ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 10/2012

Добавление к препринту ПОМИ 19/2011 “Функция Беллмана для экстремальных задач в пространстве BMO”

В. И. Васюнин * П. Б. Затицкий † § П. Иванишвили†
Н. Н. Осипов† ‡ § Д. М. Столяров† ‡

21 мая 2012 г.

Исследовательская лаборатория им. П. Л. Чебышева, СПбГУ,
Санкт-Петербург, 14 линия В.О., дом 29Б

Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, наб. Фонтанки 27

Санкт-Петербургский Государственный Университет,
Университетский пр. 28, Петродворец, Санкт-Петербург

vasyunin@pdmi.ras.ru
paxa239@yandex.ru
ivanishvili.paata@gmail.com
nicknick@pdmi.ras.ru
dms239@mail.ru

Аннотация

В данной работе приводится короткий конструктивный алгоритм построения функции Беллмана для экстремальных задач в пространстве BMO взамен описанного в работе [1].

*Работа автора поддержана грантом РФФИ 11-01-00584.
†Работа автора выполнена при поддержке лаборатории им. П. Л.Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.
‡Работа автора поддержана грантом РФФИ 11-01-00526.
§Работа автора поддержана стипендией им. В. А. Рохлина

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

Содержание

1 Введение

В этой работе мы предъявим короткий конструктивный алгоритм построения функции Беллмана для экстремальных задач в пространстве BMO взамен гораздо более громоздкого, который был описан в работе [1]. Поскольку данная заметка является просто добавлением к указанной статье, мы не будем ни описывать задачу, ни приводить необходимые обозначения и определения, введённые в препринте [1], а будем предполагать знакомство читателя с содержанием указанной работы. Более того, все ссылки, содержащие разделительную точку, будут ссылками на утверждения или формулы из препринта [1] (без явного на это указания), а ссылки на настоящую заметку будут содержать только одну позицию.

2 Силовые функции

В работе [1] было объяснено (см. обсуждение после предложения 6.13), что для нахождения функции Беллмана достаточно построить критично согласованное семейство луночек. В построении такого семейства ключевую роль играли выражения (5.15) и (5.16). Эти выражения определяли возможность склеивания двух областей, заметаемых касательными противоположного направления с помощью угловой области линейности. Возможность такого склейвания называлось согласованностью двух луночек (см. определение 6.6). В настоящем алгоритме мы будем использовать эти же выражения, продолжив их естественным образом на всю вещественную ось.

Напомним, что мы будем иметь дело с функциями f из класса $\mathfrak{W}_{\varepsilon_0}$ (см. параграф 1.2). Это означает, что у f существует почти всюду отличная от нуля обобщённая третья производная f''', которая меняет знак в конечном множестве точек, расстояние между которыми не меньше 2ε, и, кроме того, $f''' \in L^1(e^{-|t|/\varepsilon_0})$. В препринте [1] все точки смены знака обозначались u_j, но нам будет несколько удобней это видоизменить и точки смены знака с $-$ на $+$ и с $+$ на $-$ обозначать разными буквами. В дальнейшем выяснялось, что точки смены знака с $+$ на $-$ оказались центрами (корнями) луночек и были переобозначены c_k. Мы сохраним для них это последнее обозначение, а точки, где знак третьей производной меняется с $-$ на $+$, обозначим v_k в честь того, что при малых ε уголки образуются с вершинами в окрестности этих точек. При этом удобно считать, что начинается вещественная ось знаком $+$, а заканчивается знаком $-$, то есть последовательность смены знаков такова:

$$c_0 < v_1 < c_1 < v_2 < \ldots < v_N < c_N \,.$$

Такая нумерация включает в себя следующее соглашение: если $f''' < 0$ в окрестности $-\infty$, то, $c_0 = -\infty$, и если $f''' > 0$ в окрестности $+\infty$, то $c_N = +\infty$.

Пусть c — одна из таких точек смены знака третьей производной. Согласно лемме 5.5, существуют непрерывно дифференцируемые функции $a(\ell)$ и $b(\ell) = a(\ell) + \ell$, заданные на интервале $[0, 2\varepsilon]$, которые порождают лунку с корнем в точке c, то есть $a(0) = b(0) = c$. В силу разделенности корней, такие лунки не будут пересекаться: $b_k(2\varepsilon) \le a_{k+1}(2\varepsilon)$. Напомним определение дифференциала лунки (формула (5.7)):

$$D_{\mathrm{L}}(a,b) = f''(a) - \langle f'' \rangle_{[a,b]}, \qquad D_{\mathrm{R}}(a,b) = f''(b) - \langle f'' \rangle_{[a,b]}.$$

Вместе с парой функций a и b нам понадобится пара взаимно обратных функций $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, которые принимают те же значения, но являются функциями другого аргумента, а именно, это функции от первой координаты противоположного конца хорды, то есть каждая из пар $\{\tilde{a}(u), u\}$, $\{u, \tilde{b}(u)\}$ — это пара точек $\{a, b\}$, удовлетворяющая уравнению лунки (5.4).

Зафиксировав размер лунки ℓ, зададим на отрезке $[a(\ell), b(\ell)]$ (который будем называть *экраном*) следующую функцию D:

$$D(u) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} -D_{\mathrm{L}}(u, \tilde{b}(u)), & \text{если } a(\ell) \le u < c, \\ D_{\mathrm{R}}(\tilde{a}(u), u), & \text{если } c < u \le b(\ell). \end{cases}$$

Естественно, мы предполагаем, что функция D по непрерывности продолжена нулём и в точку c. Отметим, что величина ℓ задаёт только область определения функции, а её значение в любой фиксированной точке от ℓ не зависит.

Теперь зададим функцию уже на всей вещественной оси, которую мы будем называть *силовой функцией* или просто *силой*.

Определение 1.

$$F(u,\ell) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} e^{u/\varepsilon}\Big[D(a(\ell))e^{-a(\ell)/\varepsilon} + \displaystyle\int_u^{a(\ell)} f'''(t)e^{-t/\varepsilon}dt\Big], & u \in (-\infty, a(\ell)), \\ D(u), & u \in [a(\ell), b(\ell)]\,, \\ e^{-u/\varepsilon}\Big[D(b(\ell))e^{b(\ell)/\varepsilon} + \displaystyle\int_{b(\ell)}^{u} f'''(t)e^{t/\varepsilon}dt\Big], & u \in (b(\ell), \infty)\,. \end{cases}$$

Отрезок $[a(\ell), b(\ell)]$ мы будем называть *экраном* силы F, а его правую и левую части $[a, c]$ и $[c, b]$ соответственно — *правым экраном* и *левым экраном.*

Отметим несколько специальных случаев. Ясно, что неэкранированная сила $F(u, 0)$ (нулевой экран: $\ell = 0$) имеет следующий простой вид:

$$F(u,0) = \begin{cases} e^{u/\varepsilon} \displaystyle\int_u^c f'''(t) e^{-t/\varepsilon} dt, & u \in (-\infty, c]\,, \\ e^{-u/\varepsilon} \displaystyle\int_c^u f'''(t) e^{t/\varepsilon} dt, & u \in [c, +\infty)\,. \end{cases}$$

Если $c = +\infty$, то

$$F(u,\ell) = e^{u/\varepsilon} \int_u^{+\infty} f'''(t) e^{-t/\varepsilon} dt, \qquad u \in (-\infty, +\infty)\,,$$

и если $c = -\infty$, то

$$F(u,\ell) = e^{-u/\varepsilon} \int_{-\infty}^{u} f'''(t) e^{t/\varepsilon} dt, \qquad u \in (-\infty, +\infty)\,.$$

Последние две силы не зависят от ℓ (конечный экран на бесконечности не может задевать “конечные точки”), поэтому их всегда можно считать неэкранированными, то есть $\ell = 0$.

Отметим, как связаны между собой определение силы и выражение для второй производной коэффициента m в функции Беллмана. Формула (5.15) для $m''_{\mathrm{L}}(u, a(\ell))$ с точностью до скалярного множителя ε совпадает с выражением для силы левее экрана, а формула (5.16) для $m''_{\mathrm{R}}(u, b(\ell))$ — с выражением для силы правее экрана. Данные формулы были приведены для экрана размера 2ε, но в дальнейшем было отмечено, что они сохраняют свой вид для произвольного ℓ. Единственным отличием между введенными нами силовыми функциями и выражениями $\varepsilon m''_{\mathrm{R}}$ и $\varepsilon m''_{\mathrm{L}}$ заключается в том, что мы склеиваем эти два выражения в одно, непрерывно продолжая на экран $[a(\ell), b(\ell)]$.

Нам, как и в работе [1] (определение 6.5), пригодятся понятия хвостов, однако мы их немного модифицируем.

Определение 2. *Правым хвостом* силовой функции F называется отрезок $[\,c, t^+]$, где

$$t^+ = t^+(\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{t\colon F(s,\ell) \le 0,\ \forall s,\ c \le s \le t\}\,.$$

Соответственно *левым хвостом* называется отрезок $[t^-, c\,]$, где

$$t^- = t^-(\ell) \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t\colon F(s,\ell) \ge 0,\ \forall s,\ t \le s \le c\}\,.$$

Точки $t^-(\ell)$ и $t^+(\ell)$ соответственно называются концами левого и правого хвоста силовой функции.

Отличие от определения 6.5 состоит в том, что теперь хвосты силы начинаются не от концов экрана, а прямо от корня лунки. Однако концы хвостов при такой модификации остаются теми же.

Тот факт, что экраны содержатся в хвостах записано в пункте 3 леммы 5.5. Нам также потребуется вывод леммы 6.18, о том, что правый хвост может заканчиваться только в области, где знак f''' положительный, в частности $[c_k, v_{k+1}] \subset [c_k, t_k^+)$, а левый хвост — в области, где f''' имеет отрицательный знак, в частности $[v_k, c_k] \subset (t_k^-, c_k]$.

Наконец, попробуем объяснить мнемонический смысл введённой терминологии. Сила как бы старается оттолкнуть уголки от лунок. И в результате между двумя лунками можно будет вставить уголок в точке баланса сил, то есть в том месте, где сила одной лунки уравновешивается силой соседней лунки, в точке, где сумма сил равна нулю. Тут только один контринтуитивный момент: сила, толкающая уголок направо, отрицательна, а налево — положительна. Отрезок $[a(\ell), b(\ell)]$ назван экраном, поскольку как бы частично экранирует действие силы: чем больше экран, тем меньше по абсолютной величине, как мы увидим, сила в хвостах за пределами экрана. При этом в точках самого экрана сила уже не зависит от того насколько далеко этот экран распространяется.

3 Свойства силовых функций

Следующая лемма является аналогом леммы 6.21.

Лемма 3. *Сила, как функция от длины экрана, строго возрастает справа от него и строго убывает слева. Внутри экрана сила не меняется при изменении его размеров.*

Доказательство. По существу это утверждение доказано при доказательстве леммы 6.21. К нему нужно добавить только два замечания. В лемме 6.21 ничего не говорилось о поведении силы внутри экрана, но её постоянство там следует непосредственно из определения. Строгое же возрастание силы правее экрана (убывание — левее) вытекает из того, что последнее неравенство в доказательстве леммы 6.21 на самом деле является строгим, если экран не достиг своего максимального размера, то есть если $b - a < 2\varepsilon$. $\square$

Несколько простых следствий:

Следствие 4. *При сужении экрана хвосты силовой функции удлиняются.*

Следствие 5. *Если $\ell > 0$, то $F(u,\ell) > F(u,0)$ при $u > c$, и $F(u,\ell) < F(u,0)$ при $u < c$.*

Последнее следствие мы будем использовать вместе со следующим простым соотношением.

Лемма 6. *Пусть F_1 и F_2 — две силы, исходящие из точек c_1 и c_2, $c_1 < c_2$. Тогда правее корня c_2 справедливо тождество*

$$F_1(u,\ell_1) = e^{(c_2-u)/\varepsilon} F_1(c_2,\ell_1) + F_2(u,0)\,, \qquad u \geq c_2\,,$$

а левее c_1 —

$$F_2(u,\ell_2) = e^{(u-c_1)/\varepsilon} F_2(c_1,\ell_2) + F_1(u,0)\,, \qquad u \leq c_1\,.$$

Доказательство. Утверждение леммы становится тривиальным, если переписать его, пользуясь формулами из определения силы:

$$\begin{aligned} &e^{-u/\varepsilon}\Big[D_1(b_1)e^{b_1/\varepsilon} + \int_{b_1}^{u} f'''(t)e^{t/\varepsilon}dt\Big] \\ &\qquad = e^{(c_2-u)/\varepsilon}e^{-c_2/\varepsilon}\Big[D_1(b_1)e^{b_1/\varepsilon} + \int_{b_1}^{c_2} f'''(t)e^{t/\varepsilon}dt\Big] + e^{-u/\varepsilon}\int_{c_2}^{u} f'''(t)e^{t/\varepsilon}dt\,, \\ &\qquad\qquad u \in [c_2,\infty)\,. \end{aligned}$$

Аналогично записывается и второе тождество. □

Отдельно сформулируем простое следствие данной леммы

Следствие 7. *Пусть F_1 и F_2 — две силы, исходящие из точек c_1 и c_2, $c_1 < c_2$. Если корень одной из сил попал в хвост второй силы, то в пересечении их одноимённых хвостов справедливо неравенство $F_1 \leq F_2$.*

Доказательство. Если правые хвосты пересекаются, то $c_2 \leq t_1^+$. Тогда, используя лемму 6 и следствие 5, в точках $u \in [c_2,+\infty)$ мы можем записать неравенство

$$F_1(u,\ell_1) = e^{(c_2-u)/\varepsilon}F_1(c_2,\ell_1) + F_2(u,0) \leq F_2(u,0) \leq F_2(u,\ell_2)\,.$$

Аналогично, если пересекаются левые хвосты, то $c_1 \geq t_2^-$, и в точках $u \in (-\infty, c_1]$ имеет место неравенство

$$F_2(u,\ell_2) = e^{(u-c_1)/\varepsilon}F_2(c_1,\ell_2) + F_1(u,0) \geq F_1(u,0) \geq F_1(u,\ell_1)\,.$$

□

Пока мы изучали поведение силы в зависимости от размера экрана, теперь посмотрим на зависимость от первой переменной. Наша цель — обобщение пункта 2 из леммы 6.24.

Лемма 8.

$$\frac{\partial}{\partial u}F(u,\ell)=\begin{cases}-f'''(u)+\varepsilon^{-1}F(u,\ell) & u\in(-\infty,a(\ell))\,,\\ -f'''(u)+\dfrac{2}{\tilde b(u)-u}F(u,\ell) & u\in(a(\ell),c)\,,\\ \quad f'''(u)-\dfrac{2}{u-\tilde a(u)}F(u,\ell) & u\in(c,b(\ell))\,,\\ \quad f'''(u)-\varepsilon^{-1}F(u,\ell) & u\in(b(\ell),+\infty)\,.\end{cases}$$

Доказательство. Формулы для производных вне экрана очевидны, поэтому будем вычислять производную $D'(u)$. Сперва предположим, что $u\in(a(\ell),c)$. Так как в этом случае

$$D(u)=-D_{\mathrm{L}}(u,\tilde b(u))=-f''(u)+\frac{f'(\tilde b)-f'(u)}{\tilde b-u}\,,$$

то

$$\begin{aligned}D'(u)&=-f'''(u)+\frac{f''(\tilde b)\tilde b'-f''(u)}{\tilde b-u}-\frac{f'(\tilde b)-f'(u)}{(\tilde b-u)^2}(\tilde b'-1)\\ &=-f'''(u)+\frac{1}{\tilde b-u}\left[\tilde b' D_{\mathrm{R}}(u,\tilde b)-D_{\mathrm{L}}(u,\tilde b)\right].\end{aligned}$$

Теперь воспользуемся формулой (5.6) в виде полного дифференциала, который не зависит от параметризации:

$$D_{\mathrm{R}}(a,b)\,db+D_{\mathrm{L}}(a,b)\,da=0.$$

У нас $a=u$, $b=\tilde b(u)$, и формула принимает вид

$$D_{\mathrm{R}}(u,\tilde b)\tilde b'+D_{\mathrm{L}}(u,\tilde b)=0\,,$$

поэтому

$$D'(u)=-f'''(u)+\frac{2D(u)}{\tilde b-u}\,.$$

Совершенно аналогично, используя формулу для дифференциала в виде

$$D_{\mathrm{R}}(\tilde a,u)+D_{\mathrm{L}}(\tilde a,u)\tilde a'=0$$

с $a = \tilde{a}$ и $b = u$, получим для $u \in (c, b(\ell))$:

$$D'(u) = f'''(u) - \frac{2D(u)}{u - \tilde{a}}\,.$$

□

Следствие 9. *Пусть* F_1 *и* F_2 *— две силы, исходящие из точек* c_1 *и* c_2, $c_1 < c_2$, *тогда*

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial u}(F_1(u,\ell_1) + F_2(u,\ell_2)) = \begin{cases} F_2(u,\ell_2) - \dfrac{2\varepsilon}{u - \tilde{a}_1(u)}\,F_1(u,\ell_1) & u \in (c_1, b_1)\,, \\ \quad F_2(u,\ell_2) - F_1(u,\ell_1) & u \in (b_1, a_2)\,, \\ \dfrac{2\varepsilon}{\tilde{b}_2(u) - u}\,F_2(u,\ell_2) - F_1(u,\ell_1) & u \in (a_2, c_2)\,. \end{cases}$$

Следствие 10. *Пусть* F_1 *и* F_2 *— две силы, исходящие из точек* c_1 *и* c_2, $c_1 < c_2$. *Тогда сумма этих сил строго возрастает на пересечении правого хвоста силы* F_1 *и левого хвоста силы* F_2.

Доказательство. Действительно, согласно предыдущей формуле в точках $u \in (c_1, t_1^+) \bigcap (t_2^-, c_2)$ сумма $F_1 + F_2$ обладает неотрицательной производной (поскольку $F_1 \le 0$ и $F_2 \ge 0$), которая ни на каком интервале не равна нулю тождественно (ввиду предположения о том, что f''' не вырождается ни на каком интервале), поэтому сумма $F_1 + F_2$ не имеет интервалов постоянства, то есть строго возрастает на множестве $(c_1, t_1^+) \bigcap (t_2^-, c_2)$. □

Следствие 11. *Пусть* F_1 *и* F_2 *— две силы, исходящие из точек* c_1 *и* c_2, *и при этом* $c_1 < t_2^- \le t_1^+ < c_2$. *Тогда сумма этих сил имеет корень (причём единственный) на пересечения хвостов* $[t_2^-, t_1^+]$.

Доказательство. Согласно предыдущему следствию сумма $F_1 + F_2$ строго возрастает на пересечении хвостов $[t_2^-, t_1^+]$. Поэтому корень у непрерывной функции $F_1 + F_2$, имеющей противоположные знаки на концах промежутка (так как $F_i(t_i^\pm) = 0$), на этом промежутке существует и единственный. □

Завершим исследование свойств силовых функций следующей важной леммой.

Лемма 12. *Если источник силовой функции лежит в хвосте другой силовой функции, то оба хвоста первой силы содержатся в хвосте второй.*

Доказательство. Во-первых, отметим, что хвосты двух сил не могут содержать источники друг друга. Действительно, если бы это имело место, то, строго возрастающая (согласно следствию 10) на промежутке $[c_1, c_2]$ сумма $F_1 + F_2$ имела бы неотрицательное значение на левом конце ($F_1(c_1) = 0$, $F_2(c_1) \geq 0$) и неположительное — на правом ($F_1(c_2) \leq 0$, $F_2(c_2) = 0$), что невозможно.

Предположим для определённости, что точка c_2 лежит в правом хвосте силы F_1, и покажем, что оба хвоста второй силы умещаются в правом хвосте первой, то есть $[t_2^-, t_2^+] \subset [c_1, t_1^+]$. Мы только что доказали, что $c_1 < t_2^-$, а второе неравенство $t_1^+ > t_2^+$ содержится в следствии 7. □

4 Сбалансированность силовых функций

Определение 13. Две силы будем называть *сбалансированными*, если их хвосты пересекаются и в некоторой точке этого пересечения, лежащей строго между источниками, сумма сил равна нулю. Эту точку будем называть точкой *баланса.* Семейство сил будем называть *сбалансированным*, если сбалансирована каждая соседняя пара сил, либо семейство состоит из единственного элемента.

Используя это определение, следствие 11 можно сформулировать следующим образом.

Лемма 14. *Если два хвоста пары сил имеют непустое пересечение, в которое не попадают источники сил, то эти силы сбалансированы.*

Нам потребуется и утверждение, которое является в некотором смысле обратным к предыдущему.

Лемма 15. *Если силы F_1 и F_2 сбалансированы, то источник одной силы не может лежать в хвосте другой.*

Доказательство. Пусть $c_1 < c_2$. Если предположить, что корень c_1 попал в хвост силы F_2, то $F_1(c_1) + F_2(c_1) = F_2(c_1) \geq 0$, а если корень c_2 попал в хвост силы F_1, то $F_1(c_2) + F_2(c_2) = F_1(c_2) \leq 0$. То есть в любом случае строго возрастающая на пересечении хвостов сумма $F_1 + F_2$ не могла бы иметь корня на интервале (c_1, c_2), то есть, силы F_1 и F_2 не могли бы быть сбалансироваными. □

Отметим сходство и разницу между понятиями сбалансированности сил и согласованности лунок. Ясно, что каждая силовая функция F_j порождает лунку размера ℓ_j с корнем c_j. Если силы F_i и F_j сбалансированы, а точка баланса оказалась вне внутренности экранов, тогда сбалансированность сил равносильна согласованности соответстующих лунок (см. определение 6.6). Если точка баланса попала внутрь экрана одной из силовых функции, тогда сходства уже нет, однако как не трудно видеть, можно сужать соответствующий экран (то есть уменьшать лунку), до тех пор, пока точка баланса (а она остаётся на том же месте, поскольку сила внутри экрана не зависит от его размера) не окажется на краю экрана. Эта процедура и будет основой нашего алгоритма.

Целью алгоритма будет построение критично согласованного семейства лунок. Сформулируем аналог критичной согласованности лунок (определения 6.12) на языке силовых функций.

Определение 16. Сбалансированое семейство силовых функций называется *вполне сбалансированными*, если, во-первых, точки баланса не попадают внутрь экранов, и, во-вторых, хотя бы один конец любого экрана, размер которого меньше 2ε, является точкой баланса.

Зафиксируем упомянутую аналогию в виде формального утверждения, справедливость которого очевидна по определению.

Лемма 17. *Семейство лунок критично согласовано тогда и только тогда, когда соответствующее семейство сил вполне сбалансировано и объединение их хвостов покрывает всю вещественную прямую.*

5 Алгоритм.

Очистка. Пусть нам задан некий набор точек $\{c_k\}_{k=0}^N$ и исходящих из них сил $\{F_k\}$. Удалим из этого множества те точки c_k, которые попадают в хвост какой-либо силовой функции F_j, $j \neq k$. Такую операцию будем называть *очисткой.* Чтобы не использовать сложную индексацию, получившееся после очистки множество точек $\{c_{k_j}\}_{j=0}^m$ мы по-прежнему будем обозначать $\{c_k\}_{k=0}^N$, хотя теперь число N могло уменьшиться, и тогда символ c_k уже может обозначать другую точку.

Так как в процессе очистки удалялись силы, хвосты которых целиком содержались в хвостах других сил, то после очистки объединение хвостов не уменьшается.

Сжатие. Пусть $\{F_k\}$ — сбалансированный набор сил. Предположим, что точка баланса u_{j+1} некоторой пары сил F_j и F_{j+1} попала внутрь экрана силы F_j. Образуем новый набор сил по следующему правилу. Сперва уменьшим экран силы F_j так, чтобы точка u_{j+1} стала правым концом экрана. Поскольку внутри нового уменьшенного экрана сила F_j не изменилась, точка u_{j+1} остаётся точкой баланса новой силы F_j и старой F_{j+1}. Так как после сжатия экрана силы F_j её хвосты увеличились, они могли покрыть какие-то соседние точки c_k. Проведём очистку и всю эту процедуру назовём *правым сжатием*. Если точка баланса u_{j+1} попала внутрь экрана силы F_{j+1}, то аналогичную процедуру (уменьшение величины ℓ_{j+1} и последующая очистка) мы назовём *левым сжатием*. Отметим, что при левом сжатии изменения в структуре семейства сил происходят только справа от точки u_{j+1}, а при правом — слева.

Действительно, рассмотрим правое сжатие. Поскольку силы F_j и F_{j+1} остались сбалансированными, новый хвост силы не может доходить до точки c_{j+1} (см. лемму 15), и справа от точки u_{j+1} все силы сохранились. Посмотрим, что могло произойти слева. Если $j = 0$, то слева тоже ничего не произошло: либо $c_0 = -\infty$, и слева вообще ничего нет, либо это конечная точка, и как доходил левый хвост силы F_0 до $-\infty$, так и доходит после сжатия. Если $j > 0$, то в результате очистки нумерация оставшихся сил могла поменяться. Пусть бывшая точка c_j получила после очистки номер i, $i \le j$. Поскольку после сжатия новая сила F_i не меньше старой силы F_i (по лемме 3, если мы не удаляли никаких сил, или по следствию 7, если удаляли), точка баланса между силами F_i и F_{i-1} могла сдвинуться только влево. Таким образом, единственная новая точка баланса внутри экрана, которая может появиться в результате очистки — это точка в правом экране силы F_{i-1}. Итак, при правом сжатии внутри левых экранов новые точки баланса вообще появиться не могут, а внутри правых это возможно лишь слева от сжимаемого экрана.

При левом сжатии картина, разумеется, симметрична — все изменения могут происходить лишь справа от сжимаемого экрана, и внутрь экрана может попасть лишь одна новая точка баланса — внутрь левого экрана первой справа оставшейся после очистки силы.

Весь алгоритм будет состоять из последовательного применения процедуры левого сжатия, начиная с силы F_1 и последующего применения правого сжатия, двигаясь с правого конца в обратном направлении. Разумеется, можно поменять порядок действий и сперва применять правые сжатия, а потом — левые. Заметим, что начинаем не с самой крайней силы, так как слева от c_0 и справа от c_N вообще нет точек баланса, поскольку либо сами эти корни лежат на бесконечности, либо левый хвост силы F_0 заполняет весь луч $(-\infty, c_0]$, соответственно правый хвост силы F_N — луч $[c_N, +\infty)$.

Начинать алгоритм мы будем с очистки семейства сил $\{F_k(u, 2\varepsilon)\}_{k=0}^N$.

Так как отрезок $[c_{j-1}, v_j]$ лежит в хвосте силы F_{j-1}, а отрезок $[v_j, c_j]$ — в хвосте силы F_j, то соседние силы имеют непустое пересечение хвостов. Это свойство сохранится и после очистки, поэтому, согласно лемме 14, мы получили сбалансированное семейство.

Итак, чтобы убедиться, что в результате действия алгоритма мы получаем вполне сбалансированную систему, надо только проверить, что не останется точек баланса внутри какого-нибудь экрана. Действительно, требование, чтобы один конец экрана длины меньшей 2ε был бы точкой баланса, выполнено автоматически — если экран подвергался сжатию, то на его конце появлялась точка баланса. При движении слева направо мы вывели на границы своих экранов все точки баланса, которые лежали в левых частях экранов. Таким образом, после применения процедур левого сжатия у нас не осталось ни одной точки баланса внутри левых экранов, и при этом не появилось новых точек баланса внутри правых экранов. Аналогично, при проходе справа налево, то есть после применения последовательности правых сжатий, мы вывели на границы экранов все точки, лежавшие в их правых частях, и при этом не появилось новых точек баланса внутри левых экранов. То есть, в результате внутри экранов больше точек нет, что и требовалось.

Наконец, последнее замечание, которое надо сделать, это отметить, что хвосты лунок исходного семейства покрывали всю ось, а поскольку как очистка, так и сжатие не уменьшают объединения хвостов семейства, то это свойство сохраняется и в том наборе сил, который мы получили в результате действия алгоритма.

6 Заключение

Мы сознательно ограничили себя в этой заметке теми же самыми условиями на граничную функцию f, которые были в статье [1], и сосредоточились на описании алгоритма, который на самом деле применим и в гораздо более общей ситуации: с меньшими требованиями гладкости функции f, без условия разделённости нулей, нет необходимости требовать отсутствия интервалов вырождения третьей производной и т. д. Однако все эти ослабления условий потребовали бы от нас дополнительного исследования, введения некоторых новых объектов, что превратило бы настоящую заметку в весьма объёмную статью. Поскольку статья с таким исследованием, где изучается динамика функции Беллмана по эпсилон, сейчас находится в процессе написания, мы решили избежать ненужного дублирования и показать работу данного алгоритма в более общей ситуации тогда, когда все необходимые для этого свойства будут уже описаны.

Список литературы

[1] В. И. Васюнин, П. Б. Затицкий, П. Иванишвили, Н. Н. Осипов, Д. М. Столяров, *Функция Беллмана для экстремальных задач в пространстве BMO.* Препринт ПОМИ №. 19, 2011.