

ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

**В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов,
Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин**

**Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук**

**Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16
октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых
коммуникаций**

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны: (812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

<http://www.pdmi.ras.ru/preprint/>

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

Топологические реализации алгебраических многообразий

Н. В. Дуров

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
ndourov@gmail.com

Июнь, 2012

ABSTRACT

Данная работа посвящена изучению различных реализаций алгебраических многообразий в топологических категориях, например, в категории топологических пространств или ∞ -топосов. Подобные реализации могут в принципе использоваться для сведения алгебро-геометрических задач или теоретико-числовых задач, таких, как поиск рациональных точек на многообразии, к топологическим задачам.

Изучаются различные абстрактные свойства подобных реализаций, и приводятся конкретные примеры. Упоминается связь с анабелевой геометрией и «трехмерной моделью» $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$, а также с мотивными гомотопическими типами Мореля–Воеводского.

Ключевые слова: алгебраические многообразия, реализация, мотивы, мотивные гомотопические типы, конструкция Мореля–Воеводского, этальная топология, топосы, высшие топосы, высшие категории, анабелева геометрия, трехмерная модель

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ
В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемиров,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, А. А. Иванов, Л. Ю. Колотилина,
В. Н. Кублановская, Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье,
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин,
В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

1 Постановка задачи

Пусть \mathcal{V} — какая-нибудь категория схем или алгебраических многообразий над базой S , т.е. некоторая полная подкатегория в Sch/S , где S — фиксированная схема (например, $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ или $\mathrm{Spec} k$, где k — поле). Например, в качестве \mathcal{V} можно взять:

- всю категорию схем Sch ;
- категорию схем Sch/S над некоторой базой S ;
- категорию алгебраических многообразий Var_k над полем k ;
- категорию гладких алгебраических многообразий Sm_k над полем k ;
- в некоторых случаях — категорию «обобщенных схем» $GenSch$ в смысле [Du07], т.е. «схемы над полем из одного элемента \mathbb{F}_1 ».

Объекты выбранной категории \mathcal{V} будут чаще всего называться *многообразиями*, реже — *схемами*.

Пусть \mathcal{T} — какая-нибудь категория «пространств без структуры», аналогичная категории топологических пространств. Например:

- категория топологических пространств Top ;
- категория локалей (или 0-топосов) Top_0 ;
- 2-категория топосов Гротендика (или 1-топосов) Top_1 ;
- $(\infty, 2)$ -категория ∞ -топосов (в смысле Лури [Lu06]) Top_∞ .

Объекты категории \mathcal{T} будут обычно называться *пространствами*.

Пусть \mathcal{T}^E — категория пространств из \mathcal{T} , наделенных какой-нибудь дополнительной структурой, так что у нас есть забывающий функтор $\mathcal{T}^E \rightarrow \mathcal{T}$, который обычно будет предполагаться декартовым расслоением. В качестве дополнительной структуры на объекте $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{T}$ могут выступать:

- Дополнительный объект из \mathcal{T} над выбранным объектом $X \in \mathrm{Ob} \mathcal{T}$ (в этом случае $\mathcal{T}^E = \mathrm{Ar} \mathcal{T} = \mathrm{Funct}([1], \mathcal{T})$). Чаще всего мы называем такой объект «аффинной прямой над X », и обозначаем через $\mathbb{A}_X \rightarrow X$.
- Объект над X с дополнительной структурой. Например, мы можем потребовать, чтобы $\mathbb{A}_X \rightarrow X$ был коммутативным моноидом или кольцом в \mathcal{T}/X .

- Морфизм $X \rightarrow C$ в фиксированный объект $C \in \text{Ob } \mathcal{T}$ (в этом случае $\mathcal{T}^E = \mathcal{T}_{/C}$). Это довольно общий вариант: в качестве C можно попытаться взять «пространство модулей» для любой другой интересующей нас дополнительной структуры на пространствах.
- Пучок множеств \mathcal{O} на X . Обычно категория пучков множеств на пространстве X эквивалентна полной подкатегории в $\mathcal{T}_{/X}$ — пучку \mathcal{O} сопоставляется соответствующее «накрывающее пространство» $X_{/\mathcal{O}} \rightarrow X$ в смысле Годамана [Go58]; если $X = \mathcal{X}$ — топос, то это соответствует рассмотрению топоса $\mathcal{X}_{/\mathcal{O}}$ над \mathcal{X} .
- Структурный пучок абелевых групп, моноидов, колец, локальных колец и т.п. — аналогично предыдущему пункту, однако на \mathcal{O} задается соответствующая дополнительная структура (что, между прочим, равносильно заданию такой структуры на объекте $X_{/\mathcal{O}} \rightarrow X$ в категории $\mathcal{T}_{/X}$).

Объекты категории \mathcal{T}^E будут называться *пространствами со структурой*. Объект слоя $\mathcal{T}^E \rightarrow \mathcal{T}$ над $X \in \text{Ob } \mathcal{T}^E$ будет называться *структурой на X* , или *E -структурой*. Если $\mathcal{T}^E \rightarrow \mathcal{T}$ — декартово расслоение, то определено понятие *обратного образа E -структуры* относительно любого морфизма $f : X \rightarrow Y$ в \mathcal{T} .

Мы хотим изучать *функторы топологической реализации* $\mathcal{R} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}^E$, сопоставляющие каждому «многообразию» $X \in \text{Ob } \mathcal{V}$ его «топологическую реализацию» — некоторое «пространство со структурой» $\mathcal{R}(X)$.

Интересные функторы топологической реализации должны обладать дополнительными свойствами — например, быть строгими, вполне строгими или консервативными (т.е. «не терять информацию» об исходном «многообразии»), или быть точными слева (т.е. сохранять расслоенные произведения «многообразий»). Примеры таких свойств будут перечислены в одном из последующих разделов.

В идеале хотелось бы получать на выходе пространства с как можно меньшей дополнительной структурой (или вовсе без нее), и так, чтобы эта структура была по возможности «топологической» (вроде морфизма в фиксированное пространство C), а не «геометрической» (вроде пучка локальных колец). Тогда (вполне строгий) функтор топологической реализации $\mathcal{R} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}^E$ позволит сводить алгебро-геометрические или теоретико-числовые вопросы (вроде поиска рациональных точек на многообразии $X/\text{Spec } k$) к топологическим (поиск сечений проекции $\mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(\text{Spec } k)$ в категории «пространств со структурой»).

Отметим, что задача допускает тавтологическое решение, если взять в качестве \mathcal{V} всю категорию схем, а в качестве \mathcal{T}^E — локально око-

ванные топологические пространства. Это пример того, чего мы хотим избежать (структура локально окольцованного пространства «геометрическая», а не «топологическая»).

2 Анабелева геометрия

Рассмотрим в качестве примера близкой конструкции *анабелеву геометрию*, предложенную Гротендиком в “Esquisse d’une programme” и частично реализованную позже (например, в работах Мочидзуки [Moch96]).

2.1. (Идея анабелевой геометрии.) Основная идея анабелевой геометрии — гиперболическая (гладкая) кривая C над полем k , конечно порожденным над своим простым подполем, определяется своей этальной фундаментальной группой $\pi_1^{et}(C)$ вместе с канонической проекцией в $\pi_1^{et}(\mathrm{Spec} k) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$. Иногда изучают *абсолютную* анабелеву геометрию — в этом случае группу $\pi_1^{et}(C)$ рассматривают без проекции в $\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$.

2.1.1. (Гиперболические кривые.) Напомним, что *гиперболическая* кривая — это квазипроjektивная кривая C с отрицательной эйлеровой характеристикой $\chi(C)$. Если C получается выкидыванием n точек из полной кривой \bar{C} рода g , то $\chi(C) = 2 - 2g - n$. Например, гладкая проективная кривая рода ≥ 2 и проективная прямая \mathbb{P}^1 без четырех точек являются гиперболическими.

2.1.2. (Смешанная и геометрическая этальная фундаментальная группа.) Этальная фундаментальная группа $\pi_1^{et}(C)$ всегда является расширением группы Галуа поля k с помощью «геометрической» этальной фундаментальной группы $\pi_1^{et}(C_{\bar{k}})$:

$$1 \longrightarrow \pi_1^{et}(C_{\bar{k}}) \longrightarrow \pi_1^{et}(C) \xrightarrow{\sigma} \pi_1^{et}(\mathrm{Spec} k) = \mathrm{Gal}(\bar{k}/k) \longrightarrow 1 \quad (2.1.1)$$

В характеристике ноль «геометрическая» этальная фундаментальная группа гладкой проективной кривой рода g совпадает с проконечным пополнением фундаментальной группы римановой поверхности рода g — т.е. группы с $2g$ образующими $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ и одним соотношением $[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = e$. В случае характеристики $p > 0$ это верно для части, взаимно простой с p (см. [SGA1]).

2.1.3. (Рациональные точки кривых.) Конкретные утверждения анабелевой геометрии выглядят, например, так. Ясно, что всякая k -рациональная точка, т.е. сечение $C \rightarrow \mathrm{Spec} k$, дает сечение проекции σ из (2.1.1) (тут есть некоторая тонкость, связанная с выбором отмеченной точки

на C , которую мы пока проигнорируем); если кривая задается своей этальной фундаментальной группой, можно ожидать, что сечения гомоморфизма проконечных групп σ находятся во взаимно однозначном соответствии с k -рациональными точками кривой C . В каких-то случаях (например, когда k — поле алгебраических чисел, т.е. конечное расширение \mathbb{Q}) подобные утверждения удастся четко сформулировать и даже доказать.

2.1.4. (Гиперболические кривые — $K(\pi, 1)$.) Важным моментом для работы анабелевой геометрии представляется тот факт, что гиперболические кривые (в комплексной геометрии, равно как и относительно этальной топологии) являются пространствами Эйленберга–Маклейна $K(\pi, 1)$, т.е. их высшие гомотопические группы тривиальны. В противном случае нам пришлось бы отслеживать весь этальный гомотопический тип кривой (понимаемый, например, в смысле работы Артина и Мазура [АМ69]), а не только π_1^{et} .

2.2. (Попытка «гомотопической реализации» анабелевой геометрии.) Можно попытаться перевести анабелеву геометрию на язык «топологических реализаций алгебраических многообразий», принятый в данной работе, следующим образом.

Сопоставим основному полю k гомотопический тип классифицирующего пространства $B\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, а гиперболической кривой C/k — гомотопический тип $B\pi_1(C)$. Это выглядит довольно естественно, поскольку мы только что обсудили, что гиперболические кривые «морально» являются $K(\pi, 1)$ -пространствами, поэтому с гомотопической точки зрения они эквивалентны $B\pi$.

В рамках абсолютной анабелевой геометрии мы работаем дальше с этими гомотопическими типами; в случае относительной анабелевой геометрии мы сопоставляем кривой C морфизм $B\pi_1^{et}(C) \rightarrow B\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)$, т.е. гомотопический тип с дополнительной структурой в виде морфизма в фиксированный объект.

Далее теоремы анабелевой геометрии могут быть выражены в терминах этого функтора из гиперболических кривых и спектров «хороших» полей в гомотопические типы (возможно, с дополнительной структурой) — например, в виде утверждений о строгости или консервативности этого функтора.

2.2.1. (Проблема: BG неканонично как топологическое пространство.) Заметим, что мы получили реализацию (некоторых) алгебраических многообразий не в (топологических) пространствах, а в гомотопических типах вида BG . Конечно же, каждый гомотопический тип, в частности,

BG , может быть реализован с помощью некоторого топологического пространства; однако выбор этого представителя неканоничен, и к тому же вместо непрерывных отображений между выбранными топологическими пространствами нам все равно придется рассматривать их классы гомотопности, что не вписывается в нашу общую схему.

2.2.2. (Проблема: надо рассматривать BG для проконечной группы G .) Еще одна проблема: нас интересуют классифицирующие пространства BG не для дискретной, а для проконечной группы G . Если мы забудем топологию группы G , то придется рассматривать все гомоморфизмы между проконечными группами, а не только непрерывные, что неправильно.

2.3. (Реализация анабелевой геометрии с помощью классифицирующих топосов.) Как мы уже отмечали, гомотопический тип $BG = K(G, 1)$ не допускает естественной реализации в топологических пространствах, и забывает топологию на проконечной группе G . Обе эти проблемы исчезают, если мы переходим к топосам.

2.3.1. (Классифицирующий топос \mathcal{B}_G дискретной группы G .) Если G — дискретная группа, то ее *классифицирующий топос* \mathcal{B}_G — это категория G -множеств, или, что эквивалентно, категория предпучков множеств на группоиде с единственным объектом, группой автоморфизмов которого является G .

2.3.2. (Классифицирующий топос $\mathcal{B}_{\mathbf{G}}$ про-группы \mathbf{G} .) Если $\mathbf{G} = \varprojlim G_\alpha$ — про-группа, то ее *классифицирующий топос* $\mathcal{B}_{\mathbf{G}}$ определяется как категория множеств X с «непрерывным» действием \mathbf{G} . Непрерывность здесь означает, что X должно записываться в виде объединения G_α -множеств X_α .

2.3.3. (Классифицирующий топос \mathcal{B}_G как канонический представитель BG .) Можно проверить, что классифицирующий топос \mathcal{B}_G является финальным объектом среди всех топосов с «гомотопическим типом» BG (на самом деле у топосов есть *форма (shape)*, которая является про-гомотопическим типом), и что морфизмы топосов $\mathcal{B}_G \rightarrow \mathcal{B}_H$ находятся во взаимно однозначном соответствии с гомотопическими классами отображений $BG \rightarrow BH$. С учетом того, что классифицирующие топосы определены не только для дискретных групп, но и для проконечных групп тоже, видно, что их удобно использовать для переизложения анабелевой геометрии в нужном нам ключе.

2.3.4. (Анабелево соответствие из кривых в топосы.) Теперь мы можем определить анабелево соответствие (т.е. функтор) из гиперболических

кривых C/k и схем вида $\mathrm{Spec} k$ в топосы следующим образом. Сопоставим гиперболической кривой C/k классифицирующий топос $\mathcal{B}_{\pi_1^{et}(C)}$, а «точке» $\mathrm{Spec} k$ — классифицирующий топос $\mathcal{B}_{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$. Если нам интересна относительная теория над выбранным полем k , можно сопоставлять кривой C топос $\mathcal{B}_{\pi_1^{et}(C)} \rightarrow \mathcal{B}_{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$.

Этот функтор \mathcal{R}_{anab} вполне вписывается в нашу общую картину, за исключением того, что он определен только на гиперболических кривых. Различные теоремы анабелевой геометрии могут быть теперь выражены с помощью функтора \mathcal{R}_{anab} , например, как утверждения о его строгости или консервативности.

2.3.5. (Решение проблемы отмеченных точек.) Несложно видеть, что использование классифицирующих топосов \mathcal{B}_G (впрочем, как и классифицирующих пространств BG) решает проблему выбора отмеченной точки: любая точка C (в каком-нибудь алгебраически замкнутом расширении Ω поля k) определяет некоторую точку классифицирующего топоса $\mathcal{B}_{\pi_1^{et}(C)}$, и все такие точки (неканонически) изоморфны. При изучении, например, сечений структурного морфизма $\mathcal{R}_{anab}(C) \rightarrow \mathcal{R}_{anab}(\mathrm{Spec} k)$ можно не беспокоиться об отмеченных точках, и изучать морфизмы топосов.

2.4. (Анабелева реализация $\mathcal{R}_{anab}(X)$ для всех многообразий X .) Попробуем распространить наш функтор \mathcal{R}_{anab} с подкатегории гиперболических кривых на всю категорию многообразий над k или даже схем. Для этого, однако, нам придется рассматривать произвольные гомотопические типы (не только $K(\pi, 1)$) и задействовать ∞ -топосы вместо более привычных 1-топосов.

2.4.1. (Наблюдение: $\mathcal{R}_{anab}(\mathrm{Spec} k) = (\mathrm{Spec} k)_{et}$.) Заметим, что для любого поля k его анабелева реализация $\mathcal{R}_{anab}(\mathrm{Spec} k) = \mathcal{B}_{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$ есть в точности (малый) этальный топос $(\mathrm{Spec} k)_{et}$ схемы $\mathrm{Spec} k$.

2.4.2. (Морфизм $C_{et} \rightarrow \mathcal{R}_{anab}(C)$.) Для гиперболической кривой это уже не так, однако существует канонический морфизм топосов $C_{et} \rightarrow \mathcal{R}_{anab}(C) = \mathcal{B}_{\pi_1^{et}(C)}$. Аналогичный морфизм $\rho : X_{et} \rightarrow \mathcal{B}_{\pi_1^{et}(X)}$ можно определить для любой связной схемы X : надо отождествить $\mathcal{B}_{\pi_1^{et}(X)}$ с инд-объектами в категории локально постоянных пучков конечных множеств на X_{et} , а в качестве функтора ρ^* взять естественное вложение этой категории в топос всех этальных пучков X_{et} .

2.4.3. (Приближение связного топоса классифицирующим топосом.) Конструкция $X_{et} \mapsto \mathcal{B}_{\pi_1^{et}(X)}$ применима к любому связному топосу \mathcal{X} , не только к X_{et} : в правой части стоит $\mathcal{B}_{\pi_1(\mathcal{X})}$, а морфизм $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}_{\pi_1(\mathcal{X})}$ обладает универсальным свойством относительно морфизмов $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}_G$ из \mathcal{X} в классифицирующие топосы проконечных групп.

2.4.4. (Сопоставление $X \mapsto \mathcal{B}_{\pi_1^{et}(X)}$ не подходит.) Таким образом, в качестве кандидата на роль $\mathcal{R}_{anab}(X)$ получаем классифицирующий топос $\mathcal{B}_{\pi_1^{et}(X)}$. Несмотря на функториальность этой конструкции, она нам не подходит, поскольку помнит только (эталную) фундаментальную группу, но не высшие гомотопические инварианты. Например, морфизм $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^1 \rightarrow \mathbb{Q}$ она переводит в эквивалентность топосов.

2.4.5. (Правильное соответствие: форма ∞ -топоса X_{et} .) Для построения правильного $\mathcal{R}_{anab}(X)$ надо рассмотреть ∞ -топос $X_{et,\infty}$ (который мы обозначим тем же символом X_{et}), т.е. ∞ -категорию пучков гомотопических типов на малом этальном сайте схемы X (см. [Lu06]). Пусть $\Pi_X \in \text{Pro}(\mathcal{H})$ — форма (*shape*) ∞ -топоса X_{et} : это про-гомотопический тип, определяемый из эквивалентности $\text{Map}(\Pi_X, A) \cong q_{A,*} q_A^* A$ для любого гомотопического типа $A \in \text{Ob } \mathcal{H}$, где $q_A : X_{et} \rightarrow \mathcal{H}$ — канонический морфизм из ∞ -топоса X_{et} в точечный ∞ -топос \mathcal{H} (т.е. ∞ -категорию гомотопических типов).

Можно также сказать, что Π_X — это этальный фундаментальный ∞ -группоид схемы X .

Далее, сопоставим про-гомотопическому типу Π_X его каноническую реализацию (финальный ∞ -топос среди всех формы Π_X): это $\mathcal{H}_{/\Pi_X}$ (на самом деле эта формула годится, только если $\Pi_X \in \text{Ob } \mathcal{H}$; в общем случае надо записать $\Pi_X = \varprojlim_{\alpha \in I} S_{\alpha}$ для некоторых $S_{\alpha} \in \text{Ob } \mathcal{H}$ и положить $\mathcal{H}_{/\Pi_X} := \varprojlim_{\alpha} \mathcal{H}_{/S_{\alpha}}$).

Теперь возьмем $\mathcal{H}_{/\Pi_X}$ в качестве анабелевой реализации $\mathcal{R}_{anab}(X)$. Несложно видеть, что ∞ -топосы такого вида образуют $(\infty, 1)$ -категорию, эквивалентную $\text{Pro}(\mathcal{H})$, так что построение стрелок $\mathcal{R}_{anab}(X) \rightarrow \mathcal{R}_{anab}(Y)$ равносильно построению морфизмов $\Pi_X \rightarrow \Pi_Y$ в $\text{Pro}(\mathcal{H})$.

2.5. (Эталная реализация \mathcal{R}_{et} .) В процессе построения \mathcal{R}_{anab} мы рассмотрели *эталную реализацию* \mathcal{R}_{et} , которая сопоставляет каждой схеме X ее (малый) этальный топос (или ∞ -топос) X_{et} :

$$\mathcal{R}_{et}(X) := X_{et} \quad (2.5.1)$$

Наше построение \mathcal{R}_{anab} показывает, что существует естественный морфизм $\mathcal{R}_{et} \rightarrow \mathcal{R}_{anab}$. При этом $\mathcal{R}_{anab}(X)$ — универсальное приближение к $\mathcal{R}_{et}(X)$ среди всех ∞ -топосов той же формы.

3 Трехмерная модель $\text{Spec } \mathbb{Z}$

3.1. (Область применимости: одномерные схемы.) Пусть X — кривая над конечным полем («геометрический случай»), или плоская конечная

схема над $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ («числовой случай»). Типичным примером является $X = \mathrm{Spec} \mathbb{Z}$.

3.1.1. (Этальная трехмерность X .) Конечно, X одномерно в смысле топологии Зариского. Однако его кохомологическая размерность относительно этальных кохомологий с конечными коэффициентами (а значит, и относительно ℓ -адических тоже) равна трем.

3.1.2. (Геометрический случай.) Может показаться, что кохомологическая размерность кривой над \mathbb{F}_q равна двум, но это только потому, что обычно рассматриваются не абсолютные этальные кохомологии, а высшие прямые образы постоянных пучков $\mathbb{Z}/\ell^n \mathbb{Z}$ относительно морфизма $X \rightarrow \mathrm{Spec} \mathbb{F}_q$; однако этальная кохомологическая размерность $\mathrm{Spec} \mathbb{F}_q$ совпадает с кохомологической размерностью $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q) = \hat{\mathbb{Z}}$, т.е. равна единице, и потому абсолютная этальная кохомологическая размерность кривой X все-таки равна трем (или, во всяком случае, не превосходит трех).

3.1.3. (Числовой случай.) В числовом случае необходимые вычисления этальных кохомологий X были проделаны Мазуром в работе [Ma73] для прояснения конструкции Артина и Вердье [AV64], которые изложили двойственность Тэйта для числовых полей на языке этальных кохомологий и впервые отметили этальную трехмерность спектров колец алгебраических чисел; эти вычисления основаны на теории полей классов.

3.2. (Аналогия с трехмерными топологическими многообразиями.) Как пишет сам Мазур в неопубликованной работе 1964 года [Ma64], аналогия между вложением $\mathrm{Spec} \mathbb{F}_p$ в $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ и вложением узла в односвязное трехмерное топологическое многообразие была предложена Мамфордом, вдохновленным результатами Э. Артина и Тэйта о кохомологиях Галуа и М. Артина и Вердье [AV64] об этальных кохомологиях подобных схем. Работа [Ma64] использует эту аналогию в явном виде; к сожалению, в течение долгого времени была доступна только более поздняя опубликованная работа [Ma73], в которой приводятся вычисления нужных этальных кохомологий без упоминания о трехмерной модели.

Так или иначе, эти работы Мазура послужили отправной точкой для проведения аналогии между свойствами $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}$ (или, более общо, одномерных «геометрических» или «числовых» схем X) и свойствами трехмерных многообразий. Мой коллега Александр Смирнов, от которого я и узнал о существовании этой аналогии, говорит, что узнал о ней в 1994 году от Михаила Капранова, который, в частности, отметил, что теоретико-числовые результаты Редее о законах взаимности для троек простых чисел аналогичны результатам Милнора о борромеевых кольцах

(зацеплениях трех окружностей, которые распадаются после выкидывания любой из них). Капранов и Смирнов совместно написали работу о трехмерной модели [KS], которая так и не была опубликована. Позже появились работы Капранова и Резникова, а затем — ряда японских математиков, которые продолжили развивать эту аналогию (особенно Морисита [Mor09], [Mor12]).

Основная идея этой аналогии — схеме X и ее подсхемам (неформально) сопоставляются трехмерное топологическое многообразие и его подпространства, так, чтобы этальные кохомологии исходных геометрических объектов с конечными коэффициентами были бы устроены так же, как сингулярные кохомологии соответствующих топологических объектов. Тем не менее, обычно не пытаются действительно сопоставить схемам трехмерные топологические многообразия, а вместо этого говорят, что схемы аналогичны трехмерным топологическим многообразиям.

3.2.1. (Общая картина: замкнутые точки соответствуют узлам.) Пусть наша схема X регулярна и связна, с общей точкой ξ . Например, $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Она аналогична трехмерному топологическому многообразию $[X]$. Замкнутые точки $\{p\} = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_q \subset X$ соответствуют непересекающимся вложенным узлам $\gamma_p \subset [X]$ (именно узлам, т.е. топологическим окружностям, поскольку кохомологии $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_q$ определяются группой Галуа $\hat{\mathbb{Z}}$, которая для кохомологий с конечными коэффициентами неотличима от \mathbb{Z} , фундаментальной группы окружности). Если выкинуть из $[X]$ несколько таких узлов, получится трехмерное многообразие, соответствующее некоторой открытой по Зарискому подсхеме в X . Желательно подобрать такие узлы, чтобы при этом этальные кохомологии таких открытых подпространств совпали. Этальные накрытия открытых подсхем X описываются теорией полей классов.

Если выкинуть из $[X]$ все узлы γ_p сразу, получится «нечто», соответствующее общей точке $\xi = \operatorname{Spec} K \subset X$, где $K = k(X)$ — поле рациональных функций на X , например, \mathbb{Q} . В частности, фундаментальная группа этого «нечто» соответствует группе Галуа $\operatorname{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

3.2.2. (Трубчатые окрестности узлов $\gamma_p \subset [X]$.) Пусть V_p — маленькая замкнутая трубчатая окрестность узла γ_p внутри $[X]$ (например, мы можем завести на $[X]$ метрику и рассмотреть ε -окрестность γ_p). Во многих отношениях она аналогична $\operatorname{Spec} \hat{\mathcal{O}}_p$ или скорее $\operatorname{Spf} \hat{\mathcal{O}}_p$ (формальному спектру пополненного локального кольца). Например, в случае $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ трубчатые окрестности узлов $\{\gamma_p\}_{p \in \mathbb{P}}$ соответствуют $\operatorname{Spf} \mathbb{Z}_p$.

В некоторых случаях естественнее рассматривать открытую трубчатую окрестность $U_p \subset V_p$; топологическая интуиция подсказывает нам, что они гомотопически эквивалентны.

3.2.3. (Проколотые трубчатые окрестности.) Если выкинуть из V_p узел γ_p , то получившееся многообразие $V_p - \gamma_p$, очевидно, соответствует спектру поля частных пополненного локального кольца, т.е. пополнению K_p поля рациональных функций K относительно нормирования, соответствующего точке p .

3.2.4. (Фундаментальная группа V_p .) Таким образом, фундаментальная группа V_p соответствует этальной фундаментальной группе $\mathrm{Spf} \hat{\mathcal{O}}_p$, которая совпадает с этальной фундаментальной группой поля вычетов $\kappa(p) = \mathbb{F}_q$, т.е. с $\hat{\mathbb{Z}}$. В топологии этому соответствует тот факт, что узел γ_p является деформационным ретрактом своей малой трубчатой окрестности V_p или U_p , и потому их фундаментальные группы совпадают с фундаментальной группой γ_p , т.е. с \mathbb{Z} .

3.2.5. (Фундаментальная группа $V_p - \gamma_p$ — это группа разложения D_p .) Фундаментальная группа $V_p - \gamma_p$ соответствует группе Галуа локального поля K_p , т.е. *группе разложения* D_p . Вложение $D_p \rightarrow G = \mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ соответствует отображению фундаментальной группы $V_p - \gamma_p$ в фундаментальную группу $[X] = \bigcup_{p'} \gamma_{p'}$; здесь есть определенный произвол в выборе двух базовых точек и путей между ними, из-за которого образ D_p в G определен только с точностью до сопряжения, как и должно быть.

3.2.6. (Группа инерции.) Далее, отображение $\pi_1(V_p - \gamma_p) \rightarrow \pi_1(V_p) \cong \pi_1(\gamma_p) \cong \mathbb{Z}$ соответствует отображению $D_p = \mathrm{Gal}(\bar{K}_p/K_p) \rightarrow \pi_1^{et}(\mathrm{Spec} \hat{\mathcal{O}}_p) = \mathrm{Gal}(K_p^{unr}/K_p) \cong \mathrm{Gal}(\overline{\kappa(p)}/\kappa(p)) \cong \hat{\mathbb{Z}}$; это сюръективный гомоморфизм групп, ядро которого есть *группа инерции* I_p .

3.2.7. (Самопересекающиеся узлы.) В некоторых случаях (для конечного количества p) узлы γ_p самопересекаются, тогда их проколота трубчатая окрестность $V_p - \gamma_p$ оказывается гомеоморфна не тору, а ориентируемой поверхности рода g , и тогда группа разложения D_p будет порождена не двумя, а $2g$ образующими. Это соответствует результатам Дёмушкина о строении таких групп ([De59] при $p > 2$; в случае $p = 2$ классификация была получена Лабютом [La65]).

3.2.8. (Почему геометрический случай проще числового.) Если X — это кривая над конечным полем \mathbb{F}_q , то ей будет сопоставлено не просто трехмерное многообразие $[X]$, но такое многообразие вместе с проекцией в «модель» $[\mathrm{Spec} \mathbb{F}_q]$, т.е. в окружность. В топологии также изучают трехмерные многообразия, расслоенные над окружностью, и оказывается, что они устроены гораздо проще, чем произвольные трехмерные многообразия. (Этим соображением, как и многими другими в этом пункте, я обязан А. Смирнову.)

В рамках рассматриваемой аналогии это объясняет, почему случай геометрических кривых (над $\mathrm{Spec} \mathbb{F}_q$) оказывается гораздо проще числового. Например, гипотезы Вейля для кривых над конечным полем были легко доказаны самим А. Вейлем, в то время как гипотеза Римана все еще очень далека от доказательства.

3.3. (Сравнение с этальной реализацией.) Можно ли сделать приведенную аналогию точной, т.е. действительно сопоставить схеме X и ее подсхемам некоторые «пространства» (не обязательно именно топологические многообразия), так, чтобы были выполнены перечисленные выше свойства (в частности, чтобы они обладали нужными когомологиями с конечными коэффициентами)?

Очевидно, это можно сделать, если в качестве «пространств» взять топосы, и сопоставить X его *эталную реализацию* $\mathcal{R}_{et}(X) := X_{et}$. Это решение не совсем тавтологично: надо, например, изучить, переходят ли замкнутые или открытые подсхемы X в замкнутые или открытые подтопосы $\mathcal{R}_{et}(X)$ и т.п.

3.3.1. (Недостатки этальной реализации.) Тем не менее, есть определенные причины полагать, что этальная реализация годится только до тех пор, пока мы изучаем только когомологии с конечными коэффициентами. Это довольно грубый способ сравнения пространств: например, группы \mathbb{Z} и $\hat{\mathbb{Z}}$ обладают одинаковыми когомологиями с конечными коэффициентами, но при этом довольно сильно отличаются, как и соответствующие классифицирующие топосы $\mathcal{B}_{\mathbb{Z}}$ и $\mathcal{B}_{\hat{\mathbb{Z}}}$.

Приведем несколько причин, по которым этальная реализация представляется недостаточно точной.

3.3.2. (Модели $\mathrm{Spec} \mathbb{F}_p$, $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ и $\mathrm{Spf} \mathbb{Z}_p$.) Предположим, $\mathrm{Spec} \mathbb{F}_p$ соответствует некоторому узлу γ_p , вложенному в трехмерное многообразие $[\mathrm{Spec} \mathbb{Z}]$, а $\mathrm{Spf} \mathbb{Z}_p$ — некоторой открытой трубчатой окрестности $U_\varepsilon(\gamma_p)$ радиуса ε этого узла. Тогда естественно представить, что $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ соответствуют все большему и большему замкнутому окрестностям $V_{\varepsilon(1-2^{-n})}(\gamma_p)$ узла γ_p , объединение которых и есть все $U_\varepsilon(\gamma_p) = [\mathrm{Spf} \mathbb{Z}_p]$. Помимо всего прочего, такой подход позволяет увидеть некоторые эффекты, связанные с ветвлением: если узел γ_p не самопересекается, но проходит недалеко от самого себя, то гомотопический тип $V_{\varepsilon(1-2^{-n})}(\gamma_p)$ при увеличении n может внезапно измениться с S^1 до букета окружностей, примерно как это происходит в теории Морса.

Однако такой подход невозможен, если мы рассматриваем $\mathcal{R}_{et}(X)$ в качестве модели $[X]$, поскольку $\mathcal{R}_{et}(\mathrm{Spec} \mathbb{F}_p) = \mathcal{R}_{et}(\mathrm{Spec} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}) = \mathcal{R}_{et}(\mathrm{Spf} \mathbb{Z}_p)$: над этими схемами существуют одни и те же этальные схемы (вернее, малые этальные сайты этих схем эквивалентны).

Конечно, если мы будем, помимо этальных схем над базой S , рассматривать, например, еще и гладкие схемы над этой базой (с этальной топологией на полученной категории Sm_S), то аналогичное утверждение будет уже не верно, поскольку гладкая схема над \mathbb{F}_p не обязана подниматься до гладкой схемы над $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, и даже если такой подъем существует, он не обязательно единствен.

Таким образом, мы видим, что малый этальный сайт (и топос) сохраняют недостаточно информации об исходной схеме, т.е. \mathcal{R}_{et} — всего лишь неплохое приближение к трехмерной модели.

3.3.3. (Группы Вейля.) Другое возражение против \mathcal{R}_{et} происходит из теории полей классов. А именно, по ряду причин удобно заменять абсолютную группу Галуа $G_K = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ глобального поля K (например, $K = \mathbb{Q}$) соответствующей *группой Вейля* W_K (см. [AT08, XV]). Это некоторая локально компактная группа, снабженная гомоморфизмом $W_K \rightarrow G_K$, образ которого плотен в G_K , а ядро представляет собой связную компоненту единицы группы классов идеалов поля K (в глобальном случае) или равно единице (в локальном случае, а также в глобальном функциональном случае). В случае конечного поля K обычно полагают W_K равной циклической группе, порожденной автоморфизмом Фробениуса. Проконечное пополнение W_K изоморфно G_K ; поэтому локально постоянные пучки конечных множеств на \mathcal{B}_{W_K} и на $\mathcal{B}_{G_K} = \mathcal{R}_{et}(\text{Spec } K)$ одинаковы, так что отличить эти два пространства, используя только конечные коэффициенты, нельзя. Однако есть основания полагать (связанные, например, с интегральной формулой Вейля для L -функций, в которой участвует интегрирование по группе Вейля), что \mathcal{B}_{W_K} является более правильной моделью для $\text{Spec } K$, чем $\mathcal{R}_{et}(\text{Spec } K) = \mathcal{B}_{G_K}$.

Конечно, в числовом случае W_K не является про-группой, так что «классифицирующий топос» \mathcal{B}_{W_K} в этом случае должен быть определен особо; мы пока не касаемся этого вопроса.

4 Мотивная реализация

Интересный вариант функтора реализации представляет собой функтор \mathcal{R}_{mot} мотивных гомотопических типов Мореля–Воеводского. Он сопоставляет (достаточно хорошей) схеме S (например, гладкому многообразию над полем) ∞ -категорию $\mathcal{R}_{mot}(S)$ относительных мотивных гомотопических типов над S , определяемую следующим образом: рассматривается ∞ -топос пучков гомотопических типов на категории Sm_S гладких схем над S относительно топологии Нисневича, и затем она локализуется по всем морфизмам вида $X \times \mathbb{A}^1 \rightarrow X$.

К сожалению, а priori получившаяся представимая ∞ -категория не является ∞ -топосом, потому что произведенная локализация не является точной слева.

Поскольку эта конструкция зависит от всех гладких схем над базой, а не только от этальных, она позволяет различать $\mathrm{Spec} \mathbb{F}_p$, $\mathrm{Spec} \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ и $\mathrm{Spf} \mathbb{Z}_p$, что, как мы видели в **3.3.2**, желательно.

Тем не менее, локально постоянные пучки конечных множеств в $\mathcal{R}_{mot}(S)$ не соответствуют этальным накрытиям S , что неприятно, поскольку не согласуется с «трехмерной моделью». В частности, если k — поле, мы бы хотели иметь в качестве $\mathcal{R}_{mot}(\mathrm{Spec} k)$ что-то похожее на $\mathcal{B}_{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$, по крайней мере, относительно конечных коэффициентов.

Можно попытаться добиться желаемого эффекта, заменив в конструкции Мореля–Воеводского топологию Нисневича на этальную топологию, как это и было в первоначальной версии мотивов Воеводского. Такой подход довольно перспективен, однако следует учесть, что отказ Воеводского от этальной топологии в пользу топологии Нисневича не был случаен: некоторые результаты о мотивах и мотивных когомологиях перестанут быть верными.

Тем не менее, сопоставление схеме S ∞ -категории относительных гомотопических типов над S (возможно, с некоторыми модификациями) представляется концептуально правильным шагом ввиду следующей теоремы, доказанной в [Lu06]: *надлежащим образом определенная ∞ -категория относительных гомотопических типов над (достаточно хорошим) паракомпактным топологическим пространством X эквивалентна ∞ -топосу пучков гомотопических типов над X* . Напомним, что этот ∞ -топос $\mathrm{Shv}_\infty(X)$ — это в точности ∞ -топос, соответствующий пространству X ; он полностью помнит исходное пространство X , если оно трезвое (все паракомпактные пространства таковы).

Мотивный подход к построению «хороших» функторов топологической реализации алгебраических многообразий представляется нам наиболее перспективным. Тем не менее, судя по всему, буквального применения конструкций Мореля–Воеводского недостаточно. Возможной модификацией является замена категории гладких (аффинных) схем над (аффинной) базой $\mathrm{Spec} R$ на ∞ -категорию, противоположную категории «совершенных» симплициальных коммутативных R -алгебр. Подробное рассмотрение этой и других модификаций конструкции мотивных гомотопических типов выходит за рамки данной работы и будет проделано в другом месте.

5 Свойства функтора реализации \mathcal{R}

Рассмотрим примеры свойств, которые было бы желательно требовать от функтора топологической реализации $\mathcal{R} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}^E$. Мы не настаиваем на том, чтобы всегда требовать наличие всех этих свойств сразу; тем не менее, хороший функтор реализации, по всей видимости, должен обладать многими из них. Некоторые свойства будут представлены кратко, без конкретизации участвующих в них понятий для различных категорий пространств \mathcal{T}^E .

5.1. (Категорные свойства.) При рассмотрении категорных свойств функтора $\mathcal{R} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}^E$ обычно удобно брать в качестве «категории многообразий» \mathcal{V} либо всю категорию схем Sch , либо категорию Sch/S схем над базой S , либо категорию аффинных схем $AffSch/S$ над аффинной базой S , поскольку в этих случаях существуют все необходимые пределы. В любом случае обозначим через S финальный объект \mathcal{V} .

5.1.1. (Согласованность с расслоенными произведениями.)

(RC_I) Функтор $\mathcal{R} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}^E$ сохраняет расслоенные произведения.

Обычно при этом мы требуем, чтобы функтор «забывания дополнительной структуры» $\mathcal{T}^E \rightarrow \mathcal{T}$ также сохранял расслоенные произведения:

(TC_I) Функтор $\mathcal{T}^E \rightarrow \mathcal{T}$ сохраняет расслоенные произведения.

5.1.2. (Точность слева.) Мы обычно не требуем, чтобы финальный объект $S \in \text{Ob } \mathcal{V}$ переходил в финальный объект \mathcal{T}^E ; тем не менее, если выполнено условие (RC_I), то индуцированный функтор $\mathcal{R}' : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}_{/\mathcal{R}(S)}^E$ (и $\mathcal{T}_{/\mathcal{R}(S)}^E \rightarrow \mathcal{T}_{/|\mathcal{R}(S)|}$, если выполнено (TC_I)) сохраняет произвольные конечные пределы, т.е. точен слева. Добавив в качестве дополнительной структуры морфизм в «пространство» $\mathcal{R}(S)$, т.е. заменив \mathcal{T}^E на $\mathcal{T}_{/\mathcal{R}(S)}^E$, мы можем при желании считать, что \mathcal{R} точен слева.

5.1.3. (Согласованность с существенно аффинными фильтрующимися пределами.)

(RC_{II}) Функтор $\mathcal{R} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}^E$ сохраняет существенно аффинные фильтрующиеся пределы.

Если $\mathcal{V} = AffSch/S$, $S = \text{Spec } K$, то все фильтрующиеся пределы существенно аффинны, и потому \mathcal{R} сохраняет все фильтрующиеся пределы. Если к тому же \mathcal{R} точен слева (для чего достаточно потребовать (RC_I) и заменить \mathcal{T}^E на $\mathcal{T}_{/\mathcal{R}(S)}^E$), то \mathcal{R} сохраняет произвольные пределы, а значит, обладает левым сопряженным $\mathcal{T}_{/\mathcal{R}(S)}^E \rightarrow \text{Spec } \Gamma_{\mathcal{R}}(-)$.

5.1.4. (Существование левого сопряженного функтора к \mathcal{R} .) Если этот левый сопряженный функтор сопоставляет $\mathcal{X} \in \text{Ob } \mathcal{T}_{/\mathcal{R}(S)}^E$ некоторую

аффинную схему над $S = \operatorname{Spec} K$, то мы обозначаем K -алгебру регулярных функций на этой схеме через $\Gamma_{\mathcal{R}}(\mathcal{X})$.

Таким образом, если \mathcal{R} задан на аффинных схемах над $\operatorname{Spec} K$ и удовлетворяет (RC_I) и (RC_{II}) , то существует «функтор глобальных сечений структурного пучка» $\Gamma_{\mathcal{R}} : \mathcal{T}_{/\mathcal{R}(S)}^E \rightarrow K\text{-CommAlg}$.

5.1.5. (Консервативность и строгость.) Важными для приложений, использующих один функтор \mathcal{R} , но менее важными для изучения свойств произвольных функторов реализации, являются требования *строгости*, *полной строгости* или *консервативности* функтора \mathcal{R} .

Если выполнено условие (RC_I) , то из консервативности следует строгость (инъективность на морфизмах). Из полной строгости (которая обычно рассматривается для индуцированного функтора $\mathcal{R}' : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}_{/\mathcal{R}(S)}^E$, а не для исходного \mathcal{R}), конечно же, следует строгость и консервативность.

5.1.6. (Гомотопические расслоенные произведения.) Если в качестве \mathcal{T}^E выступает ∞ -бикатегория ∞ -топосов с какой-либо дополнительной структурой, то вместо (RC_I) и (TC_I) естественно требовать, чтобы функтор \mathcal{R} и забывающий функтор $\mathcal{T}^E \rightarrow \mathcal{T}$ сохраняли *гомотопические* расслоенные произведения, поскольку в ∞ -категориях естественным образом определены именно они. Обычное расслоенное произведение $X \times_Z Y$ совпадает с гомотопическим, если и только если схемы X и Y *Tor-независимы над Z* в смысле [SGA6], т.е. если $\mathcal{T}or_{\mathcal{O}_Z}^n(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y) = 0$ для $n > 0$. Это условие, в частности, выполнено, если X или Y — плоская схема над Z .

В действительности в данной ситуации надо рассматривать не обычные категории схем над S или коммутативные K -алгебры, а их симплициальные (вернее, гомотопические, или ∞ -категорные) аналоги. Мы не хотим углубляться в эту тему в данной работе.

5.2. (Свойства, связанные с топологией Зариского.) Практически все функторы реализации, которые мы хотели бы рассматривать, обладают следующими свойствами:

5.2.1. (Открытые вложения.)

(RZ_I) Функтор \mathcal{R} переводит открытые вложения в \mathcal{V} в открытые вложения в \mathcal{T}^E .

Подразумевается, что понятие открытого вложения имеет смысл в категориях «пространств» \mathcal{T}^E и \mathcal{T} , и что открытые вложения в \mathcal{T}^E — это в точности декартовы морфизмы, лежащие над открытыми вложениями из \mathcal{T} .

5.2.2. (Открытые покрытия.)

(RZ_{II}) Функтор \mathcal{R} переводит открытые по Зарискому покрытия в \mathcal{V} в открытые покрытия в \mathcal{T}^E .

Опять-таки, подразумевается, что в \mathcal{T} , а значит, и в \mathcal{T}^E есть естественное понятие открытого покрытия. Обычно \mathcal{T} является какой-нибудь категорией топосов, где такое понятие действительно осмысленно.

Помимо всего прочего, эти два свойства позволяют задавать функтор реализации только на аффинных схемах, а затем «склеивать» его значения на произвольных схемах с помощью открытых аффинных покрытий:

Теорема 5.3 Пусть $\mathcal{V} = \text{Sch}/_S$, $S = \text{Spec } K$, $\mathcal{V}_{\text{aff}} = \text{AffSch}/_S$ — категория аффинных подсхем в \mathcal{V} . Любой функтор реализации $\mathcal{R} : \mathcal{V}_{\text{aff}} \rightarrow \mathcal{T}^E$, удовлетворяющий свойствам (RC_I) и (RZ_{II}) , однозначно (с точностью до эквивалентности) продолжается до функтора реализации $\tilde{\mathcal{R}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{T}^E$, удовлетворяющего этим двум свойствам. Если \mathcal{R} удовлетворяет (RC_{II}) , строг или вполне строг, то и его продолжение $\tilde{\mathcal{R}}$ обладает тем же свойством. (Здесь неявно предполагается, что в \mathcal{T} , равно как и \mathcal{T}^E , есть процедура склейки пространства из открытых подпространств; это так, если \mathcal{T} состоит из топосов или ∞ -топосов, а «дополнительная структура» \mathcal{T}^E локальна.)

Доказательство. Ограничимся наброском доказательства. Функтор $\tilde{\mathcal{R}}$ является левым расширением Кана функтора \mathcal{R} вдоль вложения $\mathcal{V}_{\text{aff}} \rightarrow \mathcal{V}$. Иначе говоря, значение $\tilde{\mathcal{R}}(X)$ на произвольной S -схеме X равно копределу $\varinjlim_{U \in \mathcal{V}_{\text{aff}}/X} \mathcal{R}(U)$. На самом деле достаточно рассмотреть копредел по тем U , которые являются открытыми аффинными подсхемами в X ; в этом случае мы фактически покрываем X открытыми аффинными подсхемами U и «склеиваем» $\tilde{\mathcal{R}}(X)$ из $\{\mathcal{R}(U)\}$; после склейки все $\mathcal{R}(U)$ окажутся открытыми подпространствами в $\tilde{\mathcal{R}}(X)$. Свойство (RC_I) для $\tilde{\mathcal{R}}$ следует из обычной конструкции расслоенного произведения схем через их открытые аффинные покрытия; свойство (RZ_{II}) получается почти сразу из конструкции $\tilde{\mathcal{R}}(X)$.

5.3.1. (Пустая схема.) Отметим, что из (RZ_{II}) следует, что \mathcal{R} переводит пустую схему \emptyset в пустое пространство.

5.3.2. (Дизъюнктные объединения схем.) Из (RZ_{II}) и (RC_I) следует, что $\mathcal{R}(X \sqcup Y) = \mathcal{R}(X) \sqcup \mathcal{R}(Y)$. Аналогичная формула верна и для бесконечных дизъюнктных объединений.

5.3.3. (Замкнутые вложения.) Отметим, что замкнутые вложения, вообще говоря, не переводятся функтором \mathcal{R} в замкнутые вложения топосов.

Более того, замкнутые подсхемы (или, по крайней мере, регулярно вложенные замкнутые подсхемы) в некоторых случаях переводятся в *открытые* подтопосы. Как ни странно, это не означает, что топос $\mathcal{R}(X)$ обязательно несвязен: если $Y \subset X$ замкнутая подсхема и $U = X - Y$, то $\mathcal{R}(Y)$ и $\mathcal{R}(U)$ могут оказаться непересекающимися открытыми подтопосами в $\mathcal{R}(X)$, однако их объединение не обязано равняться всему $\mathcal{R}(X)$. Дополнение к $\mathcal{R}(U)$ в $\mathcal{R}(X)$ — это замкнутый подтопос, похожий на реализацию $\mathcal{R}(\hat{X}_Y)$ формального пополнения X вдоль Y . Можно ожидать, что он окажется равен объединению (или индуктивному пределу) реализаций всех замкнутых подсхем с носителем Y (ср. **3.3.2**), или замыканию такого объединения.

5.3.4. (Произвольные подсхемы.) В некоторых случаях может быть выполнено следующее свойство:

(RSU_I) Функтор \mathcal{R} переводит подсхемы в подпространства (подтопосы, ...).

Отметим, что (RZ_I) гарантирует, что открытые подсхемы переходят в открытые подпространства.

5.4. (Свойства, связанные с этальной топологией.) Мы обычно ожидаем, что когомологии с конечными коэффициентами реализации $\mathcal{R}(X)$ совпадают с этальными когомологиями X с теми же коэффициентами. Это примерно соответствует следующим двум свойствам:

(RE_I) Функтор \mathcal{R} переводит этальные морфизмы $X' \rightarrow X$ в этальные морфизмы пространств: $\mathcal{R}(X') \cong \mathcal{R}(X)_{/C} \rightarrow \mathcal{R}(X)$, где C — некоторый пучок множеств (или 0-усеченных гомотопических типов, если мы рассматриваем реализацию в ∞ -топосах).

(RE_{II}) Категория локально постоянных пучков конечных множеств на $\mathcal{R}(X)$ эквивалентна категории этальных накрытий X .

Отметим, что (RE_{II}) гарантирует, что $\mathcal{R}(\mathrm{Spec} k)$ будет похоже на классифицирующий топос $\mathcal{B}_{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$.

5.5. (Свойства, связанные с плоской топологией.)

(RF_I) Функтор \mathcal{R} переводит квазикомпактные плоские морфизмы (или, может быть, только конечно представимые плоские морфизмы) в сюръективные отображения пространств.

Напомним, что морфизм топосов является сюръективным, если соответствующий функтор обратного образа консервативен.

Интересно, что из (RF_I) , (RZ_{II}) и (RC_I) следует (RE_I) .

5.6. (Свойства собственных морфизмов.)

(RP_I) Функтор \mathcal{R} переводит собственные морфизмы схем в собственные морфизмы пространств.

В действительности это не такое уж естественное свойство, особенно если учесть, что функтор \mathcal{R} может переводить замкнутые морфизмы в открытые вложения, как это было отмечено в **5.3.3**. Тем не менее, если выполнены (RP_I) и (RSU_I) , то замкнутые подсхемы должны соответствовать замкнутым подпространствам.

5.7. (Свойства гладких собственных морфизмов.)

(RSP_I) Функтор \mathcal{R} переводит гладкие собственные морфизмы в «расслоения».

Мы не конкретизируем понятие расслоения пространств; следует представлять себе что-то вроде расслоений Серра. Это свойство, в частности, можно применять к гладким собственным кривым над конечным полем (см. **3.2.8**).

5.8. (Свойства, связанные с этальными когомологиями.)

(RH_I) Этальные когомологии X со значениями в конечной абелевой группе A изоморфны когомологиям $\mathcal{R}(X)$ со значениями в той же группе A .

(RH_{II}) Выполнено (RE_{II}) , и этальные когомологии X с конечными коэффициентами изоморфны когомологиям $\mathcal{R}(X)$ со значениями в соответствующем локально постоянном пучке конечных множеств.

(RH_{III}) Конструктивные пучки конечных абелевых групп относительно этальной топологии на X соответствуют (некоторым) конструктивным пучкам на $\mathcal{R}(X)$, и производный прямой образ относительно конечно представимого морфизма $f : X \rightarrow Y$ «совпадает» на конструктивных пучках с производным прямым образом относительно $\mathcal{R}(f) : \mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(Y)$.

Свойство (RH_{III}) представляет собой относительный вариант (RH_{II}) ; свойство (RH_{II}) является усилением (RH_I) .

По существу, все эти свойства выражают тот факт, что когомологии $\mathcal{R}(X)$ с конечными коэффициентами должны совпадать с соответствующими этальными когомологиями X .

Отметим, что (RH_{III}) вместе с (RP_I) позволяет свести теорему о собственной замене базы для этальных когомологий к соответствующей «топологической» теореме о собственной замене базы. Это объясняет, почему мы все-таки можем захотеть требовать (RP_I) .

5.8.1. (Связность реализации.) Отметим, что свойство (RH_I) , примененное к H^0 , означает, что у X и $\mathcal{R}(X)$ одинаковое количество компонент связности, или, во всяком случае, что реализация связной схемы связна.

5.8.2. (Когомологическая размерность.) Кроме того, свойство (RH_{III}) почти означает, что у X и $\mathcal{R}(X)$ одинаковая (эталная) когомологическая размерность.

5.9. (Свойства, связанные с точками.) Есть основания полагать, что перечисленные ниже свойства едва ли могут быть выполнены полностью; тем не менее, они являются неплохим приближением к тому, что хотелось бы получить.

(RP_0) Топос $\mathcal{R}(X)$ обладает достаточным количеством точек.

(RP_I) Для любого поля k топос $\mathcal{R}(\mathrm{Spec} k)$ обладает ровно одной точкой (вернее, одним классом эквивалентности точек).

(RP_{II}) Классы эквивалентности точек $\mathcal{R}(X)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками схемы X ; точке $x \in X$ соответствует класс точек, происходящий из единственной точки $\mathcal{R}(\mathrm{Spec} \kappa(x))$ посредством морфизма $\mathcal{R}(i_x)$, $i_x : \mathrm{Spec} \kappa(x) \rightarrow X$. Между двумя точками $\mathcal{R}(X)$ существует морфизм если и только если соответствующие точки схемы X связаны отношением специализации.

Отметим, что (RP_0) , (RP_I) и (RE_{II}) вместе означают, что реализация $\mathcal{R}(\mathrm{Spec} k)$ должна быть очень похожа на классифицирующий топос $\mathcal{B}_{\mathrm{Gal}(\bar{k}/k)}$. В свою очередь это означает, что мы вряд ли сумеем обеспечить выполнение этих свойств, рассматривая реализации в топологических пространствах: необходимо разрешить использовать как минимум топосы.

5.9.1. (Сжатие в точку.) Рассмотрение категории инд-локально постоянных пучков на связном топосе \mathcal{X} позволяет «сжать его в точку» с сохранением «гомотопического типа» (см. **2.4.2**, где рассматривалась подобная конструкция в частном случае). Поэтому мы можем попытаться обеспечить выполнение свойств (RP_0) , (RP_I) и даже (RP_{II}) , взяв реализацию \mathcal{R} , изначально не обладающую этими свойствами, а затем функториально «сжать» все $\mathcal{R}(\mathrm{Spec} k)$ в точки. Это примерно соответствует замене топоса $\mathcal{R}(X)$ на топос инд-конструктивных пучков на нем.

5.9.2. (Связь с когомологиями Вейля.) Заметим, что свойства (RC_I) , (RZ_{II}) , (RP_I) , (RSP_I) и (RH_{III}) позволяют построить что-то вроде когомологий Вейля с коэффициентами в любой абелевой группе A для

гладких проективных многообразий над любым полем k . А именно, зафиксируем точку $p : * \rightarrow \mathcal{R}(\mathrm{Spec} k)$ в реализации спектра поля k , и сопоставим любому гладкому проективному многообразию $X \xrightarrow{\pi} \mathrm{Spec} k$ когомологии слоя реализации $\mathcal{R}(X) \rightarrow \mathcal{R}(\mathrm{Spec} k)$ над выбранной точкой p с коэффициентами в A .

На первый взгляд кажется, что это противоречит примеру Серра с суперсингулярной эллиптической кривой над конечным полем, который показывает, что когомологии Вейля с коэффициентами в \mathbb{Q} или \mathbb{R} не могут существовать над полями положительной характеристики, а значит, перечисленные выше свойства \mathcal{R} несовместны.

На самом деле это не совсем так, поскольку (RH_{III}) не гарантирует нам, что приведенная выше конструкция даст нам когомологии Вейля при $A = \mathbb{R}$ или $A = \mathbb{Q}$: что-то можно наверняка утверждать разве что про этальные или ℓ -адические когомологии.

Тем не менее, приведенная выше конструкция «когомологий Вейля с коэффициентами в \mathbb{Q} », если она окажется возможной, даст нам какие-то новые когомологии алгебраических многообразий с рациональными коэффициентами. Интересно, как они соотносятся с мотивными когомологиями?

5.10. (Существование функторов реализации с перечисленными свойствами.) Конечно же, существование функторов реализации со всеми или с некоторыми из перечисленных свойств ниоткуда автоматически не следует. Их построение является сложной задачей.

Можно лишь предполагать, что рассмотрение этальной топологии на категории гладких схем над заданной базой, возможно, с последующей \mathbb{A}^1 -локализацией пучков гомотопических типов по Морелю–Воеводскому (либо со «сжатием точек» согласно **5.9.1**) может привести к построению таких функторов.

Список литературы

- [AM69] M. ARTIN, B. MAZUR, *Étale Homotopy*, Springer (1969).
- [AT08] E. ARTIN, J. TATE, *Class field theory*, 2nd edition, AMS Chelsea Publishing (2008).
- [AV64] M. ARTIN, J.-L. VERDIER, *Seminar on étale cohomology of number fields*, Woods Hole (1964).

- [De59] С. П. ДЁМУШКИН, *Группа Галуа максимального p -расширения локального поля*, ДАН СССР, **128** (1959), 657–660.
- [Du07] N. DUROV, *New Approach to Arakelov Geometry*, Ph.D. thesis at Bonn University, available at <http://arXiv.org/abs/0704.2030> (2007).
- [Go58] Р. ГОДЕМАН, *Алгебраическая топология и теория пучков*, М., «ИЛ», 1961.
- [KS] М. KAPRANOV, A. SMIRNOV, ??? (1994?).
- [La65] J. LABUTE, *Classification des groupes de Demuškin*, C. R. Acad. Sci., **280** (1965), 1043–1047.
- [Lu06] J. LURIE, *Higher topos theory*, Annals of Mathematics Studies (2009).
- [Ma64] B. MAZUR, *Remarks on the Alexander polynomial*, unpublished notes, available at http://abel.math.harvard.edu/~mazur/papers/alexander_polynomial.pdf (1964).
- [Ma73] B. MAZUR, *Notes on étale cohomology of number fields*, Ann. sci. ENS, 4e serie, **6** (1973), 521–556.
- [Moch96] S. MOCHIZUKI, *The profinite Grothendieck conjecture for hyperbolic curves over number fields*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **3** (1996), 571–627.
- [Mor09] M. MORISHITA, *Analogies between Knots and Primes, 3-Manifolds and Number Rings*, available at <http://arXiv.org/abs/0904.3399v1> (2009).
- [Mor12] M. MORISHITA, *Knots and Primes, an introduction to Arithmetic Topology*, Springer (2012).
- [Se64] Ж.-П. СЕРР, *Когомологии Галуа*, М., «Мир», 1968.
- [SGA1] A. GROTHENDIECK ET AL., *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA 1), Lecture Notes in Mathematics, Vol. **224** (1971).
- [SGA6] P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK, L. ILLUSIE ET AL., *Théorie des intersections et théorème de Riemann–Roch* (SGA 6), Lecture Notes in Mathematics, Vol. **225** (1971).