ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 14/2012

Регуляризация 4х-мерного пропагатора и логарифма в методе фонового поля

Т. А. Болохов*

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
timur@pdmi.ras.ru

Июнь, 2012

ABSTRACT

В статье обсуждаются способы построения регуляризации эффективного действия в методе фонового поля для моделей в 4-мерном евклидовом пространстве-времени. Показывается, что бесконечные выражения для следа логарифма пропагатора и петлевых диаграмм имеют разную природу. След логарифма является конечной величиной, а соответствующая ему расходимость в эффективном действии возникает из условий выполнения тождеств Уорда за счет выбора меры интегрирования.

Key words and phrases. Метод фонового поля, функциональный интеграл, логарифм оператора, теория Янга-Миллса. .

*Работа написана при поддержке грантов РФФИ 11-01-00570, 12-01-00207.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

Содержание

Метод фонового поля, предложенный Л. Абботтом в работе [1], позволяет значительно упростить вычисления для эффективного действия и β-функции при квантовании различных полевых моделей. В общем случае этот метод включает в себя вычисление функциональных интегралов по флуктуациям b в окрестности фонового поля B:

$$Z(B) = \int \exp\{iS(B,b)\} \prod \chi\delta b,$$

где $S(B,b)$ это модифицированное действие классической теории, а χ — некоторая мера интегрирования.

Если исходное действие обладает дополнительной симметрией, то $S(B,b)$ содержит фиксирующие калибровку слагаемые и не является функцией суммы своих аргументов:

$$S(B,b) \neq S(B+b).$$

Будем считать, что разложение S по степеням b состоит из конечного числа слагаемых и, таким образом, после введения константы связи g и замены

$$b \to gb, \quad S \to \frac{1}{g^2}S$$

мы получаем сумму:

$$\begin{aligned}\frac{1}{g^2}S(B,gb) =& \frac{1}{g^2}S_{\mathrm{cl}}(B) + \frac{1}{g}V_1 b + \frac{1}{2}bMb + gV_3 b^3 + \ldots + g^{n-2}V_n b^n = \\ =& \frac{1}{g^2}S_{\mathrm{cl}}(B) + \frac{1}{g}V_1 b + \frac{1}{2}bMb + gS_{\mathrm{Int}}. \qquad (1)\end{aligned}$$

Здесь и далее мы подразумеваем, что все поля и вершины могут иметь индексы, как векторные, так и связанные с внутренней симметрией.

Вместо функции $Z(B)$ более содержательной характеристикой теории является ее (нормированный) логарифм. Считая константу связи g малой величиной для него можно написать разложение в виде суммы связных диаграмм Фейнмана в которых пропагатор $G = M^{-1}$ и вершины V_k

являются функциями фонового поля B:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{EA}(B) = \ln Z(B) - \ln Z(0) = \\
&= \ln \int \exp\Big\{\frac{i}{g^2}S_{\mathrm{cl}}(B) + \frac{i}{g}V_1 b + \frac{i}{2}bMb + igS_{\mathrm{Int}}\Big\}\prod \chi\delta b - \ln Z(0) = \quad (2)\\
&= \frac{i}{g^2}S_{\mathrm{cl}} + \frac{i}{2}\,\mathrm{Tr}(\ln G(B) - \ln G(0)) + ig^2(2\ \mathrm{Loops}) + \dots . \quad (3)
\end{aligned}$$

Здесь мы исключили вклад линейного слагаемого $\frac{1}{g}V_1 b$, порождающего бесконечное число добавок на каждом этапе разложения интеграла по степеням g^2. Это можно сделать, если считать, например, что на поле B наложено условие (совпадающее в первом приближении с классическим уравнением движения), которое обнуляет вклад всех одночастично-приводимых диаграмм [2].

Сумма (3), получившаяся в выражении для эффективного действия $\mathrm{EA}(B)$, содержит расходящиеся интегралы. В частности, в ней расходится след логарифма, а в петлевом счете появляются интегралы вида

$$\int G^2(x,y)d^4(x-y) \sim \frac{1}{(4\pi^2)^2}\int \frac{d^4(x-y)}{(x-y)^4} \quad (4)$$

и некоторые другие. Задача регуляризации состоит в том, чтобы изменить выражение стоящее в функциональном интеграле (2), таким образом, чтобы во всех слагаемых суммы (3) получались бы конечные коэффициенты. Естественно, при этом также необходимо, чтобы интеграл (2) восстанавливался к первоначальному виду при стремлении параметра, описывающего изменение, к некоторому значению.

Далее, рассматривая пределы эффективного действия при различном поведении константы связи и параметра регуляризации, можно ставить задачу о перенормировке теории. При этом описанная схема, через зависимость коэффициентов разложения действия (1) от фонового поля B, предоставляет непосредственный контроль за симметрией теории. Применение метода фонового поля в таком виде было рассмотрено в работе [3].

Практически единственным вариантом регуляризации, совместимым с данной интерпретацией метода фонового поля в двух и более петлях, является размерная регуляризация [4]. В этом подходе действие S переносится в пространство размерности $4-\epsilon$, параметром регуляризации является безразмерная разность ϵ, а след логарифма и интегралы типа (4) являются разложениями по обратным степеням ϵ (рядами Лорана).

В настоящей статье обсуждаются способы построения регуляризации эффективного действия непосредственно в 4-мерном евклидовом пространстве для операторов квадратичной формы M некоторого специального вида. Показывается, что в этом случае след логарифма регуляризованного пропагатора

$$\mathrm{Tr}(\ln G^{\Lambda}(B) - \ln G^{\Lambda}(0))$$

ограничен при стремлении параметра регуляризации Λ к пределу восстанавливающему исходное действие (бесконечности). В то же время, несмотря на то, что в эффективное действие входит отношение функциональных интегралов, результат зависит от меры интегрирования. Таким образом, выбор меры в функциональном интеграле (2) определяет схему перенормировки теории, в соответствии с идеями классической литературы [5].

Изменение масштаба переменных интегрирования

$$b \to \rho b \tag{5}$$

приводит к умножению на соответствующие степени параметра ρ пропагатора

$$G^\Lambda \to \rho^{-2} G^\lambda$$

и вершин теории

$$V_k \to \rho^k V_k.$$

При этом очевидно, что вклад замкнутых диаграмм с числом петель больше или равным 2 не зависит от ρ, в то время как след логарифма в принципе изменится:

$$\mathrm{Tr}(\ln G^\Lambda - \ln G_0^\Lambda) \to \mathrm{Tr}(\ln \rho^{-2} G^\Lambda - \ln \rho^{-2} G_0^\Lambda), \tag{6}$$

(здесь мы обозначили $G_0^\Lambda = G^\Lambda|_{B=0}$). Тем не менее, эффективное действие остается постоянным за счет изменения меры интегрирования. Такой механизм инвариантности относительно замены масштаба переменной интегрирования является особенностью 4-мерного случая.

1. Регуляризация с помощью теплового ядра

Для обеспечения конечности следа логарифма и интегралов типа (4) попробуем для начала ограничиться модификацией оператора M (и соответствующего ему пропагатора G) лежащей в классе преобразований Лапласа. Будем искать новые операторы в следующем виде:

$$G^\Lambda = \int_0^\infty r(t,\Lambda) e^{-Mt} dt, \tag{7}$$

$$\ln G^\Lambda = \int_0^\infty l(t,\Lambda) e^{-Mt} dt. \tag{8}$$

Функции $r(t,\Lambda)$ и $l(t,\Lambda)$ должны быть такими, чтобы выполнялись предельные условия

$$G^\Lambda(M) \overset{\Lambda\to\infty}{\to} M^{-1}, \tag{9}$$

$$\ln G^\Lambda(M) \overset{\Lambda\to\infty}{\to} -\ln M. \tag{10}$$

Кроме того, мы должны потребовать от G^Λ, $\ln G^\Lambda$ «разумного поведения в нуле» в координатном представлении, то есть конечность следа

$$\mathrm{Tr}(\ln G^\Lambda - \ln G_0^\Lambda) = \int \int_0^\infty l(t,\Lambda)(e^{-Mt} - e^{-M_0 t})(x,y) dt|_{x=y} d^4x \tag{11}$$

и расходимость меньше чем $(x-y)^{-2}$ для пропагатора

$$G^{\Lambda}=\int_0^{\infty} r(t,\Lambda)e^{-Mt}(x,y)dt$$

(хотя, на самом деле, для конечности диаграмм типа «восьмерки» необходимо потребовать существования предела при равных аргументах для $G^{\Lambda}(x,y)$).

И та и другая расходимости связаны с поведением функций r, l в окрестности нуля аргумента t, поэтому нам необходимо знать как ведет себя экспонента e^{-Mt} в этой точке. Эта экспонента – тепловое ядро – определяется уравнением

$$\frac{\partial e^{-Mt}}{\partial t}+Me^{-Mt}=0, \quad e^{-Mt} \stackrel{t\to 0}{\to} \delta^{ab}\delta^4(x-y)$$

(здесь a и b это индексы оператора M отвечающие за внутреннюю и возможно пространственную симметрии). Будем считать, что оператор M такой, что

$$M_0 = M|_{B=0} = -\partial_\mu\partial_\mu\delta^{ab},$$

а тепловое ядро допускает разложение в окрестности нуля вида

$$e^{-Mt}=e^{-M_0t}(a_0+a_1t+a_2t^2+\ldots), \quad e^{-M_0t}=\frac{\delta^{ab}}{4\pi^2t^2}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}. \qquad (12)$$

При этом коэффициенты a_k зависят от фонового поля B таким образом, что

$$a_0|_{B=0}=\delta^{ab}, \quad a_k|_{B=0}=0, k>0.$$

Кроме того, потребуем выполнения следующих условий

$$[a_0(x,x)]^{ab}=\delta^{ab}, \quad a_1(x,x)=0, \qquad (13)$$

а для остальных коэффициентов a_k будем предполагать регулярное поведение при всех значениях x, y. В частности, теория Янга-Миллса содержит два пропагатора

$$M=-\nabla\nabla\delta_{\mu\nu}-2F_{\mu\nu}, \quad M^{\text{ghost}}=-\nabla\nabla,$$
$$\nabla_\mu=\partial_\mu+B_\mu, \quad F_{\mu\nu}=\nabla_\mu\nabla_\nu-\nabla_\nu\nabla_\mu,$$

а коэффициенты a_k определяются уравнениями

$$(x-y)^{\lambda}\nabla_{\lambda}a_0=0,$$
$$ka_k+(x-y)^{\lambda}\nabla)\lambda a_k=-Ma_{k-1},$$

из которых следует, что

$$[a_2(x,x)]^{bb}_{\lambda\lambda}=-\frac{5}{12}\frac{C_2}{4\pi^2}F^2_{\mu\nu}, \quad [a_2^{\text{ghost}}(x,x)]^{bb}=\frac{1}{12}\frac{C_2}{4\pi^2}F^2_{\mu\nu}.$$

Учитывая условие (13) можно сделать вывод, что первый коэффициент, который даст вклад в значение логарифма (11) в нуле будет a_2:

$$\mathrm{Tr}(\ln G^\Lambda - \ln G_0^\Lambda) =$$
$$= \int\int_0^\infty l(t,\Lambda)\frac{1}{4\pi^2 t^2}e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}}\left((a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots)^{ab} - \delta^{ab}\right)dt|_{x=y}d^4x =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int a_2(x,x)d^4x\int_0^\infty l(t,\Lambda)dt + \ldots = A_2 \ln G^\Lambda|_{M=0}. \quad (14)$$

Здесь мы обозначили

$$A_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int a_2(x,x)d^4x$$

и сделали предположение о том, что интеграл по t и взятие предела $x = y$ можно переставлять местами. Теперь посмотрим на расходимости интеграла

$$\int_0^\infty l(t,\Lambda)dt = \ln G^\Lambda|_{M=0}. \quad (15)$$

Он может расходиться на бесконечности, если $\ln G^\Lambda(M)$ неограниченно растет в нуле. Такая расходимость устраняется введением инфракрасного параметра μ (точки перенормировки), например, при помощи сдвига

$$M \to M + \mu^2,$$

(в случае массивной теории μ^2 можно выделить непосредственно из M, так чтобы он остался положительным). Тогда из свойства преобразования Лапласа следует, что

$$\mathrm{Tr}(\ln G^\Lambda(M+\mu^2) - \ln G_0^\Lambda(M+\mu^2)) = A_2\int_0^\infty l(t,\Lambda)e^{-\mu^2 t}dt = A_2 \ln G^\Lambda|_{M=\mu^2}.$$

Из отсутствие расходимости интеграла (15) в нуле следует, что функция

$$\ln G^\Lambda(M + \mu^2) = \int_0^\infty l(t)e^{-(M+\mu^2)t}dt$$

ограничена при $M \to \infty$. Это утверждение справедливо для некоторого класса функций $l(t)$ ведущих себя «не безумно» в нуле, либо интегрируемых по модулю. Оно не работает, например, для обобщенных функций, однако в этом случае, как мы увидим ниже, разложение (12) требует специальной интерпретации при вычислении следа.

Из ограниченности $\ln G^\Lambda(M)$ на бесконечности следует, что функция $G^\Lambda(M)$ вообще не стремится к нулю, то есть обладает еще более худшим поведением по разности аргументов $(x - y)$ чем

$$M_0^{-1} = \frac{1}{4\pi^2(x-y)^2}.$$

Границей раздела является функция

$$l_{\log}(t) \sim \frac{1}{t}$$

— для того, чтобы сходился след логарифма, $l(t)$ должна вести себя лучше чем $l_{\log}(t)$, но при этом пропагатор будет вести себя плохо. И наоборот, например, метод высших ковариантных производных [6], [7] хорошо регуляризует петлевые слагаемые, но при этом возникают трудности со следом логарифма. Без применения метода фонового поля похожая проблема разбирается в работах [8], [9], [10].

Посмотрим теперь, что происходит с формулой для следа в случае если $l(t)$ является обобщенной функцией. Например, обратные преобразования Лапласа для функций $\ln\rho^2 G^\Lambda(M)$ и $\ln G^\Lambda(M)$ отличаются на $\ln(\rho^2)\delta(t)$, поэтому можно записать

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\ln\rho^2 G^\Lambda - \ln\rho^2 G_0^\Lambda) - \mathrm{Tr}(\ln G^\Lambda - \ln G_0^\Lambda) = \\ = \ln\rho^2 \int\int_0^\infty \delta(t)(e^{-Mt} - e^{-M_0 t})dt|_{x=y}d^4x,\end{aligned}$$

то есть получается разность следов двух единичных операторов, которая должна быть равна нулю. Но, с другой стороны, если воспользоваться разложением (12) для e^{-Mt}, то в соответствии с формулой (14), мы получим

$$\ln\rho^2 \int\int_0^\infty \frac{\delta(t)}{4\pi^2 t^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} a_2(x,y) t^2 dt|_{x=y} d^4x = A_2 \ln\rho^2.$$

Функция, которая стоит под внешним интегралом

$$\int_0^\infty \frac{\delta(t)}{4\pi^2} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} a_2(x,y)dt = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2} a_2(x,x), & x = y, \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

не непрерывна по x, y. Как ядро она не оказывает влияния на единичный оператор $e^{-Mt}|_{t=0}$, но, в то же время, формально имеет ненулевой след. Это обстоятельство, как мы увидим дальше, имеет физический смысл нарушения масштабной инвариантности следа логарифма (6), но с точки зрения математики мы имеем дело с некорректностью перестановки предела и интеграла в формуле (14).

Мы видим, что регуляризация типа (7), (8) обычными функциями $r(t), l(t)$ оказывается непригодной для вычисления эффективного действия с помощью метода фонового поля, или, по крайней мере, требует специальной интерпретации. Использование же в формуле (10) функций с более высоким ростом на бесконечности чем $\ln M$ означает выход из класса преобразований Лапласа от обычных функций $l(t)$, потерю непрерывности $\ln G^\Lambda$ по x, y и неоднозначное выражение для следа.

В заключение рассуждений о тепловом ядре приведем два примера функций $l(t)$ и рассмотрим свойства их преобразований Лапласа.

1.1. **Пример: срез в преобразовании Лапласа.** Первый пример — срез в преобразовании Лапласа не доходя до нуля на малый параметр:

$$l_{\mathrm{cut}}(t,\Lambda) = \begin{cases} 0, & t < 1/\Lambda^2, \\ 1/t, & 1/\Lambda^2 \leq t. \end{cases}$$

В данной интерпретации метода фонового поля такая регуляризация была описана в работе [3]. Регуляризованный логарифм здесь выглядит следующим образом:

$$\ln G^{\Lambda}(M) = \int_0^{\infty} l_{\mathrm{cut}}(t) e^{-Mt} dt = \int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \frac{e^{-Mt}}{t} dt = \mathrm{E}_1(M/\Lambda^2),$$

а формула (14) дает для его следа выражение

$$\mathrm{Tr}(\ln G^{\Lambda}(M+\mu^2) - \ln G^{\Lambda}(M_0+\mu^2)) = A_2 \mathrm{E}_1(\mu^2/\Lambda^2).$$

При малом значении аргумента интегральная экспонента E_1 ведет себя как

$$\mathrm{E}_1(M/\Lambda^2) \sim -\ln\frac{M}{\Lambda^2} - \gamma + o(1),$$

и, таким образом, мы имеем расходящийся след логарифма. Но эта расходимость обусловлена прежде всего тем, что при $\Lambda \to \infty$

$$\ln G^{\Lambda}(M) \sim -\ln\frac{M}{\Lambda^2},$$

то есть тем, что мы берем в качестве пропагатора не M^{-1}, а ΛM^{-1}.

С другой стороны, при M стремящемся к бесконечности мы имеем разложение

$$\mathrm{E}_1(M/\Lambda^2) \sim e^{-M/\Lambda^2}\big(\frac{\Lambda^2}{M} + o(1)\big) \overset{M\to\infty}{\to} 0,$$

что делает невозможным использование функции

$$G^{\Lambda}(M) = \exp\{\mathrm{E}_1(M/\Lambda^2)\} \overset{M\to\infty}{\sim} I + o(1)$$

в качестве пропагатора для вычисления петлевых диаграмм.

1.2. **Пример: регуляризация Паули-Вилларса.** Второй пример — регуляризация Паули-Вилларса. В упрощенной форме это преобразование Лапласа от функции

$$l_{\mathrm{PV}}(t,\Lambda) = \frac{1-e^{-\Lambda^2 t}}{t},$$

которое выглядит следующим образом:

$$\ln G^{\Lambda}(M) = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-\Lambda^2 t}}{t} e^{-Mt} dt = \ln\frac{M+\Lambda^2}{M}.$$

В реальной регуляризации Паули-Вилларса могут участвовать несколько экспонент с различными весами, но результирующее поведение на бесконечностях по M и Λ будет оставаться таким же.

Соответствующий след логарифма выражается через элементарные функции:

$$\mathrm{Tr}(\ln G^{\Lambda}(M+\mu^2) - \ln G^{\Lambda}(M_0+\mu^2)) = A_2 \ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \tag{16}$$

— он расходится, но эта расходимость, опять же, связана с тем что

$$\ln G^{\Lambda}(M) \overset{\Lambda\to\infty}{\sim} \ln\frac{\Lambda^2}{M}.$$

В то же время, при $M \to \infty$

$$G^{\Lambda}(M) = \exp\{\ln G^{\Lambda}(M)\} = \exp\{\ln\frac{M+\Lambda^2}{M}\} \sim I + o(1).$$

То есть замечания предыдущего примера относительно расходимости и поведения пропагатора при больших M применимы и здесь.

2. Сужение области интегрирования

Альтернативным способом введения регуляризации в континуальном интеграле (2) может быть сужение множества функций по которым производится интегрирование. Будем учитвать только такие функции, для которых выполняется неравенство

$$\int (b, Mb) d^4x \le \Lambda^2 \int (b,b) d^4x \tag{17}$$

и его следствие

$$\int (b, (\ln M)b) d^4x \le \ln\Lambda^2 \int (b,b) d^4x,$$

которое верно, если предположить, что M это положительный оператор. Тогда для регуляризации пропагатора и логарифма можно использовать функции

$$G^{\Lambda}(M) = \begin{cases} M^{-1}, & |M| \le \Lambda^2, \\ 0, & \Lambda^2 < |M|, \end{cases}$$

$$\ln G^{\Lambda}(M) = \begin{cases} -\ln|M|, & |M| \le \Lambda^2, \\ 0, & \Lambda^2 < |M|. \end{cases}$$

Действительно, пусть P^{Λ} — проектор на спектральное подпространство оператора M, отвечающее части спектра от 0 до Λ^2. Тогда интеграл по функциям, удовлетворяющим равенству (17) можно преобразовать следующим способом:

$$\int W(b)\exp\{\frac{i}{2}bMb\}\prod_{P^{\Lambda}b=b}\chi\delta b = \int W(P^{\Lambda}b)\exp\{\frac{i}{2}bP^{\Lambda}MP^{\Lambda}b\}\prod_{P^{\Lambda}b=b}\delta\chi b =$$

$$= W(\frac{1}{i\chi}\frac{\delta}{\delta j})\int \exp\{\frac{i}{2}\tilde{b}P^{\Lambda}\frac{M}{\chi^2}P^{\Lambda}\tilde{b} + i\tilde{b}P^{\Lambda}j\}\prod_{P^{\Lambda}\tilde{b}=\tilde{b}}\delta\tilde{b} =$$

$$= (\mathrm{Det}\,\chi^{-2}P^{\Lambda}M)^{-1/2}W(\frac{1}{i\chi}\frac{\delta}{\delta j})\exp\{-\frac{i}{2}jP^{\Lambda}\chi^2M^{-1}P^{\Lambda}j\}|_{j=0} =$$

$$= \exp\{\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\ln\chi^2G^{\Lambda}\}W(\frac{\delta}{i\delta j})\exp\{-\frac{i}{2}jG^{\Lambda}j\}|_{j=0}. \tag{18}$$

Как и в случае с функциональным интегралом по полному пространству это равенство проверяется для полиномиальных форм $W(b)$. Определитель $\mathrm{Det}\,P^\Lambda M$ понимается как произведение собственных значений оператора M с учетом кратности по части спектра от 0 до Λ^2. Кроме того, мы ввели в интеграл скалярную меру χ, которая, как указывалось выше, вносит вклад только в след логарифма, но не в петлевой счет.

Функции $G^\Lambda(M)$ и $\ln G^\Lambda(M)$ не непрерывны, поэтому они не являются преобразованиями Лапласа, вместо этого можно воспользоваться преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} G^\Lambda(M) =& \frac{i}{\pi}\int \mathrm{Si}(\Lambda^2 t)e^{-iMt}dt, \\ \ln\chi^2 G^\Lambda(M) =& \frac{1}{\pi}\int (\frac{\mathrm{Si}(\Lambda^2 t)}{t} - \frac{\sin\Lambda^2 t}{t}\ln\frac{\Lambda^2}{\chi^2})e^{-iMt}dt, \\ P^\Lambda(M) =& \frac{1}{\pi}\int \frac{\sin\Lambda^2 t}{t}e^{-iMt}dt, \end{aligned}$$

где экспонента e^{-iMt} определяется уравнением

$$\frac{\partial e^{-iMt}}{i\partial t} + Me^{-iMt} = 0, \quad e^{-iMt} \overset{t\to\pm 0}{\to} \delta^{ab}\delta^4(x-y).$$

Такая экспонента может быть получена из разложения (12) заменой $t \to it$:

$$e^{-iMt} = e^{-iM_0 t}(a_0 + ia_1 t - a_2 t^2 + \ldots), \quad e^{-M_0 t} = \frac{-\delta^{ab}}{4\pi^2 t^2}e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}}. \qquad (19)$$

Сразу отметим, что, так как функция $G^\Lambda(M)$ равна нулю на бесконечности, то поведение соответствующего оператора в координатном представлении регулярно при равных аргументах:

$$G^\Lambda(x,y) \sim \frac{\mathrm{J}_0(\Lambda|x-y|)-1}{4\pi^2(x-y)^2} + o(1) \sim \frac{\Lambda^2}{4\pi^2} + o(1).$$

След логарифма $G^\Lambda(M)$ вычисляется по формуле аналогичной (14), основой которой является сокращение степени t^2, стоящей перед коэффициентом a_2, со знаменателем ядра $e^{iM_0 t}$. После введения инфракрасного параметра μ получаем

$$\begin{aligned} &\mathrm{Tr}(\ln\chi^2 G^\Lambda(M+\mu^2) - \ln\chi^2 G^\Lambda(M_0+\mu^2)) = \\ &= \frac{1}{\pi}\int\int(\frac{\mathrm{Si}(\Lambda^2 t)}{t} - \frac{\sin\Lambda^2 t}{t}\ln\frac{\Lambda^2}{\chi^2})(e^{-i(M+\mu^2)t} - e^{-i(M_0+\mu^2)t})dt|_{x=y}d^4x = \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int(L_2(x-y) - l_2(x-y)\ln\frac{\Lambda^2}{\chi^2})a_2(x,y)|_{x=y}d^4x = A_2\ln G^\Lambda|_{M=\mu^2/\chi^2} = \\ &= A_2\ln\frac{\chi^2}{\mu^2}. \qquad (20) \end{aligned}$$

Явный вид функций $l_2(x)$ и $L_2(x)$ нам не так важен, ответ здесь получается на основании преобразования Фурье, однако приведем его, для того чтобы подчеркнуть, что эти функции непрерывны и что перестановка интегрирования по t и взятия предела $x = y$ это корректная операция:

$$l_2(x) = \mathrm{J}_0(\sqrt{(\Lambda^2 - \mu^2)x^2}), \quad L_2(x) = \int_{\mu^2}^{\Lambda^2} \mathrm{J}_0(\sqrt{(k-\mu^2)x^2})\frac{dk}{k}.$$

Несмотря на явное наличие коэффициента $\ln \Lambda^2$ в формуле (20), при $x = 0$ этот логарифм сокращается, и в итоге остается

$$L_2(0) - l_2(0)\ln\frac{\Lambda^2}{\chi^2} = \ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2} - \ln\frac{\Lambda^2}{\chi^2} = \ln\frac{\chi^2}{\mu^2}.$$

Итак, формула (20) показывает, что искомый след логарифма, при выбранном способе вычисления, не зависит непосредственно от параметра регуляризации Λ (точнее сказать, он не растет с ростом Λ). Из нее же очевидно, что умножение переменной континуального интегрирования на константу (5) эквивалентно замене $\chi^2 \to \rho^{-2}\chi^2$ в этой формуле, что дает добавку к следу логарифма:

$$\mathrm{Tr}(\ln\rho^{-2}G^\Lambda - \ln\rho^{-2}G_0^\Lambda)\,\mathrm{Tr}(\ln G^\Lambda - \ln G_0^\Lambda) - A_2\ln\rho^2.$$

Такое поведение следа логарифма связано с тем, что представив логарифм произведения в виде суммы, мы должны сократить не следы единичных операторов с коэффициентом $\ln\rho^2$, а следы проекторов, которые считают разность «количества собственных функций» операторов M и M_0. Вполне естественно, что эта разность может и не стремится к нулю при $\Lambda \to \infty$, даже несмотря на то что M и M_0 действуют в одном пространстве.

С другой стороны, замена меры интегрирования в отношении регуляризованных интегралов (2) дает добавку

$$\begin{aligned}\ln\prod_{P^\Lambda b=b}\rho\delta b - \ln\prod_{P_0^\Lambda b=b}\rho\delta b \ln\prod_{P^\Lambda b=b}\delta b - \ln\prod_{P_0^\Lambda b=b}\delta b + \ln\rho\,\mathrm{Tr}(P^\Lambda - P_0^\Lambda) = \\ = \ln\prod_{P^\Lambda b=b}\delta b - \ln\prod_{P_0^\Lambda b=b}\delta b + A_2\ln\rho,\end{aligned}$$

и, таким образом, с учетом коэффициента $1/2$ перед следом логарифма (случай фермионных полей рассматривается аналогично), всё эффективное действие (2) оказывается инвариантным относительно масштабного преобразования (5).

Формула (20) показывает, что при заданном способе вычисления функционального интеграла (18) эффективное действие и процесс перенормировки теории зависят от выбора меры χ. Мы должны выбирать ее таким способом, чтобы за счет добавки к следу логарифма компенсировать расходимости петлевых слагаемых и, тем самым, получить конечное значение для эффективного действия. Одним из условий такой компенсации является выполнение равенства

$$\frac{\delta}{\delta B}\big(\ln\int\exp\{\frac{i}{2}b\frac{M}{\chi^2}b\}\prod_{P^\Lambda b=b}\delta b-\ln\int\exp\{\frac{i}{2}b\frac{M_0}{\chi^2}b\}\prod_{P_0^\Lambda b=b}\delta b\big)\simeq$$

$$\simeq\frac{i}{2\chi^2}\int b\frac{\delta M^\Lambda}{\delta B}b\exp\{\frac{i}{2}b\frac{M}{\chi^2}b\}\prod_{P^\Lambda b=b}\delta b\cdot\big(\int\exp\{\frac{i}{2}b\frac{M}{\chi^2}b\}\prod_{P^\Lambda b=b}\delta b\big)^{-1}\quad(21)$$

через которое связываются старшие расходимости диаграмм с разным числом петель (аналог тождества Уорда). Простые правила для вариации логарифма здесь неприменимы, так вариация берется не от аргумента логарифма, а от кратности спектра, то есть от коэффициента перед логарифмом. Поэтому левая часть в этой формуле, с учетом сдвига на μ^2, равна вариации по фоновому полю от следа логарифма (20), в то время как правая часть от χ не зависит, но растет по Λ как

$$-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\frac{\delta M}{\delta B}G^\Lambda\sim-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\frac{\delta M}{\delta B}a_1L_2(0)\sim-\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\operatorname{Tr}\frac{\delta M}{\delta B}a_1.$$

Например, для теории Янга-Миллса выполняются соотношения

$$\operatorname{Tr}\frac{\delta M}{\delta B}a_1=-\operatorname{Tr}\frac{\delta a_2}{\delta B},\quad(22)$$

поэтому из равенства (21) следует, что $\chi=\Lambda$, и логарифм определителя вместе с мерой интегрирования дают расходящийся вклад

$$EA(B)=\frac{1}{g^2}S_{\rm cl}+\frac{1}{2}\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}A_2-\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}A_2^{\rm ghost}+\dots.$$

При выводе этого соотношения используется разложение регуляризованного пропагатора $G^\Lambda(x,y)$ по степеням $(x-y)$, взятое при равных аргументах:

$$\begin{aligned}G^\Lambda(M+\mu^2)=&\frac{i}{\pi}\int\operatorname{Si}(\Lambda^2t)e^{-iMt-i\mu^2t}dt=\\=&\frac{-i}{4\pi^2\pi}\int\operatorname{Si}(\Lambda^2t)e^{i\frac{(x-y)^2}{4t}-i\mu^2t}(a_0+ia_1t-a_2t^2+\dots)\frac{dt}{t^2}=\\=&\frac{1}{4\pi^2}(L_1(x-y)a_0(x,y)+L_2(x-y)a_1(x,y)+L_3(x-y)a_2(x,y)+\dots),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}L_1(x)=&2\int_{\mu^2}^{\Lambda^2}\sqrt{\frac{k-\mu^2}{x^2}}\mathrm{J}_1(\sqrt{(k-\mu^2)x^2})\frac{dk}{k}\sim\Lambda^2-\mu^2-\mu^2\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}+o(1),\\L_3(x)=&\frac{1}{2}\int_{\mu^2}^{\Lambda^2}\sqrt{\frac{x^2}{k-\mu^2}}\mathrm{J}_1(\sqrt{(k-\mu^2)x^2})\frac{dk}{k}\sim\frac{1}{4}x^2\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}+o(x^2),\end{aligned}$$

функция $L_2(x)$ была описана выше.

3. Кратности спектров и симметрии эффективного действия

В этой части мы рассмотрим поведение эффективного действия при калибровочном преобразовании и растяжении координат. Мы не будем использовать формулы для следа логарифма, полученными в предыдущей части, вместо этого проведем абстрактные рассуждения о свойствах оператора M.

Рассмотрим функцию $\Omega_M(\lambda)$ — плотность собственных значений оператора M в точке спектра λ, то есть количество собственных функций на единицу длины спектра. Например, для оператора $M_0 = -\partial_\nu\partial_\nu$ количество собственных функций лежащих в интервале спектра от λ до $\lambda + d\lambda$ пропорционально $\lambda d\lambda$, поэтому можно считать, что

$$\Omega_{M_0} = c\lambda,$$

здесь c это некоторая константа размерности λ^{-2}. Мы предполагаем, что спектр оператора M ведет себя на бесконечности также как спектр оператора M_0 и таким образом можем ввести убывающую на бесконечности функцию ω:

$$\Omega_M(\lambda) = c\lambda + \omega(B,\lambda). \tag{23}$$

Так как собственные значения операторов M и M_0 это размерные величины, а количество всегда безразмерно, то функция ω должна иметь размерность λ^{-1}. Мы будем считать, что эта функция, посредством зависимости от B, является универсальным объектом для всех операторов M рассматриваемых далее.

С помощью функции ω можно записать формальные выражения для разности количества собственных функций операторов M и M_0 лежащих в интервале спектра от λ' до λ'':

$$\int_{\lambda'}^{\lambda''} \omega(\lambda)d\lambda,$$

для следа разности логарифмов этих операторов:

$$\mathrm{Tr}\big(\ln(M^\lambda + \mu^2) - \ln(M_0^\Lambda + \mu^2)\big) \simeq \int_{\mu^2}^{\Lambda^2} \ln\lambda\,\omega(\lambda)d\lambda, \tag{24}$$

а также для вклада в эффективное действие от меры χ:

$$\ln\prod_{P^\Lambda b=b}\chi\delta b - \ln\prod_{P_0^\Lambda b=b}\chi\delta b \ln\prod_{P^\Lambda b=b}\delta b - \ln\prod_{P_0^\Lambda b=b}\delta b + \ln\chi\int_{\mu^2}^{\Lambda^2}\omega(\lambda)d\lambda.$$

Классическое действие из которого строится квантовая теория может обладать симметриями. Например, симметрией относительно калибровочных преобразований или симметрией относительно растяжения координат. Эти симметрии переносятся также и на модифицированное действие $S(B,b)$, то есть на подинтегральное выражение в (2). Скажем, если (см. например [11]) провести замену

$$
\begin{aligned}
B_\mu \to & B_\mu^u = uBu^{-1} - \partial_\mu u u^{-1}, \qquad (25)\\
b \to & b^u = u(x)b(x), \quad u^T(x) = u^{-1}(x),\\
(\partial_\mu + & B_\mu)u^{-1}(x) = u^{-1}(x)(\partial_\mu + B_\mu^u)
\end{aligned}
$$

то

$$S(B,b) = S(B, u^{-1}(x)b^u) = S(B^u, b^u).$$

И аналогично для растяжения координат, если

$$
\begin{aligned}
B_\mu(x) \to & B_\mu^\rho(x) = \rho B_\mu(\rho x), \qquad (26)\\
b(x) \to & b^\rho(x) = \rho b(\rho x) = \rho^{-1}\int U(x,y)b(y)d^4y,
\end{aligned}
$$

где $U(x,y) = \rho^2\delta^4(\rho x - y)$ это ядро унитарного оператора, то

$$S(B,b) = S(B, \rho U^T b') = S(B^\rho, b').$$

Замены переменных

$$b \to b^u = u(x)b(x), \quad b \to b^\rho = \rho b(\rho x)$$

меняют область интегрирования в функциональном интеграле, поэтому отслеживать инвариантность эффективного действия можно только сравнивая друг с другом слагаемые разложения (3) вычисленные для полей B и B^u или B^ρ. Можно показать, что при перечисленных выше способах регуляризации пропагатора все слагаемые петлевого счета

$$\ln \exp\{iS_{\mathrm{Int}}(\frac{\delta}{i\delta j})\}\exp\{-\frac{i}{2}jG^\Lambda j\}$$

инвариантны относительно калибровочных преобразований и растяжения координат.

Так как слагаемые, содержащие след логарифма, не зависят от константы связи g, то для обеспечения инвариантности эффективного действия относительно преобразований (25) и (26) необходимо обеспечить инвариантность следа логарифма. То есть необходимо знать свойства функции $\omega(B,\lambda)$.

Инвариантность относительно калибровочных преобразований (25) не накладывает общих ограничений на ω, так как инвариантные функционалы могут иметь любую размерность. А вот с растяжением координат (26) дело обстоит по-другому: любой инвариантный функционал безразмерен, поэтому существуют только две возможные зависимости ω от λ, это рассеяние

$$\omega(B,\lambda) = 0, \quad \lambda > 0$$

и

$$\omega(B,\lambda) = \omega(B)\lambda^{-1}, \quad \lambda > 0.$$

Любая другая зависимость требует либо наличия внешних[1] (не зависящих от B) размерных параметров, либо содержит неивариантные относительно растяжения координат функции B. И то и другое так или иначе отразится на инвариантности эффективного действия.

Таким образом, мы видим, что исследование свойств эффективного действия требует решения задачи о сравнении кратностей спектров операторов M и M_0.

4. Кратности спектров и метод теплового ядра

Как мы видели в примерах 1.1 и 1.2 расходимость следа логарифма, регуляризованного с помощью теплового ядра, возникает не из-за плохого убывания подинтегрального выражения в (24), а по причине умножения оператора M, от которого берется логарифм, на параметр регуляризации. В то же время, функциональный интеграл (2) изначально вычисляется с точностью до меры χ, которая оказывает влияние только на след логарифма. Следовательно, можно попытаться регуляризовать оператор квадратичной формы M таким образом, чтобы сделать конечными петлевые слагаемые, а бесконечные выражения в следе логарифма компенсировать с помощью меры функционального интегрирования.

Например, в методе высших ковариантных производных оператор M умножается на некоторую функцию f

$$M \to M f(\frac{M}{\Lambda^2})$$

с фиксированным поведением на бесконечности и в нуле:

$$f(m) = 1 + o(m), \quad \tau \to 0,$$
$$f(m) \simeq m^k, \quad \tau \to \infty,$$

что делает конечными петлевые слагаемые.

Если теперь взять в качестве меры χ не константу, а функцию от спектрального параметра λ, например для теории Янга-Миллса можно положить

$$\chi^2(\lambda) = (\lambda + \Lambda^2) f(\frac{\lambda}{\Lambda^2}),$$

[1] Мы не можем утверждать, что функция ω это корректно определенный объект. Но можно допустить, что процесс ее построения требует введения некоторой «точки отсчета», характеризующей, например, область спектра где происходит переход от рассеяния к другому поведению собственных функций.

то общий вклад в эффектиное действие от следа логарифма и меры будет равен

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_{\mu^2}^{\infty}\ln(\lambda f(\frac{\lambda}{\Lambda^2}))\,\omega(\lambda)d\lambda+\int_{\mu^2}^{\infty}\ln\chi(\lambda,\Lambda)\omega(\lambda)d\lambda= \\
=-\frac{1}{2}\int_{\mu^2}^{\infty}\ln\frac{\lambda f(\frac{\lambda}{\Lambda^2})}{\chi^2(\lambda)}\,\omega(\lambda)d\lambda=-\frac{1}{2}\int_{\mu^2}^{\infty}\ln\frac{\lambda}{\lambda+\Lambda^2}\,\omega(\lambda)d\lambda= \\
=-\frac{1}{2}\operatorname{Tr}\ln\frac{M}{M+\Lambda^2}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Это есть, с точностью до коэффициента, след логарифма оператора M, регуляризованного с помощью метода Паули-Вилларса, который был вычислен ранее в формуле (16). Записав пропагатор в виде преобразования Лапласа

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(M+\mu^2)f(\frac{M}{\Lambda^2})}=\int_0^{\infty}r(t)e^{-Mt}dt= \\
&=\frac{1}{4\pi^2}(\hat{L}_1(x-y)a_0(x,y)+\hat{L}_2(x-y)a_1(x,y)+\hat{L}_3(x-y)a_2(x,y)+\ldots),
\end{aligned}
$$

можно сравнить коэффициент стоящий перед a_1 с расходимостью следа логарифма (27) и, таким образом, проверить выполнение условия перенормировки (21). Например, для $f(m)=1+m$

$$
\begin{aligned}
\hat{L}_1=&c\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4t}}(e^{-\mu^2t}-e^{-\Lambda^2t})\frac{dt}{t^2}=\frac{4c}{x}(\mu\mathrm{K}_1(\mu x)-\Lambda\mathrm{K}_1(\Lambda x))\sim \\
&\sim c(\mu^2\ln\mu x-\Lambda^2\ln\Lambda x)+O(1), \\
\hat{L}_2=&c\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4t}}(e^{-\mu^2t}-e^{-\Lambda^2t})\frac{dt}{t}=2c(\mathrm{K}_0(\mu x)-\mathrm{K}_0(\Lambda x))\sim \\
&\sim c\ln\frac{\Lambda^2}{\mu^2}+o(1), \\
\hat{L}_3=&c\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{4t}}(e^{-\mu^2t}-e^{-\Lambda^2t})dt=cx(\mu^{-1}\mathrm{K}_1(\mu x)-\Lambda^{-1}\mathrm{K}_1(\Lambda x))\sim \\
&\sim\frac{1}{2}c(\mu^{-2}-\Lambda^{-2})+o(1),\quad c=\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2+\mu^2}
\end{aligned}
$$

и условие перенормировки, как и ранее, сводится к проверке равенства (22). Функция $f(m)=1+m$, конечно, имеет недостаточный рост на бесконечности для того чтобы компенсировать все петлевые расходимости, она лишь демонстрирует равенство коэффициентов, которое будет верно также и для реальной функции регуляризации.

Список литературы

[1] L. F. Abbott, "The Background Field Method Beyond One Loop," Nucl. Phys. B **185** (1981) 189.

[2] L. D. Faddeev, "Separation of scattering and selfaction revisited," arXiv:1003.4854 [hep-th].

[3] L. D. Faddeev, "Mass in Quantum Yang-Mills Theory: Comment on a Clay Millenium problem," arXiv:0911.1013 [math-ph].

[4] I. Jack and H. Osborn, "Two Loop Background Field Calculations For Arbitrary Background Fields," Nucl. Phys. B **207** (1982) 474.

[5] А. А. Славнов, Л. Д. Фаддеев, *Введение в квантовую теорию калибровочных полей*, Москва, Наука, 1988, стр. 34.

[6] А. А. Славнов "Инвариантная регуляризация калибровочных теорий", ТМФ **13** (1972), стр. 174.

[7] B. W. Lee and J. Zinn-Justin, "Spontaneously broken gauge symmetries ii. perturbation theory and renormalization," Phys. Rev. D **5** (1972) 3137 [Erratum-ibid. D **8** (1973) 4654].

[8] А. А. Славнов, "Регуляризация Паули-Вилларса для неабелевых калибровочных теорий" ТМФ **33** (1977), стр. 210.

[9] C. P. Martin and F. Ruiz Ruiz, "Higher covariant derivative Pauli-Villars regularization does not lead to a consistent QCD," Nucl. Phys. B **436** (1995) 545 [hep-th/9410223].

[10] T. D. Bakeyev and A. A. Slavnov, "Higher covariant derivative regularization revisited," Mod. Phys. Lett. A **11** (1996) 1539 [hep-th/9601092].

[11] М. Е. Пескин, Д. В. Шредер, *Введение в квантовую теорию поля*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 1991, стр. 508.