана на $\partial\mathcal{O}$. Строгое определение дается в терминах квадратичной формы

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.3}$$

В силу (1.2) и (1.5) выполнена оценка сверху

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant d\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.4}$$

Из (2.2) следует оценка снизу

$$a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \left(\mathcal{C}_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} - \mathcal{C}_2 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \right), \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.5}$$

В силу (2.4), (2.5) форма (2.3) замкнута и полуограничена снизу. *По определению, $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ есть самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, порожденный квадратичной формой* (2.3).

Пусть $\lambda > 0$ — параметр, подчиненный следующему ограничению:

$$\lambda > \mathcal{C}_2 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{2.6}$$

Тогда из (2.5) вытекает оценка

$$\begin{gathered} a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] + \lambda \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \geqslant c_\lambda \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \\ c_\lambda := \min\{\mathcal{C}_1 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}, \lambda - \mathcal{C}_2 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Поэтому оператор $\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I$ положительно определен.

Наша цель — найти аппроксимацию при малом ε обратного оператора $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, а также по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В терминах решений — нас интересует поведение обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ задачи Неймана

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \ \ \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad \partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Тогда $\mathbf{u}_\varepsilon = (\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1}\mathbf{F}$.

Здесь использовано обозначение $\partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}}$ для соответствующей "конормальной производной". Пусть $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^d \nu_j(\mathbf{x})\mathbf{e}_j$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\mathcal{O}$ в точке $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}$. Здесь $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — стандартные орты в $\mathbb{R}^d$. Определим матрицу $b^*(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})) = \sum_{l=1}^d b_l^* \nu_l(\mathbf{x})$. Тогда формальное дифференциальное выражение для конормальной производной имеет вид:

$$\partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) := b^*(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))g^\varepsilon(\mathbf{x})b(\partial)\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{l,j=1}^d b_l^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b_j \nu_l(\mathbf{x}) \partial_j \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

Поясним, что запись краевой задачи в виде (2.8) при наших предположениях является формальной. *По определению, обобщенным решением задачи* (2.8) *называется элемент* $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, *удовлетворяющий интегральному тождеству*

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\rangle + \lambda \langle \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}\rangle \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\eta}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{2.9}$$

С учетом (2.4) и (2.7) форму $a_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}] + \lambda(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}$ можно принять за (новое) скалярное произведение в пространстве $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Правая часть в (2.9) является антилинейным непрерывным функционалом над $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. В силу теоремы Рисса решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ существует и единственно; с учетом (2.7) оно подчинено оценке

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_\lambda^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.10}$$

В операторных терминах (2.10) означает, что

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_\lambda^{-1}. \tag{2.11}$$

2.3. Оператор следа. Оператор продолжения. Ниже нам понадобятся оператор следа и оператор продолжения с границы в область. При нашем предположении об области $\mathcal{O}$ (граница имеет класс гладкости $C^{1,1}$) в силу теоремы о следах корректно определен оператор следа γ, сопоставляющий функции $\mathbf{u}$ в области $\mathcal{O}$ ее след на границе $\partial\mathcal{O}$, как линейный непрерывный оператор

$$\gamma : H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \to H^{s-1/2}(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n), \quad s = 1, 2. \tag{2.12}$$

При этом

$$\begin{aligned} &\|\gamma\|_{H^1(\mathcal{O}) \to H^{1/2}(\partial\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}_1, \\ &\|\gamma\|_{H^2(\mathcal{O}) \to H^{3/2}(\partial\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}_2, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где постоянные $\widehat{c}_1$, $\widehat{c}_2$ зависят только от области $\mathcal{O}$.

Существует линейный непрерывный оператор продолжения, сопоставляющий функции, заданной на границе, ее продолжение в область $\mathcal{O}$ (правый обратный к оператору (2.12)). Разумеется, этот оператор определен неоднозначно. Нам удобно фиксировать его выбор следующим образом. Рассмотрим краевую задачу Дирихле

$$-\Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} = 0 \ \text{ в } \mathcal{O}, \quad \mathbf{u}|_{\partial\mathcal{O}} = \boldsymbol{\varphi}, \tag{2.14}$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Как известно, существует единственное решение $\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, причем выполнена оценка

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{c}_1 \|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}.$$

Постоянная $\widetilde{c}_1$ зависит лишь от области $\mathcal{O}$. *Обозначим через T оператор, сопоставляющий функции $\boldsymbol{\varphi}$ решение $\mathbf{u}$ задачи* (2.14): $\mathbf{u} = T\boldsymbol{\varphi}$. Тогда

$$T : H^{1/2}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \to H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \tag{2.15}$$

— линейный непрерывный оператор, причем он является правым обратным к оператору (2.12) (с $s = 1$) и выполнена оценка

$$\|T\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{c}_1. \tag{2.16}$$

В силу теоремы о повышении гладкости (см., например, [McL, глава 4]), при условии $\boldsymbol{\varphi} \in H^{3/2}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ решение $\mathbf{u}$ принадлежит $H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ и оператор

$$T : H^{3/2}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \to H^2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n) \tag{2.17}$$

непрерывен. Его норма допускает оценку

$$\|T\|_{H^{3/2}(\partial\mathcal{O}) \to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{c}_2, \tag{2.18}$$

причем постоянная $\widetilde{c}_2$ зависит только от области $\mathcal{O}$. Оператор (2.17) является правым обратным к оператору (2.12) с $s = 2$.

2.4. Определение конормальной производной. Задача Неймана для однородного уравнения. Нам понадобится строгое определение понятия конормальной производной (отвечающей оператору $\mathcal{A}_\varepsilon$). Конормальная производная $\partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{f}$ определяется как элемент пространства $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, причем в основу определения кладется формула Грина, в которой считаются заданными функция $\mathbf{f} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ и правая часть уравнения. Для наших целей будет достаточно дать определение конормальной производной от функции $\mathbf{f} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ при условии, что $\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{f}$ принадлежит $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

Итак, пусть заданы $\mathbf{f} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ и $\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, причем $\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{f} = \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon$ внутри области $\mathcal{O}$, что понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{f}, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta} \rangle \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \langle \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{2.19}$$

Определим антилинейный функционал $l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi}]$ над $\boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ следующим образом:

$$l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{f}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} \langle \boldsymbol{\Phi}_\varepsilon, \mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x}, \tag{2.20}$$

где $\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ — какая-либо функция такая, что $\gamma\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi}$. В силу (2.19) правая часть в (2.20) не зависит от выбора продолжения $\mathbf{u}$

функции $\boldsymbol{\varphi}$, поэтому определение функционала (2.20) корректно. Удобно считать, что $\mathbf{u} = T\boldsymbol{\varphi}$, где оператор T определен в п. 2.3. Тогда с учетом (1.2), (1.5) и (2.16) видно, что функционал (2.20) непрерывен:

$$\begin{aligned} |l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi}]| &\leqslant \|\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \alpha_1 d\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{Df}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{Du}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \widetilde{c}_1 \left(\|\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \alpha_1 d\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{f}\|_{H^1(\mathcal{O})}\right)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Напомним, что пространство $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ является пространством, сопряженным к $H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ относительно спаривания в $L_2(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Значение функционала $\boldsymbol{\psi} \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ на элементе $\boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ принято записывать как $(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\mathcal{O})}$ (что является распространением скалярного произведения в $L_2(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ на пары из $H^{-1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\times H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$). При этом

$$\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})} = \sup_{0\neq\boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\mathcal{O})} \frac{|(\boldsymbol{\psi},\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\mathcal{O})}|}{\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}}. \tag{2.22}$$

Антилинейному непрерывному функционалу $l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi}]$ над $H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, определенному в (2.20), сопоставляется единственный элемент $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{O};C^n)$ такой, что

$$l_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi}] = (\boldsymbol{\psi}_\varepsilon,\boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\varphi}\in H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.23}$$

По определению, элемент $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon$ называют конормальной производной функции $\mathbf{f}$ и пишут $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon = \partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{f}$. Из (2.21)–(2.23) следует оценка

$$\|\partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{f}\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{c}_1\left(\|\boldsymbol{\Phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \alpha_1 d\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{f}\|_{H^1(\mathcal{O})}\right).$$

Обсудим теперь постановку задачи Неймана в случае однородного уравнения и неоднородного краевого условия. Пусть задан элемент $\boldsymbol{\psi}\in H^{-1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим обобщенное решение $\mathbf{r}_\varepsilon$ краевой задачи

$$\mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{r}_\varepsilon + \lambda\mathbf{r}_\varepsilon = 0 \ \text{ в } \mathcal{O}; \quad \partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{r}_\varepsilon = \boldsymbol{\psi} \ \text{ на } \partial\mathcal{O}. \tag{2.24}$$

По определению, *обобщенным решением задачи* (2.24) *называется элемент $\mathbf{r}_\varepsilon\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющий тождеству*

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{r}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\rangle + \lambda\langle\mathbf{r}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}\rangle\right)d\mathbf{x} = (\boldsymbol{\psi},\gamma\boldsymbol{\eta})_{L_2(\partial\mathcal{O})}, \quad \forall\boldsymbol{\eta}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.25}$$

Стандартным образом проверяется следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Пусть $\boldsymbol{\psi} \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда обобщенное решение $\mathbf{r}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ задачи* (2.24) *существует, единственно, и подчинено оценке*

$$\|\mathbf{r}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant c_\lambda^{-1}\widehat{c}_1\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \tag{2.26}$$

где постоянная c_λ определена в (2.7), *а $\widehat{c}_1$ — в* (2.13).

Доказательство. Как уже отмечалось, форма в левой части (2.25) может рассматриваться как скалярное произведение в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В силу

(2.13) и (2.22) правая часть в (2.25) представляет собой антилинейный непрерывный функционал над $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, причем выполнена оценка

$$|(\boldsymbol{\psi},\gamma\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}| \leqslant \widehat{c}_1 \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).$$

Тогда по теореме Рисса решение $\mathbf{r}_\varepsilon$ существует и единственно. С учетом (2.7) оно подчинено оценке (2.26). $\bullet$

2.5. „Усредненная“ задача. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим самосопряженный оператор $\mathcal{A}_N^0$, порожденный квадратичной формой

$$a_N^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \left\langle g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\right\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.27}$$

Здесь g^0 — эффективная матрица, определенная в (1.8). С учетом (1.15) прежние оценки (2.4), (2.5) справедливы с заменой левой части в них на форму (2.27).

Пусть λ по-прежнему подчинено условию (2.6). Пусть $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ — обобщенное решение задачи Неймана

$$b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \lambda\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}; \quad \partial^0_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \tag{2.28}$$

где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда $\mathbf{u}_0 = (\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1}\mathbf{F}$. Здесь формальное дифференциальное выражение для конормальной производной (отвечающей оператору $\mathcal{A}^0$) имеет вид

$$\partial^0_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = b^*(\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x}))g^0 b(\partial)\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{l,j=1}^d b_l^* g^0 b_j \nu_l(\mathbf{x})\partial_j\mathbf{u}(\mathbf{x}). \tag{2.29}$$

Обобщенным решением задачи (2.28) *называется элемент* $\mathbf{u}_0 \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, *удовлетворяющий интегральному тождеству*

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\langle g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\rangle + \lambda\langle\mathbf{u}_0,\boldsymbol{\eta}\rangle\right) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \langle\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \forall\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.30}$$

Решение существует, единственно и удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_\lambda^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.31}$$

В операторных терминах (2.31) означает, что

$$\|(\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_\lambda^{-1}. \tag{2.32}$$

В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ для решения $\mathbf{u}_0$ задачи (2.28) выполнено $\mathbf{u}_0 \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, причем справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}_\lambda\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}. \tag{2.33}$$

Здесь постоянная $\widehat{C}_\lambda$ зависит лишь от констант $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ из неравенства (2.2), от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от λ и от области $\mathcal{O}$. Для оправдания этого факта можно заметить, что оператор $b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ относится к классу *сильно эллиптических* матричных операторов и сослаться на теоремы о повышении гладкости решений сильно эллиптических систем (см., например, [McL, глава 4]).

Из сказанного следует, что левая часть в уравнении (2.28) принадлежит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$; уравнение можно понимать как равенство почти всюду в $\mathcal{O}$. Конормальная производная $\partial^0_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{u}_0$ корректно определена формулой вида (2.29) как элемент пространства $H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и краевое условие в (2.28) можно понимать в смысле теоремы о следах. Оценку (2.33) можно записать как

$$\|(\mathcal{A}^0_N+\lambda I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widehat{C}_\lambda. \tag{2.34}$$

Мы покажем, что решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (2.8) сходится в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ при $\varepsilon\to 0$ к решению $\mathbf{u}_0$ усредненной задачи (2.28). Мы оценим погрешность $\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}$, а также найдем аппроксимацию $\mathbf{u}_\varepsilon$ по норме в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

§3. Вспомогательные утверждения

В этом параграфе собраны разноплановые утверждения, которые понадобятся при доказательстве основных результатов работы.

3.1. Следующее утверждение является вариантом традиционной леммы, которая используется в теории усреднений (см., например, [ZhKO, гл. 1, §1]).

Лемма 3.1. *Пусть* $f_l(\mathbf{x})$, $l=1,\dots,d$, — Γ*-периодические* $(n\times m)$*-матрицы-функции в* $\mathbb{R}^d$*, причем*

$$f_l\in L_2(\Omega),\quad \int_\Omega f_l(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0,\quad l=1,\dots,d,\quad \sum_{l=1}^d D_l f_l(\mathbf{x})=0, \tag{3.1}$$

где последнее уравнение понимается в смысле теории распределений. Тогда существуют Γ*-периодические* $(n\times m)$*-матрицы-функции* $M_{lj}(\mathbf{x})$ *в* $\mathbb{R}^d$, $l,j=1,\dots,d$, *такие, что*

$$M_{lj}\in \widetilde{H}^1(\Omega),\quad \int_\Omega M_{lj}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0,\quad M_{lj}(\mathbf{x})=-M_{jl}(\mathbf{x}),\quad l,j=1,\dots,d, \tag{3.2}$$

$$f_l(\mathbf{x})=\sum_{j=1}^d \partial_j M_{lj}(\mathbf{x}),\quad l=1,\dots,d. \tag{3.3}$$

При этом справедливы оценки

$$\|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)}\leqslant (2r_0)^{-1}\left(\|f_l\|_{L_2(\Omega)}+\|f_j\|_{L_2(\Omega)}\right),\quad l,j=1,\dots,d. \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $\Phi_l(\mathbf{x})$, $l=1,\dots,d$, — Γ-периодические $(n\times m)$-матрицы-функции в $\mathbb{R}^d$, такие что

$$\Delta\Phi_l(\mathbf{x})=f_l(\mathbf{x}),\quad \int_\Omega \Phi_l(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0,\quad l=1,\dots,d. \tag{3.5}$$

Условие разрешимости уравнения в (3.5) выполнено в силу $\overline{f_l}=0$. Решение Φ_l существует, единственно и $\Phi_l\in\widetilde{H}^2(\Omega)$, поскольку $f_l\in L_2(\Omega)$.

Положим

$$M_{lj}(\mathbf{x}):=\partial_j\Phi_l(\mathbf{x})-\partial_l\Phi_j(\mathbf{x}),\quad l,j=1,\dots,d. \tag{3.6}$$

Тогда автоматически выполнено $M_{lj} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, $\overline{M_{lj}} = 0$ и $M_{lj}(\mathbf{x}) = -M_{jl}(\mathbf{x})$. Вычислим

$$\sum_{j=1}^{d} \partial_j M_{lj}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{d} (\partial_j^2 \Phi_l(\mathbf{x}) - \partial_j \partial_l \Phi_j(\mathbf{x})) = \Delta\Phi_l(\mathbf{x}) - \partial_l \left(\sum_{j=1}^{d} \partial_j \Phi_j(\mathbf{x}) \right). \tag{3.7}$$

Заметим, что в силу (3.1) и (3.5) выполнено уравнение

$$0 = \sum_{j=1}^{d} \partial_j f_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{d} \partial_j \Delta\Phi_j(\mathbf{x}) = \Delta \left(\sum_{j=1}^{d} \partial_j \Phi_j(\mathbf{x}) \right).$$

Тем самым, $\sum_{j=1}^{d} \partial_j \Phi_j$ — периодическая гармоническая функция с нулевым средним значением. Следовательно, $\sum_{j=1}^{d} \partial_j \Phi_j = 0$. Теперь из (3.5) и (3.7) вытекает равенство $f_l(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{d} \partial_j M_{lj}(\mathbf{x})$. Соотношения (3.2), (3.3) доказаны.

Остается проверить оценку (3.4). Используя (3.5), легко показать, что Φ_l удовлетворяет оценке

$$\|\mathbf{D}\Phi_l\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \|f_l\|_{L_2(\Omega)} \|\Phi_l\|_{L_2(\Omega)}.$$

Заметим, что для всякой Γ-периодической функции $\varphi \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ с нулевым средним выполнено $\|\varphi\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1} \|\mathbf{D}\varphi\|_{L_2(\Omega)}$. Следовательно,

$$\|\mathbf{D}\Phi_l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1} \|f_l\|_{L_2(\Omega)}, \quad l = 1, \dots, d.$$

Отсюда и из (3.6) вытекает (3.4). $\bullet$

3.2. Оценки интегралов по окрестности границы $\partial\mathcal{O}$. Следующее простое утверждение достаточно стандартно. Оно применялось при решении задач усреднения в [ZhPas] и в [PSu2, лемма 5.1].

Лемма 3.2. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса C^1. Пусть $B_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathcal{O} : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}, \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\}$. Пусть число $\varepsilon_0 \in (0,1]$ таково, что полоску B_{ε_0} можно покрыть конечным числом окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса C^1, распрямляющие границу $\partial\mathcal{O}$. Тогда для любой функции $u \in H^1(\mathcal{O})$ справедлива оценка*

$$\int_{B_\varepsilon} |u|^2 d\mathbf{x} \leqslant \beta\varepsilon \|u\|_{H^1(\mathcal{O})} \|u\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Постоянная $\beta = \beta(\mathcal{O})$ зависит лишь от области $\mathcal{O}$.

Следующее утверждение аналогично лемме 2.6 из [ZhPas]; в нужном нам виде оно проверено в [PSu2, лемма 5.3].

Лемма 3.3. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса C^1. Положим $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}, \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\right\}$. Пусть число $\varepsilon_0 \in (0,1]$ таково, что полоску $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0}$ можно покрыть конечным числом окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса*

C^1, *распрямляющие границу* $\partial\mathcal{O}$. *Пусть* S_ε — *оператор* (1.17). *Пусть* $f(\mathbf{x})$ — Γ-*периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$, *такая что* $f \in L_2(\Omega)$. *Тогда для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *выполнено неравенство*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |f^\varepsilon|^2 |S_\varepsilon \mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)} \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)},$$
$$0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$, $\beta_* = \beta^0(1+r_1)$, *постоянная* β^0 *зависит лишь от области* $\mathcal{O}$, *и* $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Ниже мы считаем, что число ε_0 выбрано так, как в лемме 3.3. Тогда ε_0 заведомо удовлетворяет также и условию леммы 3.2.

3.3. Задача Дирихле. Нам понадобятся свойства решений задачи Дирихле для уравнения $-\Delta \mathbf{s} + \mathbf{s} = \mathbf{f}$ в области $\mathcal{O}$. Напомним, что пространство $H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ определяется как пространство, сопряженное к $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ относительно спаривания в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Если $\mathbf{f} \in H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $\boldsymbol{\eta} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, то символ $(\mathbf{f},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}$ понимается как значение функционала $\mathbf{f}$ на элементе $\boldsymbol{\eta}$. При этом выполнена оценка

$$|(\mathbf{f},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}| \leqslant \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{3.8}$$

Стандартным образом проверяется следующая лемма.

Лемма 3.4. *Пусть* $\mathbf{f} \in H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{s} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ — *обобщенное решение задачи Дирихле*

$$-\Delta \mathbf{s} + \mathbf{s} = \mathbf{f} \quad \text{в } \mathcal{O}, \quad \mathbf{s}|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \tag{3.9}$$

Тогда справедлива оценка (называемая энергетическим неравенством)

$$\|\mathbf{s}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}. \tag{3.10}$$

Доказательство. По определению обобщенного решения задачи (3.9) выполнено тождество

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\sum_{l=1}^d \langle D_l \mathbf{s}, D_l \boldsymbol{\eta}\rangle + \langle \mathbf{s},\boldsymbol{\eta}\rangle \right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{f},\boldsymbol{\eta}\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{3.11}$$

Подставляя $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{s}$ в (3.11) и используя (3.8), получаем (3.10). $\bullet$

Следующее утверждение касается задачи Дирихле для однородного уравнения и выводится из леммы 3.4.

Лемма 3.5. *Пусть* $\boldsymbol{\phi} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{h} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ — *решение задачи*

$$-\Delta \mathbf{h} + \mathbf{h} = 0 \quad \text{в } \mathcal{O}; \quad \mathbf{h}|_{\partial\mathcal{O}} = \boldsymbol{\phi}|_{\partial\mathcal{O}}. \tag{3.12}$$

Тогда выполнена оценка

$$\|\mathbf{h}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant 2\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{3.13}$$

Доказательство. В силу (3.12) функция $\mathbf{h} - \boldsymbol{\phi} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ является решением задачи

$$(-\Delta + I)(\mathbf{h} - \boldsymbol{\phi}) = \mathbf{f} \quad \text{в } \mathcal{O}; \quad (\mathbf{h} - \boldsymbol{\phi})|_{\partial\mathcal{O}} = 0,$$

где $\mathbf{f} = -(-\Delta + I)\boldsymbol{\phi}$. Поскольку $(\mathbf{f},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = -(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\eta})_{H^1(\mathcal{O})}$, $\boldsymbol{\eta} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, то $\mathbf{f} \in H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и выполнено равенство

$$\|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} = \sup_{0\neq\boldsymbol{\eta}\in H^1_0(\mathcal{O})} \frac{|(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\eta})_{H^1(\mathcal{O})}|}{\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}} = \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{3.14}$$

В силу леммы 3.4 и (3.14)

$$\|\mathbf{h} - \boldsymbol{\phi}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|\mathbf{f}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} = \|\boldsymbol{\phi}\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Отсюда вытекает (3.13). $\bullet$

§4. Усреднение задачи Неймана: основные результаты

4.1. Формулировка основных результатов. Сформулируем основные результаты работы — теоремы об аппроксимации при малом ε оператора $(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1}$. Начнем с аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Теорема 4.1. *Предположим, что* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область с границей класса* $C^{1,1}$, *а матрица* $g(\mathbf{x})$ *и ДО* $b(\mathbf{D})$ *удовлетворяют условиям пункта* 1.2. *Кроме того, пусть выполнено условие* 2.1. *Пусть число* λ *подчинено ограничению* (2.6). *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (2.8) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (2.28) *при* $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. *Тогда существует число* $\varepsilon_1 \in (0,1]$, *зависящее от области* $\mathcal{O}$ *и решетки* Γ, *такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \mathcal{C}_0(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{4.1}$$

или, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}^0_N + \lambda I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \mathcal{C}_0(\lambda)\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{4.2}$$

Постоянная $\mathcal{C}_0(\lambda)$ *зависит от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *от постоянных* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *из неравенства* (2.2), *от* λ *и от области* $\mathcal{O}$.

Для формулировки второго результата — теоремы об аппроксимации резольвенты оператора $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, необходимо ввести корректор.

Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_{\mathcal{O}} : H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \tag{4.3}$$

и положим $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0$. Тогда

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)} \leqslant C_{\mathcal{O}}\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \tag{4.4}$$

где $C_{\mathcal{O}}$ — норма оператора (4.3).

Пусть S_ε — сглаживающий оператор по Стеклову, определенный в (1.17). Через $R_{\mathcal{O}}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Корректором в задаче Неймана назовем оператор

$$K_{N,\lambda}(\varepsilon) = R_{\mathcal{O}}[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}^0_N + \lambda I)^{-1}. \tag{4.5}$$

Оператор $b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. Как отмечалось в п. 1.6, оператор $[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен из $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Следовательно, оператор (4.5) непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Первым приближением к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ является функция

$$\mathbf{v}_\varepsilon = (\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K_{N,\lambda}(\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{4.6}$$

Определим в $\mathbb{R}^d$ функцию

$$\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon(b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0) = \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon K_\lambda(\varepsilon)\widetilde{\mathbf{u}}_0, \tag{4.7}$$

здесь $K_\lambda(\varepsilon)$ — оператор (1.25). Тогда

$$\mathbf{v}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}}. \tag{4.8}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (4.5), (4.6). *Тогда существует число* $\varepsilon_1 \in (0,1]$, *зависящее от области* $\mathcal{O}$ *и решетки* Γ, *такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \mathcal{C}(\lambda)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{4.9}$$

или, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1} - \varepsilon K_{N,\lambda}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \mathcal{C}(\lambda)\varepsilon^{1/2}. \tag{4.10}$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)} \leqslant \mathcal{C}'(\lambda)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{4.11}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица* (1.9). *Постоянные* $\mathcal{C}(\lambda)$, $\mathcal{C}'(\lambda)$ *зависят от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *от постоянных* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *из неравенства* (2.2), *от* λ *и от области* $\mathcal{O}$.

Выделим случай, когда корректор обращается в ноль. Следующее утверждение вытекает из теоремы 4.2 и предложения 1.2.

Предложение 4.3. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ — *решение задачи* (2.8) *и* $\mathbf{u}_0$ — *решение задачи* (2.28). *Если* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.13), *то* $\Lambda = 0$ *и* $K_{N,\lambda}(\varepsilon) = 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \mathcal{C}(\lambda)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

4.2. Первый этап доказательства: введение поправки типа пограничного слоя. Доказательство теорем 4.1 и 4.2 опирается на применение результатов для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$ (теоремы 1.6, 1.7, 1.8) и на оценку поправки типа пограничного слоя.

Рассмотрим функцию $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_{\mathcal{O}}\mathbf{u}_0 \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Ясно, что

$$\widetilde{\mathbf{F}} := \mathcal{A}^0\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\mathbf{u}}_0 \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

При этом $\widetilde{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{F}$. Применяя преобразование Фурье и (1.4), (1.15), получаем

$$
\begin{aligned}
\|\widetilde{\mathbf{F}}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} \left|(b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) + \mathbf{1})\widehat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi})\right|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} (\alpha_1 |g^0| |\boldsymbol{\xi}|^2 + 1)^2 |\widehat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} \leqslant (\max\{\alpha_1 \|g\|_{L_\infty}, 1\})^2 \, \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Здесь $\widehat{\mathbf{u}}_0(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x})$. Комбинируя (4.12) и (4.4), (2.33), приходим к оценке

$$
\begin{gathered}
\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_3(\lambda) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\
\mathcal{C}_3(\lambda) = \widehat{C}_\lambda C_{\mathcal{O}} \max\{\alpha_1 \|g\|_{L_\infty}, 1\}.
\end{gathered}
\tag{4.13}
$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ — обобщенное решение уравнения

$$
\mathcal{A}_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \lambda \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{F}}. \tag{4.14}
$$

Применимы теоремы 1.6, 1.7 и 1.8, в силу которых справедливы неравенства

$$
\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1(\lambda) \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.15}
$$

$$
\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2(\lambda) \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0, \tag{4.16}
$$

$$
\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_5(\lambda) \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.17}
$$

Здесь $\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ определено в (4.7).

Рассмотрим разность $\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ в области $\mathcal{O}$. В силу (2.8) и (4.14) эта разность является решением краевой задачи Неймана для однородного уравнения:

$$
\begin{aligned}
&(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) = 0 \ \text{ в } \mathcal{O}; \\
&\partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}} (\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) = -\boldsymbol{\psi}_\varepsilon \ \text{ на } \partial\mathcal{O},
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

где $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon := \partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}} \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$. Поскольку $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon|_{\mathcal{O}} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ и внутри $\mathcal{O}$ выполнено $\mathcal{A}_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \mathbf{F} - \lambda \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, то применимо определение конормальной производной из п. 2.4. В соответствии с (2.20), (2.23) элемент $\boldsymbol{\psi}_\varepsilon \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ определяется соотношением

$$
\begin{gathered}
(\boldsymbol{\psi}_\varepsilon, \boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} \left(\langle g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) T\boldsymbol{\varphi} \rangle + \lambda \langle \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, T\boldsymbol{\varphi} \rangle \right) d\mathbf{x} - \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{F}, T\boldsymbol{\varphi} \rangle \, d\mathbf{x}, \\
\boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).
\end{gathered}
\tag{4.19}
$$

Здесь T — оператор (2.15), определенный в п. 2.3.

Мы хотим приблизить разность $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{u}_\varepsilon$ функцией $\mathbf{w}_\varepsilon$, которая была бы также решением задачи Неймана для однородного уравнения, но с более простой заданной функцией $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ в граничном условии. Подсказкой для выбора $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon$ служит аппроксимация решения (4.15) и аппроксимация потока (4.17). Определим элемент $\boldsymbol{\rho}_\varepsilon \in H^{-1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ соотношением

$$(\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} \left(\langle \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})T\boldsymbol{\varphi}\rangle + \lambda\langle \mathbf{u}_0, T\boldsymbol{\varphi}\rangle - \langle \mathbf{F}, T\boldsymbol{\varphi}\rangle \right) d\mathbf{x},$$
$$\boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{4.20}$$

Ясно, что правая часть в (4.20) является антилинейным непрерывным функционалом над $\boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, так что определение (4.20) корректно. Оценим норму $\|\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}$. Из (4.19) и (4.20) следует, что

$$(\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})T\boldsymbol{\varphi}\rangle \, d\mathbf{x}$$
$$+ \lambda \int_{\mathcal{O}} \langle \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{u}_0, T\boldsymbol{\varphi}\rangle \, d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n).$$

Отсюда в силу (4.15) и (4.17) следует оценка

$$\begin{aligned} &|(\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\mathcal{O})}| \\ &\leqslant \varepsilon \|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(C_5(\lambda)\|b(\mathbf{D})T\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \lambda C_1(\lambda)\|T\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right), \\ &\boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{4.21}$$

Комбинируя (4.21) с (1.2), (1.5), (2.16) и (4.13), получаем

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varphi})_{L_2(\partial\mathcal{O})}| \leqslant \mathcal{C}_4(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^{1/2}(\partial\mathcal{O})}, \\ \boldsymbol{\varphi} \in H^{1/2}(\partial\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \quad \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

где $\mathcal{C}_4(\lambda) = \mathcal{C}_3(\lambda)\widetilde{c}_1 \left(C_5(\lambda)(d\alpha_1)^{1/2} + \lambda C_1(\lambda) \right)$. Отсюда с учетом (2.22) следует оценка

$$\|\boldsymbol{\psi}_\varepsilon - \boldsymbol{\rho}_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_4(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.22}$$

Введем поправку $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ — обобщенное решение задачи Неймана

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)\mathbf{w}_\varepsilon = 0 \ \text{ в } \mathcal{O}; \\ &\partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}} \mathbf{w}_\varepsilon = \boldsymbol{\rho}_\varepsilon \ \text{ на } \partial\mathcal{O}. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Лемма 4.4. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (2.8), $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение задачи (4.14) и $\mathbf{w}_\varepsilon$ — решение задачи (4.23). Тогда при $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.24}$$

где $\mathcal{C}_5(\lambda) = c_\lambda^{-1}\widehat{c}_1\mathcal{C}_4(\lambda)$.

Доказательство. В силу (4.18) и (4.23) функция $\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon) = 0 \ \text{ в } \mathcal{O}; \\ &\partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon) = \boldsymbol{\rho}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon \ \text{ на } \partial\mathcal{O}. \end{aligned}$$

Применяя предложение 2.4, получаем оценку решения

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_\lambda^{-1}\widehat{c}_1\|\boldsymbol{\rho}_\varepsilon - \boldsymbol{\psi}_\varepsilon\|_{H^{-1/2}(\partial\mathcal{O})}.$$

Вместе с (4.22) это влечет (4.24). $\bullet$

Выводы. 1. Сопоставляя (4.8), (4.13), (4.16) и (4.24), приходим к оценке

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant (\mathcal{C}_5(\lambda) + C_2(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda))\,\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.25}$$

Отсюда видно, что *для доказательства основной оценки* (4.9) *из теоремы* 4.2 *достаточно получить оценку для* $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}$ *через* $C\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$.

2. Загрубим (4.24), заменяя слева норму в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ на норму в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.26}$$

Сопоставляя (4.26) и (4.13), (4.15), приходим к неравенству

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (\mathcal{C}_5(\lambda) + C_1(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda))\,\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.27}$$

Отсюда ясно, что *для доказательства оценки* (4.1) *из теоремы* 4.1 *достаточно получить оценку для* $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$ *через* $C\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$.

Итак, дело сводится к оцениванию функции $\mathbf{w}_\varepsilon$, которую можно интерпретировать как *поправку типа пограничного слоя.* Сначала мы оценим норму $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и докажем тем самым теорему 4.2 (см. §5). Затем, опираясь на уже доказанную теорему 4.2, мы перейдем к оценке нормы $\mathbf{w}_\varepsilon$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ (см. §6).

§5. Доказательство теоремы 4.2

5.1. В соответствии с п. 2.4, обобщенное решение $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ задачи (4.23) удовлетворяет тождеству

$$\int_{\mathcal{O}} (\langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\rangle + \lambda\langle \mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}\rangle)\, d\mathbf{x} = (\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \gamma\boldsymbol{\eta})_{L_2(\partial\mathcal{O})}, \ \forall \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.1}$$

Используя (4.20) и (2.30), представим правую часть (5.1) в виде

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\rho}_\varepsilon, \gamma\boldsymbol{\eta})_{L_2(\partial\mathcal{O})} &= \int_{\mathcal{O}} (\langle \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle + \lambda\langle \mathbf{u}_0, T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle - \langle \mathbf{F}, T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle)\, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{O}} \langle \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0, b(\mathbf{D})T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Из (5.1) и (5.2) вытекает тождество

$$\int\limits_{\mathcal{O}} (\langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\rangle + \lambda\langle \mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}\rangle)\, d\mathbf{x} = \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}], \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{5.3}$$

где введено обозначение

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] := \int_{\mathcal{O}} \langle \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0, b(\mathbf{D})T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.4}$$

Для дальнейших оценок удобно представить функционал (5.4) в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] = \mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] + \mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}], \tag{5.5}$$

где

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^0 S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0, b(\mathbf{D})T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle\, d\mathbf{x}, \tag{5.6}$$

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \int_{\mathcal{O}} \langle (\widetilde{g}^\varepsilon - g^0) S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, b(\mathbf{D})T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle\, d\mathbf{x}. \tag{5.7}$$

Член (5.6) легко оценить с помощью предложения 1.4 и соотношений (1.2), (1.5), (1.15):

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}]| &\leqslant |g^0| \|(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})T\gamma\boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} r_1 \|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} (d\alpha_1)^{1/2} \|T\gamma\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{5.8}$$

В силу (1.4), (2.33) и (4.4)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \alpha_1^{1/2} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}} \|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}} \widehat{C}_\lambda \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Теперь из (5.8), (5.9) и (2.13), (2.16) следует оценка

$$\begin{aligned} &|\mathcal{I}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant \mathcal{C}_6(\lambda)\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \quad \varepsilon > 0, \\ &\mathcal{C}_6(\lambda) = d^{1/2} r_1 \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} C_{\mathcal{O}} \widehat{C}_\lambda \widehat{c}_1 \widetilde{c}_1. \end{aligned} \tag{5.10}$$

5.2. Анализ члена $\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}$. Используя (1.2), преобразуем член (5.7):

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \int_{\mathcal{O}} \sum_{l=1}^{d} \langle f_l^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, D_l T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle\, d\mathbf{x}, \tag{5.11}$$

где были введены обозначения

$$f_l(\mathbf{x}) := b_l^*(\widetilde{g}(\mathbf{x}) - g^0) = b_l^*(g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) - g^0), \quad l = 1, \dots, d. \tag{5.12}$$

Тогда $f_l(\mathbf{x})$ — Γ-периодические $(n \times m)$-матрицы-функции, $f_l \in L_2(\Omega)$, в силу определения (1.8) эффективной матрицы выполнено $\overline{f_l} = 0$. Наконец, из уравнения (1.7) для Λ следует, что

$$\sum_{l=1}^{d} D_l f_l(\mathbf{x}) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0.$$

Таким образом, набор $f_l(\mathbf{x})$, $l = 1, \dots, d$, удовлетворяет условиям леммы 3.1. В силу этой леммы, существуют матрицы-функции $M_{lj}(\mathbf{x})$, $l, j =$

$1,\dots,d$, такие что выполнены соотношения (3.2), (3.3). Тогда

$$f_l^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon \sum_{j=1}^d \partial_j M_{lj}^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{5.13}$$

Нам понадобится оценка нормы функций (5.12) в $L_2(\Omega)$. Из (1.5) с учетом того, что $\widetilde{g} - g^0$ — это результат проектирования $\widetilde{g}$ на подпространство, ортогональное константам, получаем:

$$\|f_l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_1^{1/2} \|\widetilde{g} - g^0\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_1^{1/2} \|\widetilde{g}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Вместе с (1.2), (1.5), (1.9) и (1.10) это влечет оценку

$$\|f_l\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} (|\Omega|^{1/2} + (d\alpha_1)^{1/2} \|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)}) \leqslant |\Omega|^{1/2} \mathfrak{C},\ l = 1,\dots,d, \tag{5.14}$$

где $\mathfrak{C} = \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty} (1 + (dm)^{1/2} \alpha_1^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2})$. Тогда в силу (3.4)

$$\|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant r_0^{-1} |\Omega|^{1/2} \mathfrak{C}, \quad l,j = 1,\dots,d. \tag{5.15}$$

С учетом (5.13) выполним преобразование:

$$\begin{aligned} f_l^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 &= \varepsilon \sum_{j=1}^d \left(\partial_j M_{lj}^\varepsilon\right) S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 \\ &= \varepsilon \sum_{j=1}^d \partial_j \left(M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right) - \varepsilon \sum_{j=1}^d M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0. \end{aligned} \tag{5.16}$$

В соответствии с (5.16) представим член (5.11) в виде

$$\mathcal{I}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] + \widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}], \tag{5.17}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \varepsilon \int_{\mathcal{O}} \sum_{l,j=1}^d \langle \partial_j \left(M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right), D_l T \gamma \boldsymbol{\eta} \rangle \, d\mathbf{x}, \tag{5.18}$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = -\varepsilon \int_{\mathcal{O}} \sum_{l,j=1}^d \langle M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0, D_l T \gamma \boldsymbol{\eta} \rangle \, d\mathbf{x}. \tag{5.19}$$

Член (5.19) легко оценить, используя предложение 1.5:

$$|\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant \varepsilon \sum_{l,j=1}^d |\Omega|^{-1/2} \|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D})\partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|D_l T \gamma \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда с учетом (2.13), (2.16), (5.9) и (5.15) получаем:

$$\begin{aligned} &|\widehat{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant \mathcal{C}_7(\lambda) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \quad \varepsilon > 0, \\ &\mathcal{C}_7(\lambda) = d r_0^{-1} \mathfrak{C} \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}} \widehat{C}_\lambda \widetilde{c}_1 \widehat{c}_1. \end{aligned} \tag{5.20}$$

5.3. Оценка члена $\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}$. Напомним обозначение $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon$ для ε-окрестности границы $\partial\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^d$. Будем считать, что $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, где число ε_1 определено в лемме 3.3. Фиксируем гладкую срезку $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$, такую что выполнены условия

$$\begin{gathered} \theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \operatorname{supp}\theta_\varepsilon \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon, \quad 0 \leqslant \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1, \\ \theta_\varepsilon(\mathbf{x})|_{\partial\mathcal{O}} = 1, \quad \varepsilon|\nabla\theta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \kappa = \mathrm{const}. \end{gathered} \tag{5.21}$$

Очевидно, функция с такими свойствами существует. Постоянная κ зависит лишь от области $\mathcal{O}$.

Заметим, что справедливо тождество

$$\int_{\mathcal{O}} \sum_{l,j=1}^d \langle \partial_j \left(M_{lj}^\varepsilon (1-\theta_\varepsilon) S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 \right), D_l T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle \, d\mathbf{x} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{5.22}$$

Действительно, поскольку левая часть в (5.22) представляет собой антилинейный непрерывный функционал над $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, то достаточно доказать тождество на плотном в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ множестве. Будем считать, что $\boldsymbol{\eta} \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, и, интегрируя по частям, перепишем левую часть (5.22) в виде

$$-i \int_{\mathcal{O}} \langle (1-\theta_\varepsilon) S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, \sum_{l,j=1}^d (M_{lj}^\varepsilon)^* \partial_j \partial_l T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle \, d\mathbf{x}.$$

Это выражение равно нулю, поскольку $\sum_{l,j=1}^d (M_{lj}^\varepsilon)^*\partial_j\partial_l = 0$ из-за равенства $M_{lj} = -M_{jl}$ (см. (3.2)).

В силу (5.22) член (5.18) принимает вид

$$\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}] = \varepsilon \int_{\mathcal{O}} \sum_{l,j=1}^d \langle \partial_j \left(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 \right), D_l T\gamma\boldsymbol{\eta}\rangle \, d\mathbf{x}. \tag{5.23}$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{j=1}^d \partial_j \left(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 \right) &= \varepsilon\theta_\varepsilon \sum_{j=1}^d M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon (b(\mathbf{D})\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0) \\ &+ \varepsilon \sum_{j=1}^d (\partial_j\theta_\varepsilon) M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \theta_\varepsilon \sum_{j=1}^d (\partial_j M_{lj})^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0. \end{aligned}$$

Примем во внимание, что $\sum_{j=1}^d \partial_j M_{lj} = f_l$ (см. (3.3)). Тогда

$$\varepsilon \left\| \sum_{j=1}^d \partial_j \left(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 \right) \right\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant J_l^{(1)}(\varepsilon) + J_l^{(2)}(\varepsilon) + J_l^{(3)}(\varepsilon), \tag{5.24}$$

где

$$J_l^{(1)}(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{j=1}^{d} \|\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon (b(\mathbf{D})\partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.25}$$

$$J_l^{(2)}(\varepsilon) = \varepsilon \sum_{j=1}^{d} \|(\partial_j \theta_\varepsilon) M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.26}$$

$$J_l^{(3)}(\varepsilon) = \|\theta_\varepsilon f_l^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.27}$$

Для оценки члена (5.25) используем (5.21), предложение 1.5 и (5.9), (5.15):

$$J_l^{(1)}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{d} |\Omega|^{-1/2} \|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D})\partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}^{(1)}(\lambda)\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.28}$$

где $\mathfrak{C}^{(1)}(\lambda) = r_0^{-1} \mathfrak{C} d^{1/2} \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}} \widehat{C}_\lambda$.

Член (5.26) оценивается с помощью (5.21) и леммы 3.3:

$$\begin{aligned} (J_l^{(2)}(\varepsilon))^2 &\leqslant d\kappa^2 \sum_{j=1}^{d} \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |M_{lj}^\varepsilon|^2 |S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leqslant \varepsilon d\kappa^2 \beta_* |\Omega|^{-1} \sum_{j=1}^{d} \|M_{lj}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{5.29}$$

Из (1.19), (1.4), (2.33) и (4.4) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \alpha_1^{1/2} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}} \widehat{C}_\lambda \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Теперь из (5.29), (5.30) и (5.15) следует, что

$$J_l^{(2)}(\varepsilon) \leqslant \mathfrak{C}^{(2)}(\lambda) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{5.31}$$

где $\mathfrak{C}^{(2)}(\lambda) = \kappa d \beta_*^{1/2} r_0^{-1} \mathfrak{C} \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}} \widehat{C}_\lambda$.

Аналогичным образом с помощью (5.21) и леммы 3.3 оценим член (5.27):

$$\begin{aligned} (J_l^{(3)}(\varepsilon))^2 &\leqslant \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |f_l^\varepsilon|^2 |S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leqslant \varepsilon \beta_* |\Omega|^{-1} \|f_l\|_{L_2(\Omega)}^2 \|S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Из (5.14), (5.30) и (5.32) вытекает оценка

$$J_l^{(3)}(\varepsilon) \leqslant \mathfrak{C}^{(3)}(\lambda) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{5.33}$$

где $\mathfrak{C}^{(3)}(\lambda) = \beta_*^{1/2} \mathfrak{C} \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}} \widehat{C}_\lambda$.

В итоге из (5.24), (5.28), (5.31) и (5.33) следует неравенство

$$\varepsilon \left\| \sum_{j=1}^{d} \partial_j \left(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0 \right) \right\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}(\lambda) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{5.34}$$

где $\widetilde{\mathfrak{C}}(\lambda) = \mathfrak{C}^{(1)}(\lambda) + \mathfrak{C}^{(2)}(\lambda) + \mathfrak{C}^{(3)}(\lambda)$. Комбинируя (2.13), (2.16), (5.23) и (5.34), приходим к оценке

$$|\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant \mathcal{C}_8(\lambda) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{5.35}$$

где $\mathcal{C}_8(\lambda) = \widetilde{\mathfrak{C}}(\lambda) d^{1/2} \widetilde{c}_1 \widehat{c}_1$.

5.4. Завершение доказательства теоремы 4.2. Теперь из (5.5), (5.10), (5.17), (5.20) и (5.35) вытекает оценка

$$|\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant \mathcal{C}_9(\lambda) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{5.36}$$

где $\mathcal{C}_9(\lambda) = \mathcal{C}_6(\lambda) + \mathcal{C}_7(\lambda) + \mathcal{C}_8(\lambda)$.

Из (5.36) и из (5.3) при $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{w}_\varepsilon$ получаем

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\langle g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_\varepsilon, b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_\varepsilon \rangle + \lambda |\mathbf{w}_\varepsilon|^2 \right) d\mathbf{x} \leqslant \mathcal{C}_9(\lambda) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}$$

при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Вместе с (2.7) это влечет искомую оценку

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_\lambda^{-1} \mathcal{C}_9(\lambda) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{5.37}$$

В итоге из (4.25) и (5.37) вытекает неравенство (4.9) с постоянной

$$\mathcal{C}(\lambda) = \mathcal{C}_5(\lambda) + C_2(\lambda) \mathcal{C}_3(\lambda) + c_\lambda^{-1} \mathcal{C}_9(\lambda).$$

Остается получить аппроксимацию (4.11) для потока. Из (4.9) с учетом (1.2) и (1.5) следует оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}(\lambda) \varepsilon^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{5.38}$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ определено в (4.7). Заметим, что с учетом (4.8)

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.39}$$

Воспользуемся доказательством теоремы 1.8. Из (1.47) следует оценка

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_6 \varepsilon \|\mathbf{D} b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.40}$$

Из (5.39), (5.40) с учетом (5.9) получаем:

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_6 \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}} \widehat{C}_\lambda \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \tag{5.41}$$

В итоге (5.38) и (5.41) дают требуемую оценку (4.11) с постоянной $\mathcal{C}'(\lambda) = \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}(\lambda) + C_6 \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}} \widehat{C}_\lambda$. Это завершает доказательство теоремы 4.2. $\bullet$

§6. Доказательство теоремы 4.1

6.1. Как отмечалось в конце §4, для доказательства теоремы 4.1 требуется оценить норму $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$ через $C\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$. Сопоставляя (5.5), (5.10), (5.17) и (5.20), получаем:

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| \leqslant (\mathcal{C}_6(\lambda)+\mathcal{C}_7(\lambda))\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} + |\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}]|,& \\ \boldsymbol{\eta}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \quad \varepsilon>0.& \end{aligned} \tag{6.1}$$

В тождестве (5.3), справедливом для любой функции $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, выберем теперь $\boldsymbol{\eta}$ специальным образом. Пусть $\boldsymbol{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, и пусть $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ — обобщенное решение задачи Неймана

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}_\varepsilon + \lambda\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = \boldsymbol{\Phi} \text{ в } \mathcal{O}; \quad \partial_{\boldsymbol{\nu}}^\varepsilon \boldsymbol{\eta}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \tag{6.2}$$

т. е. $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = (\mathcal{A}_{N,\varepsilon}+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$. В силу (2.11)

$$\|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_\lambda^{-1}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.3}$$

По определению обобщенного решения задачи (6.2) выполнено тождество

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{w}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}_\varepsilon\rangle + \lambda\langle \mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon\rangle\right) d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi}\rangle\, d\mathbf{x}. \tag{6.4}$$

Сопоставляя (6.4) и (5.3), получаем

$$\int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi}\rangle\, d\mathbf{x} = \mathcal{I}_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon], \quad \boldsymbol{\Phi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{6.5}$$

Теперь из (6.1), (6.3) и (6.5) вытекает оценка

$$\begin{aligned} |(\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}| \leqslant (\mathcal{C}_6(\lambda)+\mathcal{C}_7(\lambda))c_\lambda^{-1}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]|,& \\ \boldsymbol{\Phi}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \quad \varepsilon>0.& \end{aligned} \tag{6.6}$$

6.2. Анализ члена $\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]$. Ясно, что требуемая оценка для $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$ будет получена, если нам удастся оценить последнее слагаемое в правой части (6.6) через $C\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}$.

Применим (уже доказанную) теорему 4.2 с тем, чтобы аппроксимировать решение $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ задачи (6.2) по норме в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Обозначим через $\boldsymbol{\eta}_0$ решение соответствующей усредненной задачи: $\boldsymbol{\eta}_0 = (\mathcal{A}_N^0+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$. Пусть $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 = P_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\eta}_0$. Отметим, что с учетом (2.34)

$$\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\mathcal{O}}\|\boldsymbol{\eta}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant C_{\mathcal{O}}\widehat{C}_\lambda\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.7}$$

В силу (4.10) справедлива оценка

$$\|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}(\lambda)\varepsilon^{1/2}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1. \tag{6.8}$$

Представим $\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]$ (см. (5.23)) в виде суммы трех слагаемых

$$\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon] = \widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}+\lambda I)^{-1}\boldsymbol{\Phi}] = \mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\boldsymbol{\Phi}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\Phi}] + \mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\boldsymbol{\Phi}], \tag{6.9}$$

где

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\mathbf{\Phi}] = \varepsilon \int_{\mathcal{O}} \sum_{l,j=1}^{d} \langle \partial_j \left(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right), D_l T\gamma(\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0)\rangle \, d\mathbf{x}, \tag{6.10}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\mathbf{\Phi}] = \varepsilon \int_{\mathcal{O}} \sum_{l,j=1}^{d} \langle \partial_j \left(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right), D_l T\gamma \boldsymbol{\eta}_0\rangle \, d\mathbf{x}, \tag{6.11}$$

$$\mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\mathbf{\Phi}] = \varepsilon \int_{\mathcal{O}} \sum_{l,j=1}^{d} \langle \partial_j \left(\theta_\varepsilon M_{lj}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\right), D_l T\gamma(\varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0)\rangle \, d\mathbf{x}. \tag{6.12}$$

Член (6.10) легко оценить, применяя (6.8) и (2.13), (2.16), (5.34):

$$\begin{aligned} &|\mathcal{J}_\varepsilon^{(1)}[\mathbf{\Phi}]| \leqslant \varepsilon^{1/2} \widetilde{\mathfrak{C}}(\lambda) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} d^{1/2} \widetilde{c}_1 \widehat{c}_1 \|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathcal{C}^{(1)}(\lambda) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \end{aligned} \tag{6.13}$$

где $\mathcal{C}^{(1)}(\lambda) = \widetilde{\mathfrak{C}}(\lambda) d^{1/2} \widetilde{c}_1 \widehat{c}_1 \mathcal{C}(\lambda)$.

Для оценки члена (6.11) используем (5.21) и (5.34):

$$|\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\mathbf{\Phi}]| \leqslant \varepsilon^{1/2} \widetilde{\mathfrak{C}}(\lambda) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \sum_{l=1}^{d} \|D_l T\gamma \boldsymbol{\eta}_0\|_{L_2(B_\varepsilon)}. \tag{6.14}$$

Согласно лемме 3.2,

$$\|D_l T\gamma \boldsymbol{\eta}_0\|_{L_2(B_\varepsilon)}^2 \leqslant \beta \varepsilon \|D_l T\gamma \boldsymbol{\eta}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \|D_l T\gamma \boldsymbol{\eta}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Следовательно,

$$\sum_{l=1}^{d} \|D_l T\gamma \boldsymbol{\eta}_0\|_{L_2(B_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon^{1/2} (\beta d)^{1/2} \|T\gamma \boldsymbol{\eta}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}^{1/2} \|T\gamma \boldsymbol{\eta}_0\|_{H^1(\mathcal{O})}^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Применяя оценки (2.13), (2.16), (2.18) и (2.32), (2.34), получаем:

$$\begin{aligned} &\sum_{l=1}^{d} \|D_l T\gamma \boldsymbol{\eta}_0\|_{L_2(B_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon^{1/2} (\beta d)^{1/2} (\widetilde{c}_2 \widehat{c}_2 \widetilde{c}_1 \widehat{c}_1)^{1/2} \|\boldsymbol{\eta}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}^{1/2} \|\boldsymbol{\eta}_0\|_{H^1(\mathcal{O})}^{1/2} \\ &\leqslant \varepsilon^{1/2} (\beta d)^{1/2} (\widetilde{c}_2 \widehat{c}_2 \widetilde{c}_1 \widehat{c}_1)^{1/2} \widehat{C}_\lambda^{1/2} c_\lambda^{-1/2} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{6.15}$$

Теперь из (6.14) и (6.15) вытекает оценка

$$|\mathcal{J}_\varepsilon^{(2)}[\mathbf{\Phi}]| \leqslant \mathcal{C}^{(2)}(\lambda) \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \ \ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \tag{6.16}$$

где $\mathcal{C}^{(2)}(\lambda) = \widetilde{\mathfrak{C}}(\lambda) (\beta d)^{1/2} (\widetilde{c}_2 \widehat{c}_2 \widetilde{c}_1 \widehat{c}_1)^{1/2} \widehat{C}_\lambda^{1/2} c_\lambda^{-1/2}$.

6.3. Оценка члена $\mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\mathbf{\Phi}]$. Осталось оценить член (6.12). Обозначим

$$\mathbf{z}_\varepsilon := T\gamma(\varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0). \tag{6.17}$$

В силу (5.34) член (6.12) подчинен оценке

$$|\mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\mathbf{\Phi}]| \leqslant \varepsilon^{1/2}\widetilde{\mathfrak{C}}(\lambda)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\sum_{l=1}^{d}\|D_l\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1. \tag{6.18}$$

По определению операторов γ и T (см. п. 2.3), функция (6.17) является обобщенным решением задачи Дирихле

$$\begin{aligned} &-\Delta\mathbf{z}_\varepsilon+\mathbf{z}_\varepsilon=0 \ \text{ в } \mathcal{O};\\ &\mathbf{z}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}}=\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|_{\partial\mathcal{O}}. \end{aligned} \tag{6.19}$$

Оценим норму решения $\mathbf{z}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ функцию

$$\boldsymbol{\phi}_\varepsilon(\mathbf{x})=\varepsilon\theta_\varepsilon(\mathbf{x})\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x})(S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0)(\mathbf{x}). \tag{6.20}$$

Тогда с учетом (5.21) задачу (6.19) можно записать иначе: $-\Delta\mathbf{z}_\varepsilon+\mathbf{z}_\varepsilon=0$ в области $\mathcal{O}$ и $\mathbf{z}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}}=\boldsymbol{\phi}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}}$. В силу леммы 3.5 имеем

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant 2\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{6.21}$$

Поэтому вопрос сводится к следующему утверждению.

Лемма 6.1. *Пусть $\boldsymbol{\phi}_\varepsilon$ — функция* (6.20). *Тогда справедлива оценка*

$$\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant\mathcal{C}_{10}(\lambda)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1. \tag{6.22}$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.4 из [PSu2].

Начнем с оценки нормы функции (6.20) в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В силу (5.21) и предложения 1.5 выполнена оценка

$$\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\varepsilon\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.23}$$

Из (1.4) и (6.7) получаем:

$$\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{C}_\lambda\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.24}$$

Теперь из (6.23), (6.24) и (1.11) следует оценка

$$\|\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\gamma_0(\lambda)\varepsilon^2\|\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.25}$$

где $\gamma_0(\lambda)=m(2r_0)^{-2}\alpha_1\alpha_0^{-1}\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}C_{\mathcal{O}}^2\widehat{C}_\lambda^2$.

Рассмотрим производные

$$\begin{aligned}\partial_j\boldsymbol{\phi}_\varepsilon&=\varepsilon(\partial_j\theta_\varepsilon)\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0+\theta_\varepsilon(\partial_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\\ &+\varepsilon\theta_\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0, \quad j=1,\dots,d.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}&\leqslant 3\varepsilon^2\int_{\mathcal{O}}|\nabla\theta_\varepsilon|^2|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\\ &+3\int_{\mathcal{O}}|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon|^2|\theta_\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}+3\varepsilon^2\sum_{j=1}^{d}\int_{\mathcal{O}}|\theta_\varepsilon|^2|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{6.26}$$

Обозначим слагаемые в правой части (6.26) через $\mathfrak{A}_1(\varepsilon)$, $\mathfrak{A}_2(\varepsilon)$, $\mathfrak{A}_3(\varepsilon)$ соответственно.

Проще всего оценить $\mathfrak{A}_3(\varepsilon)$. В силу (5.21) и предложения 1.5

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_3(\varepsilon) &\leqslant 3\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{d} \|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_j \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 3\varepsilon^2 |\Omega|^{-1} \|\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)} \|\mathbf{D} b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{6.27}$$

Аналогично (5.9) с учетом (6.7)

$$\|\mathbf{D} b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1 C^2_{\mathcal{O}} \widehat{C}^2_\lambda \|\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.28}$$

Из (6.27) и (6.28) с учетом (1.11) получаем оценку

$$\mathfrak{A}_3(\varepsilon) \leqslant \gamma_3(\lambda) \varepsilon^2 \|\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.29}$$

где $\gamma_3(\lambda) = 3m(2r_0)^{-2} \alpha_1 \alpha_0^{-1} \|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty} C^2_{\mathcal{O}} \widehat{C}^2_\lambda$.

Первое слагаемое в правой части (6.26) оценим с помощью (5.21) и леммы 3.3. При $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ имеем:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_1(\varepsilon) &\leqslant 3\kappa^2 \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2 \, d\mathbf{x} \\ &\leqslant 3\kappa^2 \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{6.30}$$

Отметим оценку, вытекающую из (1.4) и (6.7):

$$\|b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2} C_{\mathcal{O}} \widehat{C}_\lambda \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.31}$$

В итоге из (6.30) и (6.31) с учетом (1.11) следует неравенство

$$\mathfrak{A}_1(\varepsilon) \leqslant \gamma_1(\lambda) \varepsilon \|\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{6.32}$$

где $\gamma_1(\lambda) = 3\kappa^2 \beta_* m(2r_0)^{-2} \alpha_1 \alpha_0^{-1} \|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty} C^2_{\mathcal{O}} \widehat{C}^2_\lambda$.

Остается рассмотреть второе слагаемое в правой части (6.26). С учетом (5.21)

$$\mathfrak{A}_2(\varepsilon) \leqslant 3 \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon|^2 |S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2 \, d\mathbf{x}.$$

Применим лемму 3.3. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнена оценка

$$\mathfrak{A}_2(\varepsilon) \leqslant 3\beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|\mathbf{D}\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда с помощью (1.10) и (6.31) вытекает неравенство

$$\mathfrak{A}_2(\varepsilon) \leqslant \gamma_2(\lambda) \varepsilon \|\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{6.33}$$

где $\gamma_2(\lambda) = 3\beta_* m \alpha_1 \alpha_0^{-1} \|g\|_{L_\infty} \|g^{-1}\|_{L_\infty} C^2_{\mathcal{O}} \widehat{C}^2_\lambda$.

В итоге из (6.26), (6.29), (6.32) и (6.33) следует оценка

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\phi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathfrak{A}_1(\varepsilon) + \mathfrak{A}_2(\varepsilon) + \mathfrak{A}_3(\varepsilon) \\ &\leqslant (\gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) + \gamma_3(\lambda)) \varepsilon \|\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.\end{aligned}$$

Вместе с (6.25) это влечет (6.22) с постоянной

$$\mathcal{C}_{10}(\lambda) = (\gamma_0(\lambda) + \gamma_1(\lambda) + \gamma_2(\lambda) + \gamma_3(\lambda))^{1/2}. \quad \bullet$$

Из (6.21) и леммы 6.1 следует оценка

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathcal{C}_{10}(\lambda)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{6.34}$$

Теперь (6.18) и (6.34) влекут

$$|\mathcal{J}_\varepsilon^{(3)}[\mathbf{\Phi}]| \leqslant \mathcal{C}^{(3)}(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{6.35}$$

где $\mathcal{C}^{(3)}(\lambda) = 2\widetilde{\mathfrak{C}}(\lambda)d^{1/2}\mathcal{C}_{10}(\lambda)$.

6.4. Завершение доказательства теоремы 4.1. Подведем итоги. Из (6.9), (6.13), (6.16) и (6.35) следует оценка

$$|\widetilde{\mathcal{I}}_\varepsilon^{(2)}[\boldsymbol{\eta}_\varepsilon]| \leqslant (\mathcal{C}^{(1)}(\lambda) + \mathcal{C}^{(2)}(\lambda) + \mathcal{C}^{(3)}(\lambda))\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\mathbf{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Вместе с (6.6) это влечет

$$|(\mathbf{w}_\varepsilon, \mathbf{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}| \leqslant \mathcal{C}_{11}(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,$$

где $\mathcal{C}_{11}(\lambda) = (\mathcal{C}_6(\lambda)+\mathcal{C}_7(\lambda))c_\lambda^{-1}+\mathcal{C}^{(1)}(\lambda)+\mathcal{C}^{(2)}(\lambda)+\mathcal{C}^{(3)}(\lambda)$. Отсюда следует искомая оценка

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{11}(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{6.36}$$

Наконец, из (4.27) и (6.36) получаем неравенство (4.1) с постоянной $\mathcal{C}_0(\lambda) = \mathcal{C}_5(\lambda) + C_1(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda) + \mathcal{C}_{11}(\lambda)$. Теорема 4.1 доказана. $\bullet$

§7. Усреднение задачи Неймана: результаты в случае $\Lambda \in L_\infty$

7.1. Как и в случае задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$ (см. п. 1.7), при дополнительных условиях на матрицу $\Lambda(\mathbf{x})$ сглаживатель S_ε в корректоре (4.5) может быть устранен.

Пусть выполнено условие 1.10, т. е. $\Lambda \in L_\infty$. Положим

$$K_{N,\lambda}^0(\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1}. \tag{7.1}$$

В силу (2.34) оператор $b(\mathbf{D})(\mathcal{A}_N^0+\lambda I)^{-1}$ непрерывно переводит $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$. При условии 1.10 оператор $[\Lambda^\varepsilon]$ непрерывен из $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, что легко усмотреть из предложения 1.11 и существования линейного непрерывного оператора продолжения из $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$ в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$. Следовательно, корректор (7.1) непрерывен из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Рассмотрим вместо (4.6) другое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (2.8):

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon = (\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K_{N,\lambda}^0(\varepsilon)\mathbf{F} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0. \tag{7.2}$$

Теорема 7.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1, *а также условие* 1.10. *Пусть функция* $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ *определена в* (7.2). *Тогда существует число* $\varepsilon_1 \in$

$(0,1]$, зависящее от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ, такое что справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \check{\mathcal{C}}(\lambda)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{7.3}$$

или, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1} - \varepsilon K_{N,\lambda}^0(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \check{\mathcal{C}}(\lambda)\varepsilon^{1/2}.$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ справедлива аппроксимация

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)} \leqslant \check{\mathcal{C}}'(\lambda)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{7.4}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица (1.9). *Постоянные $\check{\mathcal{C}}(\lambda)$, $\check{\mathcal{C}}'(\lambda)$ зависят от m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от параметров решётки Γ, от постоянных $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ из неравенства* (2.2), *от нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, от λ и от области $\mathcal{O}$.*

Доказательство. В соответствии с (4.5), (4.6) и (7.2) в области $\mathcal{O}$ справедливо равенство

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon = \varepsilon\Lambda^\varepsilon(I - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0. \tag{7.5}$$

Оценим норму функции (7.5) в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Поскольку правая часть в (7.5) определена во всем $\mathbb{R}^d$, достаточно оценить ее норму в $H^1(\mathbb{R}^d)$. Воспользуемся доказательством теоремы 1.12. В силу (1.52) и (1.58)

$$\varepsilon\|\Lambda^\varepsilon(I - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{d}\|\partial_l(\varepsilon\Lambda^\varepsilon(I - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant 2\varepsilon^2\left(4(1+\beta_2)\|\Lambda\|^2_{L_\infty} + \beta_1 r_1^2\right)\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{7.7}$$

Вместе с (5.9), (5.30) и (7.5) это влечет

$$\|\check{\mathbf{v}}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} = \varepsilon\|\Lambda^\varepsilon(I - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_{12}(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0, \tag{7.8}$$

где $\mathcal{C}_{12}(\lambda) = \alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{C}_\lambda\left(2(3+2\beta_2)^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty} + (2\beta_1)^{1/2}r_1\right)$.

В итоге, сопоставляя (4.9) и (7.8), приходим к оценке (7.3) с постоянной $\check{\mathcal{C}}(\lambda) = \mathcal{C}(\lambda) + \mathcal{C}_{12}(\lambda)$.

Остается проверить (7.4). Из (7.3) с учетом (1.2) и (1.5) следует оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon^{1/2}d^{1/2}\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\check{\mathcal{C}}(\lambda)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{7.9}$$

В силу (1.2), (1.9) и (7.2) имеем:

$$g^\varepsilon b(\mathbf{D})\check{\mathbf{v}}_\varepsilon = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + \varepsilon\sum_{l=1}^{d} g^\varepsilon b_l\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\mathbf{u}_0. \tag{7.10}$$

Норму второго слагаемого оценим, используя условие 1.10 и соотношения (1.2), (1.5), (2.33):

$$\varepsilon \left\| \sum_{l=1}^{d} g^\varepsilon b_l \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \mathbf{u}_0 \right\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \sum_{l,j=1}^{d} \|D_j D_l \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \varepsilon d \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \widehat{C}_\lambda \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{7.11}$$

Теперь из (7.9)–(7.11) вытекает оценка (7.4) с постоянной $\check{\mathcal{C}}'(\lambda) = d^{1/2}\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\check{\mathcal{C}}(\lambda) + d\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}\widehat{C}_\lambda$. •

Напомним, что некоторые достаточные условия выполнения условия 1.10 указаны в предложении 1.13.

7.2. Специальный случай. Выделим специальный случай, когда $g^0 = \underline{g}$. Тогда $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$ и, кроме того, в силу предложения 1.13 выполнено условие 1.10. Применяя утверждение теоремы 7.1 относительно потоков, получаем следующее предложение.

Предложение 7.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (2.8), $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (2.28) *и* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Пусть* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.14). *Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)} \leqslant \check{\mathcal{C}}'(\lambda)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

§8. Аппроксимация решений в строго внутренней подобласти

8.1. Используя теорему 4.1 и результаты для задачи в $\mathbb{R}^d$ (теоремы 1.7 и 1.8), нетрудно показать, что в строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ области $\mathcal{O}$ справедлива точная по порядку оценка погрешности при приближении решения задачи (2.8) в классе $H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)$.

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.2. *Пусть* $\mathcal{O}'$ *— строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$, *и* $\delta := \operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$. *Тогда существует число* $\varepsilon_1 \in (0,1]$, *зависящее от области* $\mathcal{O}$ *и решетки* Γ, *такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)} \leqslant \mathfrak{C}_\delta(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{8.1}$$

или, в операторных терминах

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{A}_N^0 + \lambda I)^{-1} - \varepsilon K_{N,\lambda}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)} \leqslant \mathfrak{C}_\delta(\lambda)\varepsilon. \tag{8.2}$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O}';\mathbb{C}^m)} \leqslant \mathfrak{C}'_\delta(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{8.3}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица* (1.9). *Постоянные в оценках имеют вид* $\mathfrak{C}_\delta(\lambda) = \mathfrak{C}_1(\lambda)\delta^{-1} + \mathfrak{C}_2(\lambda)$, $\mathfrak{C}'_\delta(\lambda) = \mathfrak{C}'_1(\lambda)\delta^{-1} + \mathfrak{C}'_2(\lambda)$, *где* $\mathfrak{C}_1(\lambda)$, $\mathfrak{C}_2(\lambda)$, $\mathfrak{C}'_1(\lambda)$, $\mathfrak{C}'_2(\lambda)$ *зависят от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *от констант* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *из неравенства* (2.2), *от* λ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Фиксируем гладкую срезку $\zeta(\mathbf{x})$ со следующими свойствами

$$\begin{aligned}&\zeta \in C_0^\infty(\mathcal{O}), \quad 0 \leqslant \zeta(\mathbf{x}) \leqslant 1,\\&\zeta(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \mathcal{O}'; \quad |\nabla \zeta(\mathbf{x})| \leqslant \kappa' \delta^{-1}.\end{aligned} \tag{8.4}$$

Здесь константа κ' зависит лишь от области $\mathcal{O}$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (2.8) и $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение уравнения (4.14). Тогда $(\mathcal{A}_\varepsilon + \lambda I)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) = 0$ в области $\mathcal{O}$. Следовательно, справедливо тождество

$$\int_{\mathcal{O}} \left(\langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta} \rangle + \lambda \langle \mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta} \rangle \right) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{8.5}$$

Подставим в (8.5) $\boldsymbol{\eta} = \zeta^2(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)$. В силу (1.2) выполнены равенства

$$b(\mathbf{D}) \left(\zeta^2 (\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \right) = \zeta b(\mathbf{D}) \left(\zeta (\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \right) + \sum_{l=1}^d b_l (D_l \zeta) \zeta (\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \tag{8.6}$$

$$\zeta b(\mathbf{D})(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) = b(\mathbf{D}) \left(\zeta (\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \right) - \sum_{l=1}^d b_l (D_l \zeta)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon). \tag{8.7}$$

Из (8.5)–(8.7) получаем

$$\begin{aligned}J(\varepsilon) := &\int_{\mathcal{O}} \left(\langle g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \left(\zeta (\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \right), b(\mathbf{D}) \left(\zeta (\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \right) \rangle + \lambda \zeta^2 |\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon|^2 \right) d\mathbf{x}\\&= J_1(\varepsilon) + J_2(\varepsilon),\end{aligned} \tag{8.8}$$

где

$$\begin{aligned}J_1(\varepsilon) = &- \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \left(\zeta (\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \right), \sum_{l=1}^d b_l (D_l \zeta)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \rangle \, d\mathbf{x}\\&+ \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_j (D_j \zeta)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \sum_{l=1}^d b_l (D_l \zeta)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \rangle \, d\mathbf{x},\end{aligned} \tag{8.9}$$

$$J_2(\varepsilon) = \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon \sum_{l=1}^d b_l (D_l \zeta)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), b(\mathbf{D}) \left(\zeta (\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \right) \rangle \, d\mathbf{x}. \tag{8.10}$$

Оценим член (8.10) с помощью (1.5) и (8.4):

$$\begin{aligned}&|J_2(\varepsilon)| \leqslant \|(g^\varepsilon)^{1/2} b(\mathbf{D}) \left(\zeta (\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon) \right) \|_{L_2(\mathcal{O})} \|(g^\varepsilon)^{1/2} \sum_{l=1}^d b_l (D_l \zeta)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})}\\&\leqslant \frac{1}{4} J(\varepsilon) + \|g\|_{L_\infty} \alpha_1 d (\kappa')^2 \delta^{-2} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{8.11}$$

Аналогично для члена (8.9) получаем:

$$|J_1(\varepsilon)| \leqslant \frac{1}{4} J(\varepsilon) + 2\|g\|_{L_\infty} \alpha_1 d (\kappa')^2 \delta^{-2} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.12}$$

Теперь из (8.8), (8.11), (8.12) вытекает оценка

$$J(\varepsilon) \leqslant 6\|g\|_{L_\infty}\alpha_1 d(\kappa')^2\delta^{-2}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.13}$$

Считая функцию $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon := \zeta(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)$ продолженной нулем на $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$, заметим, что $J(\varepsilon) = a_\varepsilon[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon] + \lambda\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$ и воспользуемся нижним неравенством (1.6). Получаем:

$$J(\varepsilon) \geqslant \alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \lambda\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

а потому

$$\|\zeta(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \max\{\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}, \lambda^{-1}\}J(\varepsilon). \tag{8.14}$$

В силу (4.26) и (6.36) справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (\mathcal{C}_5(\lambda) + \mathcal{C}_{11}(\lambda))\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{8.15}$$

Сопоставляя (8.13)–(8.15) и учитывая (8.4), приходим к оценке

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \|\zeta(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C}_1(\lambda)\delta^{-1}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{8.16}$$

где

$$\mathfrak{C}_1(\lambda) = \max\{\alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}, \lambda^{-1/2}\}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}(6\alpha_1 d)^{1/2}\kappa'(\mathcal{C}_5(\lambda) + \mathcal{C}_{11}(\lambda)). \tag{8.17}$$

Принимая во внимание соотношения (4.8), (4.13), (4.16), убеждаемся в справедливости неравенства

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_2(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \tag{8.18}$$

Теперь из (8.16) и (8.18) вытекает оценка (8.1) с постоянной $\mathfrak{C}_\delta(\lambda) = \mathfrak{C}_1(\lambda)\delta^{-1} + \mathfrak{C}_2(\lambda)$, где $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ определено в (8.17), а $\mathfrak{C}_2(\lambda) = C_2(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda)$.

Остается проверить (8.3). Из (8.16) с учетом (1.2), (1.5) следует, что

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}d^{1/2}\mathfrak{C}_1(\lambda)\delta^{-1}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{8.19}$$

Из (4.13) и (4.17) получаем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_5(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \varepsilon > 0. \tag{8.20}$$

Теперь из (8.19) и (8.20) вытекает неравенство (8.3) с постоянной $\mathfrak{C}'_\delta(\lambda) = \mathfrak{C}'_1(\lambda)\delta^{-1} + \mathfrak{C}'_2(\lambda)$, где

$$\mathfrak{C}'_1(\lambda) = \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}d^{1/2}\mathfrak{C}_1(\lambda), \quad \mathfrak{C}'_2(\lambda) = C_5(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda). \ \bullet \tag{8.21}$$

8.2. Случай $\Lambda \in L_\infty$. Аналогичным образом в случае, когда выполнено условие 1.10, на основании теорем 4.1 и 1.12 получается следующий результат.

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 7.1. *Пусть $\mathcal{O}'$ — строго внутренняя подобласть области $\mathcal{O}$, и $\delta := \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$. Тогда существует число $\varepsilon_1 \in (0,1]$, зависящее от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ, такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)} \leqslant \check{\mathfrak{C}}_\delta(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{8.22}$$

или, в операторных терминах,

$$\|(\mathcal{A}_{N,\varepsilon}+\lambda I)^{-1}-(\mathcal{A}_N^0+\lambda I)^{-1}-\varepsilon K_{N,\lambda}^0(\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\to H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)}\leqslant \check{\mathfrak{C}}_\delta(\lambda)\varepsilon.$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon=g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O}';\mathbb{C}^m)}\leqslant \check{\mathfrak{C}}'_\delta(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \tag{8.23}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица* (1.9). *Постоянные в оценках имеют вид* $\check{\mathfrak{C}}_\delta(\lambda)=\mathfrak{C}_1(\lambda)\delta^{-1}+\check{\mathfrak{C}}_2(\lambda)$, $\check{\mathfrak{C}}'_\delta(\lambda)=\mathfrak{C}'_1(\lambda)\delta^{-1}+\check{\mathfrak{C}}'_2(\lambda)$, *где* $\mathfrak{C}_1(\lambda)$, $\check{\mathfrak{C}}_2(\lambda)$, $\mathfrak{C}'_1(\lambda)$, $\check{\mathfrak{C}}'_2(\lambda)$ *зависят от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *от констант* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *из неравенства* (2.2), *от нормы* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, *от* λ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Неравенство (8.16) сохраняет силу. Вместо (8.18) сейчас используем оценку, вытекающую из теоремы 1.12 и из (4.13):

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon-\check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant C_7(\lambda)\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_7(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad \varepsilon>0. \tag{8.24}$$

Теперь оценка (8.22) прямо следует из (8.16) и (8.24), при этом $\check{\mathfrak{C}}_\delta(\lambda)=\mathfrak{C}_1(\lambda)\delta^{-1}+\check{\mathfrak{C}}_2(\lambda)$, где $\mathfrak{C}_1(\lambda)$ определено в (8.17) и $\check{\mathfrak{C}}_2(\lambda)=C_7(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda)$.

Для доказательства (8.23) воспользуемся неравенством (8.19) и следующей оценкой, вытекающей из теоремы 1.12 и из (4.13):

$$\begin{aligned}\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}&\leqslant C_8(\lambda)\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant C_8(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad \varepsilon>0.\end{aligned}$$

В результате получаем (8.23) с постоянной $\check{\mathfrak{C}}'_\delta(\lambda)=\mathfrak{C}'_1(\lambda)\delta^{-1}+\check{\mathfrak{C}}'_2(\lambda)$, где $\mathfrak{C}'_1(\lambda)$ определено в (8.21) и $\check{\mathfrak{C}}'_2(\lambda)=C_8(\lambda)\mathcal{C}_3(\lambda)$. •

Замечание 8.3. Можно применять теоремы 8.1 и 8.2 и в случае, когда δ зависит от ε и строго внутренняя подобласть $\mathcal{O}'_\varepsilon$ близко подходит к границе $\partial\mathcal{O}$. Например, при $\delta(\varepsilon)=O(\varepsilon^\alpha)$ оценка погрешности в (8.1) или в (8.22) получается порядка $O(\varepsilon^{1-\alpha})$. Ясно, что в случае $\alpha<1/2$ оценка погрешности во внутренней области $\mathcal{O}'_\varepsilon$ получается более высокого порядка, чем во всей области $\mathcal{O}$. Если же $\alpha\geqslant 1/2$, то теоремы 4.2 и 7.1 дают лучший результат (во всей области $\mathcal{O}$) и нет смысла применять теоремы 8.1 и 8.2.

§9. Усреднение задачи Неймана в случае $\lambda=0$

9.1. Постановка задачи. Для приложений представляет интерес задача Неймана для уравнения $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}\mathbf{u}_\varepsilon=\mathbf{F}$, т. е. случай $\lambda=0$. При этом правая часть уравнения должна удовлетворять условиям разрешимости, а решение подчинено дополнительному условию ортогональности к ядру оператора. В этом параграфе мы выводим результаты для этой задачи из результатов §4 и §7.

Обозначим

$$Z=\{\mathbf{z}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n):\ b(\mathbf{D})\mathbf{z}=0\}. \tag{9.1}$$

Тогда Z — (замкнутое) подпространство пространства $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Отметим, что Z заведомо содержит n-мерное подпространство $\{\mathbf{u}\in$

$H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n):\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}$, состоящее из постоянных вектор-функций. Из (2.2) следует неравенство

$$\|\mathbf{D}\mathbf{z}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1^{-1}\mathcal{C}_2\|\mathbf{z}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{z} \in Z. \tag{9.2}$$

В силу компактности вложения $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \subset L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ неравенство вида (9.2) может выполняться только на конечномерном подпространстве в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Следовательно, Z конечномерно.

Очевидно, конечномерное пространство (9.1) является также (замкнутым) подпространством в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Обозначим $\mathcal{H}(\mathcal{O}) := L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \ominus Z$, $H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) = H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap \mathcal{H}(\mathcal{O})$. Иначе говоря,

$$H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) = \{\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n):\ (\mathbf{u},\mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})} = 0,\ \forall \mathbf{z} \in Z\}. \tag{9.3}$$

Ясно, что $H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ является (замкнутым) подпространством в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Предложение 9.1. *Форма* $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}$ *определяет в пространстве* (9.3) *норму, эквивалентную стандартной* H^1*-норме.*

Доказательство. Оценка $\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \alpha_1 d\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}$ очевидна ввиду (1.2) и (1.5) и выполнена на всех функциях $\mathbf{u} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Докажем обратное: существует постоянная $\widetilde{\mathcal{C}}_1 > 0$ такая, что

$$\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_1\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{9.4}$$

Предположим противное. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется функция $\mathbf{u}_k \in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ такая, что

$$\|\mathbf{u}_k\|^2_{H^1(\mathcal{O})} > k\|b(\mathbf{D})\mathbf{u}_k\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Тогда для последовательности $\mathbf{v}_k = \|\mathbf{u}_k\|^{-1}_{H^1(\mathcal{O})}\mathbf{u}_k$ имеем $\|\mathbf{v}_k\|_{H^1(\mathcal{O})} = 1$ и $\|b(\mathbf{D})\mathbf{v}_k\|_{L_2(\mathcal{O})} < 1/\sqrt{k} \to 0$ при $k \to \infty$. В силу компактности вложения $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \subset L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ из последовательности $\{\mathbf{v}_k\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{\mathbf{v}_{k_j}\}$, сходящуюся в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Применяя неравенство (2.2) при $\mathbf{u} = \mathbf{v}_{k_j} - \mathbf{v}_{k_l}$ и используя сходимость $\mathbf{v}_{k_j}$ в $L_2(\mathcal{O})$ и сходимость $b(\mathbf{D})\mathbf{v}_{k_j}$ в $L_2(\mathcal{O})$, приходим к выводу, что $\{\mathbf{v}_{k_j}\}$ является фундаментальной последовательностью в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Следовательно, она сходится к некоторой функции $\mathbf{v}_* \in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При этом $\|\mathbf{v}_*\|_{H^1(\mathcal{O})} = 1$, а с другой стороны $b(\mathbf{D})\mathbf{v}_* = 0$, т. е. $\mathbf{v}_* \in Z$. Поскольку $Z \cap H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) = \{0\}$, мы пришли к противоречию. $\bullet$

Пусть $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ — оператор, отвечающий форме (2.3). Очевидно, что $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_{N,\varepsilon} = Z$. Поэтому ортогональное разложение $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) = Z \oplus \mathcal{H}(\mathcal{O})$ приводит оператор $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$. Обозначим через $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$ самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, являющийся частью оператора $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ в $\mathcal{H}(\mathcal{O})$. Равносильно: оператор $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$ — это самосопряженный оператор в $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, порожденный квадратичной формой

$$b_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).$$

Эта форма замкнута и, в силу (9.4), положительно определена. Справедливы оценки

$$\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1^{-1}\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant b_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \|g\|_{L_\infty} d\alpha_1 \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{9.5}$$

Наша цель в этом параграфе — найти аппроксимацию обратного оператора $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{-1}$ при малом ε. В терминах решений — мы изучаем поведение обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ задачи Неймана

$$\begin{aligned} &b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\mathcal{O};\\ &\partial^\varepsilon_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = 0;\quad (\mathbf{u}_\varepsilon,\mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})} = 0,\ \forall \mathbf{z}\in Z, \end{aligned} \tag{9.6}$$

где $\mathbf{F}\in\mathcal{H}(\mathcal{O})$. Тогда $\mathbf{u}_\varepsilon = \mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{-1}\mathbf{F}$.

По определению, обобщенным решением задачи (9.6) называется элемент $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, удовлетворяющий тождеству

$$\int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\boldsymbol{\eta}\rangle\, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{F},\boldsymbol{\eta}\rangle\, d\mathbf{x}, \quad \forall\boldsymbol{\eta}\in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{9.7}$$

С учетом (9.5) форму $b_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{v}]$ можно принять за скалярное произведение в пространстве $H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Правая часть в (9.7) является антилинейным непрерывным функционалом над $\boldsymbol{\eta}\in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. По теореме Рисса решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ существует и единственно. Оно подчинено оценке

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.8}$$

9.2. Усредненная задача. Пусть $\mathcal{A}_N^0$ — оператор, отвечающий форме (2.27). Очевидно, что $\operatorname{Ker}\mathcal{A}_N^0 = Z$. Разложение $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) = Z\oplus\mathcal{H}(\mathcal{O})$ приводит оператор $\mathcal{A}_N^0$. Обозначим через $\mathcal{B}_N^0$ самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, являющийся частью оператора $\mathcal{A}_N^0$ в $\mathcal{H}(\mathcal{O})$. Иными словами, оператор $\mathcal{B}_N^0$ — это самосопряженный оператор в $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, порожденный квадратичной формой

$$b_N^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_{\mathcal{O}} \langle g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u}\in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{9.9}$$

С учетом (1.15) для формы (9.9) справедливы двусторонние оценки вида (9.5) с заменой средней части в них на форму (9.9); константы в оценках те же. Поэтому оператор $\mathcal{B}_N^0$ положительно определен:

$$\mathcal{B}_N^0 \geqslant \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1^{-1} I_{\mathcal{H}(\mathcal{O})}. \tag{9.10}$$

Пусть $\mathbf{u}_0\in H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ — обобщенное решение задачи Неймана

$$\begin{aligned} &b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{x}\in\mathcal{O};\\ &\partial^0_{\boldsymbol{\nu}}\mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0;\quad (\mathbf{u}_0,\mathbf{z})_{L_2(\mathcal{O})} = 0,\ \forall \mathbf{z}\in Z, \end{aligned} \tag{9.11}$$

где $\mathbf{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$. Тогда $\mathbf{u}_0 = (\mathcal{B}_N^0)^{-1}\mathbf{F}$.

Решение определяется по аналогии с (9.7). Оно существует, единственно и подчинено оценке

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty} \widetilde{\mathcal{C}}_1 \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.12}$$

В силу теоремы о повышении гладкости выполнено $\mathbf{u}_0 \in H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, причем

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{C} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.13}$$

Оценку (9.13) можно извлечь из (2.33), если заметить, что $\mathbf{u}_0$ является решением задачи вида (2.28) с правой частью уравнения, равной $\mathbf{F}+\lambda\mathbf{u}_0$. Тогда в силу (2.33) и (9.12)

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{C}_\lambda \|\mathbf{F} + \lambda\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (\widehat{C}_\lambda + \lambda \|g^{-1}\|_{L_\infty} \widetilde{\mathcal{C}}_1) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Фиксируя $\lambda = \lambda_0 = \mathcal{C}_2 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} + 1$, получаем (9.13) с постоянной $\widehat{C} = \widehat{C}_{\lambda_0} + \lambda_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty} \widetilde{\mathcal{C}}_1$.

9.3. Аппроксимация решения в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Следующая теорема является аналогом теоремы 4.1 в случае $\lambda = 0$.

Теорема 9.2. *Предположим, что $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$, а матрица $g(\mathbf{x})$ и ДО $b(\mathbf{D})$ удовлетворяют условиям пункта* 1.2. *Кроме того, пусть выполнено условие* 2.1. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (9.6) *и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи* (9.11) *при $\mathbf{F} \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$. Тогда существует число $\varepsilon_1 \in (0,1]$, зависящее от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ, такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_0 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{9.14}$$

или, в операторных терминах,

$$\|\mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{B}_N^0)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \to \mathcal{H}(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}_0 \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Постоянная $\widetilde{\mathcal{C}}_0$ зависит от m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от параметров решётки Γ, от постоянных $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ из неравенства (2.2), *от постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}_1$ из неравенства* (9.4) *и от области $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Воспользуемся теоремой 4.1. Пусть число λ удовлетворяет ограничению (2.6). Поскольку $\mathcal{B}_{N,\varepsilon}$ — часть оператора $\mathcal{A}_{N,\varepsilon}$ в подпространстве $\mathcal{H}(\mathcal{O})$, а $\mathcal{B}_N^0$ — часть $\mathcal{A}_N^0$ в том же подпространстве, то из (4.2) вытекает оценка

$$\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O}) \to \mathcal{H}(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0(\lambda)\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{9.15}$$

Очевидно, решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (9.6) одновременно является решением уравнения $(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + \lambda I)\mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}_\varepsilon$, где $\mathbf{F}_\varepsilon = \mathbf{F} + \lambda\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$. Поэтому $\mathbf{u}_\varepsilon = (\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1}\mathbf{F}_\varepsilon$. С учетом (9.8) справедлива оценка

$$\|\mathbf{F}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \lambda \|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (1 + \lambda \|g^{-1}\|_{L_\infty} \widetilde{\mathcal{C}}_1) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.16}$$

Положим $\mathbf{u}_{0,\varepsilon} := (\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\mathbf{F}_\varepsilon$. В силу (9.15) выполнена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_{0,\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_0(\lambda)\varepsilon \|\mathbf{F}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{9.17}$$

С другой стороны, решение $\mathbf{u}_0$ задачи (9.11) одновременно является решением уравнения $(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)\mathbf{u}_0 = \mathbf{F}_0$, где $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F} + \lambda \mathbf{u}_0 \in \mathcal{H}(\mathcal{O})$. Поэтому $\mathbf{u}_0 = (\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\mathbf{F}_0$. Имеем:

$$\mathbf{u}_{0,\varepsilon} - \mathbf{u}_0 = (\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}(\mathbf{F}_\varepsilon - \mathbf{F}_0) = \lambda(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0). \tag{9.18}$$

Следовательно,

$$\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_{0,\varepsilon} + \lambda(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0),$$

откуда

$$\left(I - \lambda(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\right)(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0) = \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_{0,\varepsilon}. \tag{9.19}$$

В силу (9.10)

$$\|\lambda(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to\mathcal{H}(\mathcal{O})} \leqslant \lambda\left(\lambda + \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}_1^{-1}\right)^{-1} < 1,$$

а потому оператор $I - \lambda(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}$ обратим и норма обратного допускает оценку

$$\|\left(I - \lambda(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\right)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to\mathcal{H}(\mathcal{O})} \leqslant 1 + \lambda\|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1. \tag{9.20}$$

В итоге из (9.19) вытекает соотношение

$$\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0 = \left(I - \lambda(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\right)^{-1}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_{0,\varepsilon}). \tag{9.21}$$

Сопоставляя (9.16), (9.17), (9.20) и (9.21), получаем оценку

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (1 + \lambda\|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1)^2\mathcal{C}_0(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{9.22}$$

Оценка (9.22) доказана при любом λ, удовлетворяющем (2.6). Можно фиксировать λ, например, полагая $\lambda = \lambda_0 := 1 + \mathcal{C}_2\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}$. Тогда получим оценку (9.14) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}_0 = (1 + \lambda_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1)^2\mathcal{C}_0(\lambda_0)$. •

9.4. Аппроксимация решений в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Корректор для задачи (9.6) определяется аналогично (4.5):

$$K_N(\varepsilon) = R_\mathcal{O}[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(\mathcal{B}_N^0)^{-1}. \tag{9.23}$$

Оператор (9.23) непрерывно переводит $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Первым приближением к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (9.6) служит функция

$$\mathbf{v}_\varepsilon = (\mathcal{B}_N^0)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K_N(\varepsilon)\mathbf{F} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0, \tag{9.24}$$

где $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_\mathcal{O}\mathbf{u}_0$. Отметим, что $\mathbf{v}_\varepsilon$ принадлежит $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, но (вообще говоря) не принадлежит $H^1_\perp(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Следующий результат является аналогом теоремы 4.2 в случае $\lambda = 0$.

Теорема 9.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.2. *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (9.24). *Тогда существует число* $\varepsilon_1 \in (0,1]$, *зависящее от области* $\mathcal{O}$ *и решетки* Γ, *такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{9.25}$$

или, в операторных терминах,

$$\|\mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{B}_N^0)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}\varepsilon^{1/2}.$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \qquad (9.26)$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица* (1.9). *Постоянные* $\widetilde{\mathcal{C}}$, $\widetilde{\mathcal{C}}'$ *зависят лишь от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *от постоянных* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *из неравенства* (2.2), *от постоянной* $\widetilde{\mathcal{C}}_1$ *из неравенства* (9.4) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 4.2. Пусть λ удовлетворяет условию (2.6). Обозначим через $\mathcal{P}$ ортопроектор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ на подпространство $\mathcal{H}(\mathcal{O})$. Домножая операторы под знаком нормы в (4.10) справа на проектор $\mathcal{P}$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1} - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \mathcal{C}(\lambda)\varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.\end{aligned} \qquad (9.27)$$

Как в доказательстве теоремы 9.2, используем представление $\mathbf{u}_\varepsilon = (\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1}\mathbf{F}_\varepsilon$ и рассмотрим функцию $\mathbf{u}_{0,\varepsilon} = (\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\mathbf{F}_\varepsilon$. В силу (9.27) и (9.16) справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_{0,\varepsilon} - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}(\lambda)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \mathcal{C}(\lambda)(1 + \lambda\|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1)\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1,\end{aligned} \qquad (9.28)$$

где $\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon} = P_\mathcal{O}\mathbf{u}_{0,\varepsilon}$.

Заметим, что из (2.32) и (2.34) домножением оператора под знаком нормы справа на проектор $\mathcal{P}$ следуют оценки

$$\|(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_\lambda^{-1}, \qquad (9.29)$$

$$\|(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{C}_\lambda. \qquad (9.30)$$

Теперь из (9.18) при учете (9.14) и (9.29) вытекает неравенство

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{u}_{0,\varepsilon} - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} = \lambda\|(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0)\|_{H^1(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \lambda c_\lambda^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \lambda c_\lambda^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}_0\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.\end{aligned} \qquad (9.31)$$

Рассмотрим теперь функцию $\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon} - \widetilde{\mathbf{u}}_0)$. Требуется оценить ее норму в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Поскольку эта функция определена во всем $\mathbb{R}^d$, будем оценивать ее норму в $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В силу предложения 1.5 и (1.4)

$$\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon} - \widetilde{\mathbf{u}}_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon|\Omega|^{-1/2}\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon} - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \qquad (9.32)$$

Рассмотрим производные

$$\begin{aligned}\partial_j\left(\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon} - \widetilde{\mathbf{u}}_0)\right) &= (\partial_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon} - \widetilde{\mathbf{u}}_0)\\ &+ \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial_j(\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon} - \widetilde{\mathbf{u}}_0).\end{aligned}$$

Тогда с учетом предложения 1.5 и (1.4) имеем:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{d}\|\partial_j(\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}-\widetilde{\mathbf{u}}_0))\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant 2|\Omega|^{-1}\|\mathbf{D}\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\alpha_1\|\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}-\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}\\&+2\varepsilon^2|\Omega|^{-1}\|\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\alpha_1\|\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}-\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Вместе с (9.32) это влечет оценку

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}-\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{H^1(\mathcal{O})}\\&\leqslant|\Omega|^{-1}\alpha_1(3\varepsilon^2\|\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}+2\|\mathbf{D}\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)})\|\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}-\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}\tag{9.33}$$

Из (9.14), (9.18) и (9.30) следует оценка

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}-\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\mathcal{C}_{\mathcal{O}}\|\mathbf{u}_{0,\varepsilon}-\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}\\&\leqslant\mathcal{C}_{\mathcal{O}}\lambda\widehat{C}_\lambda\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\varepsilon\mathcal{C}_{\mathcal{O}}\lambda\widehat{C}_\lambda\widetilde{\mathcal{C}}_0\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\end{aligned}\tag{9.34}$$

Теперь из (9.33) и (9.34) с учетом (1.10) и (1.11) получаем:

$$\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})(\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}-\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant\check{C}_\lambda\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1,\tag{9.35}$$

где $\check{C}_\lambda=m^{1/2}\alpha_1^{1/2}\alpha_0^{-1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\left(2+3(2r_0)^{-2}\right)^{1/2}\mathcal{C}_{\mathcal{O}}\lambda\widehat{C}_\lambda\widetilde{\mathcal{C}}_0$.

В итоге из (9.28), (9.31) и (9.35) вытекает оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant\varepsilon^{1/2}\left(\mathcal{C}(\lambda)(1+\lambda\|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1)+\lambda c_\lambda^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}_0+\check{C}_\lambda\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\tag{9.36}$$

при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$. Оценка (9.36) доказана при любом λ, удовлетворяющем (2.6). Можно фиксировать λ, полагая $\lambda=\lambda_0:=1+\mathcal{C}_2\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$. Тогда получим оценку (9.25) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}=\mathcal{C}(\lambda_0)(1+\lambda_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1)+\lambda_0c_{\lambda_0}^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}_0+\check{C}_{\lambda_0}$.

Остается доказать (9.26). Рассуждения аналогичны доказательству неравенства (4.11) (см. п. 5.4). Из (9.25) с учетом (1.2) и (1.5) следует, что

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon-g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\widetilde{\mathcal{C}}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\tag{9.37}$$

Аналогично (5.40) имеем:

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_6\varepsilon\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\tag{9.38}$$

В силу (1.4) и (9.13)

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})}\leqslant\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{C}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}\tag{9.39}$$

В итоге из (9.37)–(9.39) вытекает (9.26) с постоянной $\widetilde{\mathcal{C}}'=\|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\widetilde{\mathcal{C}}+C_6\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{C}$. $\bullet$

9.5. Результаты в случае $\Lambda \in L_\infty$. При условии 1.10 вместо корректора (9.23) можно использовать более простой корректор

$$K_N^0(\varepsilon) = [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(\mathcal{B}_N^0)^{-1},$$

непрерывно переводящий $\mathcal{H}(\mathcal{O})$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Рассмотрим вместо (9.24) другое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (9.6):

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon = (\mathcal{B}_N^0)^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K_N^0(\varepsilon)\mathbf{F} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0. \tag{9.40}$$

Аналогом теоремы 7.1 в случае $\lambda = 0$ является следующий результат.

Теорема 9.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.2, *а также условие* 1.10. *Пусть функция* $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon$ *определена в* (9.40). *Тогда существует число* $\varepsilon_1 \in (0,1]$, *зависящее от области* $\mathcal{O}$ *и решетки* Γ, *такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \check{\mathcal{C}}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{9.41}$$

или, в операторных терминах,

$$\|\mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{B}_N^0)^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \check{\mathcal{C}}\varepsilon^{1/2}.$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)} \leqslant \check{\mathcal{C}}'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{9.42}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица* (1.9). *Постоянные* $\check{\mathcal{C}}$, $\check{\mathcal{C}}'$ *зависят от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *от постоянных* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *из неравенства* (2.2), *от постоянной* $\widetilde{\mathcal{C}}_1$ *из неравенства* (9.4), *от нормы* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 7.1. Нужно оценить H^1-норму функции $\check{\mathbf{v}}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon = \varepsilon\Lambda^\varepsilon(I - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0$.

Отметим оценку, вытекающую из (1.4) и (9.13):

$$\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{C}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.43}$$

Применимы неравенства (7.6) и (7.7). Вместе с (9.39) и (9.43) они дают

$$\|\check{\mathbf{v}}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} = \|\varepsilon\Lambda^\varepsilon(I - S_\varepsilon)b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_{12}^0\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{9.44}$$

где $\mathcal{C}_{12}^0 = \alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{C}\left(2(3+2\beta_2)^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty} + (2\beta_1)^{1/2}r_1\right)$.

Теперь из (9.25) и (9.44) вытекает (9.41) с постоянной $\check{\mathcal{C}} = \widetilde{\mathcal{C}} + \mathcal{C}_{12}^0$.

Остается проверить (9.42). Из (9.41) с учетом (1.2) и (1.5) следует, что

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon^{1/2}d^{1/2}\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\check{\mathcal{C}}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{9.45}$$

Аналогично (7.10) и (7.11) с учетом (9.13) имеем:

$$\begin{aligned} \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\check{\mathbf{v}}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \varepsilon d\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \varepsilon d\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}\widehat{C}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{9.46}$$

Из (9.45) и (9.46) вытекает (9.42) с постоянной $\check{\mathcal{C}}' = d^{1/2}\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\check{\mathcal{C}} + d\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}\widehat{C}$. $\bullet$

9.6. Специальные случаи. Выделим специальные случаи. Из теоремы 9.3 и предложения 1.2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 9.5. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (9.6) *и* $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (9.11). *Если* $g^0 = \overline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.13), *то* $\Lambda = 0$ *и* $K_N(\varepsilon) = 0$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Из предложений 1.3, 1.13 и утверждения теоремы 9.4 относительно потоков получаем следующее предложение.

Предложение 9.6. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (9.6), $\mathbf{u}_0$ *— решение задачи* (9.11) *и* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$. *Если* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. выполнены соотношения* (1.14), *то справедлива оценка*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)} \leqslant \check{\mathcal{C}}'\varepsilon^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

9.7. Аппроксимация решений в строго внутренней подобласти. Как и в §8, можно получить точную по порядку оценку погрешности при приближении решения в классе $H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)$, где $\mathcal{O}'$ — строго внутренняя подобласть области $\mathcal{O}$.

Теорема 9.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.3. *Пусть* $\mathcal{O}'$ *— строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$, *и* $\delta := \operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$. *Тогда существует число* $\varepsilon_1 \in (0,1]$, *зависящее от области* $\mathcal{O}$ *и решетки* Γ, *такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_\delta\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{9.47}$$

или, в операторных терминах,

$$\|\mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{B}_N^0)^{-1} - \varepsilon K_N(\varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}_\delta\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O}';\mathbb{C}^m)} \leqslant \widetilde{\mathfrak{C}}'_\delta\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{9.48}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица* (1.9). *Постоянные в оценках имеют вид* $\widetilde{\mathfrak{C}}_\delta = \widetilde{\mathfrak{C}}_1\delta^{-1} + \widetilde{\mathfrak{C}}_2$, $\widetilde{\mathfrak{C}}'_\delta = \widetilde{\mathfrak{C}}'_1\delta^{-1} + \widetilde{\mathfrak{C}}'_2$, *где* $\widetilde{\mathfrak{C}}_1$, $\widetilde{\mathfrak{C}}_2$, $\widetilde{\mathfrak{C}}'_1$, $\widetilde{\mathfrak{C}}'_2$ *зависят от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *от констант* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *из неравенства* (2.2), *от постоянной* $\widetilde{\mathcal{C}}_1$ *из неравенства* (9.4) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 8.1. Пусть число λ удовлетворяет условию (2.6). Домножая операторы под знаком нормы в (8.2) справа на проектор $\mathcal{P}$, приходим к оценке

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1} - (\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1} - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')}\\ &\leqslant \mathfrak{C}_\delta(\lambda)\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.\end{aligned} \tag{9.49}$$

Далее действуем по аналогии с доказательством теоремы 9.3. Запишем $\mathbf{u}_\varepsilon$ в виде $\mathbf{u}_\varepsilon = (\mathcal{B}_{N,\varepsilon} + \lambda I)^{-1}\mathbf{F}_\varepsilon$ и рассмотрим $\mathbf{u}_{0,\varepsilon} = (\mathcal{B}_N^0 + \lambda I)^{-1}\mathbf{F}_\varepsilon$. В силу (9.16) и (9.49) имеем:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_{0,\varepsilon} - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_{0,\varepsilon}\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \mathfrak{C}_\delta(\lambda)\varepsilon\|\mathbf{F}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant \mathfrak{C}_\delta(\lambda)(1+\lambda\|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1. \end{aligned} \tag{9.50}$$

Теперь из (9.31), (9.35) и (9.50) вытекает оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \varepsilon\left(\mathfrak{C}_\delta(\lambda)(1+\lambda\|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1) + \lambda c_\lambda^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}_0 + \check{C}_\lambda\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \tag{9.51}$$

при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$. Неравенство (9.51) справедливо при любом λ, удовлетворяющем (2.6). Фиксируя $\lambda = \lambda_0 = 1 + \mathcal{C}_2\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}$, получаем оценку (9.47) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}_\delta = \widetilde{\mathfrak{C}}_1\delta^{-1} + \widetilde{\mathfrak{C}}_2$, где

$$\widetilde{\mathfrak{C}}_1 = \mathfrak{C}_1(\lambda_0)(1+\lambda_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1), \tag{9.52}$$

$\widetilde{\mathfrak{C}}_2 = \mathfrak{C}_2(\lambda_0)(1+\lambda_0\|g^{-1}\|_{L_\infty}\widetilde{\mathcal{C}}_1) + \lambda_0 c_{\lambda_0}^{-1}\widetilde{\mathcal{C}}_0 + \check{C}_{\lambda_0}$.

Остается доказать (9.48). Из (9.47) с учетом (1.2) и (1.5) следует оценка

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \|g\|_{L_\infty} d^{1/2}\alpha_1^{1/2}\widetilde{\mathfrak{C}}_\delta\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1. \tag{9.53}$$

Сопоставляя (9.53) и (9.38), (9.39), приходим к неравенству

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \left(\|g\|_{L_\infty} d^{1/2}\alpha_1^{1/2}\widetilde{\mathfrak{C}}_\delta + C_6\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{C}\right)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$$

при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$. Это доказывает (9.48) с постоянной $\widetilde{\mathfrak{C}}'_\delta = \widetilde{\mathfrak{C}}'_1\delta^{-1} + \widetilde{\mathfrak{C}}'_2$, где

$$\widetilde{\mathfrak{C}}'_1 = \|g\|_{L_\infty} d^{1/2}\alpha_1^{1/2}\widetilde{\mathfrak{C}}_1, \quad \widetilde{\mathfrak{C}}'_2 = \|g\|_{L_\infty} d^{1/2}\alpha_1^{1/2}\widetilde{\mathfrak{C}}_2 + C_6\alpha_1^{1/2}C_{\mathcal{O}}\widehat{C}. \ \bullet \tag{9.54}$$

В случае, когда выполнено условие 1.10, получаем следующий результат.

Теорема 9.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.4. *Пусть* $\mathcal{O}'$ *— строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$, *и* $\delta := \operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$. *Тогда существует число* $\varepsilon_1 \in (0,1]$, *зависящее от области* $\mathcal{O}$ *и решетки* Γ, *такое что справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)} \leqslant \check{\mathfrak{C}}_\delta\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \tag{9.55}$$

или, в операторных терминах

$$\|\mathcal{B}_{N,\varepsilon}^{-1} - (\mathcal{B}_N^0)^{-1} - \varepsilon K_N^0(\varepsilon)\|_{\mathcal{H}(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}';\mathbb{C}^n)} \leqslant \check{\mathfrak{C}}_\delta\varepsilon, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.$$

Для потока $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *справедлива аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O}';\mathbb{C}^m)} \leqslant \check{\mathfrak{C}}'_\delta\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1, \tag{9.56}$$

где $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица* (1.9). *Постоянные в оценках имеют вид* $\check{\mathfrak{C}}_\delta = \widetilde{\mathfrak{C}}_1\delta^{-1} + \check{\mathfrak{C}}_2$, $\check{\mathfrak{C}}'_\delta = \widetilde{\mathfrak{C}}'_1\delta^{-1} + \check{\mathfrak{C}}'_2$, *где* $\widetilde{\mathfrak{C}}_1$, $\check{\mathfrak{C}}_2$, $\widetilde{\mathfrak{C}}'_1$, $\check{\mathfrak{C}}'_2$ *зависят от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решётки* Γ, *от констант* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *из* *неравенства* (2.2), *от постоянной* $\widetilde{C}_1$ *из неравенства* (9.4), *от нормы* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Воспользуемся доказательством теоремы 9.4. При условии 1.10 справедливо неравенство (9.44). Вместе с (9.47) оно влечет оценку (9.55) с постоянной $\check{\mathfrak{C}}_\delta = \widetilde{\mathfrak{C}}_1\delta^{-1} + \check{\mathfrak{C}}_2$, где $\widetilde{\mathfrak{C}}_1$ определено в (9.52) и $\check{\mathfrak{C}}_2 = \widetilde{\mathfrak{C}}_2 + \mathcal{C}_{12}^0$.

Проверим (9.56). Из (9.55) с учетом (1.2) и (1.5) следует, что

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\check{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \|g\|_{L_\infty} d^{1/2}\alpha_1^{1/2}\check{\mathfrak{C}}_\delta\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \quad (9.57)$$

При условии 1.10 справедливо неравенство (9.46). Теперь из (9.46) и (9.57) вытекает (9.56) с постоянной $\check{\mathfrak{C}}'_\delta = \widetilde{\mathfrak{C}}'_1\delta^{-1} + \check{\mathfrak{C}}'_2$, где $\widetilde{\mathfrak{C}}'_1$ определено в (9.54) и $\check{\mathfrak{C}}'_2 = \|g\|_{L_\infty} d^{1/2}\alpha_1^{1/2}\check{\mathfrak{C}}_2 + d\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}\widehat{C}$. $\bullet$

Сказанное в замечании 8.3 относится и к теоремам из §9.

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71-107.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 6, 1–130.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[Zh1] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), № 3, 305–308.

[Zh2] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), № 5, 597-601.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993.

[ZhPas] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z. *Convergence rates in* L^2 *for elliptic homogenization problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.

[Ne] Necas J., *Direct methods in the theory of elliptic equations*, Springer Monographs in Mathematics, 2011.

[Pas] Пастухова С. Е., *О некоторых оценках из усреднения задач теории упругости*, Докл. РАН **406** (2006), № 5, 604-608.

[PSu1] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Усреднение эллиптической задачи Дирихле: оценки погрешности в* $(L_2 \to H^1)$*-норме*, Функц. анализ и его прил. **46** (2012), № 2, 92–96.

[PSu2] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), № 6, 139–177.

[Su1] Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности в* L_2 *при усреднении эллиптической задачи Дирихле*, Функц. анализ и его прил. **46** (2012), № 3, 92–96.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems:* L_2*-operator error estimates*, Mathematika, to appear. Preprint (2012) available at http://arxiv.org/abs/1201.2286