

## **ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН**

### **ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР**

**С.В. Кисляков**

### **РЕДКОЛЛЕГИЯ**

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,  
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургское отделение Математического института  
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16  
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых  
коммуникаций**

**Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27**

**телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54**

**e-mail: [admin@pdmi.ras.ru](mailto:admin@pdmi.ras.ru)**

**<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>**

**Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н**

## О точных формулах для числа целых точек

А. Л. Смирнов

Санкт-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
smirnov@pdmi.ras.ru

Сентябрь, 2012

### Аннотация

Получены точные формулы для числа целых точек в некоторых эллипсах. Эти формулы обобщают одну формулу Эйзенштейна и относятся к редкому типу точных формул для числа целых точек в криволинейной области. Полученные формулы могут представлять интерес в связи с проблемой Римана–Роха для арифметических многообразий.

Ключевые слова и фразы: арифметическая кривая, теорема Римана–Роха, Эйзенштейн, мнимое квадратичное поле, точная формула, точка решетки.

ПРЕПРИНТЫ  
Санкт-Петербургского отделения  
Математического института им. В. А. Стеклова  
Российской академии наук

PREPRINTS  
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,  
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, А. А. Иванов, Л. Ю. Колотилина,  
В. Н. Кублановская, Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье,  
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин,  
В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

# Введение

Речь пойдет о вычислении числа целых точек в семействе гомотетичных областей, то есть о вычислении функции  $h(D, r) = \text{card}(\mathbb{Z}^n \cap rD)$ , где  $D \subset \mathbb{R}^n$  и  $r \geq 0$ . Один из хорошо известных подходов к решению этой задачи связан с получением асимптотических формул для  $h$  при больших  $r$  и с оценками погрешности. Ниже мы не будем обсуждать такую постановку задачи. В данной работе нас будут интересовать только точные формулы.

С точки зрения алгебро-геометрического подхода к теории чисел свободную абелеву группу  $\Lambda$  можно рассматривать как векторное расслоение на арифметической кривой  $X_0 = \text{Spec } \mathbb{Z}$ . Пару  $E = (\Lambda, D)$ , где  $D \subset \mathbb{R} \otimes \Lambda$ , можно рассматривать как векторное расслоение на компактификации арифметической кривой  $X = X_0 \cup \infty$ . При этом включение  $D \subset \mathbb{R} \otimes \Lambda$  играет роль включения  $\Gamma(U, E) \subset \Gamma(\text{Spec } \mathbb{R}, E)$ , где  $U$  играет роль формальной окрестности точки  $\infty$  и может быть обозначена  $\text{Spec } \mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ , а  $\text{Spec } \mathbb{R} = U - \infty$  – проколота формальная окрестность. С этой точки зрения проблема вычисления функции  $h(D, r)$  не что иное, как проблема Римана–Роха на арифметической кривой  $X$ .

Хорошо развита и весьма нетривиальна теория точных формул для  $h$  в том случае, когда  $D$  – выпуклый многогранник в  $\mathbb{R} \otimes \Lambda$  с вершинами в  $\Lambda$ . В этом случае функция  $h$  при  $r = 0, 1, 2, \dots$  представлена полиномом Эрхарта. Для конкретного  $D$  этот полином можно найти с помощью явных вычислений при малых  $r$ . Имеются и теоретические формулы для коэффициентов [2], полученные с помощью применения теоремы Римана–Роха к торическим многообразиям. Основные трудности при этом связаны с вычислением классов Тодда на особых торических многообразиях.

На первый взгляд для криволинейной области  $D$  нет никаких шансов на точную формулу. Однако в 1994, работая вместе с М. Капрановым над арифметической теоремой Римана–Роха, автор обнаружил в [1, р. 29] формулу

$$h(D, r) = 1 + 4 \left( \left\lfloor \frac{r}{1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{r}{7} \right\rfloor + \dots \right), \quad (1)$$

где  $D$  – круг единичного радиуса с центром в нуле, а  $[x]$  – целая часть  $x$ . Эрхарт приписывает эту формулу Гауссу, не указывая точной ссылки. Мне не удалось найти у Гаусса формулы (1). Поэтому я просто придумал ее доказательство. Однако, как недавно указал М. Капранов, в точности эта формула приведена в [3]. Насколько я понял из разговора с Д. Цагиром, формула Эйзенштейна не слишком известна.

Таким образом, цель данной работы в том, чтобы слегка обобщить формулу (1) и привлечь внимание к результатам такого типа. Более широкие обобщения, связь с арифметической теоремой Римана–Роха и моделями арифметических многообразий решено оставить за рамками этой заметки.

---

<sup>0</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10–01–00551), EPSRC Responsive Mode (грант EP/G032556/1).

Автор благодарит Н. Дурова за удачные варианты некоторых формулировок. Часть этой заметки написана в Математическом институте общества Макса Планка. Автор благодарит институт за гостеприимство.

## 1 Дивизоры с ограниченной нормой

Формула Эйзенштейна и ее обобщения будут получены специализацией формулы для числа эффективных дивизоров числового поля  $K$  с ограниченной нормой. При выводе формулы для числа дивизоров нам потребуется некоторая формула для функции целой части

$$x \mapsto [x].$$

### 1.1 Некоторые формулы для функций целой части

Пусть  $C$  – абелева группа,  $D \subset \mathbb{R}$ . Будем говорить, что функция  $h : D \rightarrow C$  зависит только от целой части, если для всяких  $x, y \in D$  равенство  $[x] = [y]$  влечет за собой равенство  $h(x) = h(y)$ . Неформально говоря, с помощью таких функций можно изучать "фактор-пространства вида  $\mathbb{R}/\mathcal{O}_R$ ". Например, для целого  $d > 0$  функция

$$x \mapsto [x/d]$$

зависит только от целой части.

**1.1.1 Теорема.** Пусть  $\{1, 2, \dots\} \subset D \subset \mathbb{R}_{\geq 1} = [1, +\infty)$  и  $h : D \rightarrow C$  – функция, зависящая только от целой части. Тогда существует и единственная последовательность  $a_1, a_2, \dots \in C$ , такая, что

$$h(x) = a_1[x] + a_2[x/2] + \dots \quad (2)$$

для каждого  $x \in D$ .

*Доказательство.* С учетом условий формула (2) равносильна набору соотношений, полученных подстановкой  $x = 1, 2, \dots$  в эту формулу. Поэтому утверждение теоремы равносильно однозначной разрешимости системы линейных уравнений

$$\lambda(a_1, a_2, \dots)^t = (h(1), h(2), \dots)^t,$$

где верхний индекс  $t$  – операция транспонирования, строки и столбцы матрицы  $\lambda$  занумерованы числами  $i, j = 1, 2, \dots$ , причем

$$\lambda_{ij} = [j/i].$$

Матрица  $\lambda$  целочисленно обратима, будучи верхней треугольной матрицей с единицами на диагонали.  $\square$

Для последовательности  $h(1), h(2), \dots$  разностную производную  $\Delta h$  при  $n \geq 1$  определим формулой

$$(\Delta h)(n) = h(n) - h(n-1), \quad (3)$$

где при  $n = 1$  в качестве  $h(0)$  следует использовать 0.

**1.1.2 Предложение.** *Предположим, что  $h(x) = a_1[x] + a_2[x/2] + \dots$ . Тогда*

$$(\Delta h)(n) = \sum_{d|n} a_d \text{ и } a_n = \sum_{d|n} \mu(n/d)(\Delta h)(d). \quad (4)$$

*Доказательство.* Действительно,  $(\Delta h)(n) = h(n) - h(n-1) = \sum a_d([n/d] - [(n-1)/d])$ . Но

$$[n/d] - [(n-1)/d] = \begin{cases} 1, & \text{если } d|n; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\sum a_d([n/d] - [(n-1)/d]) = \sum_{d|n} a_d.$$

Таким образом, первая формула в (4) доказана. Вторая формула следует из первой с помощью формулы обращения Мёбиуса.  $\square$

## 1.2 Формулы для числа дивизоров

Пусть  $K$  – поле, конечное над  $\mathbb{Q}$ , а  $M$  – моноид эффективных дивизоров поля  $K$ . В этой ситуации имеется отображение нормы

$$\text{Nrm} : M \rightarrow N,$$

где  $N = \{1, 2, \dots\}$  – моноид эффективных дивизоров  $\mathbb{Q}$ . Отображение нормы определено формулой  $\text{Nrm}(m) = \text{card } \mathcal{O}_K/I$ , где  $I$  – идеал в кольце  $\mathcal{O}_K/I$ , соответствующий дивизору  $m$ .

**1.2.1. Контекст для считающих функций.** Предположим, что для множества  $S$  и абелевой группы  $A$  имеется диаграмма отображений множеств

$$\begin{array}{ccc} & S & \\ \nu \swarrow & & \searrow \phi \\ N & & A \end{array}, \quad (5)$$

причем множество  $\nu^{-1}(n)$  конечно для каждого  $n \in N$ .

Для вещественного  $e \geq 0$  положим

$$h(e) = \sum_{\nu(m) \leq e} \phi(m). \quad (6)$$

Так как  $h(e)$  зависит только от целой части  $e$ , то по теореме 1.1.1 для некоторых коэффициентов  $b_n$  верно тождество

$$h(e) = b_1 \left[ \frac{e}{1} \right] + b_2 \left[ \frac{e}{2} \right] + b_3 \left[ \frac{e}{3} \right] + \dots$$

Эта формула становится интересной, если коэффициенты  $b_n$  имеют содержательную интерпретацию. В теореме 1.2.2 указан один из таких случаев.

Ниже интересующие нас функции будут рассматриваться в этом контексте, причем в диаграмме (5) в качестве  $\nu$  возьмем  $\text{Nrm}$ , в качестве  $A$  возьмем аддитивную группу  $\mathbb{C}$ , а в качестве  $\phi$  – функцию, тождественно равную единице.

Специализируя определение (6), для вещественного  $e \geq 0$  положим

$$h(e) = \{m \in M \mid \text{Nrm } m \leq e\}. \quad (7)$$

**1.2.2 Теорема.** Пусть  $a_n$  – коэффициенты ряда Дирихле для функции  $\zeta_K(s)/\zeta_{\mathbb{Q}}(s)$ , т. е.  $\zeta_K/\zeta_{\mathbb{Q}} = a_1 \cdot 1^{-s} + a_2 \cdot 2^{-s} + a_3 \cdot 3^{-s} + \dots$ . Тогда для всякого вещественного  $e \geq 0$

$$h(e) = a_1 \left[ \frac{e}{1} \right] + a_2 \left[ \frac{e}{2} \right] + a_3 \left[ \frac{e}{3} \right] + \dots \quad (8)$$

*Доказательство.* Очевидно, что  $h(e)$  зависит только от целой части  $e$ . Поэтому по теореме 1.1.1 для некоторых коэффициентов  $b_n$  верно тождество

$$h(e) = b_1 \left[ \frac{e}{1} \right] + b_2 \left[ \frac{e}{2} \right] + b_3 \left[ \frac{e}{3} \right] + \dots$$

Нам надо доказать, что  $b_n = a_n$  для  $n = 1, 2, \dots$

Пусть

$$r(n) = \text{card } \text{Nrm}^{-1}(n).$$

Прямо из определений (3) и (7) видно, что для  $n = 1, 2, \dots$  верна формула

$$r(n) = (\Delta h)(n).$$

Поэтому из предложения 1.1.2 вытекает, что

$$b_n = \sum_{d|n} \mu(n/d) r(d).$$

Осталось проверить, что коэффициенты ряда Дирихле для  $\zeta_K/\zeta_{\mathbb{Q}}$  выражаются этой же формулой. По определению  $\zeta_K(s) = \sum_{m \in M} (\text{Nrm } m)^{-s}$ . Приведение подобных показывает, что

$$\zeta_K(s) = \sum_{n \in N} r(n) n^{-s}.$$

Умножая обе части на соответствующие части тождества  $\zeta_{\mathbb{Q}}^{-1} = \sum \mu(n) n^{-s}$ , получаем равенство  $a_n = \sum_{d|n} \mu(n/d) r(d)$ .  $\square$

## 2 Мнимые квадратичные поля

Ниже  $K$  – мнимое квадратичное поле,  $\mathcal{O}_K$  – кольцо всех целых элементов  $K$ ,  $D$  – дискриминант  $K$ ,  $\chi$  – характер Дирихле, соответствующий  $K$ .

## 2.1 Формулы для числа целых точек

Начнем со специализации формулы для числа дивизоров.

**2.1.1 Теорема.** *Для вещественного  $e \geq 0$  имеет место формула*

$$h(e) = \chi(1) \left[ \frac{e}{1} \right] + \chi(2) \left[ \frac{e}{2} \right] + \chi(3) \left[ \frac{e}{3} \right] + \dots$$

*Доказательство.* Эта теорема – частный случай теоремы 1.2.2, если учесть хорошо известное тождество

$$\zeta_K(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s) L_{\chi}(s),$$

где

$$L_{\chi}(s) = \frac{\chi(1)}{1^s} + \frac{\chi(2)}{2^s} + \frac{\chi(3)}{3^s} + \dots$$

□

Предположим дополнительно, что мы имеем дело с одноклассным случаем, то есть

$$\text{Pic } \mathcal{O}_K = 1.$$

Для вещественного  $e \geq 0$  пусть

$$H^0(e) = \{s \in \mathcal{O}_K \mid \text{Nrm}(s) \leq e\}.$$

Будем рассматривать  $H^0(e)$  как подмножество  $\mathcal{O}_K$ . На  $\mathcal{O}_K$  умножениями действует моноид  $F = \mathbb{F}_{1^m}$ , где

$$m = m(K) = \text{card } \mu(K),$$

а  $\mu(K) = (K^*)_{\text{tors}}$  – группа всех корней из единицы, содержащихся в  $K$ .

Таким образом,  $H^0(e)$  становится  $F$ -модулем. Этот модуль очевидно является свободным, и пусть

$$h^0(e) = \text{rk}_F H^0(e) = \frac{\text{card } H^0(e) - 1}{m}.$$

**2.1.2 Теорема.** *Пусть  $K$  – чисто мнимое квадратичное расширение  $\mathbb{Q}$ ,  $\text{Pic } \mathcal{O}_K = 1$  и  $\chi$  – характер Дирихле, соответствующий  $K$ . Тогда для вещественного  $e \geq 0$*

$$h^0(e) = \chi(1) \left[ \frac{e}{1} \right] + \chi(2) \left[ \frac{e}{2} \right] + \chi(3) \left[ \frac{e}{3} \right] + \dots \quad (9)$$

*Доказательство.* Эта теорема тотчас вытекает из теоремы 2.1.1, так как ввиду однозначной факторизуемости в  $\mathcal{O}_K$  число главных дивизоров с данной ненулевой нормой ровно в  $m$  раз больше числа эффективных дивизоров с такой же нормой. □

Хорошо известно, что имеется всего девять одноклассных мнимых квадратичных полей. Это поля  $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ , где  $d = 1, 2, 3, 7, 11, 19, 43, 67, 163$ . Таким образом, теорема 2.1.2 дает девять формул.

Имеет смысл сравнить (9) с формулой Дирихле для  $L_{\chi}(1)$ . В общем случае

$$L_{\chi}(1) = \frac{2\pi h}{m\sqrt{|D|}},$$



где  $h = \text{card}(\text{Pic } \mathcal{O}_K)$ . В одноклассном случае эта формула приводит к соотношению

$$\frac{2\pi}{m\sqrt{|D|}} = \chi(1)\frac{1}{1} + \chi(2)\frac{1}{2} + \chi(3)\frac{1}{3} + \dots, \quad (10)$$

которое, очевидно, является предельным случаем формул типа (9).

## 2.2 Примеры

Выпишем явно несколько полученных формул.

**2.2.1.**  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ . В этом случае  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[i]$ , где  $i = \sqrt{-1}$ ,  $D = 4$  и

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{4}; \\ -1, & \text{если } n \equiv -1 \pmod{4}; \\ 0, & \text{если } n \text{ — чётно.} \end{cases}$$

Выбор базиса  $(1, i)$  решетки  $\mathcal{O}_K$  отождествляет эту решетку с  $\mathbb{Z}^2$ . При таком отождествлении

$$H^0(e) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + y^2 \leq e\}.$$

В рассматриваемом случае  $\mu(K) = \{\pm 1, \pm i\}$ ,  $m = 4$  и множество  $H^0(e)$  представляет собой свободный  $F$ -модуль, где  $F \cong \mathbb{F}_{14}$ . Теорема 2.1.2 в этом случае сводится к формуле

$$\text{rk}_F H^0(e) = \left[ \frac{e}{1} \right] - \left[ \frac{e}{3} \right] + \left[ \frac{e}{5} \right] - \left[ \frac{e}{7} \right] + \dots$$

Это формула из статей Эйзенштейна и Эрхарта (см. Введение). В пределе получаем хорошо известную формулу Лейбница

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

**2.2.2.**  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ . В этом случае  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\rho]$ , где  $\rho = \sqrt[6]{1}$ ,  $\sqrt{-3} = 2\rho - 1$ ,  $D = 3$  и

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1 \pmod{3}; \\ -1, & \text{если } n \equiv -1 \pmod{3}; \\ 0, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{3}. \end{cases}$$

Выбор базиса  $(1, \rho)$  решетки  $\mathcal{O}_K$  отождествляет эту решетку с  $\mathbb{Z}^2$ . При таком отождествлении

$$H^0(e) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq e\}.$$

В рассматриваемом случае  $\mu(K) = \{\pm 1, \pm \rho, \pm \rho^2\}$ ,  $m = 6$  и множество  $H^0(e)$  представляет собой свободный  $F$ -модуль, где  $F \cong \mathbb{F}_{16}$ . Теорема 2.1.2 в этом случае сводится к формуле

$$\text{rk}_F H^0(e) = \left[ \frac{e}{1} \right] - \left[ \frac{e}{2} \right] + \left[ \frac{e}{4} \right] - \left[ \frac{e}{5} \right] + \dots$$

В пределе получаем  $\pi/(3\sqrt{3}) = 1 - 1/2 + 1/4 - 1/5 + \dots$

**2.2.3.**  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ . В этом случае  $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\omega]$ , где  $\omega = (1 + \sqrt{-7})/2$ ,  $D = 7$  и

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv 1, 2, 4 \pmod{7}; \\ -1, & \text{если } n \equiv 3, 5, 6 \pmod{7}; \\ 0, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{7}. \end{cases}$$

Выбор базиса  $(1, \omega)$  решетки  $\mathcal{O}_K$  отождествляет эту решетку с  $\mathbb{Z}^2$ . При таком отождествлении

$$H^0(e) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x^2 + xy + 2y^2 \leq e\}.$$

В рассматриваемом случае  $\mu(K) = \{\pm 1\}$ ,  $m = 2$  и множество  $H^0(e)$  представляет собой свободный  $F$ -модуль, где  $F \cong \mathbb{F}_{12}$ . Теорема 2.1.2 в этом случае сводится к формуле

$$\text{rk}_F H^0(e) = \left\lfloor \frac{e}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{e}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{e}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{e}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{e}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{e}{6} \right\rfloor + \dots$$

В пределе получаем  $\pi/\sqrt{7} = 1 + 1/2 - 1/3 + 1/4 - 1/5 + 1/6 - \dots$

### 3 Заключение

Приведем цитату из работы [3], относящуюся к рассматриваемому сюжету.

"Es giebt Figuren, für welche man durch einfache Formeln die Anzahl der innerhalb derselben liegenden Gitterpunkte bestimmen kann. Stellt man sich z. B. einen Kreis vor, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkte der Coordinaten liegt und dessen Radius  $\sqrt{m}$  ist, so wird die Anzahl der Gitterpunkte  $S$ , welche dieser Kreis umschließt, die aus den Axen liegenden mitgerechnet, durch folgende Formel gegeben

$$S = 1 + 4 \left( E(m) - E\left(\frac{1}{3}m\right) + E\left(\frac{1}{5}m\right) - \text{etc.} \right),$$

bis die Reihe von selbst abbricht. Wie leicht zu sehen, drückt diese Gleichung eine Relation zwischen der Anzahl der Gitterpunkte eines **Kreises** und der Anzahl der Gitterpunkte eines zwischen zwei **Hyperbeln** eingeschlossenen Segments aus. Setzt man in der Formel

$$\frac{1}{m}S = \frac{1}{m} + 4 \left( \frac{1}{m}E(m) - \frac{1}{m}E\left(\frac{1}{3}m\right) + \frac{1}{m}E\left(\frac{1}{5}m\right) - \text{etc.} \right),$$

$m = \infty$ , so verwandelt sich die linke Seite in  $\pi$ , während die rechte Seite in  $4(1 - 1/3 + 1/5 - \text{etc})$  übergeht, so dass man hier die **Leibnitz**'sche Formel für  $\pi$  erhält. Es giebt ähnliche Formeln für die Anzahl der Gitterpunkte eines Systems von Ellipsen oder Hyperbelsectoren; auch finden ähnliche Relationen im Raume und in Fällen mit mehr als 3 Dimensionen Statt. Wir werden auf diesen wichtigen Gegenstand, der aufs genaueste mit den Eigenschaften der höheren Formen zusammenhängt, bei einer andern Gelegenheit zurückkommen."

Таким образом, планировалось значительное обобщение формулы (1). Я не возьмусь угадать полностью направление мыслей Эйзенштейна, но некоторые из таких

обобщений просматриваются и связаны с теорией родов квадратичных форм и с формулами типа Зигеля–Вейля. С другой стороны, просматриваются связи с теорией компактных конечно-представимых моделей арифметических схем и с теорией торических схем с вырождениями над такими моделями. К этим вопросам автор надеется вернуться в последующих работах.

## Список литературы

- [1] *E. Ehrhart*. Sur une problème de géométrie diophantine linéaire. J. für die Reine und Angew. Math., 226, 1-29, 1967
- [2] *S. E. Cappell, J. L. Shaneson*. Genera of algebraic varieties and counting of lattice points, Bulletin (New Series) of the AMS, Vol. 30, Number 1, Jan. 1994
- [3] *G. Eisenstein*. Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste, J. für die Reine und Angew. Math., 1844, v. 28, p. 246–248.