# ПРЕПРИНТЫ ПОМИ РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

С.В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ

В.М.Бабич, Н.А.Вавилов, А.М.Вершик, М.А.Всемирнов, А.И.Генералов, И.А.Ибрагимов, Л.Ю.Колотилина, Б.Б.Лурье, Ю.В.Матиясевич, Н.Ю.Нецветаев, С.И.Репин, Г.А.Серегин

Учредитель: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
им. В. А. Стеклова Российской академии наук

Свидетельство о регистрации средства массовой информации: ЭЛ №ФС 77-33560 от 16 октября 2008 г. Выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций

Контактные данные: 191023, г. Санкт-Петербург, наб. реки Фонтанки, дом 27

телефоны:(812)312-40-58; (812) 571-57-54

e-mail: admin@pdmi.ras.ru

http://www. pdmi.ras.ru /preprint/

Заведующая информационно-издательским сектором Симонова В.Н

ПРЕПРИНТ ПОМИ — 8/2012

# ЛЕОНИД ВИТАЛЬЕВИЧ КАНТОРОВИЧ (К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

**А. М. Вершик, С. С. Кутателадзе, С. П. Новиков**

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
vershik@pdmi.ras.ru

Математический Институт им. С.Л.Соболева, ул Коптюга 4, 630090, Новосибирск
sskut@math.nsc.ru

МИАН, Губкина 4, Москва
sergeynvkv040@gmail.com

Апрель, 2012

*Key words and phrases.* Леонид Витальевич Канторович; столетие со дня рождения.

ПРЕПРИНТЫ
Санкт-Петербургского отделения
Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

PREPRINTS
of the St. Petersburg Department of Steklov Institute of Mathematics

---

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР
С. В. Кисляков

РЕДКОЛЛЕГИЯ
В. М. Бабич, Н. А. Вавилов, А. М. Вершик, М. А. Всемирнов,
А. И. Генералов, И. А. Ибрагимов, А. А. Иванов, Л. Ю. Колотилина,
В. Н. Кублановская, Г. В. Кузьмина, П. П. Кулиш, Б. Б. Лурье,
Ю. В. Матиясевич, Н. Ю. Нецветаев, С. И. Репин, Г. А. Серегин,
В. Н. Судаков, О. М. Фоменко

19 января 2012 г. исполнилось сто лет со дня рождения Леонида Витальевича Канторовича,— выдающегося и всемирно известного математика и экономиста. Вундеркинд, окончивший университет в 18 лет и ставший профессором в 20 лет, академик по математике и лауреат Нобелевской премии по экономике — таковы редкие обстоятельства его жизни, достойные внимания сами по себе. Однако исключительными и впечатляющими являются результаты его деятельности, и о них необходимо знать следующим поколениям ученых и в первую очередь математикам и экономистам.

Л.В.Канторович родился в Санкт-Петербурге в семье врача-венеролога 19 января 1912 г. (6 января по старому стилю). Дарование мальчика проявилось очень рано. Уже в 1926 г. в возрасте 14 лет он поступил в Ленинградский университет. Вскоре он стал заниматься в кружке, организованном для студентов Г. М. Фихтенгольцем, а затем и в семинаре, посвященном дескриптивной теории функций. В ранние студенческие годы он вошел в коллектив наиболее близких ему товарищей: в кружке Фихтенгольца занимались также Д. К. Фаддеев, И. П. Натансон, С. Л. Соболев, С. Г. Михлин и др.; с ними Леонид Витальевич был дружен всю жизнь. Патриарх петербургской-ленинградской математики В.И.Смирнов был для всех в то время и позже символом преемственности старой и новой математических школ города.

Закончив ЛГУ в 1930 г., Л.В. начал педагогическую работу в ленинградских вузах, сочетая ее с интенсивными научными исследованиями. Уже в 1932 г. он стал профессором Ленинградского института инженеров промышленного строительства и доцентом ЛГУ. В 1934 г. Л.В. становится профессором университета.

Основные труды в области математики Л.В. создал именно в свой тогдашний — ленинградский — период. Первые работы Канторовича, принесшие ему известность, относились к дескриптивной теории функций и множеств и были связаны с так называемой классификацией Юнга. В ней в качестве исходного принимается класс непрерывных функций, а последующие классы получаются чередованием предельных переходов возрастающих и убывающих последовательностей функций. Классификация Янга является детализацией классификации Бэра. Канторовичем в 1929 г. установлено, что функции Янга класса $(\alpha + 1)$ представимы как верхние и нижние пределы функций Бэра класса $(\alpha)$. Он также построил универсальные функции для классов Янга. Напомним, что функция двух переменных называется универсальной для данного класса, если при специализациях одной из переменных получаются все функции одной переменной этого класса. Универсальные функции Канторовича принадлежат тем же классам, что и представляемые ими функции. Для классификации Бэра, как показано Канторовичем такого рода универсальных функций не существует. Принципиальные результаты по теории $A$-множеств и проективных множеств

получены Л.В. в работах, выполненных преимущественно в соавторстве с Е. М. Ливенсоном – забытым ныне замечательным математиком, убитым фашистами в г.Павловсе, где он жил с отцом. В этом цикле работ развивается общая теория аналитических операций над множествами, в частности, теория $\delta s$-операций Хаусдорфа-Колмогорова. К $\delta s$-операциям относится, например, $A$-операция применение которой к замкнутым множествам порождает $A$-множества. Устанавливаются теоремы о зависимости дескриптивных свойств результата операции от класса множеств, из которого черпаются $E_1, E_2, \ldots$, а также от дескриптивных свойств множества $N$, рассматриваемого как множество иррациональных чисел. Впервые было дано также аналитическое представление всех проективных классов. Эти работы стали сенсацией в московской (лузинской) математической школе, где тогда они были в центре внимания (А.Н.Колмогоров, П.С.Новиков, П.С.Александров. и др.) Л.В. с блеском вошел в тогдашнюю математическую элиту, что было очень существенно для дальнейшего.

Оценивая вклад Л.В, лидер московской школы дескриптивной теории множеств Н. Н. Лузин писал ему 29 апреля 1934 г.:

> "Вы должны знать, каково мое отношение к Вам. Вас всего, как человека, я не знаю еще, но угадываю мягкий чарующий характер. Но то что я точно знаю — это размер Ваших духовных сил, которые, насколько я привык угадывать людей, представляют в науке неограниченные возможности. Я не стану произносить соответствующего слова — зачем? Талант — это слишком мало. Вы имеете право на большее...".

"Ленинградский" функциональный анализ, у истоков которого стояли В. И. Смирнов, Г. М. Фихтенгольц и, как основной мотор, — Л.В. имел свою специфику: влияние математической физики (С.Л.Соболев), комплексного анализа (В.И,Смирнов), теории функций (Г.М.Фихтенгольц, И.П.Натансон, С. М. Лозинский) было сильнее, чем скажем в Москве или на Украине, где более популярны теория операторов, спектральная теория, мультипликативный функциональный анализ, теория представлений и банахова геометрия. Л.В. еще перед войной создал специфическое "ленинградское" направление — функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. В 1935 г. он определил $K$-пространства, как векторные решетки, в которых каждое непустое порядково ограниченное множество имеет точные грани. Л.В. предсказал, что элементы таких пространств своего рода числа, а операторы со значениями в таких пространствах могут исследоваться как обычные функционалы. Эти положения теперь именуют "эвристическим принципом Канторовича".

Помимо приложений к собственно функциональному анализу пространства Канторовича оказались в частности, связанными с одной из самых ярких страниц математики прошлого века — со знаменитой и хорошо известной проблемой континуума. Фундаментальные работы

К.Геделя, доказавшего в 1939 г. непротиворечивость гипотезы континуума, и П.Коэна, доказавшего в 1963 г. ее независимость, стали крупными событиями в математике XX века. Метод форсинга Коэна был упрощен в 1965 г. с использованием аппарата булевых алгебр и новой технологии математического моделирования, опирающейся на нестандартные модели теории множеств. Прогресс возникшего на этой основе булевозначного анализа продемонстрировал фундаментальное значение расширенных $K$-пространств. Каждое из таких пространств, как оказалось, совершенно неожиданно, служит равноправной моделью вещественной прямой.Таким образом, пространства Канторовича дали новые модели поля вещественных чисел.

"Я просто лист, но счастлив я без меры — ведь началось-то все с меня, с фанеры". Этот текст на фанерке, подаренной Л. В. в связи с присуждением ему Нобелевской премии, напоминал о вроде бы рядовом событии, случившемся весной 1938 г. и послужившем толчком к началу его работы в области экономики. Вот как он писал об этом: "Однажды ко мне за консультацией пришло несколько инженеров из лаборатории Фанерного треста с довольно грамотно поставленной задачей. При обработке на лущильных станках разного вида материалов получается различная производительность; благодаря чему выход продукции этой группы станков зависел от такого, казалось бы, случайного факта, какая группа сырья на какой лущильный станок была направлена. Как это обстоятельство рационально использовать?"

То, что эта задача попала именно в поле зрение Л.В. было, несомненно, удачей, но гораздо в большей степени здесь была закономерность. Дело не только в том, что Л.В. со свойственной ему интуицией, как никто другой распознал зародыш новой теории, приведшую к революции в математической экономике, которую он в значительной мере и создал. Важно, то что с высоты понимания им тогдашнего функционального анализа, он, как и почти одновременно, фон Нейманн в США немедленно понял, что речь идет о приложении к практике основополагающих идей функционального анализа. В частности, принципа двойственности, который ставит анализ задач об использовании ресурсов — важной части экономической науки — на твердую математическую основу. По мнению большинства математиков это самое замечательное достижение Л.В., оно является ярким примером глубокого воздействия математики на другие науки и в частности на экономическую деятельность современного общества.

В 1939 г. вышла в свет ставшая классической небольшая брошюра *Математические методы организации и планирования производства*, ознаменовавшая рождение нового математического и прикладного направления — линейного программирования.

Постепенно теоретическая и практическая работа Л.В. по математической экономике стала главной в его деятельности, но следует сказать сначала о его вкладе в ряде других областей.

В конце 1940 годов Л.В. в серии работ сформулировал и развил тезис о взаимосвязи функционального анализа и прикладной математики, выделив особо несколько технологий: метод мажорант, восходящий к Коши, метод конечномерных приближений, обобщенный метод Ньютона в банаховых пространствах и в широком плане метод Лагранжа для условных задач оптимизации, в частности, возникающих в экономике. За этот цикл работ Л.В.была присуждена Сталинская премия в 1948 г. Следует сказать. что приближенные методы анализа и вычислительная математика всегда была в круге интересов ленинградской школы. В частности Л.В. принадлежит ряд монографий на эту тему - одна из них, особенно популярная в те годы, книга, написанная с В.И.Крыловым. Итогом длительной работы Л.В. в функциональном анализе и разработке им университетского курса стала всемирно известная книга *Функциональный анализ* написанная совместно с одним из главных учеников Л.В. – Глебом Павловичем Акиловым (1921–1986), книга выдержала 4 русских издания и переведена на несколько языков. Л.В. может бесспорно считаться учителем всех ленинградских математиков в области функционального анализа и его приложений, учившихся и работавших в 30–60-х гг.

Педагогическая деятельность Л.В. была обширной, он преподавал не только в университете, но и во многих ленинградских институтах, и в частности, в Высшем Военно-Инженерно-Технического училище (ВВИТУ) с момента его образования в 1939 году. В начале войны Л.В. был призван на флот (сначала был рядовым и вскоре стал сразу майором) и продолжал преподавать в училище. В Ленинграде Л.В. провел самую страшную блокадную зиму 41-42г. и был эвакуирован с семьей вместе с училищем в начале 42г.

В 1948 г. Совет Министров СССР особо секретным постановлением 1990–774сс/оп решил “в двухнедельный срок организовать в Ленинградском филиале Математического института АН СССР расчетную группу в количестве до 15 чел., возложив руководство этой группой на проф. Канторовича”. Так Л.В. вошел в число деятельных участников советского атомного проекта. Известны исключительно высокие оценки его деятельности в этой сфере. Более ранний (1943 г.) контакт с московской группой Л.А.Люстерника, занимавшейся первыми вычислительными машинами послужил началом интереса Л.В. к вычислительной технике и машинному программированию, и в этой области ему принадлежат важные идеи, патенты, и создание направления исследований, продолженных его учениками. Усилиями Л.В. была образована соответствующая вычислительная специальность на мат-мехе ЛГУ и организована лаборатория в Петербургском отделения Математического института им. В.А.Стеклова.

Главным содержанием брошюры 1939 г. было применение открытого автором метода разрешающих множителей, который фактически был одним из вариантов того, что позже было названо симплекс-методом.

Поразительно, как быстро Л.В. подобрал целую серию не очень похожих друг на друга задач экономического происхождения, укладывающихся в общую схему линейного программирования. Среди них наиболее интересной и глубокой оказалась транспортная задача, которой была посвящена классическая заметка в ДАН, вышедшая только в 1942 году, но написанная ранее; в ней была определена *метрика Канторовича* - фундаментальное понятие, неоднократно переоткрывавшееся позже, и ставшее основой популярной в новейшее время области математики, называемой *теорией оптимального переноса* ("optimal transportation") или проблемой Монжа–Канторовича. [1] В той же работе был дан вариант метода разрешающих множителей для транспортной задачи — метод потенциалов, приведший в дальнейшем к понятию нормы Канторовича–Рубинштейна, к липшицевой теории метрик и различным обобщениями.

Термин "линейное программирование" предложен позднее в 1951 г. американским экономистом Т. Купмансом. В США линейное программирование возникло только в 1947 г. в работах Джорджа Данцига сначала как сугубо вычислительный метод. По понятным причинам брошюра Л.В. и последующие его работы в этом направлении стали известны на Западе много позже, но в конце концов его бесспорный приоритет был безоговорочно признан всеми, и в этом была немалая заслуга Т.Купманса. Линейное программирование как техника максимизации линейного функционала на множестве положительных решений системы линейных неравенств с чисто математической точки зрения есть просто приложение теории двойственности в линейной алгебре и теории линейных неравенств. С геометрической точки зрения это теория выпуклых многогранников. Но это не сразу было осознано, о чем откровенно пишет в своих воспоминаниях Дж.Данциг. Для Л.В. открытие этих методов было непосредственным следствием глубокого понимания связи этих вопросов, включая и бесконечномерные задачи, с функциональным анализом. Исследования Л.В, в области линейного программирования стоят в одном ряду с работами Джона фон Неймана по теории теории игр как аппарату изучения экономического поведения. Эти исследования обоих классиков функционального анализа занимают исключительное место в науке. Синтез математики и экономики был поворотным моментом в экономической науке и помогал преодолению принципиальных различий между точным и гуманитарным стилями мышления. Это была иллюстрация того, что современная математика предоставляет самые широкие возможности для экономического анализа практических проблем. Л.В. (как очень немногие экономисты) сумел увидеть серьезные экономические следствия, вытекающие из математической постановки вопроса и трактовки двойственных

[1] 4–7 июня 2012 г. в С.Петербурге в институте Эйлера пройдет конференция, посвященная 100-летю Л.В.Канторовича "Monge-Kantorovich Optimal transportation problem" (см. http://www.mccme.ru/ ansobol/otarie/MK2012conf.html)

переменных(“разрешающих множителей”) как “объективно обусловленных оценок” (более поздний термин), т.е. цен ресурсов.

В 1940-е годы на поверхности научного информационного потока экономические работы Канторовича практически не публиковались. Однако в его творчестве экономическая проблематика выступила на первый план. Уже в военные годы он завершил работу над первым вариантом книги *Экономический расчет наилучшего использования ресурсов*, Эта работа опережала время, но кроме того, что возможно, не было в должной мере осознано Л.В., не соответствовала догматам господствующей в СССР официальной политической экономии. Обсуждение книги в высоких инстанциях свелось к обвинениям в ревизии марксизма и в “протаскивании” буржуазных экономических теорий, это чуть не привело Л.В. к остракизму. Только много лет позже стали известны материалы о том, как серьезны были обвинения и угрозы высоких научных и идеологических чиновников. Постоянно Л.В. должен был оправдываться в том, что он не ревизует марксизм, а просто развивает экономическую теорию.

Публикация книги, написанной в начале 40-х гг. стала возможной после долгих трудов и острых дискуссий, лишь в 1959 г, когда атмосфера в стране сменилась. Пионерские идеи Канторовича были легализованы и начали, правда, лишь отчасти использоваться в экономической практике, и вопреки все еще сильному обскурантистскому сопротивлению официоза. Можно только догадываться сколько потеряла наука и экономическая практика от такой такой “марксистско-ленинской” в понимании официальных экономистов трактовки труда Л.В. Уже даже в относительно либеральные 60-е годы Л.В. безуспешно пытались заставить публично “ответить” на вполне компетентную статью американского экономиста Р.Кемпбела “Маркс, Канторович, Новожилов: стоимость против реальности” (1961 г.), в которой давалась безотрадная картина состояния советской официальной экономической науки, пытающейся что-то противопоставить глубоким исследованиям Л.В. и др.

Негласный запрет на эти исследования и даже на обсуждения этих тем на математических семинарах продолжался до середины 50-х гг. При этом он касался и экономической, и отчасти, даже математической стороны дела. Тем не менее, исключительная активность Л.В. в послевоенные годы во многих других направлениях, сочеталась с прикладными экономическими работами, к которым он привлек В. А. Залгаллера (оптимальный раскрой материалов) М. К. Гавурина (транспортная задача) Г.Ш.Рубинштейн (метод разрешающих множителей, норма Канторовича-Рубинштейна) и т.п. Говоря о первом поколении помощников Л.В. в этих вопросах следует упомянуть здесь также погибшего на фронте аспиранта Л.В. А.И.Юдина.

Начиная с 1957 года Л.В. возобновил занятия математической экономикой и начал широкую программу популяризации своих идей. Это был долгий трудный путь с успехами. чередующимися с неудачами. В

1958–59 учебном году по его инициативе в Ленинграде на экономическом факультете ЛГУ был организован прием на новую специализацию “математическая экономика”, а в 1959–60 г был создан знаменитый “6-й курс” для окончивших этот или экономические факультеты других городов. Там, в частности, учились математической экономике будущие ведущие экономисты страны. Этот начинание стало прообразом математико-экономических специализаций многих университетов страны. Несколько позже на мат-мехе ЛГУ была организована специализация, а потом и кафедра, готовившая математиков по этой и смежным специальностям.

В 1957 г. Л.И, пригласили на работу во вновь создаваемое Сибирское отделение Академии наук. Вскоре его избрали членом-корреспондентом Академии наук СССР по Отделению экономики и Л.В. переехал жить в Академгородок под Новосибирском. Основные публикации Л.В. сибирского периода относятся к экономике. В 1964 г. Л.В. избран действительным членом АН СССР по Отделению математики, в 1965 г. удостоен Ленинской премии совместно с В.С.Немчиновым и В.В.Новожиловым. В начале 1970 гг. Л.В. переехал из Новосибирска в Москву, где продолжил занятия экономическим анализом.

В 1975 г. Л.В. и Тьялинг Купманс получили Нобелевскую премию по экономическим наукам с формулировкой “за их вклад в теорию оптимального распределения ресурсов”.

Следует сказать, что хотя в Москву Л.В. попал с согласия власть предержащих, от математической жизни столицы он был административно отделен внутренним кодексом некоторых академических функционеров. Он не работал ни в МИАН’е, ни в МГУ, не был членом математических ученых советов по защитам диссертаций, даже, как ни странно, не входил в редколлегии центральных математических журналов. В то же время экономические идеи Л.В. в разные годы, включая и ранние, активно поддерживали не только немногочисленные передовые экономисты, но и ведущие математики и другие ученые страны — А. Д. Александров, В. А. Амбарцумян, А.И. Берг, С.В. Валландер, И.М.Гельфанд, М.В.Келдыш, А. Н. Колмогоров, Ю.В. Линник, А.А. Ляпунов, М. А. Лаврентьев, А.А. Марков, В. И. Смирнов, С. Л. Соболев, Д. К. Фаддеев, С.А.Христианович, Н.А. Шанин и др.

К Л.В. постоянно тянулась математическая и экономическая молодежь, лидеры новых поколений.

В 70-х гг. начинается серия зарубежных поездок Л.В., которая показывает, как огромен его авторитет в научных кругах мира. Авторитет Л.В. среди нового поколения экономистов страны был непререкаем, и ему принадлежало большое количество конкретных рекомендаций и оценок тех или иных экономических предложений. Однако, его опыт, интуиция, основательность и глубина проникновения в дело, не были

востребованы в должной мере советским бюрократическим истеблишментом, к его мнению не прислушивались, в чем, впрочем, ничего удивительного нет. Но еще хуже то, что Л.В. не дожил нескольких лет до времени, когда его голос и мнения были бы абсолютно необходимы в хаосе неизбежных перемен, и, как можно надеяться, его рекомендации были бы востребованы и спасли бы от многих совершенных ошибок. К сожалению роль Л.В. и сейчас не достаточно осознана и оценена.

7 апреля 1986 г. Л.В. скончался после продолжительной болезни и был похоронен на Новодевичьем кладбище в Москве.

Главный итог великого математико-экономического эксперимента Л.В.Канторовича в том, что он подошел к экономическим проблемам вооруженный самыми современными для своих лет математическими средствами и мощной научной интуицией, и творчески применил их. Это не значит, что все его выводы буквально будут работать и сегодня, но это, безусловно, значит, что талант математика может в корне преобразовать экономическую мысль и практику.

## СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ Л. В. КАНТОРОВИЧА ПУБЛИКОВАЛСЯ:

Математика в СССР за сорок лет. 1917–1957 (М.: Физматгиз, 1959.— Т. 2.—С. 547-548), а также: Математика в СССР, 1958–1967 (М.: Наука, 1970.—Т. 2 —С. 1052–1053), УМН (1979)–Т. 34, вып. 4(208).—С. 225–226; 1989.—Т. 44, вып. 4(268).—С. 249; 1999.—Т. 54, вып. 4(328).—С. 189–190.

Здесь приводятся несколько названий издания трудов Л.В.Канторовича последних лет и литература о нем.

## References


[1] Фундаментальная идея оптимизации.Достижения фундаментальных наук — производству. — М., 1987. — С. 18–30. — (Ускорение науч.-техн. прогресса).

[2] Мой путь в науке: (Предполагавшийся докл. в Моск. мат. о-ве)// Успехи мат. наук. — 1987. — Т. 42, вып. 2. — С. 183–213.

[3] My journey in science (proposed report to the Moscow Mathematical Society) // Russian Math. Surveys. — 1987. — Vol. 42, No. 2. — P. 233–270.

[4] My journey in science// Functional Analysis, Optimization, and Mathematical Economics.—New York; Oxford: Oxford University Press, 1990.—P. 8–45.

[5] Леонид Витальевич Канторович: человек и ученый. Новосибирск т.1, 2002, т,2 2004.

[6] Математические методы организации и планирования производства. 1939. Ротапринтное издание с комментариями и предисл. В.Л.Канторовича. Изд. СПГУ 2012.

[7] Проблемы эффективного использования и развития транспорта. — М.: Наука, 1989. — 304 с.

[8] О состоянии и задачах экономической науки// Экономика и мат. методы. — 1990.—Т. 26, № 1.—С. 5–14.

[9] Campbell, Robert W. Marks, Kantorovich and Novozhilov. УStoimostФ versus Reality // Slavic Revue, Okt.— 1961,— 20 (3), pp. 402 Ц 418.

[10] Selected Works. Part 1: Descriptive Theory of Sets and Functions. Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces// Ed. by S. S. Kutateladze. —London: Gordon and Breach, 1996.—374 p.

[11] Selected Works. Part 2: Applied Functional Analysis. Approximation Methods and Computers// Ed. by S. S. Kutateladze and J. V. Romanovsky.—Amsterdam: Gordon and Breach, 1996.—394 p.

[12] Electronic computing machines// Mathematics: Its Content, Methods and Meaning / Ed. by A. D. Alexandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent′ev. —Reprint of the 2nd 1969 ed.—Mineola; New York: Dover Publications, 1999.—XVIII, 372 p. — With Lebedev S. A.

[13] Принципы методики определения целесообразной степени рассредоточения и сравнительной оценки различных мер повышения живучести// Сиб. журн. индустр. мат.—2001.—Т. 4, № 2 (8).— С. 29–58.

[14] Функциональный анализ.—4-е изд., испр.—СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004.—816 с. —Соавт.: Акилов Г. П.

[15] О перемещении масс// Зап. научн. сем. ПОМИ.—2004.— Т. 312.— С. 11–14.

[16] Об одной проблеме Монжа// Зап. научн. сем. ПОМИ.—2004.—Т. 312.—С. 15–16.

[17] On a problem of Monge// J. Math. Sci., New York.—2006.— Vol. 133, No. 4.— P. 1383.

[18] Honorary doctorate lecture (Festvortrag zur Verleihung der Ehrendoktorwurde.)// Lassmann W. (ed.) et al., Optimieren und entscheiden in der Wirtschaft. Gewidmet dem

Nobelpreistrager Leonid W. Kantorowitsch. Mit seiner Nobelpreisrede vom Dezember 1975. — Leipzig: Edition am Gutenbergplatz Leipzig (EAGLE). EAGLE 13, 2004.— P. 27–34.

[19] Mathematics in economics: achievement, difficulties, perspectives. Nobel prize lecture to the memory of Alfred Nobel, December 11, 1975 [Reprinted from Nobel lectures, Economic sciences 1969–1980]// Lassmann W. (ed.) et al., Optimieren und entscheiden in der Wirtschaft. Gewidmet dem Nobelpreistrager Leonid W. Kantorowitsch. Mit seiner Nobelpreisrede vom Dezember 1975.— Leipzig: Edition am Gutenbergplatz Leipzig (EAGLE). EAGLE 13, 2004.—P. 113–124.

[20] Zur allgemeinen Theorie der halbgeordneten Räume (On the general theory of semiordered spaces)// J. Approx. Theory.— 2009.— Vol. 156, No. 1. — P. 28–51.—With Lorentz G.— Публикация рукописи 1939 года.

[21] Избранные сочинения. Математико-экономические работы.—Новосибирск: Наука, 2011.—760 с.